



UNIVERSITAS INDONESIA

**DISTRIBUSI MATERI PLASMA  
DALAM BINTANG KOMPAK**

CHRISNA SETYO NUGROHO

0606068133

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN FISIKA

DEPOK

JUNI 2010



UNIVERSITAS INDONESIA

# DISTRIBUSI MATERI PLASMA DALAM BINTANG KOMPAK

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar Sarjana Sains

CHRISNA SETYO NUGROHO

0606068133

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI FISIKA

DEPOK

JUNI 2010

## Halaman Pernyataan Orisinalitas

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Chrisna Setyo Nugroho

NPM : 0606068133

Tanda Tangan :

Tanggal : 16 Juni 2010

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Chrisna Setyo Nugroho  
NPM : 0606068133  
Program Studi : Fisika  
Judul Skripsi : Distribusi Materi Plasma dalam Bintang Kompak

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. L. T. Handoko ( )

Pembimbing II : Dr. Terry Mart ( )

Penguji I : Dr. Agus Salam ( )

Penguji II : Dr. Anto Sulaksono ( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 16 Juni 2010

# Kata Pengantar

Pada eksperimen tumbukkan antar ion-ion berat ( $N$  mendekati 200) yang terjadi pada level relativistik, ditemukan adanya fase quark-gluon (fase transisi) yang bercampur dan membentuk suatu keadaan (state) baru yang metastabil. Fase ini sering disebut sebagai fase plasma quark-gluon (Quark Gluon Plasma atau QGP). Pada fase ini, nukleon-nukleon (proton dan netron) terurai menjadi quark-quark penyusunnya yang bercampur dengan gluon dan memiliki sifat yang berbeda dengan sifat awal dari hadron-hadron penyusunnya .

Fase QGP ini juga mungkin ditemukan pada bintang kompak seperti pada bintang netron yang memiliki massa lebih dari delapan kali massa matahari [1]. Pada proses pembentukan bintang, terjadi beberapa kali proses fusi termonuklir yang terjadi pada temperatur yang sangat tinggi dan densitas yang sangat tinggi, yang dapat menyebabkan suhu dalam inti bintang mencapai orde puluhan Mev. Dengan adanya temperatur dan densitas yang sangat tinggi dalam inti bintang inilah yang memungkinkan terbentuknya fase QGP dalam inti bintang. Fase QGP yang terjadi tersebut mengalami pendinginan secara bertahap pada bagian luarnya (terhadronisasi) dan membentuk lapisan hadron pada kulit bintang dengan interior berisi fase QGP atau yang sering disebut sebagai *hybrid star*. Distribusi materi QGP pada bintang tersebut dapat dihitung dengan menggunakan Lagrangian dari sistem QGP tersebut. Skripsi ini mengkaji perhitungan secara teoritis mengenai distribusi QGP pada bintang kompak yang tersusun atas fluida QCD dengan menggunakan persamaan medan Einstein.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung, antara lain:

- Dr. L.T. Handoko selaku pembimbing I dan Dr. Terry Mart selaku pembimbing II yang telah membimbing penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini. Serta atas diskusi dan masukan-masukan yang diberikan.
- Dr. Agus Salam dan Dr. Anto Sulaksono selaku penguji I dan II atas diskusi dalam penyelesaian tugas akhir ini. Serta ilmu-ilmu yang telah diberikan selama kuliah di Fisika UI.
- Orang tua yang selalu memberikan dukungan sepenuh hati dan perjuangan serta doa kepada penulis. Semoga Allah memberi ganti yang lebih manfaat dan barokah. Amiin. Serta adik-adik penulis yang juga memberikan dukungan kepada penulis.
- Rekan-rekan di Laboratorium Fisika Nuklir dan Partikel: Pak Ayung, Pak Sulaiman, Mr. Khalid N P, Mr. Andy Octavian L, Mr. Januar, Ms. Fathia Syahroni, Ms. Paralel Universe 2009 dan penghuni lab teori lainnya. Kusus untuk 3 Mr. yang terakhir, penulis mengucapkan terima kasih atas inspirasi-inspirasi dalam mengarang cerita yang belum pernah ada sebelumnya ( edisi pertama tentang Ms. Paralel Universe, Tragedi Monas dan XRD, edisi selanjutnya "coming soon").
- Teman-teman fisika angkatan 2006. Prof.Dr. M. Khari S, yang setia menjadi partner penulis sejak tahun 1928, eh salah tahun 2006. Mr. Uzunaki Hendro yang selalu mensuplai film anime kepada penulis. Rhyan Edwin yang selalu mendengarkan curhat dari penulis, he3x. Bakir "the most consistent person" we had ever seen, Ahmad Fauzi "Rhoma" yang menguasai daerah Duren Sawit, anak-anak geng futsal brumbun yang selalu mengajak penulis untuk refreshing melepas kepenatan. Juga kepada "The Master of Instrumentalist", Mr. Dwi Handoko yang membantu penulis dalam merangkai rangkaian elektronika yang sangat rumit dan juga Alm. Kholik yang telah mengajari penulis memukul kok dengan teknik "backhand" yang belum juga dapat dikuasai oleh penulis.
- Teman-teman fisika 2008, terutama yang ikut praktikum elek 2 bersama penulis, Ami, Siska, the Jak Pasar Minggu (Siti Maryam dan Nela). Khusus

kepada the Jak Pasar Minggu, penulis mengucapkan terima kasih karena sudah menemani penulis "ngelawak" selama 9 kali pertemuan pada praktikum elek 2 dan juga memberi warna tersendiri dalam hidup penulis di tengah-tengah kejamnya fisika partikel, hahaha. Kepada Herlina dan Ferry yang juga memberi semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

- Anak-anak kosan, Mr. Aziz, Mr. Adri, Mr. Faizal dan Mr. Wahyu yang selalu memberikan keceriaan dan semangat kepada penulis. Bapak dan Ibu kosan, atas segala nasihat, dukungan dan doa yang diberikan kepada penulis selama penulis kuliah di fisika UI. Tak lupa juga teman-teman Josol UI, Fauzan, Doni, Dani, Toni, Rono dll yang selalu mengajak penulis tetap berada di jalan yang benar. Radio Samhan AM 630 yang murah hati, murah senyum, rendah hati dan tidak sombong atas dakwah-dakwah islam yang sangat Cezz Pleng yang dibawakan oleh Bapak Ustadz. H. Abdul Aziz, H. Dave Ariant Yusuf dan H. Kusno yang selalu membimbing penulis untuk tetap memegang teguh prinsip-prinsip dan pedoman hidup yang benar.
- Serta rasa syukur yang tak terbatas kepada Alloh SWT atas segala macam kenikmatan yang diberikan selama hidup dan juga kepada Nabi besar Muhammad SAW yang membawa ajaran yang "haq" bagi seluruh alam. Dan juga the inspired historical moment of the world, The great : Muhammad SAW, Nuh, Ayyub, Yunus, Ibrohim, Yusuf, Ishaq, Ismail, Daud, Sulaiman, Luth, Soleh, Musa, Harun, Khidir, Zakaria, Yahya, Isa, Ashabul Kahfi, Maryam, Yussak bin Nun, Hizkil, Asiyah, Dhilkornain (Alexander the Great), yang telah memberikan semangat dan pencerahan kepada penulis.

Hasil karya ini tidaklah sempurna. Penulis menerima saran dan kritikan yang membangun dari para pembaca

Depok, Juni 2010

Chrisna Setyo Nugroho

# Halaman Pernyataan Persetujuan Publikasi Tugas Akhir untuk Kepentingan Akademis

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan  
dibawah ini:

Nama : Chrisna Setyo Nugroho.  
NPM : 0606068133  
Program Studi : S1 Fisika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

## **DISTRIBUSI MATERI PLASMA DALAM BINTANG KOMPAK**

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/ formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/ pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 16 Juni 2010

yang menyatakan

(Chrisna Setyo Nugroho)



Nama : Chrisna Setyo Nugroho.  
Program Studi : S1 Fisika  
Judul Skripsi : Distribusi Materi Plasma dalam Bintang Kompak

## Abstrak

Dikaji perhitungan distribusi materi fluida QCD yang terdapat pada bintang kompak. Pengkajian dilakukan berdasarkan teori Penggabungan Magnetofluida yang berlaku untuk medan fluida QCD yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik. Dengan menerapkan persamaan medan Einstein pada geometri Schwarzschild serta kondisi Hidrostatik pada interior bintang, fungsi distribusi dari fluida QCD dapat ditentukan.

Kata kunci: fluida QCD, keseimbangan hidrostatik.

x+28 hlm.; lamp.

Daftar Acuan: 13 (1939-2009)

Name : Chrisna Setyo Nugroho  
Study Program : Bachelor Degree of Physics  
Title :The Distribution of Plasma Matter inside the Compact Star

## Abstract

The calculation of distribution function for QCD fluid inside the compact star is discussed. The calculation based on the Magnetofluid Unification theory that applied to the interaction between QCD fluid field with the electromagnetic field. By employing the Einstein field equation on the Schwarzschild geometry and imposing the hydrostatic equilibrium within star, the distribution function of fluid QCD can be obtained.

Keywords: QCD fluid, hydrostatic equilibrium.

x+28 pp.; appendices.

