



UNIVERSITAS INDONESIA

**AWAL ALAM SEMESTA DALAM KERANGKA  
FLUIDA QCD**

**M. KHALID NURDIN P.**

**0606068386**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI FISIKA  
DEPOK  
JUNI 2010**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**AWAL ALAM SEMESTA DALAM KERANGKA  
FLUIDA QCD**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar Sarjana Sains**

**M. KHALID NURDIN P.**

**0606068386**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI FISIKA  
DEPOK  
JUNI 2010**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : M. Khalid Nurdin P.

NPM : 0606068386

Tanda Tangan :

Tanggal : 29 Juni 2010

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : M. Khalid Nurdin P.  
NPM : 0606068386  
Program Studi : Fisika  
Judul Skripsi : Awal Alam Semesta dalam Kerangka Fluida QCD

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. L. T. Handoko ( )

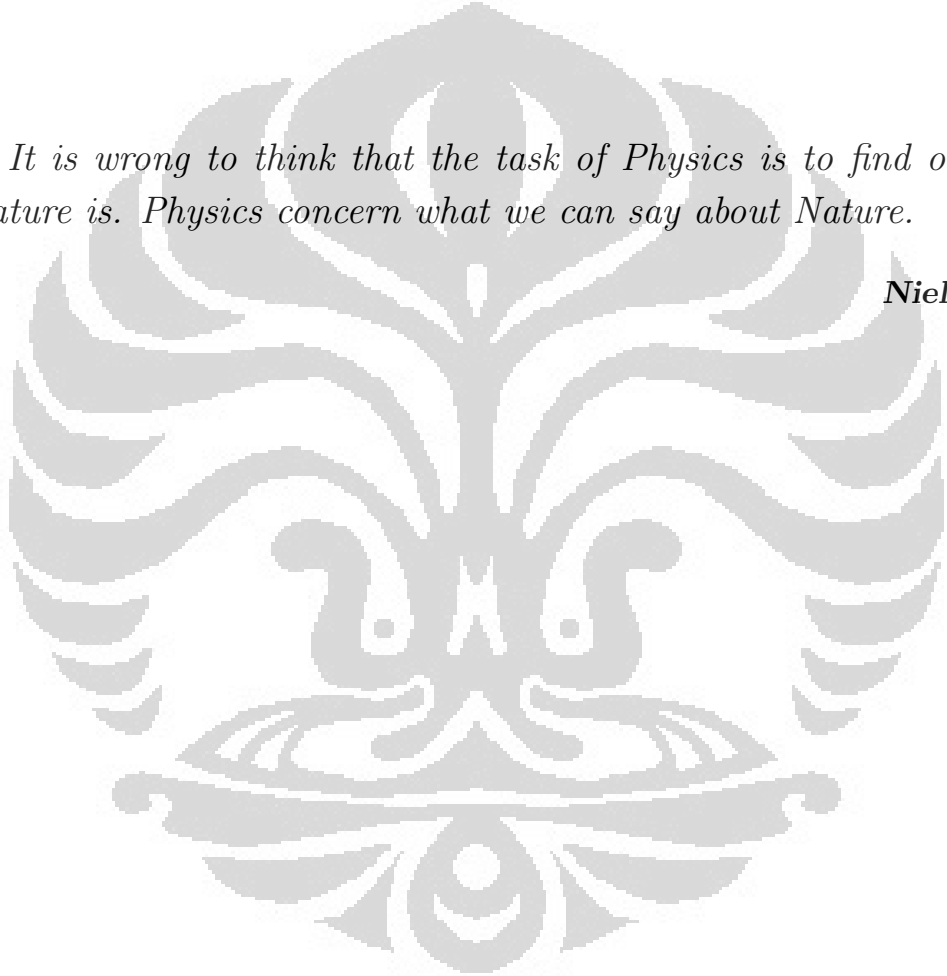
Pembimbing II : Dr. Terry Mart ( )

Penguji I : Dr. Anto Sulaksono ( )

Penguji II : Dr. Agus Salam ( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 16 Juni 2010



*It is wrong to think that the task of Physics is to find out how Nature is. Physics concern what we can say about Nature.*

**Niels Bohr**

*Karya ini ku persembahkan untuk yang tercinta:  
Bapa, Mamah, dan semua adik-adikku.*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, kepada-Mu-lah Ya Allah, Rabb semesta alam, pertama-tama penulis haturkan puji dan syukur atas segala nikmat dan anugrahnya, terutama kecerdasan akal, hingga mampu menyelesaikan skripsi ini.

Ketertarikan penulis terhadap riset dan ilmu pengetahuan tentang kelahiran alam semesta dan kosmik secara keseluruhan telah tumbuh sejak masa SMA. Kenikmatan berpikir dan bernalar tentang fenomena seperti apa yang terjadi ketika alam semesta lahir dan berkembang menimbulkan suatu ketertarikan sendiri. Karena pada saat itu berpikir seperti ini merupakan keunikan tersendiri di saat sebagian besar rekan-rekan penulis hanya memikirkan hal-hal pragmatis, lokal, dan tidak kritis. Namun, ketertarikan itu hanyalah suatu pertanyaan tanpa pernah terpikir untuk ditindaklanjuti menjadi suatu riset. Penulis hanya mendapatkan jawabannya dengan membaca buku-buku sains populer yang penjelasannya dipaparkan secara lebih general dan tanpa pernah tahu istilah-istilah sains yang disebutkan di situ serta tanpa simbol-simbol persamaan matematika. Apalagi tidak pernah terpikir sebelumnya bahwa penelitian di bidang ini harus menggunakan *tool* analisis matematika yang rumit dan kompleks. Maka sikap yang diambil pun adalah tidak akan melakukan penelitian dengan cara ini. Bersyukur kini setelah mendapatkan bekal yang cukup dalam perhitungan analisis matematika dan diberikan topik riset ini, penulis mulai menemukan jawaban atas segala keingintahuan itu.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung, antara lain:

- Dr. L.T. Handoko selaku pembimbing I yang telah membimbing penulis mulai dari awal diskusi hingga penyelesaian tugas akhir ini serta atas ide-ide, dukungan dan saran yang diberikan serta inspirasi untuk terus bersemangat dalam melakukan riset.
- Dr. Terry Mart selaku pembimbing II dan ketua peminatan Fisika Nuklir dan Partikel atas bimbingan, dukungan, wejangan-wejangan, dan inspirasi

pandangan mengenai riset yang diberikan baik itu selama kuliah maupun pengerjaan tugas akhir ini.

- Dr. Anto Sulaksono dan Dr. Agus Salam selaku penguji I dan penguji II atas diskusi, pertanyaan-pertanyaan yang kritis ketika sidang, dan kesabarannya dalam penyelesaian tugas akhir ini, serta ilmu, hikmah, keceriaan dan kenikmatan ketika penulis menjadi mahasiswa dalam kuliah-kuliahnya.
- Ayah, Ibu, serta semua adik-adik penulis atas segala kesabaran dan pengertiannya atas "jalan hidup" yang ditempuh penulis untuk berkarir di bidang fisika serta dukungan yang diberikan selama pengerjaan skripsi ini. Semoga Alloh memberi balasan yang terbaik dan selalu berada dalam rahmat dan maghfirah-Nya. Amien.
- Rekan-rekan di Laboratorium Fisika Nuklir dan Partikel: Andy Octavian yang telah menjadi inspirasi yang nyata bagi penulis untuk menyukai dan menikmati fisika ini dan atas segala kebaikan dan bantuannya, sungguh tak terkira segala kebaikannya selama mengajari dan berdiskusi dengan penulis baik ketika kuliah maupun dalam pengerjaan tugas akhir ini, terutama makasih banget udah banyak bantu penulis memberikan pekerjaan ngetik demi uang 1 juta, hehee, dan juga buat traktirannya saat penulis sedang mengalami "kangker" (katong kering); Chrisna SN, yang telah menjadi teman ngobrol, diskusi, dan *ngelawak* saat penulis merasakan kejenuhan dalam pengerjaan skripsi ini. Chrisna itu orangnya *gokil* beda dengan penampilannya, :)); Januar, "Master of Dangdut" dan seniman musik pemula yang "*incredible*" dan ulung, yang telah menjadi teman diskusi seputar fisika yang belum pernah penulis ketahui dan atas kebaikannya ngajarin Latex dan Maple; Pak Ayung, Pak Sulaiman, Fathia R. Syahroni (tempat curhatnya masalah cinta dan cewe, :D), Fahlefi "Pepew" yang selalu meramaikan Lab Teori ketika bersama. Spesial buat Fathia dan Pepew *thanks* udah bantu nyiapin konsumsi untuk sidang skripsi, hehee.
- Para kakak senior yang ada di Amerika, Eropa, dan Rusia yang selalu men-

jadi inspirasi untuk kuliah ke LN. Kak Handhika, *thanks* untuk diskusi-diskusinya seputar GR dan geometri FRW, makasih juga atas segala saran dan dukungannya. Kak Haryo S., makasih juga buat info-infonya tentang fisika partikel dan advice-nya, bang Andrias, *thanks* udah kasih infonya mengenai ICTP dan skripsinya, kak Nita "Nyt-nyit", kak Andhika, kak Bayu, dan kak Ryky Nelson, dan senior-senior lain makasih untuk saran-sarannya dan telah menganggap penulis sebagai adik kelasnya, hehee.

- Teman-teman Fisika angkatan 2006 yang sudah penulis anggap keluarga sendiri. Terutama Rhyan Edwin yang "superbaik" telah meminjamkan lampu belajarnya, juga dalam hal finansial, serta menjadi tema curhat yang asyik, ngobrol ngalor ngidul tentang masa depan dan rencana ke depan, *especially* masalah jodoh, :)). Geng futsal Brumbung (Syahrulloh, Agus Supri, Agus Sulis, Haris Setyo, "Andru" Alfajrin, Yusuf "Ucup", Iyan Subiyanto, Zackky "Rafi Ahmad") makasih banget sudah mengajak penulis main futsal bareng untuk menghilangkan kepenatan di sela-sela pengerjaan tugas akhir ini. Akhi Habib Aljufri, yang selalu datang ke kosan buat diajarin pelajaran dan selalu membawa makanan, makasih yaa. Dwi Handoko, yang dengan rendah hati mau ngajarin pelajaran Elek 1 dan 2 serta cara menggunakan EWB.
- Teman-teman Fisika 2006 yang lain, Dwi Octavina yang dengan sabar mau menjadi rekan dalam Praktikum Elek 2, mau kasi contekan saat tes pendahuluan (hehee..), dan mau diajak *ngelawak* saat praktikum, makasih juga udah bantu selama pengerjaan projek akhir. Yones, makasih suka membantu dalam hal finansial juga untuk diskusi-diskusi berbagai pelajaran selama kuliah bersama, penulis mengharapkan kita bisa berdiskusi lagi. Juga untuk Faisal Ferdian, Robiatul, Sri "Icha" Elsa, Mursilatun, Nurina "Dedew", Novia Valentino, Lia Nurmaliah, Rahmat Andhika, dan teman-teman lain yang sedang ngerjain TA dan mau sidang semester ini, senasib sepenanggungan, yang selalu saling kasi info seputar TA dan saling menyemangati. Juga teman-teman Fisika 2006 yang lain yang tidak bisa disebut satu persatu, terima kasih udah menjadi teman selama 4 tahun ini.



