FUNGSI GREEN UNTUK PERSAMAAN POISSON

MAULANA MALIK

0305010343

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

FUNGSI GREEN UNTUK PERSAMAAN POISSON

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

MAULANA MALIK

0305010343

DEPOK

2009

SKRIPSI : FUNGSI GREEN UNTUK PERSAMAAN POISSON

NAMA : MAULANA MALIK

NPM : 0305010343

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 26 JUNI 2009

DR. SRI MARDIYATI, M.KOM	RAHMI RUSIN, S.SI, M.SCTECH
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus ujian sidang sarjana : Juli 2009

Penguji I : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.

Penguji II : Dr. Yudi Satria, M.T.

Penguji III : Arie Wibowo, S.Si, M.Si.

Renungan lama yang telah terimpikan

Demi terwujudnya suatu kenang-kenangan

Saat inilah dapat ku wujudkan

Tak ada perjalanan yang tak melelahkan

Bukan manusia kalau tak ada kesalahan

Semampunya ku curahkan pemikiran

Mohon maaf dari segala kekurangan

(Ibnu Abi Ash-Sholeh Al Batawi)

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga tercurah kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat, dan para pengikutnya, mudah-mudahan kita termasuk golongan yang mendapatkan perlindungan di akhirat kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan selesai tanpa bantuan, dorongan, dan do'a dari orang-orang di sekitar penulis. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, khususnya kepada:

1. Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku pembimbing I dan Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech. selaku pembimbing II, terima kasih atas kesabarannya , saran dan bimbingannya selama ini.
2. Ibu Dra. Siti Nurrohmah, M.Si. selaku pembimbing akademik penulis, terima kasih atas saran, bimbingan, dan dorongan semangat selama penulis menempuh perkuliahan di matematika.
3. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, ibu Dra. Nora Hariadi, M.Si, ibu Helen Burhan, S.Si, M.Si dan bapak Arie Wibowo, S.Si, M.Si. Terima kasih atas saran yang diberikan pada penyusunan tugas akhir ini.

4. Seluruh dosen matematika UI yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terima kasih atas bimbingannya sehingga penulis memperoleh pengalaman akan luasnya dunia matematika.
5. Semua teman-teman matematika UI 2005 khususnya THE ABELIAN : Rifcos, Cup, Aris, Dimas, Hairu, Trian, Udin, Ridwan, Asep, Bocil dan tak lupa juga temen seperjuangan Uun dan edi setiawan.
6. Seluruh keluarga besar PP. Queen Al-Falah Ploso, Mojo, Kediri. Khususnya: KH. Djajuli Usman, Nyai Rodliyah Dj, KH. Zainuddin Dj, KH. Nurul Huda Dj, Gus Miek, KH. Fuad Mun'im Dj, Kyai Munif Dj, Hj Lailatul Badriah Dj, serta guruku yang terhormat KH. Zuhri Ya'qub, KH. Syarifuddin, M.A. dan KH. Mahfudz Asirun terima kasih atas petuah dan nasehatnya selama ini.
7. Terakhir, ucapan terima kasih kepada umi, abi, bang heri, ka neng, ka moya, bang dede, bang kahfi, ka rizka, jibon, sapik, risa, serta pujiku lestariku yang selalu memberi hiburan selama penulis menyusun tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Semoga skripsi ini berguna bagi penelitian selanjutnnya.

Penulis

2009

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas mengenai fungsi Green untuk persamaan Poisson. Fungsi Green ini akan diperoleh pada kondisi dimana suku non-homogen dari persamaan Poisson merupakan fungsi Delta Diract atau merupakan kelipatan dari fungsi yang dicari.

Kata kunci: fungsi Delta Diract; fungsi Green; persamaan Poisson

v + 36 hlm.