References: 13 (1939-2009)

# Daftar Isi

Halaman Pernyataan Orisinalitas	i
Kata Pengantar	iii
Halaman Pernyataan Persetujuan Publikasi	vi
Abstrak	vii
Daftar Isi	ix
<b>1 Pendahuluan</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Perumusan masalah . . . . .	3
1.3 Metode Penelitian . . . . .	3
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
<b>2 Lagrangian Fluida QCD dan Geometri Schwarchild</b>	<b>4</b>
2.1 Lagrangian Fluida QCD . . . . .	4
2.1.1 Formulasi Lagrangian . . . . .	5
2.1.2 Keinvarianan <i>Gauge</i> . . . . .	6
2.1.3 Konstruksi Lagrangian pada Medan <i>gauge</i> boson yang Berinteraksi dengan Medan <i>gauge</i> Non-Abelian Lainnya . . . . .	6
2.2 Geometri Schwarzchild . . . . .	8
2.2.1 Metrik Statik yang Isotropik . . . . .	9
2.2.2 Solusi Persamaan Medan Einstein pada Empty Space . . . . .	11
2.3 Persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	12
2.3.1 Metrik pada Interior Bintang . . . . .	13

2.3.2	Persamaan Keadaan pada Interior Bintang . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Persamaan Medan Einstein untuk Fluida QCD</b>	<b>16</b>
3.1	Tensor Energi-Momentum Fluida QCD pada Bintang Statik . . .	17
3.2	Komponen-Komponen <i>Ricci Tensor</i> . . . . .	18
3.3	<i>Hydrostatic Equilibrium</i> pada Fluida QCD . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Hasil dan Pembahasan</b>	<b>23</b>
4.1	Persamaan Medan Einstein pada <i>Hydrostatic Equilibrium</i> Fluida QCD . . . . .	23
4.2	Fungsi Distribusi Medan Fluida QCD Pada Bintang Kompak . . .	26
<b>5</b>	<b>Kesimpulan dan Saran</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Notasi</b>	<b>30</b>
	<b>Daftar Acuan</b>	<b>31</b>

# Bab 1

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Fenomena plasma Quark-Gluon (QGP) adalah fenomena yang relatif baru di dunia fisika nuklir dan partikel. Fenomena ini merupakan suatu keadaan transisi dari hadron state awal menuju ke hadron state berikutnya akibat adanya gangguan pada sistem hadron awal. Dalam QGP quark-quark penyusun hadron dan juga gluon-gluon dari sistem hadron bercampur dan membentuk suatu state baru yang memiliki sifat yang berbeda dari sifat hadron-hadron penyusunnya. Fenomena yang terjadi pada level energi relativistik ini telah mendorong munculnya berbagai macam model teori yang bertujuan untuk menjelaskan fenomena tersebut dan juga perhitungan-perhitungan yang menyangkut dengan fenomena tersebut, seperti perhitungan momentum transversal pada QGP [2]. Teori yang umum digunakan dalam fisika nuklir dan partikel adalah teori fluida relativistik Landau [3], teori partikel dengan menggunakan analisis kisi (lattice) yang bersifat fenomenologis dan teori penggabungan magnetofluida (Magnetofluid Unification) [4].

Dalam teori fluida relativistik, sistem QGP diasumsikan memiliki sifat seperti fluida yang bersifat kolektif. Dari sudut pandang teori ini, QGP memiliki karakter layaknya fluida yang memiliki viskositas tertentu dan bergerak dengan kecepatan relativistik. Persamaan gerak yang digunakan dalam teori ini adalah persamaan fluida relativistik. Berbeda dengan teori fluida relativistik, teori kisi mengkaji QGP menggunakan analisis kisi dalam perhitungan-perhitungannya. Perhitungan yang dilakukan pada teori ini juga menyangkut perhitungan dera-

jat kebebasan efektif yang dimiliki oleh QGP [5]. Pada analisis kisi, data-data eksperimen yang diperoleh dari eksperimen tumbukkan ion-ion berat dihitung dengan menggunakan teori kisi lalu dilakukan fitting terhadap data-data tersebut, dan dilakukan parameterisasi terhadap data-data yang bersangkutan serta mencari hubungan antar parameter-parameter yang terkait.

Berbeda dengan teori-teori yang telah dijelaskan sebelumnya, teori Penggabungan Magnetofluida menggunakan pendekatan Lagrangian dalam melakukan analisis QGP yang berbasis pada teori *gauge*. Dalam teori ini, QGP dimodelkan sebagai interaksi antar medan-medan *gauge*, yakni medan SU (3) dengan medan U(1) yang merepresentasikan interaksi antara fluida QCD (*Quantum Chromodynamic*) yang berisi partikel-partikel quark dan anti-quark dengan medan elektromagnetik. Dengan menggunakan model interaksi tersebut, diperoleh Lagrangian dari sistem yang memenuhi sifat keinvarianan terhadap *gauge* yang bersangkutan. Lagrangian yang diperoleh dari sistem tersebut dapat digunakan untuk menghitung persamaan-persamaan yang terkait dengan QGP, seperti persamaan gerak, persamaan keadaan, distribusi plasma pada bintang kompak dan masih banyak lagi.

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, Lagrangian yang diperoleh dari teori Penggabungan Magnetofluida dapat digunakan untuk menghitung distribusi plasma quark-gluon yang terdapat pada bintang kompak, seperti pada bintang neutron yang berisi QGP (*hybrid star*). Pada *hybrid star* yang berisi QGP, Lagrangian yang digunakan adalah Lagrangian klasik yang diperoleh dari transformasi *gauge*, hal ini sangat relevan mengingat fenomena QGP terjadi pada temperatur yang sangat tinggi sehingga efek quantum dapat diabaikan. Dalam pembahasan QGP pada bintang kompak, QGP dipandang sebagai lautan gluon (bukan quark) yang dikotori oleh quark, sehingga kontribusi yang relevan pada Lagrangian adalah kontribusi yang berasal dari gluon saja.

Dalam skripsi ini, dikaji perhitungan distribusi plasma dalam bintang kompak dengan menggunakan Lagrangian yang diperoleh dari teori Penggabungan Magnetofluida. Perhitungan ini melibatkan geometri ruang-waktu Schwarchild untuk bintang statik yang memiliki simetri bola. Motivasi utama studi ini adalah untuk mengetahui distribusi plasma quark-gluon dalam bintang kompak seperti pada

bintang netron. Bintang kompak yang dibahas dalam skripsi ini adalah bintang plasma quark-gluon yang dibungkus oleh lapisan netron.

## **1.2 Perumusan masalah**

Pendekatan Lagrangian fluida QCD dipelajari untuk mendapatkan Lagrangian dari QGP. Skripsi ini hanya menghitung distribusi plasma quark-gluon pada bintang kompak yang diperoleh berdasarkan Lagrangian tersebut dengan menggunakan persamaan medan Einstein pada geometri Schwarchild.

## **1.3 Metode Penelitian**

Penelitian ini bersifat teoritik. Distribusi plasma dalam bintang kompak dihitung secara analitik dengan menggunakan model fluida QCD yang diterapkan pada geometri Schwarchild . Perhitungan-perhitungan yang digunakan bersumber dari berbagai literatur yang diacu oleh penulis.

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Penelitian ini bertujuan untuk menghitung distribusi plasma pada bintang kompak dengan menggunakan model fluida QCD pada geometri Schwarchild.

## Bab 2

# Lagrangian Fluida QCD dan Geometri Schwarchild

Untuk melakukan perhitungan distribusi plasma pada bintang kompak, Lagrangian dari sistem plasma tersebut haruslah terlebih dahulu diketahui. Lagrangian yang telah diperoleh tersebut kemudian diaplikasikan ke dalam persamaan medan Einstein pada geometri yang bersangkutan. Pada bab ini, akan diberikan penjelasan singkat mengenai proses pengkonstruksian Lagrangian pada medan *gauge* boson pada fluida yang berinteraksi dengan medan *gauge* lainnya, serta penjelasan singkat mengenai geometri Schwarchild pada teori relativitas umum yang akan digunakan sebagai geometri untuk objek yang dikaji. Selain itu, persamaan keadaan pada bintang kompak yang berisi fluida sempurna juga akan dibahas secara singkat.

### 2.1 Lagrangian Fluida QCD

Formulasi Lagrangian memainkan peran utama pada teori medan kuantum. Hampir semua perhitungan yang digunakan dalam mengkaji fenomena-fenomena kuantum yang terjadi pada level relativistik menggunakan formulasi ini. Berikut akan dijelaskan pengkonstruksian Lagrangian secara umum pada sistem partikel yang saling berinteraksi pada level relativistik.



### 2.1.1 Formulasi Lagrangian

Jika medan  $\phi(x)$  mempunyai energi kinetik  $T$  dan potensial  $V$ , maka Lagrangian dari medan tersebut ialah

$$L = T - V. \quad (2.1)$$

Pada kasus kontinyu akan lebih menguntungkan jika Lagrangian tersebut dinyatakan dalam densitas Lagrangian  $\mathcal{L}$

$$L = T - V = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Jika Lagrangian tersebut diintegrasikan terhadap waktu, akan diperoleh suatu kuantitas baru yang disebut aksi  $S$

$$S = \int dt L. \quad (2.3)$$

Berdasarkan prinsip kalkulus variasi, partikel akan selalu mengambil lintasan dengan aksi terkecil [6] (*prinsip least action*)  $T$ . Untuk mengetahui lintasan dari partikel, maka variasi dari aksi harus diminimalkan. Hal ini dilakukan dengan menggambarkan aksi sebagai suku minimum dan sebuah suku variasi.

$$S \longrightarrow S + \delta S. \quad (2.4)$$

dengan aksi minimum memenuhi syarat

$$\delta S = 0. \quad (2.5)$$

Pada teori medan kuantum, karena yang dipakai adalah densitas lagrangian, maka persamaan untuk aksi akan menjadi

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.6)$$

Dalam teori medan kuantum densitas Lagrangian  $\mathcal{L}$  sering disebut Lagrangian itu sendiri. Berikut merupakan contoh Lagrangian untuk partikel skalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.7)$$

Suku pertama merupakan suku energi kinetik (mengandung  $(\partial\phi)^2$ ) dan suku kedua merupakan suku massa (mengandung  $\phi^2$ ).