- Teman-teman junior angkatan 2007 dan 2008. Kepada Saefudin, makasih sudah banyak membantu dalam berbagai hal, finansial, motor, dan kebaikannya telah meminjamkan laptop. Syahril, Bagus, Nedy, Mergo, Omen, dan Syukur, makasih udah jadi teman kuliah Fisika Zat Padat 1 yang menyenangkan. Thanks juga buat Faldo Maldini, ketua HMD Fisika 2010, yang menyemangati penulis untuk segera menyelesaikan TA ini, juga makasih telah berdiskusi mengenai sains dan riset yang membuat penulis untuk terus belajar, juga untuk anak-anak 2008 yang lain, makasih telah menjadi teman penulis.
- Para dosen, seperti pak Hikam, pak Budhy, pak Djoenaedi, pak Syamsu, pak Yunus, bu Ocha dan bu Lusi, pak Sastra, pak Azis, pak Supri, pak Herbert, pak Lingga, pak Imam; para staff di Sekretariat Dept. Fisika, khususnya mba Ratna, yang telah membantu dalam pengurusan persyaratan administrasi sidang; petugas perpustakaan Fisika, *thank's* mas Heri; serta para petugas *cleaning services* yang selalu rajin bersih-bersih.
- *Special thank's* untuk Indah Citra dan Novicha "Vika" Hidayati yang telah menjadi bagian kehidupan penulis yang indah. *Well*, kalian gadis-gadis manis dan cantik yang penulis sukai, hehee :D.
- Anak-anak Kimia 2009 yang menjadi mahasiswa dalam kelas asistensi penulis, atas pengertiannya terhadap keterbatasan selama mengajar kalian. Makasih buat Arin yang sudah membantu mengurus kelas asistensi saat penulis tidak bisa hadir (hehee). Maaf kakak belum bisa menjadi asisten yang baik bagi kalian.
- Juga semua pihak yang tidak dapat disebutkan di sini atas dukungan dan doa kepada penulis selama penyelesaian tugas akhir ini.

Hasil karya ini tidaklah sempurna. Penulis menerima saran dan kritikan yang membangun dari para pembaca.

Depok, Juni 2010

M. Khalid Nurdin P.

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS  
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : M. Khalid Nurdin P.  
NPM : 0606068386  
Program Studi : S1 Fisika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**AWAL ALAM SEMESTA DALAM KERANGKA FLUIDA QCD**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/ formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 29 Juni 2010

Yang menyatakan

(M. Khalid Nurdin P.)

Nama : M. Khalid Nurdin P.  
Program Studi : S1 Fisika  
Judul Skripsi : Awal Alam Semesta dalam Kerangka Fluida QCD

## ABSTRAK

Dikaji dinamika awal alam semesta geometri Friedmann-Robertson-Walker (FRW) yang dikarakterisasi faktor skala  $R(t)$  pada fase quark-gluon. Fungsi  $R(t)$  ditentukan dengan mencari solusi persamaan medan Einstein dengan menggunakan tensor energi-momentum materi quark-gluon. Tensor energi-momentum yang digunakan berasal model fluida QCD. Fluida QCD ini merupakan model plasma quark-gluon (QGP) berbasis teori fluida relativistik dengan pendekatan lagrangian QCD yang memiliki simetri gauge. Dari hasil perhitungan solusi persamaan medan Einstein, diperoleh persamaan Friedmann dan set persamaan dinamik seperti parameter Hubble  $H(t)$  dan parameter perlambatan  $q(t)$  (*deceleration parameter*).

Kata kunci: fluida QCD, geometri FRW, persamaan medan Einstein.

xiii + 31 hlm.: lamp.

Daftar Acuan: 12 (1990-2010)

Name : M. Khalid Nurdin P.  
Study Program : S1 Physics  
Title : Early Universe in Framework QCD Fluid

### ABSTRACT

The dynamical aspect of the early universe in framework of the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) geometry that characterized by scale factor  $R(t)$  in the quark-gluon phase is discussed. The  $R(t)$  function is determined by solving Einstein field equation for the energy-momentum tensor of the quark-gluon matter. The energy-momentum tensor is based on the QCD fluid model that derived from the magnetofluid unification theory. Friedmann equation, Hubble parameter  $H(t)$ , and deceleration parameter  $q(t)$  can be obtained by solving the Einstein field equation.

Keywords: QCD fluid, FRW geometry, Einstein field equation.

xiii + 31 pp.: appendices.

References: 12 (1990-2010)

# Daftar Isi

Halaman Pernyataan Orisinalitas	ii
Halaman Pengesahan	iii
Kata Pengantar	v
Halaman Pernyataan Persetujuan Publikasi	ix
Abstrak	x
Daftar Isi	xii
<b>1 Pendahuluan</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Perumusan masalah . . . . .	3
1.3 Metode Penelitian . . . . .	3
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
<b>2 Fluida QCD dan Geometri FRW</b>	<b>4</b>
2.1 Formulasi Lagrangian Fluida QCD . . . . .	5
2.1.1 Unifikasi Magnetofluida dengan Medan Gauge non-Abelian	5
2.1.2 Aplikasi Unifikasi Magnetofluida non-Abelian pada Plasma Quark-Gluon [2] . . . . .	8
2.2 Geometri Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	9
2.2.1 Prinsip Kosmologi . . . . .	9
2.2.2 Metrik Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	10
2.3 Persamaan Medan Kosmologi . . . . .	10

<b>3</b>	<b>Perhitungan Persamaan-persamaan Dinamik</b>	<b>14</b>
3.1	Tensor Energi-Momentum Fluida QCD . . . . .	14
3.2	Kontribusi Fluida QCD dalam Persamaan Medan Einstein . . . . .	18
3.3	Fungsi Keadaan Distribusi Fluida QCD . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Hasil dan Pembahasan</b>	<b>23</b>
4.1	Persamaan Friedmann . . . . .	23
4.2	Persamaan Dinamik untuk Berbagai Jenis Ruang Simetri Maksimal	25
4.2.1	Ruang Datar, $k = 0$ . . . . .	26
4.2.2	Ruang dengan Kelengkungan Negatif, $k = -1$ . . . . .	26
4.2.3	Ruang dengan Kelengkungan Positif, $k = +1$ . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Kesimpulan dan Saran</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Simbol Christoffel untuk Geometri FRW</b>	<b>29</b>
	<b>Daftar Acuan</b>	<b>30</b>

# Bab 1

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Berdasarkan teori Big Bang, alam semesta paling awal pada sekitar kurang dari  $10^{-5}$  detik [1] diisi oleh fase quark. Fase quark ini dipandang berupa plasma quark-gluon (*Quark-Gluon Plasma*, QGP) yang memiliki suhu dan kerapatan yang tinggi. Plasma quark-gluon merupakan fase *Quantum Chromodynamics* (QCD) yang muncul pada suhu dan kerapatan yang sangat tinggi (dalam orde  $T_c = 170$  MeV, atau sekitar  $10^{13}$  K) [2]. Plasma quark-gluon terdiri dari quark dan gluon seperti halnya pada hadron. Perbedaan dari kedua fase ini adalah bahwa pada hadron setiap quark dalam keadaan terikat dengan quark lain atau dengan anti-quark (confined). Sedangkan pada QGP, quark dan anti-quark tidak terikat membentuk hadron (de-confined) melainkan bergerak bebas membentuk *fireball* bersama gluon pada suatu volume bersuhu tinggi. Sebagian besar perhitungan set parameter dan persamaan dinamik yang berhubungan dengan fase QGP pada alam semesta awal ialah dengan pendekatan geometri Friedman-Robertson-Walker (FRW) dalam teori Relativitas Umum [3], formalisme *Lattice Quantum Chromodynamics* (*Lattice QCD*) [3, 4], dan memandang plasma quark-gluon sebagai fluida kental (*viscous fluid*) [3].

Teori relativitas umum dalam hal ini konsep geometri FRW digunakan untuk mengkonstruksi persamaan evolusi untuk mencari parameter Hubble. Selanjutnya, dari parameter Hubble ini akan diperoleh besaran-besaran geometri dan termodinamika yang memenuhi *Universe* FRW, seperti faktor skala  $a(t)$  dalam geometri FRW, densitas energi  $\rho(t)$ , suhu  $T(t)$ , dan tekanan viskos bulk  $\Pi(t)$  [3].

Urgensi dari penggunaan teori relativitas umum di sini karena *universe* dipandang sebagai keseluruhan di mana konsep bentuk dari *space-time* digunakan.

Penggunaan konsep *lattice* QCD merupakan simulasi *lattice* QCD untuk menganalisis hasil eksperimen tumbukan relativistik antara ion-ion berat pada energi tinggi dengan RHIC pada BNL yang menunjukkan adanya fase plasma quark-gluon. Namun demikian, hasil simulasinya hanya menunjukkan kemungkinan kesesuaian dengan bukti suatu eksperimen [2]. QGP dapat dimodelkan sebagai fluida kental yang dijelaskan dalam Tawfik, Wahba, Mansour, dan Harko [3]. Model ini hanya memodifikasi bentuk persamaan tensor energi-momentum untuk fluida sempurna (*perfect fluid*) dengan menambahkan suku  $\Pi u_\mu u^\nu - \Pi \delta_\mu^\nu$ . Model fluida sempurna dan tensor energi-momentum-nya dijelaskan pada Hobson, Efstathiou, and Lasenby [5] dan Schutz [6].

Penjelasan teoritis untuk QGP untuk hasil eksperimen tumbukan dua hadron yang dipercepat masih sangat prematur. Secara garis besar ada 2 penjelasan umum, yaitu yang berdasarkan teori fluida relativistik (seperti mekanika fluida klasik tetapi memiliki sifat relativistik), serta kalkulasi berbasis QCD (*Quantum Chromodynamics*/ teori gaya kuat) [7]. Produksi plasma merupakan hasil interaksi kuat (antar hadron), karenanya dipercaya interaksi yang dominan adalah interaksi kuat dengan mediasi partikel gluon. Tetapi karena plasma berisi banyak partikel gluon dan kuark, tidak bisa dilakukan kalkulasi standar di fisika partikel. Untuk itu dilakukan kalkulasi secara numerik dengan *lattice* QCD.