Bibliografi: 5 (1989 − 2004)

DAFTAR ISI

			Halaman
KATA PENGANTAR			i
ABSTRAK			iii
DAFTAR ISI			iv
BAB I	PENDAHULUAN		1
	1.1	Latar Belakang	1
	1.2	Rumusan Masalah	3
	1.3	Tujuan	3
	1.4	Pembatasan Masalah	3
	1.5	Sistematika Penulisan	3
BAB II	LANDASAN TEORI		5
BAB III	FUNGSI GREEN UNTUK PERSAMAAN POISSON		16
	3.1	Fungsi Delta Diract	16
	3.2	Fungsi Green untuk Persamaan Poisson $\nabla^2 u = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$	17

3.3 Fungsi Green untuk Persamaan Poisson

$\nabla^2 u(x, y) = -\lambda u(x, y)$ 22

BAB IV PENUTUP 35

DAFTAR PUSTAKA 36

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Suatu hal yang alamiah jika dalam kehidupan sehari-hari sesuatu benda hidup atau benda mati itu keadaannya selalu berubah. Perubahan keadaan tersebut ada yang prosesnya cepat ada pula yang lambat dan perubahan tersebut banyak dipengaruhi oleh satu faktor atau lebih, baik yang terdeteksi maupun yang tidak terdeteksi.

Pada persoalan ilmu terapan, fisika, dan teknik rekayasa, perubahan ini dapat dimodelkan secara matematis dalam bentuk persamaan diferensial. Jika faktor yang mempengaruhi lebih dari satu maka akan didapat persamaan yang berbentuk persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang didalamnya terdapat turunan dari fungsi lebih dari satu variabel bebas dan variabel bebas tersebut.

Dengan diperolehnya model persamaan diferensial parsial, selanjutnya dilakukan suatu proses untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial parsial tersebut. Salah satu cara untuk mencari solusi dari persamaan diferensial parsial adalah dengan mencari operator invers

Salah satu bentuk persamaan diferensial parsial yang sering dijumpai dalam persoalan fisika adalah persamaan Poisson yang merupakan persamaan diferensial parsial order dua. Persamaan diferensial parsial order dua diklasifikasikan dalam tiga bentuk dan persamaan Poisson ini termasuk persamaan diferensial parsial order dua dengan bentuk eliptik [4].

Permasalahan suatu persamaan diferensial parsial dengan menambahkan syarat batas pada suatu domain dikenal dengan sebutan persoalan syarat batas. Terdapat tiga macam syarat batas, yaitu syarat batas Dirichlet, Neumann, dan campuran [4]. Syarat batas Dirichlet memberikan kondisi pada batas-batas, sedangkan syarat batas Neumann memberikan nilai turunan pada batas-batas. Sedangkan syarat batas campuran merupakan gabungan dari syarat batas Dirichlet dan Neumann.

Untuk menyelesaikan persamaan Poisson dengan syarat batas Dirichlet homogen dapat ditentukan dengan mencari suatu fungsi yang dikenal dengan fungsi Green. Tetapi terdapat kondisi-kondisi tertentu yang harus dipenuhi persamaan Poisson sehingga fungsi Green dapat diperoleh.

Tugas akhir ini membahas kondisi-kondisi yang harus dipenuhi persamaan Poisson sehingga fungsi Green untuk persamaan Poisson dapat diperoleh.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Kondisi-kondisi apa yang harus dipenuhi oleh persamaan Poisson sehingga fungsi Green pada persamaan Poisson diperoleh ?

1.3 TUJUAN

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk membahas kondisi-kondisi pada persamaan Poisson sehingga fungsi Green dapat diperoleh.

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Pada tugas akhir ini masalah pada persamaan Poisson dibatasi di dimensi dua.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yaitu :

Bab I : Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Pada bab ini dijelaskan tentang persamaan diferensial parsial dan beberapa definisi yang mendukung dalam penulisan ini.

Bab III : Fungsi Green Pada Persamaan Poisson

Pada bab ini diberikan pengertian fungsi Delta Diract, fungsi Green untuk persamaan Poisson dengan suku non-homogennya fungsi Delta Diract, dan fungsi Green untuk persamaan Poisson dengan suku non-homogennya merupakan kelipatan fungsi yang dicari.

Bab IV : Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan yang didapat dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dijelaskan teori-teori dasar yang akan digunakan pada pembahasan fungsi Green untuk persamaan Poisson. Pembahasan dimulai dengan pengertian dari suatu persamaan diferensial parsial dan order dari persamaan diferensial parsial tersebut. Contoh persamaan diferensial dan metode penyelesaian juga akan dibahas pada bab ini.

Definisi 2.1

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat fungsi dengan dua variabel bebas atau lebih dan turunan-turunan parsial dari fungsi tersebut.