Dalam teori medan kuantum dipelajari bahwa setiap teori yang dibangun berdasarkan suatu simetri tertentu maka teori tersebut haruslah invarian terhadap transformasi *gauge* global dan lokal dari simetri yang dibangun [7]. Jika teori tersebut invarian maka besaran-besaran fisis yang dihasilkan, nilainya tidak bergantung pada kerangka acuan inersia dimana besaran tersebut diukur. Pernyataan di atas berimplikasi bahwa Lagrangian yang dibuat dalam suatu teori haruslah invarian terhadap simetri tertentu.

### 2.1.2 Keinvarianan *Gauge*

Transformasi *gauge* global berbentuk

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi, \quad (2.8)$$

dengan  $\theta$  adalah konstan.

Sedangkan transformasi *gauge* lokal non-Abelian secara umum berbentuk

$$\psi' \rightarrow e^{iT_a \theta^a(x)} \psi, \quad (2.9)$$

dengan  $\theta(x)$  merupakan fungsi ruang dan waktu dan  $T_a$  adalah generator yang terkait dengan Lie Grup pada transformasi *gauge* yang bersangkutan. Generator tersebut memenuhi relasi komutasi  $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$  dimana  $f^{abc}$  merupakan konstanta struktur yang bersifat antisimetrik. Untuk memenuhi prinsip keinvarianan *gauge*, suatu Lagrangian haruslah invarian terhadap transformasi *gauge* tersebut, sehingga besaran-besaran fisis yang terdapat pada Lagrangian tersebut nilainya tidak bergantung pada kerangka acuan inersia yang digunakan.

### 2.1.3 Konstruksi Lagrangian pada Medan *gauge* boson yang Berinteraksi dengan Medan *gauge* Non-Abelian Lainnya

Perhatikan Lagrangian berikut

$$\mathcal{L}_{matter} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \frac{1}{2} m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (2.10)$$

Lagrangian di atas merupakan Lagrangian pada persamaan Klein-Gordon untuk partikel berspin bulat (boson). Lagrangian di atas invarian terhadap transformasi

*gauge* global, namun tidak invarian terhadap transformasi *gauge*  $G(n)$  lokal non-Abelian  $K \equiv e^{[-iT_a\theta^a(x)]} \approx 1 - iT_a\theta^a(x)$ , dengan  $\theta^a(x) \ll 1$ .

Untuk membuat Lagrangian partikel boson tersebut invarian terhadap transformasi *gauge*  $K$ , maka perlu dilakukan penambahan medan *gauge*  $A_\mu$  yang bertransformasi terhadap  $K$  sebagai  $A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} \equiv A_\mu^a + (\frac{1}{g})(\partial_\mu\theta^a) + f^{abc}\theta^a A_\mu^c$ . Penambahan medan *gauge* baru ini menyebabkan terjadinya perubahan derivatif awal pada medan menjadi bentuk derivatif kovarian, yaitu  $D_\mu \equiv \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ , dengan  $g$  adalah "muatan" *gauge*. Penambahan medan *gauge* baru ini juga menyebabkan timbulnya suku kinetik dari medan *gauge* tersebut yaitu,  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ , dengan tensor  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ .

Selanjutnya, akan ditinjau kasus umum, yaitu bentuk Lagrangian dari medan fluida non-Abelian yang berinteraksi dengan medan *gauge* non-Abelian yang direpresentasikan oleh simetri  $G(n)_F \otimes G(n)_G$ . Bila  $U_\mu$  dan  $A_\mu$  adalah medan *gauge* boson untuk fluida dan medan *gauge* lain, maka dengan menggunakan prinsip transformasi *gauge*  $K$  di atas akan diperoleh derivatif kovarian dari Lagrangian tersebut adalah

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_F T_F^a U_\mu^a + ig_G T_G^a A_\mu^a, \quad (2.11)$$

dengan  $g_F$  adalah muatan fluida dan  $g_G$  adalah muatan *gauge*. Dengan memasukkan derivatif kovarian tersebut dan juga suku-suku kinetik dari medan-medan *gauge* yang bersangkutan, maka dapat diperoleh bentuk Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{matter} + \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{int} \quad (2.12)$$

dimana

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.13)$$

dan

$$\mathcal{L}_{int} = -g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} - g_G J_{G\mu}^a A^{a\mu} + \mathcal{L}_{int}^{boson} \quad (2.14)$$

dengan

$$\mathcal{L}_{int}^{boson} = g_F^2 (\Phi^\dagger T_F^a T_F^b \Phi) U_\mu^a U^{b\mu} + g_G^2 (\Phi^\dagger T_G^a T_G^b \Phi) A_\mu^a A^{b\mu} + g_F g_G [\Phi^\dagger (T_F^a T_G^b + T_G^b T_F^a) \Phi] U_\mu^a A^{b\mu} \quad (2.15)$$

di mana  $S_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu U_\nu^a - \partial_\nu U_\mu^a + g_F f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c$  adalah suku kinetik dari medan fluida. Lagrangian untuk fluida QCD yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik

dapat diperoleh dengan prinsip-prinsip transformasi *gauge* di atas, yaitu dengan menerapkan keinvarianan *gauge* terhadap simetri  $SU(3) \otimes U(1)$ . Sehingga dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}\gamma^\mu\partial_\mu Q - m_Q\bar{Q}Q - \frac{1}{4}S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} + q J_{G\mu} A^\mu \quad (2.16)$$

dengan  $J_{F\mu}^a = \bar{Q}T_F^a\gamma^\mu Q$  dan  $J_{G\mu}^a = \bar{Q}\gamma^\mu Q$ . Di sini  $Q$  merepresentasikan triplet quark (warna) dan  $T_F^a$  adalah matriks Gell-Mann. Lagrangian ini merepresentasikan fluida non-Abelian yang berisi gluon, quark dan anti-quark yang berada pada medan elektromagnetik. Lagrangian inilah yang akan digunakan untuk menghitung distribusi materi plasma dalam bintang kompak.

## 2.2 Geometri Schwarzschild

Sampai saat ini, telah diketahui bahwa terdapat empat macam interaksi fundamental yang bekerja di alam. Interaksi-interaksi tersebut ialah interaksi kuat, interaksi lemah, interaksi elektromagnetik dan interaksi gravitasi. Interaksi kuat, lemah dan elektromagnetik telah berhasil dirangkum dalam suatu teori yang disebut teori Model Standar [8,9,10], sementara interaksi gravitasi dideskripsikan dengan baik oleh teori gravitasi Einstein, atau yang lazim disebut dengan teori Relativitas Umum.

Teori Relativitas umum telah berhasil menjelaskan gerak benda-benda langit dan juga fenomena-fenomena kosmologi lainnya, seperti adanya Black Hole, Worm Hole dan juga pembelokkan cahaya oleh gravitasi yang belum pernah teramati sebelumnya. Fenomena-fenomena kosmologi tersebut dapat dijelaskan dengan sangat baik dan presisi dengan menggunakan teori gravitasi Einstein.

Berbeda dengan sudut pandang Newton, Einstein memandang bahwa gravitasi bukan disebabkan oleh adanya interaksi antar objek, melainkan karena adanya kelengkungan struktur ruang-waktu pada alam semesta. Kelengkungan itulah yang menyebabkan adanya gravitasi, sehingga fenomena gravitasi sangat berkaitan dengan geometri dari ruang-waktu tersebut. Jika ada suatu benda bermassa, maka ruang-waktu yang berada di sekitar benda tersebut akan melengkung dan kelengkungan dari ruang waktu tersebut bergantung dari materi atau objek fisik yang dimiliki oleh benda tersebut. Atau dapat dikatakan bahwa, gravitasi

berkaitan sangat erat dengan geometri ruang-waktu di sekitar objek tersebut, yang ditentukan oleh parameter-parameter fisis di dalam objek tersebut (*geometry is merged with physics*).

Geometri ruang-waktu yang terdapat pada tiap titik koordinat (manifold) terhadap titik lainnya pada koordinat tersebut tentulah berbeda. Hal ini terjadi karena objek-objek yang terdapat pada koordinat tersebut secara umum tidak sama, sehingga hal tersebut akan berpengaruh terhadap struktur ruang waktu yang terdapat disekitar objek tersebut. Struktur ruang-waktu di sekitar objek yang memiliki bentuk elips akan berbeda dengan objek yang memiliki simetri bola. Struktur geometri ruang-waktu di sekitar suatu benda direpresentasikan oleh fungsi metrik. Fungsi metrik ini dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan medan Einstein yang berkaitan dengan objek tersebut. Pada subbab ini akan dijelaskan geometri ruang-waktu di sekitar suatu objek (objek yang tidak berotasi) yang memiliki simetri bola atau yang lazim disebut sebagai geometri Schwarzschild dan juga fungsi metrik di luar objek yang memiliki simetri tersebut. Geometri Schwarzschild ini akan digunakan untuk menentukan struktur ruang-waktu yang terdapat pada bintang yang memiliki simetri bola.