Pada penelitian ini akan digunakan model QGP berbasis teori fluida relativistik dengan pendekatan QCD yang diinterpretasikan dalam bentuk lagrangian yang memiliki simetri *gauge* seperti yang dijelaskan dalam Sulaiman, Fajarudin, Djun, dan Handoko [8]. Lagrangiannya merupakan bentuk lagrangian klasik yang relevan mengingat fenomena QGP terjadi pada temperatur yang sangat tinggi sehingga efek kuantum dapat diabaikan. Tensor energi-momentum yang diturunkan dari lagrangian digunakan dalam persamaan medan Einstein. Persamaan yang diperoleh akan dihitung dalam kerangka kerja geometri FRW. Selanjutnya akan dicari set parameter dan persamaan dinamik yang berhubungan dengan fase QGP, seperti persamaan medan kosmologi, persamaan gerak fluida kosmologi, besaran-besaran geometri, dsb.



## 1.2 Perumusan masalah

Terdapat model fluida relativistik dengan pendekatan lagrangian QCD yang memiliki simetri gauge yang menjelaskan sistem plasma quark-gluon. Lagrangian dari sistem QGP ini kemudian dicari tensor energi-momentum-nya. Tensor energi-momentum kemudian digunakan dalam persamaan medan Einstein untuk mencari solusi persamaan ini dalam kerangka kerja geometri FRW untuk awal alam semesta pada fase quark-gluon. Dinamika geometri *spacetime* awal alam semesta dikarakterisasi oleh faktor skala kosmik  $R(t)$  yang ditentukan dari solusi persamaan medan Einstein. Selain itu, perhitungan dilakukan untuk mencari set persamaan-persamaan dinamik, seperti persamaan Friedmann, persamaan keadaan fluida QCD, dan set persamaan lain yang mungkin.

## 1.3 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan secara teoritik dengan melakukan kajian literatur untuk mengkomparasi model-model yang telah ada serta melakukan perhitungan set parameter dan persamaan dinamik. Tensor energi-momentum fluida QCD digunakan dalam persamaan medan Einstein yang dikerjakan dalam konsep geometri FRW. Selanjutnya akan dicari set parameter dan persamaan dinamik. Kemudian akan dilakukan analisis terhadap hasil-hasil perhitungan.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dinamika awal alam semesta geometri Friedmann-Robertson-Walker (FRW) pada fase quark dari set parameter dan persamaan dinamik. Set parameter dan persamaan dinamik dapat diperoleh dari solusi persamaan medan Einstein dengan menggunakan tensor energi-momentum fluida QCD.

## Bab 2

# Fluida QCD dan Geometri FRW

Istilah 'Fluida QCD' di sini merujuk pada suatu model yang mendeskripsikan QGP sebagai aliran fluida gluon dengan materi quark dan anti-quark yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik. Namun, berdasarkan fakta [8] bahwa kontribusi gaya elektromagnetik hanya beberapa persen, maka gaya ini dapat diabaikan. Sehingga suku-suku yang tersisa pada lagrangiannya hanya kontribusi dari suku-suku medan fluida dan arus materi (quark dan anti-quark). Hal inilah yang menjadi alasan penamaan dari model magnetofluida QGP menjadi fluida QCD. Walaupun demikian, untuk alasan teoritis, suku-suku yang diabaikan tetap dipertahankan.

Bab ini menguraikan kasus umum unifikasi medan fluida non-Abelian yang berinteraksi dengan suatu medan gauge non-Abelian dengan simetri  $G(n)_F \otimes G(n)_G$ . Teori unifikasi dalam fisika partikel dilakukan dengan menggunakan pendekatan lagrangian. Lagrangian materi ditransformasikan oleh suatu grup tertentu sehingga akan didapatkan suku-suku baru pada lagrangian yang merupakan manifestasi interaksi materi dengan medan gauge atau interaksi antara medan-medan gauge. Setelah itu diuraikan juga aplikasi dari unifikasi magnetofluida non-Abelian pada plasma quark-gluon.

Uraian berikutnya pada bab ini berkaitan dengan salah satu konsep dalam teori relativitas umum yang menerangkan tentang konsep ruang-waktu untuk alam semesta yang bertumpu pada asumsi homogen dan isotropik. Geometri dari konsep ruang-waktu yang homogen dan isotropik ini merupakan konsep dari geometri Friedmann-Robertson-Walker. Pada bagian ini dipaparkan mengenai prinsip kos-

mologi, suatu prinsip yang mengasumsikan bahwa alam semesta homogen dan isotropik berdasarkan pada hasil observasi. Selanjutnya dibahas juga mengenai bentuk metrik geometri FRW.

Bagian terakhir pada bab ini menerangkan tentang penurunan analitik matematika dalam mencari solusi dari persamaan medan Einstein untuk kasus fluida sempurna (*perfect fluid*). Hasil yang diperoleh berupa set persamaan dinamik yang disebut *persamaan Friedmann-Lemaitre*, dan untuk kasus dengan konstanta kosmologi  $\Lambda = 0$  persamaannya hanya disebut *persamaan Friedmann*. Alur penurunan set persamaan dinamik pada bagian ini menjadi acuan dalam menurunkan set persamaan dinamik untuk fluida QCD.

## 2.1 Formulasi Lagrangian Fluida QCD

### 2.1.1 Unifikasi Magnetofluida dengan Medan Gauge non-Abelian

Berikut ini merupakan prosedur dasar dalam pendekatan lagrangian, dimulai dari lagrangian materi [8],

$$\mathcal{L}_{\text{materi}} = \begin{cases} (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \frac{1}{2} m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi + V(\Phi) & \text{untuk boson} \\ i\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m_\Psi \bar{\Psi} \Psi & \text{untuk fermion} \end{cases}. \quad (2.1)$$

$V(\Phi)$  adalah potensial, contohnya pada teori  $\phi^4$ ,  $V(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$ , dan  $\not{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu$  dengan  $\gamma_\mu$  adalah matriks Dirac.

Medan materi ditransformasi sebagai  $\Phi \xrightarrow{U} \Phi' \equiv \exp[-iT_a \theta^a(x)] \Phi$  atau  $\Psi \xrightarrow{U} \Psi' \equiv \exp[-iT_a \theta^a(x)] \Psi$  di bawah transformasi gauge lokal non-Abelian  $G(n)$   $U \equiv \exp[-iT_a \theta^a(x)] \approx 1 - iT_a \theta^a(x)$  dengan  $\theta^a \ll 1$ , dengan medan materi secara umum merupakan suatu  $n \times 1$  muliplet yang mengandung  $n$  elemen untuk grup Lie  $n$  dimensi seperti  $SU(n)$ ,  $O(n+1)$ , dsb.  $T^a$  merupakan generator milik grup Lie ini dan memenuhi relasi komutasi  $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$  dengan  $f^{abc}$  merupakan konstanta struktur anti-simetri. Jumlah generator dan juga boson *gauge* ditentukan oleh dimensi grup yang dipandang. Untuk grup  $SU(n)$  terdapat  $n^2 - 1$  generator dan indeks  $a$  berjalan dari  $1, 2, \dots, n^2 - 1$ .  $U(1)$  merupakan transformasi fase,  $T_a \theta^a(x) \rightarrow \theta(x)$ . Invariansi gauge kemudian dinyatakan dengan memperkenalkan medan gauge  $A_\mu$  yang ditransformasikan sebagai

$A_\mu^a \xrightarrow{U} A_\mu^{a'} \equiv A_\mu^a + (1/g)(\partial_\mu \theta^a) + f^{abc} \theta^b A_\mu^c$ , dan menggantikan derivatifnya dengan bentuk derivatif kovarian,  $\mathcal{D} \equiv \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ , dimana  $g$  adalah "muatan" gauge. Lebih lanjut, suku kinetik invariansi gauge untuk boson gauge  $A_\mu^a$  mengambil bentuk  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ , dengan *strength tensor*  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ .

Selanjutnya akan dibuat kasus umum dari fluida non-Abelian yang berinteraksi dengan suatu medan gauge non-Abelian dengan simetri  $G(n)_F \otimes G(n)_G$ . Prinsip gauge di atas dapat digunakan untuk setiap medan secara independen, yaitu transformasi gauge dilakukan secara terpisah dengan parameter fase independen  $\theta(x)$ . Konsekuensi dari perlakuan sifat simetri terhadap densitas lagrangian materi yang ditransformasikan adalah diperkenalkannya suku-suku yang mengandung  $U_\mu$  dan  $A_\mu$  sebagai boson gauge yang berturut-turut dihubungkan dengan medan fluida dan medan gauge lain untuk *space* grup yang berbeda. Sehingga derivatif kovarian dari densitas lagrangian yang memiliki simetri gauge menjadi,

$$\mathcal{D} \equiv \partial_\mu + ig_F T_F^a U_\mu^a + ig_G T_G^a A_\mu^a, \quad (2.2)$$

di mana  $g_F$  adalah "muatan" untuk fluida dan  $g_G$  adalah muatan gauge.

Akhirnya lagrangian total yang memiliki simetri gauge menjadi,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{materi}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{interaksi}}, \quad (2.3)$$

di mana

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int.}} = -g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} - g_G J_{G\mu}^a A^{a\mu} + \mathcal{L}_{\text{int.}}^{\text{boson}}, \quad (2.5)$$

dan  $S_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu U_\nu^a - \partial_\nu U_\mu^a + g_F f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c$ . Sementara, dalam kasus material bosonik terdapat suku campuran tambahan dalam Pers. (2.5) yang berasal dari suku kinetik invariansi gauge  $(\mathcal{D}_\mu \Phi)(\mathcal{D}^\mu \Phi)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int.}}^{\text{boson}} &= g_F^2 (\Phi^\dagger T_F^a T_F^b \Phi) U_\mu^b U^{b\mu} + g_G^2 (\Phi^\dagger T_G^a T_G^b \Phi) A_\mu^a A^{b\mu} \\ &+ g_F g_G [\Phi^\dagger (T_F^a T_G^b + T_G^b T_F^a) \Phi] U_\mu^a A^{b\mu}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

"Arus" vektor-4  $J_\mu^a$  adalah,

$$J_{X\mu}^a = \begin{cases} -i[(\partial_\mu \Phi)^\dagger T_X^a \Phi + \Phi^\dagger T_X^a (\partial_\mu \Phi)] & \text{untuk boson} \\ \bar{\Psi} T_X^a \gamma_\mu \Psi & \text{untuk fermion} \end{cases}, \quad (2.7)$$

dengan  $X : F, G$  dan  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma_0$ .