Di bawah ini akan diberikan contoh persamaan yang merupakan persamaan diferensial parsial.

Contoh 2.2

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y)$$

Persamaan di atas merupakan suatu persamaan diferensial parsial dengan variabel bebas x dan y dan variabel tak bebas u. u merupakan solusi yang akan dicari , sedangkan A, B, C, D, E dan F adalah fungsi dari x dan y yang diketahui.

Secara umum persamaan diferensial parsial dapat dituliskan sebagai :

$$Lu = f \tag{2.1}$$

dengan

L : operator diferensial yang mengandung turunan dari u terhadap variabel-variabel bebas.

u : fungsi yang tidak diketahui.

f : fungsi yang diketahui.

Jika pada persamaan (2.1) nilai dari $f \neq 0$ maka persamaan diferensial parsial disebut sebagai persamaan diferensial parsial non-homogen, sedangkan jika $f = 0$ maka disebut sebagai persamaan diferensial parsial homogen.

Berdasarkan bentuk umum dari persamaan diferensial parsial di atas, operator L untuk Contoh 2.2 berbentuk sebagai berikut

$$L = A\frac{\partial}{\partial x^2} + B\frac{\partial}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

Berikut ini akan diberikan definisi order dari suatu persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.3

Order dari suatu persamaan diferensial parsial adalah turunan tertinggi dari fungsi yang ada pada persamaan diferensial parsial tersebut.

Sesuai dengan definisi order di atas, maka persamaan pada Contoh 2.2 merupakan persamaan diferensial parsial order dua .

Untuk persamaan diferensia parsial order dua yang mempunyai bentuk

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}= f(x,y)$$

dapat diklasifikasikan dalam tiga tipe [4], yaitu :

a) Hiperbolik pada titik (x,y) jika $B^2-4AC>0$

b) Parabolik pada titik (x,y) jika $B^2-4AC=0$

c) Eliptik pada titik (x,y) jika $B^2-4AC<0$

Di bawah ini diberikan contoh-contoh persamaan diferensial parsial order dua berdasarkan tipenya :

Contoh 2.4 : Hiperbolik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\rho}F(x,y)$$

dengan $\rho,\tau>0$.

Persamaan di atas mempunyai nilai $A = -\frac{\tau}{\rho},\ B = 0,\ C = 1$, nilai dari $B^2 - 4AC = 0 - 4(-\frac{\tau}{\rho})(1) = 4\frac{\tau}{\rho} > 0$, maka persamaan di atas merupakan persamaan diferensial hiperbolik pada setiap titik (x, y).

Contoh 2.5 : Parabolik

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$$

Persamaan di atas mempunyai nilai $A = x^2,\ B = -2xy,\ C = y^2$, nilai dari $B^2 - 4AC = (-2xy)^2 - 4(x^2)(y^2) = 0$, maka persamaan di atas merupakan persamaan diferensial parabolik pada setiap titik (x, y).

Contoh 2.6 : Eliptik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Persamaan di atas mempunyai nilai $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$, nilai dari $B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$, maka persamaan di atas merupakan persamaan diferensial eliptik pada setiap titik (x, y).

Tipe persamaan diferensial yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah persamaan diferensial eliptik yang berbentuk seperti Contoh 2.6 .

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan Poisson. Jika pada Contoh 2.6 nilai $f(x,y)=0$ maka persamaannya menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

yang dikenal sebagai persamaan Laplace.

Berikut ini akan dijelaskan penyelesaian suatu persoalan syarat batas dengan persamaan diferensial parsial berupa persamaan Laplace dengan menggunakan metode variabel terpisah.