### 2.2.1 Metrik Statik yang Isotropik

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, bahwa geometri ruang-waktu yang terdapat di sekitar objek ditentukan oleh fungsi metrik yang berkaitan dengan objek tersebut. Untuk objek yang memiliki simetri bola, Schwarzschild menyatakan bahwa, metrik  $g_{\mu\nu}$  merepresentasikan struktur ruang-waktu statik yang simetrik pada ruang kosong (*empty space*) di luar objek masif yang memiliki simetri bola [11]. Ruang waktu statik adalah ruang waktu yang memiliki sifat-sifat:(i)semua komponen dari metrik tersebut tidak bergantung waktu; dan (ii) elemen panjang  $ds^2$  invarian terhadap transformasi  $t \rightarrow -t$ . Pengkonstruksian metrik tersebut dapat dilakukan dengan meninjau elemen panjang

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.17)$$

yang mana dari persamaan tersebut akan dicari koordinat-koordinat  $x^\mu$  dimana metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bergantung waktu dan elemen panjang  $ds^2$  invarian terhadap transformasi  $t \rightarrow -t$ , sehingga metrik tersebut statik. Besaran-besaran yang invarian terhadap rotasi koordinat ruang  $x^i$  adalah  $\bar{x}.\bar{x}$ ,  $d\bar{x}.d\bar{x}$  dan  $\bar{x}.d\bar{x}$ . Sehingga bentuk umum dari metrik yang isotropik adalah

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dt\bar{x}.d\bar{x} - C(t, r)(\bar{x}.d\bar{x})^2 - D(t, r)(d\bar{x}.d\bar{x})^2 \quad (2.18)$$

dengan mentransformasi koordinat ke dalam koordinat bola, maka diperoleh

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)r dt dr - C(t, r)r^2 dr^2 - D(t, r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.19)$$

dengan menyerap semua factor r ke dalam fungsi-fungsi A,B,C,D, dan mendefinisikan  $\bar{r}^2 = D(t, r)$ , maka diperoleh

$$ds^2 = A(t, \bar{r})dt^2 - B(t, \bar{r})dt d\bar{r} - C(t, \bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.20)$$

persamaan tersebut masih bisa disederhanakan dengan mendefinisikan

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left[ A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{2} B(t, \bar{r}) d\bar{r} \right] \quad (2.21)$$

, dengan  $\Phi(t, \bar{r})$  merupakan faktor integral. Dengan mengkuadratkan  $d\bar{t}$  tersebut dan mendefinisikan

$$\bar{A} = d\bar{t}^2 A \Phi^2; \bar{B} = C + \frac{B}{4A} \quad (2.22)$$

maka akan diperoleh

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.23)$$

metrik pada persamaan di atas adalah metrik yang *line element* nya invarian terhadap rotasi koordinat, namun masih bergantung terhadap waktu. Untuk membuat metrik tersebut statik (tidak bergantung waktu), maka fungsi A dan B pada metrik tersebut haruslah berupa fungsi dari koordinat saja, sehingga metrik pada persamaan (2.23) di atas dapat ditulis

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.24)$$

metrik pada persamaan (2.24) ini merupakan metrik untuk ruang-waktu yang statik dan isotropik yang merepresentasikan geometri Schwarzschild.

## 2.2.2 Solusi Persamaan Medan Einstein pada Empty Space

Fungsi A dan B dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan medan Einstein. Untuk daerah di sekitar (di luar) objek yang memiliki simetri bola, maka persamaan medan Einstein yang digunakan adalah persamaan medan pada *empty space* atau ruang kosong. Sehingga, pada daerah tersebut berlaku

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.25)$$

fungsi A dan B pada *empty space* dapat ditentukan dengan memasukkan metrik yang telah diperoleh pada persamaan (2.24) di atas ke dalam persamaan medan tersebut.

Fungsi A dan B pada *empty space* ditentukan dengan menguraikan komponen-komponen Ricci tensor yang memenuhi metrik Schwarzschild yang diagonal. Ricci tensor dapat ditulis sebagai

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (2.26)$$

dimana

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.27)$$

dengan  $g_{\mu\nu}$  adalah metrik pada geometri Schwarzschild.

Dengan memasukkan nilai-nilai metrik Schwarzschild ke dalam persamaan (2.27) maka akan diperoleh:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2A}; \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2B}; \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2B}; \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B}; \Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \quad (2.28)$$

dan

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta; \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \Gamma_{23}^3 = \cot\theta \quad (2.29)$$

Sehingga, komponen-komponen Ricci tensor pada geometri Schwarzschild dapat dinyatakan sebagai

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} \quad (2.30)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} \quad (2.31)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \quad (2.32)$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \quad (2.33)$$

Dengan mengalikan B/A pada persamaan (2.30) dan memasukkanya ke dalam persamaan (2.31), dapat diperoleh

$$A'B + B'A = 0 \quad (2.34)$$

sehingga  $AB = \alpha$ , dengan  $\alpha$  merupakan konstanta. Dengan mengintegrasikan persamaan (2.34) tersebut dapat diperoleh

$$A(r) = \alpha\left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}; B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1} \quad (2.35)$$

dengan  $k$  merupakan konstanta integral. Pada kasus medan lemah, nilai dari  $A(r)/c^2$  akan mendekati  $1 + 2\Phi/c^2$ , dengan  $\Phi$  adalah potensial gravitasi Newton yang bernilai  $\Phi = -GM/r$ . Dengan memasukkan nilai A untuk kasus medan lemah, maka metrik Schwarzschild untuk daerah di luar objek yang memiliki simetri bola menjadi

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\phi^2 \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) merupakan persamaan geometri ruang-waktu di luar objek (yang tidak berotasi) yang memiliki simetri bola.

## 2.3 Persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Pada bagian ini akan dibahas persamaan keadaan dalam bintang kompak yang berisi fluida sempurna. Bintang tersebut diasumsikan memiliki simetri bola dan tidak berotasi (statik), sehingga kita dapat menggunakan geometri Schwarzschild pada bintang tersebut. Persamaan keadaan pada bintang ditentukan dengan terlebih dahulu mencari bentuk fungsi metrik  $A(r)$  dan  $B(r)$  di dalam bintang yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan medan Einstein pada interior bintang tersebut.



### 2.3.1 Metrik pada Interior Bintang

Fungsi metrik  $A(r)$  dan  $B(r)$  pada interior bintang dapat ditentukan dengan memasukkan metrik Schwarzschild ke dalam persamaan medan Einstein, yaitu

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.37)$$

dengan  $T_{\mu\nu}$  adalah tensor energi-momentum yang dimiliki oleh interior bintang (materi dalam bintang), sedangkan  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . Tensor energi-momentum pada fluida sempurna adalah[5]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

dengan  $\rho(r)$  adalah rapat massa "proper" dari fluida dan  $p(r)$  adalah tekanan isotropik pada fluida. Tekanan dan rapat massa "proper" untuk fluida diasumsikan hanya merupakan fungsi  $r$  saja. Dengan menggunakan fakta bahwa  $u_\mu u_\nu = c^2$ , persamaan medan Einstein untuk interior bintang menjadi

$$R_{\mu\nu} = -\kappa[(\rho + \frac{p}{c^2})u_\mu u_\nu - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)g_{\mu\nu}] \quad (2.39)$$

Komponen-komponen Ricci tensor pada geometri Schwarzschild dapat diperoleh dari persamaan (2.30) sampai (2.33), dengan menggunakan persamaan-persamaan tersebut pada persamaan medan Einstein, maka diperoleh bentuk kecepatan empat dimensi dari fluida tersebut, yaitu

$$[u_\mu] = c\sqrt{A(r)}(1, 0, 0, 0) \quad (2.40)$$

Dengan memasukkan tensor energi-momentum fluida sempurna ke dalam persamaan medan Einstein dan menggunakan metrik Schwarzschild, maka diperoleh komponen-komponen Ricci tensor sebagai berikut:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 + 3p)A, \quad (2.41)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p)B, \quad (2.42)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p)r^2, \quad (2.43)$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \quad (2.44)$$

dari persamaan-persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} + \frac{2R_{22}}{r^2} = -2\kappa\rho c^2 \quad (2.45)$$

dengan mensubstitusi persamaan-persamaan (2.30) sampai (2.32) ke dalam persamaan (2.45), dapat diperoleh bahwa

$$\left(1 - \frac{1}{B}\right) + \frac{rB'}{B^2} = \kappa r^2 \rho c^2 \quad (2.46)$$

Metrik B dapat diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan (2.46) tersebut terhadap r, yaitu

$$B(r) = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]^{-1} \quad (2.47)$$

dengan  $m(r)$  adalah

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} \quad (2.48)$$

Metrik A dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan-persamaan (2.41) sampai (2.44), namun hal tersebut juga dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , yaitu

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu \right] + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \Gamma^\nu_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma - g^{\mu\nu} \partial_\mu p \quad (2.49)$$

dengan menguraikan persamaan tersebut maka diperoleh

$$\left(\frac{\rho c^2 + p}{2A}\right) \partial_\sigma A + \partial_\sigma p = 0 \quad (2.50)$$

karena A dan p hanya fungsi radial maka dapat diperoleh

$$\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p} \quad (2.51)$$

yang menyatakan metrik A sebagai fungsi tekanan dan rapat massa "proper".

### 2.3.2 Persamaan Keadaan pada Interior Bintang

Metrik yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya dapat digunakan untuk mencari persamaan keadaan pada bintang. Persamaan pertama pada interior bintang tersebut adalah

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.52)$$

yang diperoleh dari persamaan (2.48). Persamaan tersebut menghubungkan fungsi  $m(r)$  dengan fungsi  $\rho(r)$ . Selanjutnya, persamaan kedua yang menghubungkan kedua fungsi tersebut ( $m(r)$  dan  $\rho(r)$ ) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.32) dan (2.43) yaitu

$$\frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = -\frac{1}{2} \kappa (\rho c^2 - p) r^2 \quad (2.53)$$

dengan mensubstitusi fungsi A dan B yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya maka diperoleh persamaan kedua untuk interior bintang, yaitu

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2} (\rho c^2 + p) \left[ \frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \quad (2.54)$$

persamaan (2.54) ini dikenal dengan persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff [12] yang merepresentasikan perubahan tekanan pada interior bintang terhadap jari-jari bintang tersebut. Pada bab berikutnya akan dicari fungsi distribusi materi plasma pada interior bintang dengan menggunakan prinsip yang sama yang telah digunakan dalam subbab ini, namun dengan memakai tensor energi-momentum untuk fluida QCD.