Setelah mendapatkan densitas lagrangian total ini, dinamika fluida dan kontribusi interaksinya dengan medan gauge lainnya dapat diinvestigasi lebih lanjut. Persamaan gerak medan magnetofluida dapat diperoleh dari persamaan Euler-Lagrange dalam bentuk medan  $U_\mu^a$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\mu^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu U_\nu^a)} = 0, \quad (2.8)$$

Dengan mensubstitusikan Pers. (2.3) ke dalam persamaan Euler-Lagrange, maka akan didapatkan persamaan gerak

$$\begin{aligned} \partial^\nu S_{\mu\nu} &= g_F \mathcal{J}_{F\mu} \quad \text{untuk Abelian,} \\ \mathcal{D}^\nu S_{\mu\nu}^a &= g_F \mathcal{J}_{F\mu}^a \quad \text{untuk non - Abelian,} \end{aligned} \quad (2.9)$$

dengan arus kovariannya adalah

$$\mathcal{J}_{F\mu}^a = \begin{cases} -i[(\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger T_F^a \Phi + \Phi^\dagger T_F^a (\mathcal{D}_\mu \Phi)] & \text{untuk boson} \\ J_{F\mu}^a & \text{untuk fermion} \end{cases}, \quad (2.10)$$

Lebih jauh, *strength tensor* anti-simetri dalam Pers. (2.9) menyatakan bahwa  $\partial_\mu \mathcal{J}_{F\mu}^a = 0$ , yaitu  $\mathcal{J}_{F\mu}^a$  adalah arus yang terkonservasi.

Mengikuti langkah yang dilakukan pada [9, 10, 11], medan fluidanya memiliki bentuk relativistik sebagai berikut,

$$U_\mu^a = (U_0^a, \mathbf{U}^a) \equiv u_\mu^a \phi \quad \text{dan} \quad u_\mu \equiv \gamma^a (1, -\mathbf{v}^a). \quad (2.11)$$

Di sini,  $u_\mu$  adalah kecepatan relativistik dan  $\gamma \equiv (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$ , sementara  $\mathbf{v}$  adalah kecepatan arah spasial. Index  $a$  pada  $\gamma^a \mathbf{v}^a$  hanya untuk melabelkan aliran tiap medan dan bukan menjumlahkan semua medan tersebut.  $\phi$  adalah dimensi satu medan untuk menjaga dimensinya benar dan akan merepresentasikan distribusi medan.

Pers. (2.11) sebenarnya analog dengan boson gauge dalam fisika partikel, yaitu bahwa kecepatan-4  $u_\mu$  menggantikan vektor polarisasi  $\epsilon_\mu$ , sementara  $\phi$  akan mengambil bentuk  $\sim \exp(-ip_\mu x^\mu)$  di mana  $p_\mu$  adalah momentum-4. Kita ingat bahwa fungsi gelombang  $U_\mu$  untuk partikel bebas memenuhi

$$\left[ g^{\nu\mu} (\partial^2 + m_U^2) - \partial^\nu \partial^\mu \right] U_\mu = 0,$$

dengan solusi  $U_\mu \sim \epsilon_\mu \exp(-ip_\mu x^\mu)$ .

### 2.1.2 Aplikasi Unifikasi Magnetofluida non-Abelian pada Plasma Quark-Gluon [2]

Plasma quark-gluon terdiri dari quark dan anti-quark yang berinteraksi dengan gluon-gluon dan medan elektromagnetik. Lagrangian dari sistem ini dinyatakan dengan simetri gauge  $SU(3)_F \otimes U(1)_G$ ,

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}\not{\partial}Q - m_Q\bar{Q}Q - \frac{1}{4}S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu} + q J_{G\mu} A^\mu, \quad (2.12)$$

di mana  $g_G$  diganti dengan  $q$  yang merupakan muatan quark,  $Q$  merepresentasikan spinor quark (triplet),  $J_F^{a\mu} = \bar{Q}T_F^a\gamma^\mu Q$  dan  $J_G^\mu = \bar{Q}\gamma^\mu Q$ , dan  $T_F^a$  merupakan matriks Gell-Mann  $SU(3)$  yang dinyatakan dengan representasi fundamental  $\frac{\lambda_a}{2}$  ( $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) dengan normalisasi  $Tr(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}$ .

Secara makroskopik, model ini menggambarkan sistem yang terdiri dari fluida non-Abelian yang disusun oleh sekumpulan gluon (*gluon cloud*) dengan kerapatan yang besar dan mengelilingi materi (quark dan anti-quark) dalam medan elektromagnetik. Model ini menjelaskan hasil eksperimen dari PHENIX collaboration pada BNL menggunakan RHIC yang menyatakan quark-gluon pada *fireball* bersifat seperti fluida.

Nilai  $g_F$  ditentukan oleh nilai *fine structure* dari interaksi kuat  $g_F^2 = 4\pi\alpha_s$ , di mana nilai  $\alpha_s$  bergantung dengan skala energi yang dipakai, contohnya pada  $T = 200$  MeV maka nilai  $\alpha_s$  berkisar di antara 0,2 dan 0,5 dengan  $g_F$  di antara 1,5 dan 2,5. Berdasarkan hasil eksperimen, QGP memiliki kerapatan besar, *time life* sangat singkat, dan viskositas kecil seperti fluida ideal ( $\omega_a = 0$ ). Jika lagrangian QGP dipandang, fluida yang disusun oleh gluon tidak berinteraksi dengan medan elektromagnetik, tetapi quark dan anti-quark berinteraksi dengan medan elektromagnetik dinyatakan oleh suku terakhir pada lagrangian.

Pada persamaan gerak (2.12), kontribusi medan elektromagnetik terdapat pada  $\vec{F}^a$  yang dinyatakan dengan faktor  $\frac{q}{g_F} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_s}} \approx O(10^{-1})$ , di mana nilai muatan quark ekuivalen dengan muatan listrik  $e = \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}}$  [8]. Jadi, dapat disimpulkan bahwa kontribusi gaya elektromagnetik sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Hal ini memberikan pandangan alternatif dari fakta bahwa tidak terdapat gaya elektromagnetik kisaran jauh pada plasma non-Abelian. Sehingga densitas lagrangian

untuk medan fluida menjadi

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu}. \quad (2.13)$$

Dua suku pertama dari Pers. (2.12) merupakan suku dari sistem quark dan antiquark dapat diabaikan pada Pers. (2.13) dengan asumsi bahwa densitas dari quark-antiquark ini lebih kecil dari densitas medan gluon. Selain itu, perlu diperhatikan pula bahwa lagrangian pada (2.13) secara umum bisa digunakan pada level energi berapa pun. Namun di sini ditekankan bahwa lagrangian ini digunakan pada level energi (atau temperatur) fase QGP yang terobservasi di laboratorium sehingga pola pikirnya level energi terobservasi tidak dicari secara teoritis dari lagrangian ini.

## 2.2 Geometri Friedmann-Robertson-Walker

### 2.2.1 Prinsip Kosmologi

Pada alam semesta kita yang teramati, materi dan radiasi pada skala kecil terdistribusi secara tidak teratur, tapi jika melihat pada skala yang lebih besar (sebesar volume Hubble), distribusinya terlihat lebih seragam. Hal ini didukung oleh fakta bahwa terdapat kesesuaian temperatur radiasi latarbelakang kosmik (*cosmic microwave background*) pada semua arah yang berbeda di langit. Hal ini dapat dikatakan bahwa alam semesta kita bersifat isotropik pada skala yang sangat besar, alam semesta terlihat sama pada semua arah sudut pandang. Selain itu, berdasarkan hasil observasi, alam semesta kita juga bersifat homogen, artinya distribusi materi dan radiasi pada suatu koordinat (posisi) tertentu akan sama di koordinat yang lain. Sehingga alam semesta kita merupakan alam semesta yang homogen dan isotropik. Sehingga kita asumsikan *prinsip kosmologi menyatakan bahwa pada suatu waktu tertentu universe terlihat sama dari semua posisi dalam space pada suatu waktu tertentu tersebut dan semua arah dalam space pada suatu titik tertentu adalah equivalen.*

### 2.2.2 Metrik Friedmann-Robertson-Walker

*Spacetime* alam semesta kita yang memenuhi *spacetime* yang bentuk metriknya bertumpu pada asumsi homogen dan isotropik adalah *spacetime* atau geometri Friedmann-Robertson-Walker. Arti geometris dari metrik FRW ini, metrik yang digunakan untuk memodelkan alam semesta haruslah memiliki simetri maksimal (maximally symmetric), yang ditulis dalam bentuk

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.14)$$

dan metriknya merupakan metrik diagonal,

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -R^2(t)r^2, \quad g_{33} = -R^2(t)r^2\sin^2\theta, \quad (2.15)$$

di mana  $(t, r, \theta, \phi)$  merupakan koordinat (dirujuk sebagai *comoving coordinat*) dan fungsi  $R(t)$  adalah faktor skala kosmik yang hanya bergantung pada waktu kosmik saja.

Hanya ada tiga jenis ruang yang memiliki simetri maksimal, yaitu ruang datar (*flat*), ruang dengan kelengkungan positif konstan (*space of positive constant curvature*), dan ruang dgn kelengkungan negatif konstan (*space of negative constant curvature*). Konstanta  $k$  mengkarakterisasi ketiganya,  $k = 0$ , berarti ruang datar atau kelengkungan nol,  $k = +1$  berarti kelengkungan positif,  $k = -1$  berarti kelengkungan negatif.

Koordinat waktu pada Pers. (2.14) hanya merupakan *proper time*, yaitu waktu yang diukur oleh pengamat yang diam pada *comoving frame*, di mana  $(r, \theta, \phi) = \text{konstan}$ . Istilah "*comoving*" merupakan pemilihan yang baik: Pengamat yang diam pada *comoving frame* tetap diam, yaitu  $(r, \theta, \phi)$  tetap tidak berubah, dan pengamat yang awalnya bergerak terhadap *frame* ini, akhirnya akan datang untuk diam pada *frame* ini [12].

## 2.3 Persamaan Medan Kosmologi

Dinamika dari geometri spacetime FRW secara keseluruhan dikarakterisasi oleh faktor skala  $R(t)$ . Untuk menentukan fungsi  $R(t)$ , diperoleh dari solusi persamaan



medan Einstein dalam kehadiran materi. Persamaan medan Einstein diberikan oleh

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} ,$$

equation di mana  $\kappa = 8\pi G/c^2$ . Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (2.17)$$

di mana  $T = T^\alpha_\alpha$ . Selain itu tensor energi-momentum yang digunakan pada persamaan medan (2.17) harus:

- memiliki sifat simetrik, karena sesuai kesimetrian tiap tensor pada persamaan medan,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} ,$$

- memenuhi sifat konservasi energi dan momentum yang dinyatakan dengan persamaan

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Untuk memecahkan persamaan medan ini diperlukan model tensor energi momentum dari materi yang mengisi universe. Sebagai contoh digunakan model materi fluida makroskopik sederhana, tanpa sifat-sifat viskositas geser, viskositas bulk, dan konduktivitas panas. Fluida ini diistilahkan fluida sempurna (*perfect fluid*), yang dikarakterisasi pada tiap titik dengan densitas  $\rho$  dan tekanan  $p$  pada kerangka diam sesaat (*instantaneous rest frame*). Tensor energi-momentumnya adalah

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} . \quad (2.19)$$

Karena solusi yang dicari adalah untuk universe yang homogen dan isotropik, densitas  $\rho$  dan tekanan  $p$  harus merupakan fungsi waktu kosmik itu sendiri.