Pandang persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<L \;,\;\; 0<x<H \tag{2.2}$$

dengan syarat batas Dirichlet homogen :

(i) $u(0,y)=0$ $\quad (0<y<H)$

(ii) $u(L,y)=0$ $\quad (0<y<H)$

(iii) $u(x,0)=0$ $\quad (0<x<L)$

(iv) $u(x,H)=0$ $\quad (0<x<L)$

Misalkan solusi dari persoalan syarat batas di atas adalah

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y) \tag{2.3}$$

Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan (2.2) maka akan diperoleh $X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$ atau

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Karena kedua ruas persamaan di atas merupakan fungsi dari dua variabel yang berbeda maka dapat dimisalkan sama dengan suatu konstanta μ, sehingga akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa berikut

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \tag{2.4}$$

$$Y''(y) - \mu Y(y) = 0 \tag{2.5}$$

Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke syarat batas (i) dan (ii) maka akan didapatkan persamaan-persamaan berikut ini

$$u(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0$$

$$u(L,y) = X(L)\,Y(y) = 0$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas, didapat bahwa $X(0) = X(L) = 0$ atau $Y(y) = 0$. Jika $Y(y) = 0$ maka $u(x,y) = 0$ atau didapat solusi trivial. Sehingga untuk mendapatkan solusi non-trivial haruslah $Y(y) \neq 0$ atau didapat syarat batas berikut

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{2.6}$$

Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke syarat batas (iii) dan (iv) maka akan didapatkan persamaan-persamaan berikut ini

$$u(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0$$

$$u(x,H) = X(x)\,Y(H) = 0$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas, didapat bahwa $Y(0) = Y(H) = 0$ atau $X(x) = 0$. Jika $X(x) = 0$ maka $u(x,y) = 0$ atau didapat solusi trivial. Sehingga untuk mendapatkan solusi non-trivial haruslah $X(x) \neq 0$ atau didapat syarat batas berikut

$$Y(0) = Y(H) = 0 \qquad (2.7)$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan (2.4) dengan syarat batas (2.6). Persamaan karakteristik dari persamaan (2.4) adalah $p^2 + \mu = 0$ atau $p^2 = -\mu$. Nilai-nilai μ yang mungkin adalah $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Berikut ini akan ditunjukkan nilai-nilai μ agar persamaan (2.4) mempunyai solusi yang non-trivial :

i. Kemungkinan pertama $\mu > 0$

   Jika $\mu > 0$, maka $p = \pm\sqrt{-\mu} = \pm i\sqrt{\mu}$. Karena persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya bilangan kompleks maka solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah $X(x) = c_0 e^{i\sqrt{\mu}x} + c_{01} e^{-i\sqrt{\mu}x}$ [3]. Solusi ini juga dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\mu}x + c_2 \sin\sqrt{\mu}x \qquad (2.10)$$

dimana c_1, c_2 adalah konstanta riil.

Jika syarat batas $X(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (2.10), maka akan didapatkan solusi seperti persamaan di bawah ini

$$X(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu}x \qquad (2.11)$$

Jika syarat batas $X(L) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (2.11), maka akan didapatkan $X(L) = c_2 \sin\sqrt{\mu}L = 0$ yang akan dipenuhi oleh nilai $c_2 = 0$ atau $\sin\sqrt{\mu}L = 0$. Karena yang diinginkan adalah solusi nontrivial, maka harus memenuhi $\sin\sqrt{\mu}L = 0$, maka $\sqrt{\mu}L$ haruslah pembuat nol dari fungsi sinus, yaitu $\sqrt{\mu}L = n\pi$, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$. Dengan demikian diperoleh nilai $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ dan $X_n(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu_n}x$.

ii. Kemungkinan kedua $\mu = 0$

Jika $\mu = 0$ maka persamaan (2.4) akan menjadi $X''(x) = 0$, sehingga solusinya adalah

$$X(x) = c_3 + c_4 x \qquad (2.12)$$

dimana c_3, c_4 adalah konstanta riil [3].

Kemudian syarat batas $X(0)=0$ disubstitusikan ke persamaan (2.12), maka akan di dapatkan solusi dengan bentuk

$$X(x)=c_4 x \tag{2.13}$$

Jika syarat batas $X\,(L)=0$ disubstitusikan ke persamaan (2.13) , maka $c_4=0$. Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh $X(x)=0$ yang merupakan solusi trivial.

iii. Kemungkinan ketiga $\mu<0$

Jika $\mu<0$, maka $p=\pm\sqrt{-\mu}$. Karena persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya riil berbeda maka solusinya

$$X(x)=c_5 e^{\sqrt{-\mu}x}+c_6 e^{-\sqrt{-\mu}x} \tag{2.14}$$

dimana c_5, c_6 adalah konstanta riil [3].