## Bab 3

# Persamaan Medan Einstein untuk Fluida QCD

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, persamaan keadaan pada interior bintang dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mengetahui Lagrangian dari sistem interior pada bintang tersebut. Lagrangian yang telah diperoleh kemudian dimasukkan ke dalam persamaan tensor energi-momentum yang dimiliki oleh bintang tersebut. Dengan menggunakan persamaan medan Einstein untuk geometri yang berkaitan dengan bintang, maka akan diperoleh fungsi metrik yang merepresentasikan geometri pada interior bintang, sehingga struktur interior bintang pun dapat diketahui.

Pada subbab sebelumnya, telah dibahas tentang penurunan fungsi distribusi tekanan pada bintang statik yang berisi fluida sempurna. Persamaan tersebut mendeskripsikan struktur interior bintang dan juga variasi tekanan di dalam bintang terhadap jari-jari bintang tersebut. Pada bab ini, akan dibahas persamaan medan Einstein untuk bintang statik yang berisi materi fluida QCD. Persamaan yang telah diperoleh akan digunakan untuk menentukan bentuk medan fluida QCD ( $U^\mu$ ) yang merepresentasikan materi fluida dan juga hubungan-hubungannya dengan medan fluida QCD yang lain. Persamaan-persamaan yang telah diperoleh dari bab ini akan digunakan untuk menghitung distribusi materi plasma yang terdapat pada interior bintang.

### 3.1 Tensor Energi-Momentum Fluida QCD pada Bintang Statik

Lagrangian dari medan fluida QCD yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik ialah

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}\gamma^\mu\partial_\mu Q - m_Q\bar{Q}Q - \frac{1}{4}S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} + q J_{G\mu} A^\mu$$

dengan  $Q$  merepresentasikan triplet quark (bilangan kuantum warna),  $U_\mu$  sebagai medan fluida QCD dan  $A_\mu$  sebagai medan elektromagnetik. Untuk kasus fluida QCD yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik lemah, kontribusi medan elektromagnetik pada Lagrangian di atas dapat diabaikan, sehingga Lagrangian dari sistem tersebut dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}S_{\mu\rho}^a S^{a\mu\rho} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} \quad (3.1)$$

dengan

$$\begin{aligned} S_{\mu\rho}^a S^{a\mu\rho} &= 2U_\rho(g^{\mu\rho}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\rho)U_\mu + g_F^2 f^{abc} f^{ade} U^{b\mu} U^{c\rho} U_\mu^d U_\rho^e \\ &+ 2[(\partial_\mu U_\rho^a - \partial_\rho U_\mu^a)g_F f^{abc} U^{b\mu} U^{c\rho} \\ &+ g_F f^{abc} U_\mu^b U_\rho^c (\partial^\mu U^{a\rho} - \partial^\rho U^{a\mu})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

dan  $J_F^{a\mu} = 4p^\mu T_F^a$ , disini nilai  $T_F^a$  adalah konstan.  $P^\mu$  merupakan momentum empat dimensi.

Karena kesimetrian dari persamaan medan Einstein, maka tensor energi-momentum dari sistem juga harus simetrik dan memenuhi  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Hal ini dapat dilakukan dengan memvariasikan action dari Lagrangian sistem tersebut terhadap tensor metrik  $g^{\mu\nu}$ , yaitu

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (3.3)$$

sehingga action dari Lagrangian pada fluida QCD dapat ditulis sebagai

$$S = \int \left[ -\frac{1}{4}S_{\mu\rho}^a S^{a\mu\rho} + 4g_F T_F^a P_\mu U^{a\mu} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (3.4)$$

Jika action tersebut divariasikan terhadap metrik  $g^{\mu\nu}$ , maka variasi actionnya menjadi

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left( \left[ -\frac{1}{4} S_{\mu\rho}^a S_{\alpha\beta}^a \right] \delta(g^{\mu\alpha} g^{\rho\beta}) \sqrt{-g} + \left[ -\frac{1}{4} S_{\mu\rho}^a S_{\alpha\beta}^a \right] (g^{\mu\alpha} g^{\rho\beta}) \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &+ \int (4g_F T_F^a P_\mu U_\gamma^a \delta g^{\mu\gamma} \sqrt{-g} + 4g_F T_F^a P_\mu U_\gamma^a g^{\mu\gamma} \delta \sqrt{-g}) d^4x \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan menggunakan identitas

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (3.6)$$

pada persamaan (3.5) di atas maka dapat diperoleh tensor energi momentum  $T_{\mu\nu}$  sebagai

$$T_{\mu\nu} = -S_{\mu\alpha}^a S_\nu^{a\alpha} + 2g_F J_{F\mu}^a U_\nu^a - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.7)$$

dengan metrik Schwarzschild  $g_{\mu\nu}$ , yaitu

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Dengan memasukkan tensor energi momentum tersebut ke dalam persamaan medan Einstein (persamaan (2.37)) maka dapat diperoleh

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left[ S_{\mu\sigma}^a S_\nu^{a\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} S_{\alpha\rho}^a S^{a\alpha\rho} - g_F (2J_{F\mu}^a U_\nu^a - g_{\mu\nu} J_{F\alpha}^a U^{\alpha}) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \quad (3.9)$$

## 3.2 Komponen-Komponen *Ricci Tensor*

Komponen-komponen dari *Ricci tensor* yang terdapat dalam persamaan medan Einstein pada geometri Schwarzschild hanya terdapat pada bagian diagonalnya saja (persamaan (2.30) sampai (2.33)). Komponen-komponen lainnya yang terdapat pada *Ricci tensor* bernilai nol. Hal tersebut dapat digunakan untuk mencari bentuk dari medan fluida QCD seperti pada kasus fluida sempurna yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Komponen-komponen yang bernilai nol tersebut diantaranya adalah  $R_{0i}$ ,  $R_{j0}$ , dan  $R_{ji}$  dengan  $i$  dan  $j$  adalah komponen ruang (spasial). Sedangkan komponen-komponen yang tidak nol adalah komponen  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ , dan  $R_{33}$ . Komponen-komponen *Ricci tensor* tersebut akan diuraikan pada subbab ini.

Pada kasus  $R_{0i} = 0$ , berdasarkan persamaan (3.9), maka dapat diperoleh bahwa

$$R_{0i} = \kappa(S_{0\sigma}^a S_i^{a\sigma} - 2g_F J_{F0}^a U_i^a) = 0 \quad (3.10)$$

dengan memasukkan nilai-nilai  $\sigma$  yang sesuai maka dapat diperoleh

$$g^{ll} S_{0l} S_{li} = -2g_F J_{F0} U_i \quad (3.11)$$

dengan  $l$  adalah komponen spasial. Untuk penulisan selanjutnya, kita akan mengabaikan indeks  $a$  pada medan fluida, sehingga medan fluida yang tidak berindeks menyatakan medan fluida  $U^a$ .

Pada kasus  $R_{j0} = 0$ , dengan mengacu pada persamaan (3.9) maka akan diperoleh

$$R_{j0} = (S_{j\sigma} S_0^\sigma - 2g_F J_{Fj} U_0) = 0 \quad (3.12)$$

dengan memasukkan nilai-nilai sigma yang relevan, maka diperoleh

$$g^{ll} S_{jl} S_{l0} = -2g_F J_{Fj} U_0 \quad (3.13)$$

Pada kasus  $R_{ji} = 0$  dari persamaan (3.9) dapat diperoleh bahwa

$$R_{ji} = (S_{j\sigma} S_i^\sigma - 2g_F J_{Fj} U_i) = 0 \quad (3.14)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$g^{\sigma\gamma} S_{j\sigma} S_{\gamma i} = -2g_F J_{Fj} U_i \quad (3.15)$$

Sedangkan, untuk komponen-komponen diagonal dari *Ricci tensor* pada persamaan (3.9) bila diuraikan akan menjadi

$$R_{00} = \kappa[S_{0\sigma} S_0^\sigma + \frac{1}{2} A S_{\alpha\rho} S^{\alpha\rho} - g_F(2J_{F0} U_0 - A J_{F\gamma} U^\gamma) - A\mathcal{L}] \quad (3.16)$$

$$R_{11} = \kappa[S_{1\sigma} S_1^\sigma - \frac{1}{2} B S_{\alpha\rho} S^{\alpha\rho} - g_F(2J_{F1} U_1 + B J_{F\gamma} U^\gamma) + B\mathcal{L}] \quad (3.17)$$

$$R_{22} = \kappa[S_{2\sigma} S_2^\sigma - \frac{1}{2} r^2 S_{\alpha\rho} S^{\alpha\rho} - g_F(2J_{F2} U_2 + r^2 J_{F\gamma} U^\gamma) + r^2 \mathcal{L}] \quad (3.18)$$

$$R_{33} = \kappa[S_{3\sigma} S_3^\sigma - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta S_{\alpha\rho} S^{\alpha\rho} - g_F(2J_{F3} U_3 + r^2 \sin^2 \theta J_{F\gamma} U^\gamma) + r^2 \sin^2 \theta \mathcal{L}] \quad (3.19)$$