Perhitungannya dikerjakan dengan mengadopsi *comoving coordinat*  $[x^\mu] = (t, r, \theta, \phi)$ , di mana metrik FRW mengambil bentuk dari Pers. (2.14) dan (2.15). Karena metriknya diagonal, komponen kontravarian  $g^{\mu\nu}$  secara sederhana merupakan invers dari komponen kovariannya.

Komponen tensor Ricci dapat dihitung dalam term koefisien koneksi (*the connection coefficients* atau *Christoffel symbols*,  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ ), di mana tidak semua koefisien koneksi tidak bernilai nol<sup>1</sup>. Ekspresi untuk tensor Ricci adalah

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} .$$

Hasil perhitungan untuk komponen-komponen tensor Ricci dalam term *Christoffel symbols*, didapatkan bahwa komponen *off diagonal*-nya bernilai nol dan komponen *on-diagonal*-nya diberikan dengan

$$R_{00} = 3\ddot{R}/R ,$$

$$R_{11} = - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k \right) c^{-2}/(1 - kr^2) ,$$

$$R_{22} = - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k \right) c^{-2}r^2 ,$$

$$R_{33} = - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k \right) c^{-2}r^2\sin^2\theta .$$

Selanjutnya dihitung tiap komponen dari ruas kanan persamaan medan Einstein (2.17). Dalam sistem *comoving coordinat* ( $t, r, \theta, \phi$ ), kecepatan-4 dari fluida dinyatakan

$$[u^{\mu}] = (1, 0, 0, 0) ,$$

yang dapat ditulis sebagai  $u^{\mu} = \delta_0^{\mu}$ . Sehingga komponen kovarian dari kecepatan-4 adalah

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu}\delta_0^{\nu} = g_{\mu 0} = c^2\delta^0_{\mu} ,$$

sehingga tensor energi-momentum (2.19) dapat ditulis sebagai

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho c^2 + p \right) c^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - p g_{\mu\nu} .$$

Lebih jauh, karena  $u^{\alpha}u_{\alpha} = c^2$ , kontraksi dari tensor energi-momentum diberikan

$$T = T_{\alpha}^{\alpha} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2 - p g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \rho c^2 - 3p .$$

<sup>1</sup>*Christoffel symbols* yang tidak nol adalah  $\Gamma_{11}^0, \Gamma_{22}^0, \Gamma_{33}^0, \Gamma_{01}^1, \Gamma_{11}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{02}^2, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{33}^2, \Gamma_{03}^3, \Gamma_{13}^3$ , dan  $\Gamma_{23}^3$ .

Karenanya suku-suku ruas kanan persamaan medan (2.17) yang bergantung pada energi-momentum sebagai

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) c^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - \frac{1}{2} (\rho c^2 - p) g_{\mu\nu} .$$

Ruas kanan persamaan medan (2.17) bernilai nol untuk  $\mu \neq \nu$ . Komponen yang tidak nol adalah

$$\begin{aligned} -\kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} \right) + \Lambda g_{00} &= -\frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 + 3p) c^2 + \Lambda c^2 , \\ -\kappa \left( T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11} \right) + \Lambda g_{11} &= -\left[ \frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 - p) + \Lambda \right] R^2 / (1 - kr^2) , \\ -\kappa \left( T_{22} - \frac{1}{2}Tg_{22} \right) + \Lambda g_{22} &= -\left[ \frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 - p) + \Lambda \right] R^2 r^2 , \\ -\kappa \left( T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33} \right) + \Lambda g_{33} &= -\left[ \frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 - p) + \Lambda \right] R^2 r^2 \sin^2 \theta . \end{aligned}$$

Dengan mengkombinasikan ekspresi-ekspresi ini dengan komponen tensor Ricci, terlihat bahwa tiga persamaan medan yang arah spasial adalah ekuivalen, yang secara esensial berdasar pada homogenitas dan isotropi metrik FRW. Sehingga dari komponen-komponen persamaan medan di atas menghasilkan dua persamaan yang independen,

$$\begin{aligned} 3\ddot{R}/R &= -\frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 + 3p) c^2 + \Lambda c^2 , \\ R\ddot{R} + 2\dot{R} + 2c^2 k &= \left[ \frac{1}{2}\kappa (\rho c^2 - p) + \Lambda \right] c^2 R^2 . \end{aligned}$$

Dengan mengeliminasi  $\ddot{R}$  dari persamaan kedua di atas dan mengingat bahwa  $\kappa = 8\pi G/c^4$ , akhirnya didapatkan *persamaan medan kosmologi*

$$\begin{aligned} R &= -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) R + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R , \\ \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R^2 - c^2 k . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dua persamaan differensial ini menentukan evolusi waktu dari faktor skala  $R(t)$  dan disebut sebagai *persamaan Friedmann-Lemaitre*. Pada kasus  $\Lambda = 0$ , kedua persamaan ini secara sederhana disebut *persamaan Friedmann*.

## Bab 3

# Perhitungan Persamaan-persamaan Dinamik

Bab ini menjelaskan mengenai penggunaan tensor energi-momentum fluida QCD dalam persamaan medan Einstein. Tujuannya adalah untuk mencari set persamaan dinamik yang berhubungan dengan faktor skala kosmik. Bagian pertama menguraikan perhitungan tensor energi-momentum fluida QCD yang memenuhi syarat kesimetrian persamaan medan Einstein serta syarat konservasi energi dan momentum. Bagian kedua menguraikan perhitungan solusi persamaan medan Einstein dalam konteks geometri FRW. Hasil perhitungan yang diinginkan adalah persamaan Friedman untuk fluida QCD. Bagian ketiga menjelaskan tentang perhitungan untuk mencari fungsi keadaan dari fluida QCD juga dari persamaan medan Einstein, yang berupa korelasi fungsi distribusi medan fluida dengan faktor skala kosmik.

### 3.1 Tensor Energi-Momentum Fluida QCD

Telah diketahui bahwa lagrangian dari sistem QGP dengan menggunakan fluida SU(3) non-Abelian yang dibentuk oleh awan gluon yang mengelilingi materi (quark dan anti-quark) yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik diberikan oleh Pers. (2.12). Dengan fakta bahwa pengaruh medan elektromagnetik sangat kecil serta dua suku pertama dari persamaan tersebut merupakan lagrangian untuk sistem quark dan antiquark yang densitasnya kecil sehingga dapat diabaikan, maka lagrangiannya menjadi lagrangian Pers. (2.13),

dengan  $S_{\mu\nu}^a = \partial_\mu U_\nu^a - \partial_\nu U_\mu^a + g_F f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c$ . Formalisme pendekatan lagrangian ini dikerjakan dalam *spacetime* Minkowskian di mana tensor metrik *spacetime*-nya  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Metrik ini komponen *off-diagonal*-nya bernilai nol sedangkan *on-diagonal*-nya konstan.

Namun, jika formalisme lagrangian ini dibawa ke dalam kerangka kerja geometri *spacetime* yang lebih umum harus dilakukan modifikasi terhadap tensor metrik dan derivatif suatu besaran fisis terhadap *spacetime* yang dimaksud. Hal ini dikarenakan pada pengambilan *spacetime* yang lebih umum geometrinya akan lebih bervariasi, lebih tepatnya adanya kelengkungan-kelengkungan (*curvature*) pada *spacetime* dikarenakan kehadiran materi. Konsep teori relativitas umum secara garis besar menyatakan bahwa geometri dari suatu *spacetime* akan mengalami kelengkungan dikarenakan terdapat materi padanya. Dalam konteks ini, kerangka kerja geometri *spacetime* yang lebih umum itu dipilih geometri Friedmann-Robertson-Walker (FRW) yang dicirikan dengan tensor metriknya. Metrik FRW ini bertumpu pada asumsi homogen dan isotropik karena prinsip ini merupakan prinsip yang natural dalam memodelkan alam semesta.

Sehingga bentuk *strenght tensor*  $S_{\mu\rho}^a$  dari lagrangian QGP Pers. (2.13) dalam geometri FRW diberikan oleh

$$S_{\mu\nu}^a = \nabla_\mu U_\nu^a - \nabla_\nu U_\mu^a + g_F f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c, \quad (3.1)$$

di mana bentuk derivatif  $\partial_\mu$  diubah menjadi derivatif kovarian  $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha$ , di mana  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ , yang merupakan indeks *dummy*.

Lagrangian dari Pers. (2.13) dinyatakan sebagai

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} S_{\mu\nu}^a S^{a\mu\nu} + g_F J_{F\mu}^a U^{a\mu}. \quad (3.2)$$

Lagrangian ini merupakan lagrangian untuk satu partikel yang terlihat dengan penggunaan indeks  $a$  yang menyatakan indeks untuk tiap jenis partikel gluon. Tensor energi-momentum yang diturunkan dari lagrangian materi haruslah tensor yang menyatakan sistem keseluruhan dari sekumpulan materi atau partikel jika digunakan pada persamaan medan Einstein. Karena itu lagrangiangnya harus dibuat sehingga merepresentasikan semua materi secara keseluruhan. Hingga poin ini dapat digunakan asumsi bahwa sistem QGP ini dipandang sebagai fluida

yang homogen, sehingga pada setiap elemen volume ruang, besar densitas dan jenis dari tiap medannya dipandang sama. Dengan demikian, jika kita mengambil lagrangian untuk suatu elemen volume ruang, maka lagrangian pada elemen ruang yang lain bentuknya sama juga. Oleh karena itu, medan dari tiap gluon dinyatakan dengan

$$U^{a\mu} = U^{b\mu} = U^{c\mu} = U^{d\mu} = U^\mu. \quad (3.3)$$

Selain itu, suku pada *strenght tensor* yang mengandung konstanta struktur anti-simetri dibuat menjadi

$$\begin{aligned} g_F f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c &= g_F \sum_{a,b,c} f^{abc} U_\mu U_\nu \\ &= g_F F U_\mu U_\nu \end{aligned} \quad (3.4)$$

dan

$$\begin{aligned} g_F^2 f^{abc} f^{ade} U_\mu^b U_\nu^c U^{d\mu} U^{e\nu} &= g_F^2 \sum_{a,b,c,d,e} f^{abc} f^{ade} U_\mu U_\nu U^\mu U^\nu \\ &= g_F^2 \bar{F} U_\mu U_\nu U^\mu U^\nu, \end{aligned} \quad (3.5)$$

di mana, seperti yang terlihat,  $F = \sum_{a,b,c} f^{abc}$  dan  $\bar{F} = \sum_{a,b,c,d,e} f^{abc} f^{ade}$ .  $F$  dan  $\bar{F}$  hanya merupakan konstanta yang bernilai positif. Maka, lagrangianya sekarang sudah merepresentasikan lagrangian medan fluida untuk seluruh ruang, sehingga dinyatakan sebagai

$$L = -\frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + g_F J_{F\mu} U^\mu. \quad (3.6)$$

Namun demikian, untuk sementara, indeks-indeks  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , dan  $e$  pada tensor *strenght* dan tensor medan akan tetap dipertahankan pada perhitungan-perhitungan selanjutnya. Kecuali pada perhitungan hasil akhir, maka konvensi pada Pers. (3.4) dan (3.5) akan digunakan kembali.