Jika syarat batas $X(0)=0$ disubstitusikan ke persamaan (2.14), maka akan didapatkan $c_5=-c_6$, atau persamaan (2.14) menjadi

$$X(x)=c_6(e^{-\sqrt{-\mu}x}-e^{\sqrt{-\mu}x}) \tag{2.15}$$

Jika syarat batas $X\,(L)=0$ disubstitusikan ke persamaan (2.15) maka persamaan (2.15) akan menjadi $c_6(e^{-\sqrt{-\mu}L}-e^{\sqrt{-\mu}L})=0$. Karena $(e^{-\sqrt{-\mu}L}-e^{\sqrt{-\mu}L})\neq 0$ maka $c_6=0$. Dengan demikian $X(x)=0$, yang berarti solusi trivial yang didapat.

Sehingga dari ketiga kemungkinan di atas didapatkan solusi

$X_n(x) = c_2 \sin \sqrt{\mu_n}\, x$ dengan $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$.

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan (2.5) dengan syarat batas (2.7). Persamaan karakteristik dari persamaan (2.5) adalah $p^2 - \mu = 0$ atau $p^2 = \mu$. Karena nilai $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$ maka $p^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$, sehingga $p = \pm \frac{n\pi}{L}$ dengan demikian solusinya adalah

$$Y(y) = c_7 e^{\frac{n\pi}{L}y} + c_8 e^{-\frac{n\pi}{L}y} \qquad (2.16)$$

dimana c_7, c_8 adalah konstanta riil [5].

Jika syarat batas $Y(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (2.1) maka $c_7 = -c_8$. Sehingga akan didapatkan solusi dengan bentuk

$$Y(y) = c_8 (e^{-\frac{n\pi}{L}y} - e^{\frac{n\pi}{L}y}) \qquad (2.17)$$

Jika syarat batas $Y(H) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (2.17), maka $c_8 (e^{-\frac{n\pi}{L}H} - e^{\frac{n\pi}{L}H}) = 0$. Karena $(e^{-\frac{n\pi}{L}H} - e^{\frac{n\pi}{L}H}) \neq 0$ maka $c_8 = 0$. Dengan demikian $Y(y) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan metode variabel terpisah, solusi yang didapat adalah

$$u(x,y) = X(x)\ Y(y) = c_2 \sin\sqrt{\mu_n}x\ (0) = 0$$

yang merupakan solusi trivial.

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa suatu persoalan syarat batas dengan persamaan diferensial parsial berupa persamaan Laplace dengan syarat batas homogen selalu menghasilkan solusi yang trivial. Sehingga agar didapat solusi yang non-trivial untuk persoalan syarat batas tersebut terdapat beberapa kemungkinan, yaitu :

a. Persamaan diferensial parsial yang non-homogen , yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

dengan $f(x,y) \neq 0$ yang dikenal dengan sebutan persamaan Poisson.

b. Syarat batas yang tidak nol.

Pada bab III akan dibahas kondisi untuk $f(x,y)$ agar diperoleh solusi non-trivial untuk persamaan Poisson dan bentuk fungsi Green untuk persamaan Poisson tersebut.

BAB III

FUNGSI GREEN UNTUK PERSAMAAN POISSON

Pada bab III ini akan dijelaskan kondisi-kondisi suku non-homogen persamaan Poisson untuk mendapatkan fungsi Green pada persamaan Poisson tersebut. Pada bagian pertama akan dibahas kondisi suku non-homogen $f(x,y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ yang merupakan fungsi Delta Diract. Fungsi Delta Diract pertama kali diperkenalkan oleh fisikawan Inggris Paul. A. M Dirac (1902-1982) , yaitu untuk menggambarkan suatu fenomena fisika yang memiliki nilai pada suatu titik (singular pada satu titik), namun nilai pada titik lain sama dengan nol. Sedangkan bagian kedua akan dibahas kondisi $f(x,y) = -\lambda u(x,y)$ pada persamaan Poisson agar dapat diperoleh fungsi Green. Berikut ini diberikan terlebih dahulu pengertian dari fungsi Delta Diract dan sifat-sifatnya.