Perhatikan bahwa pada ruas kanan dalam persamaan (3.16) sampai dengan persamaan (3.18) terdapat suku  $S_{\alpha\rho}S^{\alpha\rho}$  dan suku  $J_{F\gamma}U^\gamma$ , dengan menyamakan suku-suku tersebut pada ketiga persamaan di atas (persamaan (3.16) sampai persamaan (3.18)) dapat diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \frac{R_{00}}{\kappa A} - \frac{S_{0\sigma}S_0^\sigma}{A} + \frac{2g_F J_{F0}U_0}{A} + \mathcal{L} &= -\left[\frac{R_{11}}{\kappa B} - \frac{S_{1\sigma}S_1^\sigma}{B} + \frac{2g_F J_{F1}U_1}{B} - \mathcal{L}\right] \\ &= -\left[\frac{R_{22}}{\kappa r^2} - \frac{S_{2\sigma}S_2^\sigma}{r^2} + \frac{2g_F J_{F2}U_2}{r^2} - \mathcal{L}\right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

sehingga dari kedua persamaan tersebut dapat diperoleh hubungan-hubungan

$$\frac{R_{00}}{\kappa A} + \frac{R_{11}}{\kappa B} = \frac{S_{0\sigma}S_0^\sigma}{A} + \frac{S_{1\sigma}S_1^\sigma}{B} - \frac{2g_F J_{F0}U_0}{A} - \frac{2g_F J_{F1}U_1}{B} \quad (3.21)$$

dan

$$\frac{R_{00}}{\kappa A} + \frac{R_{22}}{\kappa r^2} = \frac{S_{0\sigma}S_0^\sigma}{A} + \frac{S_{2\sigma}S_2^\sigma}{r^2} - \frac{2g_F J_{F0}U_0}{A} - \frac{2g_F J_{F2}U_2}{r^2} \quad (3.22)$$

### 3.3 *Hydrostatic Equilibrium* pada Fluida QCD

Secara umum, medan fluida QCD yang terdapat pada interior bintang dapat bergantung terhadap waktu. Sehingga, fungsi distribusi materi dan juga persamaan keadaan yang terdapat pada bintang tersebut juga akan bergantung terhadap waktu. Adanya perubahan distribusi fluida QCD terhadap waktu, akan menyebabkan timbulnya kemungkinan gerak rotasi pada bintang, sehingga geometri ruang-waktu internal dan juga eksternal pada bintang tersebut tidak konstan (tidak statis). Untuk menghindari hal tersebut, maka kita akan mengambil asumsi bahwa, fluida QCD yang terdapat pada interior bintang tersebut memiliki kondisi yang setimbang secara hidrostatis, yang secara matematis dapat ditulis sebagai

$$\partial_0 U^{a\mu} = 0 \quad (3.23)$$

kita juga akan mengasumsikan bahwa, semua komponen pada medan fluida  $U^\mu$  hanya bergantung terhadap  $r$  saja dan tidak bergantung pada komponen sudut  $\theta$  dan  $\phi$ , yaitu

$$U^0 \equiv U^0(r), U^1 \equiv U^1(r), U^2 \equiv U^2(r), U^3 \equiv U^3(r) \quad (3.24)$$



selain itu, fluida QCD dalam bintang tersebut memiliki sifat homogen, yang berarti bahwa dinamika fluida secara keseluruhan dapat diwakili dengan meninjau dinamika dari sebagian kecil medan fluida tersebut dan besar kecepatan medan untuk arah yang sama memiliki besar yang sama pula, yaitu

$$U^{a1} = U^{b1} = U^{\dots 1} \quad (3.25)$$

begitu juga terhadap komponen-komponen medan fluida yang lain ( $U^{a0}$ ,  $U^{a2}$  dan  $U^{a3}$ ).

Selanjutnya, dari ketiga asumsi tersebut dapat diperoleh hubungan-hubungan antar medan fluida QCD, yaitu dengan menghitung derivatif kovarian pada medan fluida tersebut. Derivatif kovarian dari suatu vektor  $U^\beta$  dinyatakan sebagai

$$\nabla_\alpha U^\beta = \partial_\alpha U^\beta + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta U^\sigma \quad (3.26)$$

dimana  $\Gamma_{\alpha\sigma}^\beta$  berkaitan dengan geometri ruang-waktu pada medan  $U$  yang bersangkutan.

Dari persamaan (3.26) tersebut, derivatif kovarian pada fluida QCD dapat ditentukan. Nilai dari  $\nabla_0 U^{a\mu}$  ialah

$$\nabla_0 U^{a\mu} = \partial_0 U^{a\mu} + \Gamma_{0\sigma}^\mu U^\sigma \quad (3.27)$$

dengan menguraikan persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\nabla_0 U^{a0} = \Gamma_{01}^0 U^{a1} \quad (3.28)$$

$$\nabla_0 U^{a1} = \Gamma_{00}^1 U^{a0} \quad (3.29)$$

sementara bentuk kovarian dari kedua persamaan tersebut ialah

$$\nabla_0 U_0^a = g_{00} \Gamma_{01}^0 U^{a1} \quad (3.30)$$

$$\nabla_0 U_1^a = g_{11} \Gamma_{00}^1 U^{a0} \quad (3.31)$$

komponen-komponen spasial dari derivatif kovarian adalah

$$\nabla_j U^\mu = \partial_j U^\mu + \Gamma_{j\sigma}^\mu U^\sigma \quad (3.32)$$

untuk nilai  $\mu = 0$  maka diperoleh

$$\nabla_1 U^{a0} = \partial_1 U^{a0} + \Gamma_{10}^0 U^{a0} \quad (3.33)$$

sedangkan untuk nilai  $\mu = l \neq 0$ , diperoleh

$$\nabla_j U^{al} = \partial_j U^{al} + \Gamma_{j\sigma}^l U^\sigma \quad (3.34)$$

Bentuk kovarian dari persamaan-persamaan tersebut adalah

$$\nabla_1 U_0^a = g_{00}(\partial_1 U^{a0} + \Gamma_{10}^0 U^{a0}) \quad (3.35)$$

dan untuk nilai  $\mu = l \neq 0$  diperoleh

$$\nabla_j U_l^a = g_{l\nu}(\partial_j U^{a\nu} + \Gamma_{j\sigma}^\nu U^{a\sigma}) \quad (3.36)$$

Dengan memasukkan ketiga asumsi tersebut ke dalam komponen-komponen *Ricci tensor* di atas, dapat diperoleh persamaan-persamaan yang menghubungkan relasi antara medan fluida yang satu dengan medan fluida yang lain. Hal tersebut akan dijelaskan pada bab selanjutnya.

## Bab 4

# Hasil dan Pembahasan

Dalam bab ini akan dibahas penguraian dari persamaan-persamaan yang telah diperoleh pada bab sebelumnya, terutama persamaan hidrostatis pada fluida QCD yang terdapat pada interior bintang. Dengan menguraikan persamaan tersebut, akan diperoleh bentuk persamaan keadaan atau fungsi distribusi fluida QCD dalam bintang.

### 4.1 Persamaan Medan Einstein pada *Hydrostatic Equilibrium* Fluida QCD

Dengan menggunakan ketiga asumsi yang telah disebutkan pada bab sebelumnya, kita akan mencari persamaan-persamaan yang mengkaitkan antara medan fluida yang satu dengan medan fluida yang lainnya. Hal ini dapat dilakukan dengan memasukkan asumsi-asumsi yang telah dibuat ke dalam persamaan medan Einstein yang telah diperoleh.

Perhatikan persamaan (3.10). Untuk nilai  $i=1$  pada persamaan (3.10) maka akan diperoleh

$$g^{ll}(\nabla_0 U_l - \nabla_l U_0 + g_F f^{abc} U_0^b U_l^c)(\nabla_l U_1 - \nabla_1 U_l + g_F f^{abc} U_l^b U_1^c) = -2g_F J_{F0} U_1 \quad (4.1)$$

dengan menguraikan nilai-nilai  $l$  pada persamaan tersebut maka dapat diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} -2g_F J_{F0} U_1 &= g^{22}(g_F f^{abc} U_0^b U_2^c)[g_{11}\Gamma_{22}^1 U^2 - g_{22}(\partial_1 U^2 + \Gamma_{12}^2 U^2) + g_F f^{abc} U_2^b U_1^c] \\ &+ g^{33}(g_F f^{abc} U_0^b U_3^c)[g_{11}\Gamma_{33}^1 U^3 - g_{33}(\partial_1 U^3 + \Gamma_{13}^3 U^3) \\ &+ g_F f^{abc} U_3^b U_1^c] \end{aligned} \quad (4.2)$$

ruas kiri pada persamaan (4.2) di atas merupakan fungsi  $r$  saja, sedangkan ruas kanan dari persamaan tersebut adalah fungsi  $r$  dan  $\theta$ . Agar konsisten terhadap asumsi yang telah dibuat sebelumnya, bahwa semua medan fluida dan arus fluida yang berkaitan hanya merupakan fungsi  $r$  saja, maka dapat diperoleh bahwa nilai dari  $U^3$  adalah nol. Sehingga persamaan (4.2) di atas berubah menjadi

$$\begin{aligned} -2g_F J_{F0} U_1 &= g^{22}(g_F f^{abc} U_0^b U_2^c)[g_{11}\Gamma_{22}^1 U^2 - g_{22}(\partial_1 U^2 + \Gamma_{12}^2 U^2) \\ &+ g_F f^{abc} U_2^b U_1^c] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Untuk nilai  $i = 2$  pada persamaan (3.10), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} -2g_F J_{F0} U_2 &= g^{11}[g_{11}\Gamma_{00}^1 U^0 - g_{00}(\partial_1 U^0 + \Gamma_{01}^0 U^0) + g_F f^{abc} U_0^b U_1^c] \\ &\times [g_{22}(\partial_1 U^2 + \Gamma_{12}^2 U^2) - g_{11}\Gamma_{22}^1 U^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c] \\ &+ g^{33}(g_F f^{abc} U_0^b U_3^c)[g_{22}\Gamma_{33}^2 U^3 - g_{33}\Gamma_{23}^3 U^3 + g_F f^{abc} U_3^b U_2^c] \end{aligned} \quad (4.4)$$

karena  $U^3$  bernilai nol, maka persamaan (4.4) berubah menjadi

$$\begin{aligned} -2g_F J_{F0} U_2 &= g^{11}[g_{11}\Gamma_{00}^1 U^0 - g_{00}(\partial_1 U^0 + \Gamma_{01}^0 U^0) + g_F f^{abc} U_0^b U_1^c] \\ &\times [g_{22}(\partial_1 U^2 + \Gamma_{12}^2 U^2) - g_{11}\Gamma_{22}^1 U^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c] \end{aligned} \quad (4.5)$$

dan untuk nilai  $i = 3$  dapat diperoleh

$$\begin{aligned} -2g_F J_{F0} U_3 &= g^{11}(g_{11}\Gamma_{00}^1 U^0 - g_{00}(\partial_1 U^0 + \Gamma_{01}^0 U^0) + g_F f^{abc} U_0^b U_1^c) \\ &\times [g_{33}(\partial_1 U^3 + \Gamma_{13}^3 U^3 - g_{11}\Gamma_{33}^1 U^3 + g_F f^{abc} U_1^b U_3^c) \\ &+ g^{22}(g_F f^{abc} U_0^b U_2^c)[g_{33}\Gamma_{23}^3 U^3 - g_{22}\Gamma_{33}^2 U^3 + g_F f^{abc} U_2^b U_3^c] \end{aligned} \quad (4.6)$$

karena  $U^3$  bernilai nol, maka kedua ruas pada persamaan (4.6) ini bernilai nol. Berdasarkan sifat kesimetrikan persamaan medan Einstein, maka persamaan (3.11) akan memberikan hasil yang sama dengan penguraian pada persamaan (3.10) di atas.