Seperti pada kasus *perfect fluid* yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, tensor energi-momentum yang digunakan pada persamaan medan Einstein harus memenuhi syarat kesimetrian dan memenuhi persamaan  $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ . Oleh karena itu, untuk kasus fluida QCD, tensor energi-momentumnya juga harus memenuhi syarat-syarat tersebut. Untuk mencari tensor energi-momentum fluida yang simetrik, digunakan prinsip variasi aksi dari lagrangian fluida QCD  $L$  yang

divariasikan terhadap tensor metrik  $g^{\mu\nu}$ . Variasi aksi dari lagrangian medan  $L$  memenuhi persamaan berikut

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x . \quad (3.7)$$

Aksi dari lagrangian suatu medan dalam manifold ruang-waktu 4 dimensi dinyatakan dengan [5]

$$S = \int_{\mathcal{R}} L \sqrt{-g} d^4x . \quad (3.8)$$

Aksi dari lagrangian fluida QCD dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{R}} \left( -\frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + g_F J_{F\mu} U^\mu \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{R}} \left( -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} S_{\mu\nu} S_{\rho\sigma} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}} g_F J_{F\mu} U_\nu g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Jika aksi-nya divariasikan terhadap  $g^{\mu\nu}$ , maka didapatkan

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\mathcal{R}} \left[ -\frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\rho\sigma} \delta(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \sqrt{-g} + \left( -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} S_{\mu\nu} S_{\rho\sigma} \right) \delta(\sqrt{-g}) \right] d^4x \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}} g_F J_{F\mu} U_\nu \left( \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) \right) d^4x. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dengan menggunakan identitas

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} , \quad (3.11)$$

variasinya menjadi

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \left( -S_{\mu\rho} S_\nu^\rho - g_{\mu\nu} L + 2g_F J_{F\mu} U_\nu \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x . \quad (3.12)$$

Dengan membandingkan Pers. (3.7) dengan (3.12), tensor energi-momentum-nya adalah

$$T_{\mu\nu} = -S_{\mu\rho} S_\nu^\rho - g_{\mu\nu} L + 2g_F J_{F\mu} U_\nu . \quad (3.13)$$

Tensor inilah yang akan digunakan pada persamaan medan. Sedangkan tensor energi-momentum untuk satu partikel (densitas tensor energi-momentum) dinyatakan sebagai

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -S_{\mu\rho}^a S_\nu^{a\rho} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} + 2g_F J_{F\mu}^a U_\nu^a . \quad (3.14)$$

Seperti yang telah dijelaskan di atas, perhitungan-perhitungan pada subbab berikutnya masih menyertakan indeks  $a, b, c$ , dsb. Tetapi jika dimasukkan ke dalam perhitungan persamaan medan, hal ini tidak berpengaruh terhadap tensor Ricci yang diturunkan dalam term *Christoffel symbol*.

### 3.2 Kontribusi Fluida QCD dalam Persamaan Medan Einstein

Dinamika ruang-waktu pada awal alam semesta pada fase quark-gluon dikarakterisasi oleh faktor skala  $R(t)$  yang secara formalisme matematik ada dalam metrik geometri FRW. Untuk menentukan fungsi  $R(t)$ , persamaan medan Einstein karena kehadiran materi (quark-gluon) harus dicari solusinya. Persamaan medan Einstein dengan  $\Lambda = 0$ , dinyatakan dengan

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (3.15)$$

di mana  $\kappa = 8\pi G/c^4$  dan  $T = T^\alpha_\alpha$ . Dengan mensubstitusikan Pers. (3.13) ke Pers. (3.15), akan didapatkan

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa \left( S_{\mu\rho}^a S_\nu^{a\rho} + g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2g_F J_{F\mu}^a U_\nu^a \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left( S_{\alpha\rho}^a S_\beta^{a\rho} + g_{\alpha\beta} \mathcal{L} - 2g_F J_{F\alpha}^a U_\beta^a \right) \\ &= \kappa \left( \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \left( S_{\alpha\rho}^a S_\beta^{a\rho} - 2g_F J_{F\alpha}^a U_\beta^a \right) \\ &\quad - \kappa g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Perhitungan selanjutnya dikerjakan dalam suatu sistem koordinat, yaitu dengan mengadopsi *comoving coordinat*  $[x^\mu] = (t, r, \theta, \phi)$  dan kecepatan-4 dari fluida pada *comoving coordinat* ini adalah  $[u^\mu] = (1, 0, 0, 0)$ , di mana metrik FRW mengambil bentuk

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right].$$

Komponen diagonal kovarian metrik  $g_{\mu\nu}$  adalah

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -R^2(t)r^2, \quad g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2\theta.$$

Komponen *off-diagonal* dari metrik FRW adalah nol.

Hasil perhitungan untuk komponen-komponen tensor Ricci dalam term *Christoffel symbols*, didapatkan bahwa komponen *off diagonal*-nya bernilai nol dan



komponen *on-diagonal*-nya diberikan dengan

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= 3\ddot{R}/R, \\
 R_{11} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k\right) c^{-2}/(1 - kr^2), \\
 R_{22} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k\right) c^{-2}r^2, \\
 R_{33} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k\right) c^{-2}r^2\sin^2\theta.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ruas kiri persamaan medan Einstein telah diperoleh untuk komponen diagonalnya saja, yaitu Pers. (3.17) di atas. Selanjutnya ruas kanan persamaan medan Einstein bisa diperoleh dari Pers. (3.16) serta diambil komponen diagonalnya saja,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \kappa A + \kappa g_{00}\mathcal{L}'' , \\
 R_{11} &= \kappa B + \kappa g_{11}\mathcal{L}'' , \\
 R_{22} &= \kappa C + \kappa g_{22}\mathcal{L}'' , \\
 R_{33} &= \kappa D + \kappa g_{33}\mathcal{L}'' ,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

di mana

$$\begin{aligned}
 A &= \left(S_{0\rho}^a S_0^{a\rho} - 2g_{\text{F}0} J_{\text{F}0}^a U_0^a\right) , \\
 B &= \left(S_{1\rho}^a S_1^{a\rho} - 2g_{\text{F}1} J_{\text{F}1}^a U_1^a\right) , \\
 C &= \left(S_{2\rho}^a S_2^{a\rho} - 2g_{\text{F}2} J_{\text{F}2}^a U_2^a\right) , \\
 D &= \left(S_{3\rho}^a S_3^{a\rho} - 2g_{\text{F}3} J_{\text{F}3}^a U_3^a\right) ,
 \end{aligned}$$

dan

$$\mathcal{L}'' = -\frac{1}{4} S_{\alpha\rho}^a S^{a\alpha\rho} .$$

Telah dihitung juga bahwa komponen *off-diagonal* dari ruas kanan persamaan medan bernilai nol. Pers. (3.18) dapat disusun secara kompak menjadi

$$\frac{R_{00} - \kappa A}{g_{00}} = \frac{R_{11} - \kappa B}{g_{11}} = \frac{R_{22} - \kappa C}{g_{22}} = \frac{R_{33} - \kappa D}{g_{33}} . \tag{3.19}$$

Dengan memasukkan komponen diagonal tensor Ricci pada Pers. (3.17) dan komponen diagonal metrik FRW ke dalam tiap Pers. (3.19), maka diperoleh set

persamaan-persamaan berikut

$$C = Br^2(1 - kr^2), \quad (3.20)$$

$$D = Br^2 \sin^2 \theta (1 - kr^2), \quad (3.21)$$

$$D = C \sin^2 \theta, \quad (3.22)$$

$$\ddot{R} = \frac{1}{R} (\dot{R}^2 + c^2 k) + \frac{\kappa}{2R} (Bc^2(1 - kr^2) + R^2 A), \quad (3.23)$$

$$\ddot{R} = \frac{1}{R} (\dot{R}^2 + c^2 k) + \frac{\kappa}{2R} \left( \frac{Cc^2}{r^2} + R^2 A \right), \quad (3.24)$$

$$\ddot{R} = \frac{1}{R} (\dot{R}^2 + c^2 k) + \frac{\kappa}{2R} \left( \frac{Dc^2}{r^2 \sin^2 \theta} + R^2 A \right). \quad (3.25)$$

Telihat bahwa persamaan-persamaan (3.20) - (3.22) merupakan persamaan penghubung antara persamaan-persamaan (3.23)-(3.25). Sehingga dapat diambil satu persamaan saja, yaitu Pers. (3.24).

Selain itu persamaan yang mengandung  $\ddot{R}$  dapat diperoleh dari komponen ke-00 tensor Ricci pada Pers. (3.17) dengan memasukkannya pada komponen ke-00 persamaan medan Einstein Pers. (3.18). Sehingga diperoleh

$$\ddot{R} = \kappa \frac{R}{3} (A + c^2 \mathcal{L}''). \quad (3.26)$$

Dengan memasukkan Pers. (3.26) ke (3.24), didapatkan

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa}{3} R^2 \left( c^2 \mathcal{L}'' - \frac{A}{2} \right) - c^2 k. \quad (3.27)$$

Kedua Pers. (3.26) dan (3.27) merupakan *persamaan medan kosmologi* untuk fluida QCD yang menentukan evolusi waktu dari faktor skala  $R(t)$  dan disebut juga *persamaan Friedmann* fluida QCD.

### 3.3 Fungsi Keadaan Distribusi Fluida QCD

Fungsi keadaan distribusi fluida QCD (selanjutnya disebut persamaan keadaan) dapat dicari dari Pers. (3.26) dan (3.27). Dari kedua persamaan ini, diperoleh persamaan yang merelasikan parameter Hubble  $H(t)$  dan *deceleration parameter*  $q(t)$  masing-masing sebagai fungsi dari distribusi medan  $\phi(t)$ . Alasan pengesetan  $\phi \equiv \phi(t)$  akan dijelaskan kemudian. Pertama harus dihitung variabel-variabel  $A$

dan  $\mathcal{L}''$ . Sehingga dapat terlihat eksplisit dan mudah untuk menyusunnya secara kompak.

Hasil perhitungan dari variabel-variabel  $A$  dan  $\mathcal{L}''$  adalah

$$\begin{aligned} A &= S_{0\rho}^a S_0^{a\rho} - 2g_F J_{F0}^a U_0^a \\ &= g_F^2 f^{abc} f^{ade} U_0^b U_0^c U_0^{d0} U_0^e - 2g_F J_{F0}^a U_0^a \end{aligned}$$

dan

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{4} \left( 6 \frac{\dot{R}^2}{R^2} U_0^a U_0^{a0} c^2 - g_F^2 f^{abc} f^{ade} U_\alpha^b U_\rho^c U^{d\alpha} U^{e\rho} \right).$$

Di sini diketahui bahwa  $U^\mu \equiv u^\mu \phi$  di mana  $[u^\mu] = (1, 0, 0, 0)$  dan  $\phi \equiv \phi(t)$ . Selain itu dipandang  $U^{a\mu} = U^{b\mu} = U^{c\mu} = U^{d\mu} = U^{e\mu} = U^\mu$ . Pengesetan  $\phi \equiv \phi(t)$  berasal dari asumsi universe yang homogen dan isotropi, sehingga medannya hanya bergantung pada waktu kosmik itu sendiri, tidak bergantung secara spasial. Oleh karena itu, variabel-variabel  $A$  dan  $\mathcal{L}''$  dapat dinyatakan

$$A = g_F^2 c^6 \bar{F} \phi^4 - 2g_F c^2 J_{F0}^a \phi \quad (3.28)$$

dan

$$\mathcal{L}'' = \frac{3}{2} c^2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \phi^2 - \frac{1}{4} g_F^2 c^4 \bar{F} \phi^4. \quad (3.29)$$

Selanjutnya, persamaan-persamaan (3.28) dan (3.29) disubstitusikan ke Pers. (3.27). Sehingga didapat

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\kappa}{3} \left( \frac{3}{2} c^4 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \phi^2 - \frac{1}{4} g_F^2 c^6 \bar{F} \phi^4 + g_F c^2 J_{F0}^a \phi \right) - \frac{c^2 k}{R^2}. \quad (3.30)$$

Perhitungan selanjutnya diperkenalkan *parameter Hubble*  $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ . Persamaan (3.30) menjadi

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa}{2} c^2 H^2 \phi^2 + \frac{\kappa}{3} g_F c^2 J_{F0}^a \phi - \frac{\kappa}{12} g_F^2 c^6 \bar{F} \phi^4 - \frac{c^2 k}{R^2} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\left( \frac{1}{4} c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F J_{F0}^a \phi \right)}{\left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right)} + \frac{c^2 k}{\left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right) R^2}, \quad (3.31) \end{aligned}$$

di mana  $\bar{F} = \sum_{a,b,c,d,e=1}^8 f^{abc} f^{ade}$ ,  $g_F$  adalah "muatan" fluida, dan dapat dinyatakan juga  $J_{F0}^a = Q^\dagger T_F^a Q \equiv \rho_F^a$  [8]. Dengan mengeset  $\rho_F^a \equiv \rho_F$  sesuai asumsi

homogenitas fluida seperti yang disebutkan di awal, Pers. (3.31) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \frac{\left(\frac{1}{4}c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F \rho_F \phi\right)}{\left(\frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1\right)} + \frac{c^2 k}{\left(\frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1\right) R^2}. \quad (3.32)$$

Untuk mencari persamaan keadaan dalam term *deceleration parameter*  $q(t) \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}$ , digunakan Pers. (3.26) dan (3.27) dengan cara menjumlahkan dan mengurangkan kedua persamaan tersebut. Hasil penjumlahan dan pengurangan kedua persamaan tersebut berturut-turut dinyatakan sebagai

$$q(t) = \frac{\kappa}{3H^2} (c^2 \mathcal{L}'' + A/2) + \frac{c^2 k}{R^2} + 1, \quad (3.33)$$

$$q(t) = -\frac{\kappa A}{2H^2} - \frac{c^2 k}{H^2} - 1. \quad (3.34)$$

Pers. (3.33) dan (3.34) dijumlahkan menjadi

$$q(t) = \frac{\kappa}{6H^2} (c^2 \mathcal{L}'' - A). \quad (3.35)$$

Dengan memasukkan hasil perhitungan untuk  $A$  dan  $\mathcal{L}''$ , Pers. (3.35) menjadi

$$q(t) = -\frac{4\pi G}{3H^2} \left( \frac{3}{4}c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - \frac{3}{2}H^2 \phi^2 - 2c^{-2} g_F \rho_F \phi \right). \quad (3.36)$$

Persamaan (3.32) dan (3.36) merupakan *persamaan keadaan* yang dicari, serta bisa juga disebut persamaan gerak fluida kosmologi. Kedua persamaan ini merupakan suatu persamaan dinamik karena mendeskripsikan evolusi universe terhadap waktu kosmik yang mengalami ekspansi pada masa paling awal dari alam semesta yaitu pada fase quark-gluon. Ekspansi universe yang dipandang dari persamaan parameter Hubble selain dikarakterisasi oleh distribusi medan  $\phi(t)$  juga dikarakterisasi oleh jenis dari ruang (*space*) yang memiliki simetri maksimal. Pada poin ini, ruang yang memiliki simetri maksimal terdiri dari ruang yang datar (*flat*), ruang dengan kelengkungan positif konstan (*space of positive constant curvature*), dan ruang dgn kelengkungan negatif konstan (*space of negative constant curvature*). Konstanta  $k$  mengkarakterisasi ketiganya,  $k = 0$ , berarti ruang datar atau kelengkungan nol,  $k = +1$  berarti kelengkungan positif,  $k = -1$  berarti kelengkungan negatif. Persamaan parameter Hubble untuk tiap jenis ruang ini dibahas pada bab selanjutnya.

## Bab 4

# Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas mengenai hasil-hasil perhitungan dari bab sebelumnya. Bagian pertama membahas mengenai persamaan Friedmann, tujuan awal perhitungan, serta penggunaan persamaan Friedman untuk perhitungan lanjutan. Bagian kedua membahas mengenai persamaan parameter Hubble dan parameter perlambatan serta bentuk-bentuk persamaan parameter Hubble untuk tiap jenis ruang yang memiliki simetri maksimal.

### 4.1 Persamaan Friedmann

Solusi persamaan medan Einstein telah dihitung dengan menggunakan tensor energi-momentum fluida QCD. Perhitungan dilakukan dengan mencari tiap komponen dari tensor Ricci dan tensor energi-momentum. Ruas yang mengandung tensor Ricci dihitung dalam term *Christoffel symbols* dan diperoleh hasil bahwa komponen tensor Ricci yang tidak nol adalah komponen diagonalnya saja. Sedangkan ruas yang mengandung tensor energi-momentum, semua komponennya tidak bernilai nol. Untuk persamaan medan Einstein yang komponen diagonalnya saja, artinya ruas kanan dalam term komponen diagonal tensor energi-momentum dan ruas kiri dalam term komponen diagonal tensor Ricci diperoleh persamaan,

$$\frac{R_{00} - \kappa A}{g_{00}} = \frac{R_{11} - \kappa B}{g_{11}} = \frac{R_{22} - \kappa C}{g_{22}} = \frac{R_{33} - \kappa D}{g_{33}}.$$

Kemudian dari persamaan di atas, setelah menghitung untuk tiap persamaan, diperoleh persamaan Friedmann,

$$\ddot{R} = \kappa \frac{R}{3} (A + c^2 \mathcal{L}''),$$

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa}{3} R^2 \left( c^2 \mathcal{L}'' - \frac{A}{2} \right) - c^2 k.$$

Tujuan utama dari penelitian ini adalah mencari persamaan keadaan yang diprediksi memiliki bentuk

$$\phi^{\pm n}(t) \propto R^{\pm m}(t). \quad (4.1)$$

di mana  $n, m =$  bilangan bulat  $(1, 2, 3, 4, \dots, m$  atau  $n)$ . Namun, hasil perhitungan tidak mengarah pada bentuk sederhana seperti itu. Awalnya perhitungan untuk mencari bentuk persamaan (4.1) menggunakan komponen *off-diagonal* dari persamaan medan Einstein. Hal ini dilakukan karena secara langsung komponen tensor Ricci-nya akan bernilai nol sehingga kemungkinan didapat persamaan dengan perhitungan komponen off-diagonal ruas kanan persamaan medan, yaitu yang mengandung suku tensor energi-momentum  $([T_{0j} - \frac{1}{2}Tg_{0j}], [T_{i0} - \frac{1}{2}Tg_{i0}],$  dan  $[T_{ij} - \frac{1}{2}Tg_{ij}])$ . Namun, suku-suku ini ternyata bernilai nol yang disebabkan karena perhitungan dalam sistem *comoving coordinat* dimana komponen kecepatan arah spasial dari kecepatan-4 bernilai nol,  $[u^\mu] = (1, 0, 0, 0)$ . Indeks-indeks  $i, j = 1, 2, 3$ , pada suku-suku tersebut berkorelasi dengan kecepatan arah spasial. Perhitungan yang menggunakan komponen *off-diagonal* persamaan medan Einstein tidak menghasilkan apapun. Perhitungan untuk mendapat bentuk (4.1) juga dapat dilakukan dan kemungkinan mendapatkan hasil yang baik, yaitu dengan menghitung secara eksplisit persamaan konservasi energi dan momentum,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Tetapi perhitungannya sangat rumit dan alokasi waktu penelitian yang terbatas sehingga hal ini tidak dilakukan.

Akhirnya, perhitungan yang diarahkan untuk mencari bentuk persamaan (4.1) menggunakan perhitungan lanjutan dari persamaan Friedmann fluida QCD (Pers. (3.26) dan (3.27)). Hasil yang didapat memang tidak berbentuk "linier" seperti Pers. (4.1), tapi mengarah pada kemunculan parameter Hubble  $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$  dan parameter perlambatan  $q(t) \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$ . Secara langsung bentuk fungsi  $R(t)$  tidak bisa diperoleh. Melainkan secara *trivial* dapat diekspresikan dalam term parameter-parameter tersebut. Solusi yang eksak hanya mungkin diperoleh jika persamaan-persamaan yang merelasikan parameter Hubble dan parameter perlambatan masing-masing sebagai fungsi distribusi medan digunakan pada perhitungan untuk mencari model-model kosmologi dan inflasi kosmologi (*inflationary*

*cosmology*).