Dengan meninjau persamaan (3.15), maka dapat diketahui bahwa untuk nilai-nilai  $S_{1\sigma} S_3^\sigma$  dan  $S_{2\sigma} S_3^\sigma$ , persamaan tersebut bernilai nol. Persamaan yang tersisa dari persamaan (3.15) tersebut adalah  $S_{1\sigma} S_2^\sigma$ , yaitu

$$\begin{aligned} 2g_F J_{F1} U_2 &= g^{00}[g_{00}(\partial_1 U^0 + \Gamma_{01}^0 U^0) - g_{11}\Gamma_{00}^1 U^0 + g_F f^{abc} U_1^b U_0^c] \\ &\times (g_F f^{abc} U_2^b U_0^c) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bila persamaan-persamaan di atas diuraikan (persamaan (4.3), (4.5) dan (4.7)), maka untuk persamaan (4.3) akan menjadi

$$2g_F J_{F0} U_1 = \frac{1}{r} [2rU^2 + r^2 \partial_1 U^2 + g_F f^{abc} U_2^b U_1^c] (g_F f^{abc} U_0^b U_2^c) \quad (4.8)$$

sementara, persamaan (4.5) bila diuraikan menjadi

$$2g_F J_{F0} U_2 = \frac{1}{B} [-A' U^0 - A \partial_1 U^0 + g_F f^{abc} U_0^b U_1^c] \times [-r^2 \partial_1 U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c] \quad (4.9)$$

dan persamaan (4.7) dapat ditulis sebagai

$$2g_F J_{F1} U_2 = \frac{1}{A} [A \partial_1 U^0 + A' U^0 + g_F f^{abc} U_1^b U_0^c] (g_F f^{abc} U_2^b U_0^c) \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.10), nilai A(r) dapat ditentukan, yaitu

$$\frac{1}{A} (A' U^0 + \bar{K}) F = M - L \quad (4.11)$$

dengan

$$\bar{K} = g_F f^{abc} U_1^b U_0^c \quad (4.12)$$

$$F = g_F f^{abc} U_2^b U_0^c \quad (4.13)$$

$$M = 2g_F J_{F1} U_2 \quad (4.14)$$

$$L = (\partial_1 U^0) (g_F f^{abc} U_2^b U_0^c) \quad (4.15)$$

dengan menyusun ulang persamaan (4.11) akan diperoleh

$$\frac{A'}{A} = \frac{(M - L)}{F U^0} - \frac{\bar{K}}{A U^0} \quad (4.16)$$

jika

$$Y = \frac{(M - L)}{U^0 F} \quad (4.17)$$

maka persamaan (4.16) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dA}{A - \frac{\bar{K}}{Y U^0}} = Y dr' \quad (4.18)$$

dengan mengintegrasikan persamaan (4.17) di atas dari interval  $r' = 0$  sampai  $r' = r$  akan diperoleh

$$A(r) = [A(0) - \frac{\bar{K}}{Y U^0}] e^{C(r)} + \frac{\bar{K}}{Y U^0} \quad (4.19)$$

dengan

$$C = \int Y dr' \quad (4.20)$$

Fungsi B(r) juga dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (4.9), yaitu

$$B(r) = \frac{(-A'U^0 - A\partial_1 U^0 + g_F f^{abc} U_0^b U_1^c)}{2g_F J_{F0} U_2} (-r^2 \partial_1 U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c) \quad (4.21)$$

dengan menggunakan persamaan (4.10), yaitu

$$(A\partial_1 U^0 + A'U^0 + g_F f^{abc} U_1^b U_0^c) = \frac{2g_F J_{F1} U_2}{g_F f^{abc} U_2^b U_0^c} \quad (4.22)$$

dan persamaan (4.8) maka diperoleh

$$B(r) = -\frac{4Ar^2 J_{F0} J_{F1} U_1 U_2}{(f^{abc} U_0^b U_2^c)^2} \quad (4.23)$$

Fungsi A dan B di atas merepresentasikan geometri ruang-waktu pada bintang yang berisi fluida QCD.

## 4.2 Fungsi Distribusi Medan Fluida QCD Pada Bintang Kompak

Dengan menggunakan nilai dari fungsi A dan B yang telah diperoleh, fungsi distribusi dari fluida QCD yang terdapat pada bintang dapat ditentukan. Pada subbab ini, akan dibahas penurunan fungsi distribusi fluida QCD dalam bintang kompak, yang mana penurunannya analog dengan penurunan fungsi distribusi pada bintang yang berisi fluida sempurna (persamaan TOV) yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Fungsi distribusi yang akan diperoleh pada bab ini adalah fungsi perubahan medan fluida QCD pada arah radial dan juga pada arah angular terhadap perubahan jari-jari bintang.

Untuk menentukan fungsi distribusi  $U^1$ , kita akan menggunakan persamaan (3.21) yang diperoleh pada bab 3. Dengan menggunakan persamaan (2.30) dan (2.31), ruas kiri pada persamaan (3.21) dapat dinyatakan dengan

$$\frac{R_{00}}{\kappa A} + \frac{R_{11}}{\kappa B} = -\frac{1}{\kappa r B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (4.24)$$

sedangkan untuk menghitung ruas kanan, kita perlu menjabarkan terlebih dahulu nilai dari  $\frac{S_{0\sigma}S_0^\sigma}{A}$  dan  $\frac{S_{1\sigma}S_1^\sigma}{B}$ . Dengan memasukkan nilai-nilai  $\sigma$  yang berkaitan, maka dapat diperoleh

$$S_{0\sigma}S_0^\sigma = -\frac{1}{B}[-A'U^0 - A\partial_1U^0 + g_F f^{abc}U_0^bU_1^c]^2 - \frac{1}{r^2}(g_F f^{abc}U_0^bU_2^c)^2 \quad (4.25)$$

dan

$$\begin{aligned} S_{1\sigma}S_1^\sigma &= \frac{1}{A}[A'U^0 + A\partial_1U^0 + g_F f^{abc}U_1^bU_0^c]^2 \\ &\quad - \frac{1}{r^2}[-r^2\partial_1U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc}U_1^bU_2^c]^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

dengan menggunakan persamaan (4.25) dan (4.26) tersebut, maka persamaan (3.21) akan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{R_{00}}{\kappa A} + \frac{R_{11}}{\kappa B} &= -\frac{1}{Ar^2}(g_F f^{abc}U_0^bU_2^c)^2 - \frac{1}{Br^2}[-r^2\partial_1U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc}U_1^bU_2^c]^2 \\ &\quad - \frac{2g_F J_{F0}U_0}{A} - \frac{2g_F J_{F1}U_1}{B} \end{aligned} \quad (4.27)$$

dengan menyamakan kedua ruas pada persamaan (4.24) dan (4.27) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa r B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) &= \frac{1}{Ar^2}(g_F f^{abc}U_0^bU_2^c)^2 + \frac{1}{Br^2}[-r^2\partial_1U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc}U_1^bU_2^c]^2 \\ &\quad + \frac{2g_F J_{F0}U_0}{A} + \frac{2g_F J_{F1}U_1}{B} \end{aligned} \quad (4.28)$$

nilai dari  $\frac{A'}{A}$  dapat diperoleh dari persamaan (4.16) sementara itu nilai  $\frac{B'}{B}$  dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.23), dan turunannya terhadap  $r$ , sehingga diperoleh

$$\frac{B'}{B} = D \left[ \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} + \frac{J'_{F0}}{J_{F0}} + \frac{J'_{F1}}{J_{F1}} + \frac{U'_1}{U_1} + \frac{U'_2}{U_2} \right] - \frac{2D'}{D} \quad (4.29)$$

sehingga, dari persamaan (4.16) dan persamaan (4.29) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) &= \frac{(M-L)}{FU^0} - \frac{\bar{K}}{AU^0} + D \left[ \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} + \frac{J'_{F0}}{J_{F0}} + \frac{J'_{F1}}{J_{F1}} + \frac{U'_1}{U_1} + \frac{U'_2}{U_2} \right] \\ &\quad - \frac{2D'}{D} \end{aligned} \quad (4.30)$$

dengan

$$D = (f^{abc}U_0^bU_2^c)^2 \quad (4.31)$$

Jika ruas kanan pada persamaan (4.28) dikalikan dengan  $\kappa r B$ , maka ruas kanan pada persamaan (4.30) akan menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) &= \frac{\kappa B}{rA} (g_F f^{abc} U_0^b U_2^c)^2 + \frac{\kappa}{r} (-r^2 \partial_1 U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c)^2 \\ &+ \frac{B}{A} 2g_F J_{F0} U_0 \kappa r + 2g_F J_{F1} U_1 \kappa r \\ &= \frac{B}{A} (T + E) + Q + S \end{aligned} \quad (4.32)$$

dengan

$$E = 2g_F J_{F0} U_0 \kappa r \quad (4.33)$$

$$Q = \frac{\kappa}{r} (-r^2 \partial_1 U^2 - 2rU^2 + g_F f^{abc} U_1^b U_2^c)^2 \quad (4.34)$$

$$S = 2g_F J_{F1} U_1 \kappa r \quad (4.35)$$

$$T = \frac{\kappa}{r} (g_F f^{abc} U_0^b U_2^c)^2 \quad (4.36)$$

nilai  $\frac{B}{A}$  dapat diperoleh dari persamaan (4.23) yaitu

$$\frac{B}{A} = -\frac{4r^2 J_{F0} J_{F1} U_1 U_2}{(f^{abc} U_0^b U_2^c)^2} \quad (4.37)$$

dengan menyamakan ruas pada persamaan (4.30) dan (4.32) serta menggunakan persamaan (4.37) akan diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \partial_1 U_1 &= U_1 \left[ \frac{1}{D} \left[ \frac{-4r^2 J_{F0} J_{F1} U_1 U_2}{(f^{abc} U_0^b U_2^c)^2} (T + E) + S + Q + \frac{\bar{K}}{AU^0} - \frac{(M - L)}{FU^0} + \frac{2D'}{D} \right] \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{K}}{AU^0} - \left[ \frac{(M - L)}{FU^0} + \frac{2}{r} + \frac{J'_{F0}}{J_{F0}} + \frac{J'_{F1}}{J_{F1}} + \frac{U'_2}{U_2} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

dan dengan menggunakan persamaan (4.8) akan diperoleh bahwa

$$\partial_1 U^2 = \frac{2g_F J_{F0} U_1}{r^2 g_F f^{abc} U_0^b U_2^c} - \frac{2U^2}{r} - \frac{1}{r^2} g_F f^{abc} U_2^b U_1^c \quad (4.39)$$

Persamaan (4.38) dan (4.39) merupakan persamaan distribusi materi plasma dalam bintang kompak, yang merepresentasikan perubahan medan fluida  $U^1$  dan  $U^2$  terhadap radius bintang. Persamaan ini juga dapat menggambarkan relasi-relasi antar medan fluida satu dengan medan fluida lainnya. Analog dengan persamaan TOV, kita dapat menggunakan persamaan ini untuk menghitung sifat-sifat (properti-properti) yang dimiliki oleh suatu bintang kompak statis yang isotropik yang berisi fluida QCD (berisi plasma Quark Gluon) yang homogen.



## Bab 5

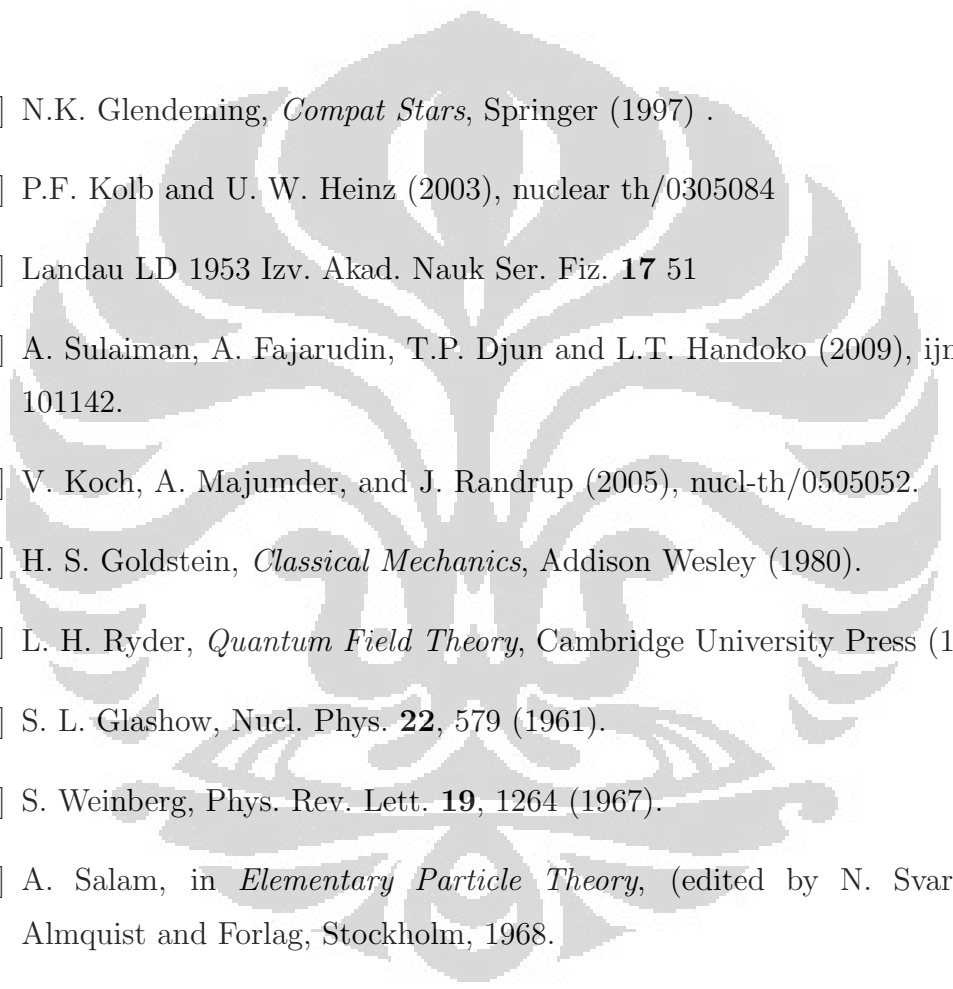
# Kesimpulan dan Saran

Penurunan persamaan distribusi materi plasma pada bintang kompak yang berisi fase QGP (fluida QCD relativistik) dapat dilakukan dengan mengasumsikan keadaan hidrostatis dan homogen pada fluida dalam bintang tersebut. Selain itu, penurunan fungsi tersebut juga menggunakan asumsi bahwa medan fluida QCD pada interior bintang hanya bergantung pada variasi  $r$  saja. Dengan adanya asumsi ini, medan fluida pada arah  $\phi$  akan bernilai nol, sehingga fungsi distribusi yang diperoleh hanya tergantung pada medan fluida pada arah lainnya. Fungsi distribusi yang diperoleh menggambarkan perubahan medan fluida pada arah  $r$  dan  $\theta$  sebagai fungsi dari medan fluida  $U^0$ ,  $U^1$  dan  $U^2$ . Fungsi distribusi yang diperoleh juga menggambarkan adanya keterkaitan antara medan fluida satu dengan yang lainnya.

Struktur geometri yang terdapat pada bintang kompak statik yang berisi fluida QCD juga dapat ditentukan dengan asumsi-asumsi yang telah dibuat pada penelitian ini. Fungsi A dan B yang menggambarkan struktur geometri Schwarzschild pada interior bintang diperoleh dengan menguraikan komponen-komponen *Ricci tensor* yang terdapat pada fluida QCD dalam bintang.

Penelitian ini hanya terbatas pada pembahasan persamaan distribusi pada interior bintang kompak statik yang berisi plasma quark-gluon. Pengkajian lebih lanjut yang harus dilakukan adalah mengaplikasikan persamaan yang telah diperoleh untuk bentuk medan fluida tertentu. Dengan demikian, kita dapat mengetahui sifat-sifat (properti) yang dimiliki oleh fluida QCD pada interior bintang dan juga struktur geometri pada interior bintang tersebut.

# Daftar Acuan

- 
- [1] N.K. Glendeming, *Compat Stars*, Springer (1997) .
  - [2] P.F. Kolb and U. W. Heinz (2003), nuclear th/0305084
  - [3] Landau LD 1953 Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17** 51
  - [4] A. Sulaiman, A. Fajarudin, T.P. Djun and L.T. Handoko (2009), ijmpa no: 101142.
  - [5] V. Koch, A. Majumder, and J. Randrup (2005), nucl-th/0505052.
  - [6] H. S. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (1980).
  - [7] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
  - [8] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
  - [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
  - [10] A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, (edited by N. Svartholm), Almquist and Forlag, Stockholm, 1968.
  - [11] M. P. Hobson, G.P. Efstathiou and A.N. Lasenby, *General Relativity An Introduction for Physicist*, Cambridge University Press (2006).
  - [12] J.R. Oppenheimer and G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 377 (1939).
  - [13] M. E. Peskin dan D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview, USA, 1995.

# Lampiran A

## Notasi

Sistem satuan yang digunakan dalam perhitungan adalah sistem satuan alami (*natural system of units*), di mana didefinisikan  $\hbar = c = 1$  dan tidak berdimensi. Energi, massa, dan momentum, seluruhnya berdimensi energi, yakni dengan satuan GeV. Dengan demikian, dimensi panjang dan luas masing-masing menjadi energi<sup>-1</sup> dan energi<sup>-2</sup>. Untuk mendapatkan nilai dan mengembalikan dimensi besaran yang ingin diketahui, digunakan konversi berikut [13]:

$$\hbar = 6.58212233(49) \times 10^{-25} \text{ GeV s} \quad (\text{A.1})$$

$$\hbar c = 197.327053(59) \times 10^{-3} \text{ GeV fm} \quad (\text{A.2})$$

$$(\hbar c)^2 = 0.38937966(23) \text{ GeV}^2 \text{ mbarn} \quad (\text{A.3})$$