Secara khusus, model-model kosmologi ditentukan oleh jenis materi yang mengisi alam semesta dan bentuk ruang-nya, apakah datar (*flat*) atau memiliki kelengkungan (*curvature*). Pemodelan jenis-jenis inflasi kosmologi menggunakan hasil perhitungan dari model-model kosmologi untuk tiap jenis ruang alam semesta. Perhitungan untuk model-model kosmologi dan inflasi kosmologi tidak diuraikan pada laporan penelitian ini dan tidak menjadi skop pembahasan. Namun perhitungan persamaan-persamaan dinamik untuk tiap jenis space yang dikarakterisasi oleh  $k = -1, 0, +1$  diuraikan pada bagian berikutnya.

## 4.2 Persamaan Dinamik untuk Berbagai Jenis Ruang Simetri Maksimal

Hasil perhitungan dari persamaan Friedmann berupa dua persamaan dinamik yang merupakan fungsi  $H(t)$  dan  $q(t)$  masing-masing sebagai fungsi dari  $\phi(t)$  dinyatakan dengan

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \frac{\left(\frac{1}{4}c^2 g_F \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F \rho_F \phi\right)}{\left(\frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1\right)} + \frac{c^2 k}{\left(\frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1\right) R^2}, \quad (4.2)$$

dan

$$q(t) = -\frac{4\pi G}{3H^2} \left(\frac{3}{4}c^2 g_F \bar{F} \phi^4 - \frac{3}{2}H^2 \phi^2 - 2c^{-2} g_F \rho_F \phi\right). \quad (4.3)$$

Parameter Hubble dapat didefinisikan kelajuan ekspansi faktor skala terhadap nilai faktor skala pada waktu tersebut. Hal ini bisa dipahami bagaimana pengaruh materi yang mengisi alam semesta terhadap kelajuan ekspansi alam semesta. Parameter perlambatan secara sederhana mendeskripsikan bagaimana pengaruh materi terhadap perlambatan ekspansi alam semesta khususnya pada masa paling awal. Dari persamaan di atas, secara eksplisit terlihat bahwa parameter perlambatan tidak bergantung pada jenis ruang, yaitu konstanta  $k$ . Tetapi jika kita memasukkan fungsi parameter Hubble pada (4.3) maka dependensinya nampak secara eksplisit.

Bentuk persamaan fungsi parameter perlambatan mirip dengan parameter perlambatan untuk model fluida sempurna yang sudah umum digunakan dalam

model-model kosmologi. Jika membandingkan dengan model fluida sempurna [5], dapat dikatakan densitas energi  $\rho$  pada fluida sempurna analog dengan suku-suku yang mengandung fungsi distribusi medan  $\phi$  untuk fluida QCD pada (4.2).

Berikut ini dipaparkan fungsi parameter Hubble untuk tiap jenis ruang yang memiliki simetri maksimal yang dikarakterisasi oleh konstanta  $k$ . Secara analitik, solusi yang mudah untuk didapatkan dari hasil ini adalah untuk ruang datar,  $k = 0$ .

#### 4.2.1 Ruang Datar, $k = 0$

Dengan mengeset  $k = 0$ , persamaan (4.2) dinyatakan sebagai

$$H^2(t) = \frac{8\pi G \left( \frac{1}{4}c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F \rho_F \phi \right)}{3 \left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right)}. \quad (4.4)$$

Di sini terlihat bahwa sepenuhnya evolusi faktor skala  $R(t)$  yang direpresentasikan oleh parameter Hubble  $H(t)$  ditentukan oleh distribusi medan  $\phi(t)$ . Selain itu juga medan  $U^\mu$  tidak terlihat pada persamaan ini. Hal ini berhubungan dengan komponen temporal dari medan  $U^\mu$  di mana kecepatan-4 dari medan hanya ada dalam arah temporal karena perhitungannya dalam sistem comoving koordinat. Sehingga pendefinisian dari (2.11), memiliki konsekuensi yang hanya menyediakan suku  $\phi$  yang hanya bergantung terhadap waktu kosmik.

Jika medan ini dilihat dari suatu kerangka diam yang tetap, medan ini mengalir dengan kecepatan tertentu seperti aliran fluida. Namun karena yang dipilih adalah comoving koordinat, koordinat atau *frame* yang bergerak bersama medan fluida itu sendiri yang juga koordinat yang menjadi acuan dalam formalisme geometri FRW, maka medan fluida-nya dinyatakan  $U^\mu = (\phi(t), 0, 0, 0)$ . Medan fluida ini bergerak secara spasial terhadap koordinat diam yang tetap namun tidak bergerak terhadap koordinat yang bergerak bersama fluida ini.

#### 4.2.2 Ruang dengan Kelengkungan Negatif, $k = -1$

Dengan mengeset  $k = -1$ , persamaan (4.2) dinyatakan sebagai

$$H^2(t) = \frac{8\pi G \left( \frac{1}{4}c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F \rho_F \phi \right)}{3 \left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right)} - \frac{c^2}{\left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right) R^2}. \quad (4.5)$$



Solusi dari persamaan ini tidak *trivial*. Hal ini karena tercampurnya  $R(t)$  pada  $H^2(t)$  yang terlihat pada suku terakhir di ruas kanan. Sehingga kedua ruas tidak bisa langsung diakarkan. Harus dilakukan perhitungan lanjutan untuk mencari solusi eksak dari persamaan ini, baik berbentuk  $\phi^{\pm n}(t) \propto R^{\pm m}(t)$  maupun  $H^2(t) \propto \phi^2(t)$ .

### 4.2.3 Ruang dengan Kelengkungan Positif, $k = +1$

Dengan mengeset  $k = +1$ , persamaan (4.2) dinyatakan sebagai

$$H^2(t) = \frac{8\pi G \left( \frac{1}{4}c^2 g_F^2 \bar{F} \phi^4 - c^{-2} g_F \rho_F \phi \right)}{3 \left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right)} + \frac{c^2}{\left( \frac{8\pi G}{2} \phi^2 - 1 \right) R^2}. \quad (4.6)$$

Sama seperti parameter Hubble dengan  $k = -1$ , untuk mencari solusi (4.6) harus dilakukan perhitungan lanjutan.

## Bab 5

# Kesimpulan dan Saran

Telah dilakukan pengkajian dinamika awal alam semesta geometri FRW dengan menurunkan persamaan keadaan berupa set persamaan dinamik fluida QCD kosmologi dari persamaan medan Einstein. Hasil perhitungan untuk komponen diagonal persamaan medan didapatkan persamaan Friedmann. Bentuk eksplisit persamaan Friedmann mengarah pada persamaan keadaan fungsi parameter Hubble terhadap distribusi medan. Perhitungan lanjutan dengan menggabungkan kedua persamaan Friedmann didapatkan persamaan fungsi parameter perlambatan (*deceleration parameter*) sebagai fungsi dari distribusi medan fluida.

Fungsi parameter Hubble dapat dibagi lagi berdasarkan jenis ruang yang memiliki simetri maksimal yang dikarakterisasi oleh konstanta  $k$ . Bentuk fungsi parameter perlambatan juga bergantung terhadap konstanta  $k$  karena secara eksplisit parameter perlambatan bergantung pada parameter Hubble. Faktor skala kosmik  $R(t)$  yang terdefinisi pada parameter Hubble dan parameter perlambatan dapat dicari jika dilakukan kajian dan perhitungan lanjutan untuk model-model kosmologi dan inflasi kosmologi.

Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan dengan menerapkan hasil-hasil penelitian ini untuk mengkonstruksi model-model kosmologi dan inflasi kosmologi. Diprediksikan akan banyak hasil yang didapat baik itu set persamaan dinamik maupun persamaan keadaan. Hal ini terlihat dari nilai  $k$  yang berbeda-beda yang menunjukkan berbagai macam ruang serta besaran-besaran lain yang dapat divariasikan sesuai asumsi-asumsi fisis dan geometris yang mungkin.

# Lampiran A

## Simbol Christoffel untuk Geometri FRW

Simbol Christoffel diberikan dalam term metrik dari sembarang geometri adalah

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} (\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\rho\nu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) . \quad (\text{A.1})$$

Komponen tidak nol dari metrik FRW adalah

$$g_{00} = c^2 , \quad g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2} , \quad g_{22} = -R^2(t)r^2 , \quad g_{33} = -R^2(t)r^2\sin^2\theta .$$

Dengan menggunakan metrik FRW di atas, komponen tidak nol dari simbol Christoffel adalah

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= R\dot{R}/[c(1 - kr^2)], & \Gamma_{22}^0 &= R\dot{R}r^2/c, & \Gamma_{33}^0 &= R\dot{R}r^2\sin^2\theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= c\dot{R}/R, & \Gamma_{11}^1 &= kr/(1 - kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2)\sin^2\theta, \\ \Gamma_{02}^2 &= c\dot{R}/R, & \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= \sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{03}^3 &= c\dot{R}/R, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta. \end{aligned}$$

Perhitungannya dilakukan dalam sistem *comoving coordinat*.

# Daftar Acuan

- [1] D. Enström, *Astrophysical Aspects of Quark-Gluon Plasma*. (1998) [arXiv: hep-ph/9802337v2].
- [2] A. Fajarudin, *Dinamika Magnetofluida Abelian dan non-Abelian dengan Lagrangian Gauge*, Skripsi S-1, Departemen Fisika UI, 2008.
- [3] A. Tawfik, M Wahba, H. Mansour, and T. Harko, *Viscous Quark-Gluon Plasma in the Early Universe*. (2010) [arXiv: gr-qc/1001.2814v1].
- [4] Joseph I. Kapusta. *Quark-Gluon Plasma in The Early Universe*. (2001) [arXiv: astro-ph/0101516v1].
- [5] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, UK, 2006.
- [6] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (2<sup>nd</sup> Edition), Cambridge University Press, UK, 2009.
- [7] L.T. Handoko. **Materi fluida yang bukan benda cair, mungkinkah ?**, Artikel dalam fisik@.net. (8 Februari 2010).
- [8] A. Sulaiman, A. Fajarudin, T.P. Djun, L.T. Handoko, *Magneto fluid Unification in Yang Mills Lagrangian*. International Journal of Modern Physics A 24 (2009) 3630-3637 (DOI 10.1142/S0217751X09047284)
- [9] S.M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **90**. 035001 (2003).
- [10] B.A. Bambah, S.M. Mahajan and C. Mukku, *Phys. Rev. Lett.* **97**. 072301 (2006).

- [11] B.A. Bambah, S.M. Mahajan and C. Mukku, **arXiv: 0705.3881**, (2007).
- [12] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company, US, 1990.