3.1 Fungsi Delta Diract

Dirac mendefinisikan fungsi Delta sebagai fungsi yang bernilai besar sekali di x_0, dan bernilai nol di luar x_0, serta integral fungsi tersebut sepanjang interval domainnya sama dengan satu . Fungsi Delta Diract di himpunan bilangan riil R secara matematis dituliskan sebagai [2]

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0\,, & x\neq x_0\\ \infty, & x=x_0\end{cases}$$

dan mempunyai sifat :

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$

Pendefinisian fungsi Delta Diract di R^2 similar dengan fungsi Delta Diract di R , yaitu [2] :

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\begin{cases}0, & (x,y)\neq(x_0,y_0)\\ \infty, & (x,y)=(x_0,y_0)\end{cases}$$

dan mempunyai sifat :

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)dxdy=1$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)dxdy=f(x_0,y_0)$

3.2 Fungsi Green untuk Persamaan Poisson $\nabla^2 u=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$.

Fungsi Green pertama kali dipublikasikan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Inggris yang bernama George Green (1793-1841) pada tahun 1828 di dalam jurnalnya yang berjudul *" Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and*

Magnetism ". Salah satu kegunaan dari fungsi Green adalah untuk membantu proses penyelesaian persamaan diferensial parsial.

Persamaan Poisson adalah suatu persamaan diferensial parsial order dua yang berbentuk

$$L(u) = f(x, y)$$

dimana L adalah operator diferensial linier yang berbentuk

$$L = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$$

yang dikenal dengan sebutan operator Laplace.

Salah satu cara menyelesaikan persamaan Poisson adalah mencari operator invers dari operator Laplace yang dinotasikan sebagai $\left(\nabla^2\right)^{-1}$. Jika invers dari operator Laplace itu ada, maka solusi dari persamaan Poisson dinyatakan dengan persamaan berikut

$$u = \left(\nabla^2\right)^{-1}\left(f(x, y)\right) \qquad (3.1)$$

Karena ∇^2 merupakan suatu operator diferensial maka invers dari ∇^2 akan berupa suatu operator integral, sehingga persamaan (3.1) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut [1]

$$u(x, y) = \left(\nabla^2\right)^{-1}\left(f(x, y)\right) = \iint G(x, y; x_0, y_0) f(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \qquad (3.2)$$

dimana fungsi $G(x, y; x_0, y_0)$ merupakan suatu fungsi yang belum diketahui dan dikenal dengan sebutan fungsi Green.

Fungsi Green $G(x,y;x_0,y_0)$ untuk persamaan Poisson dapat dipandang sebagai suatu fungsi yang menyatakan respons di titik (x,y) terhadap suatu sumber di titik (x_0,y_0) [2]. Sedangkan $f(x,y)$ merupakan sumber di (x_0,y_0) sehingga $f(x,y)$ dapat dipilih sebagai fungsi yang terkonsentrasi di (x_0,y_0) dan fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi Delta Diract yang berbentuk

$$f(x,y)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

Berdasarkan sifat fungsi Delta Diract di R^2 yang kedua, maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut :

$$u(x,y)=\iint G(x,y;x_0,y_0)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)dxdy=G(x,y;x_0,y_0)$$

Dengan demikian berdasarkan persamaan di atas dan persamaan (3.2) diperoleh hubungan antara fungsi Green dengan fungsi Delta Diract untuk persamaan Poisson yang dinyatakan dalam persamaan berikut

$$G(x,y;x_0,y_0)=\left(\nabla^2\right)^{-1}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

atau

$$\nabla^2\left[G(x,y;x_0,y_0)\right]=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \qquad (3.3)$$

Persamaan (3.3) ini memberikan arti bahwa fungsi Green adalah suatu fungsi yang juga memenuhi persamaan Poisson yang diberikan.

Di bawah ini diberikan suatu teorema yang menunjukkan bahwa fungsi Green untuk persamaan Poisson dengan fungsi $f(x,y)$ merupakan fungsi Delta Diract bersifat simetris. Untuk membuktikannya dibutuhkan formula Green di dimensi dua yang dinyatakan oleh persamaan berikut ini [4]

$$\iint_A \left(v\nabla^2 u - u\nabla^2 v\right) dA = \oint_{\beta(A)} \left(v\nabla u - u\nabla v\right)\bullet\hat{n}ds \qquad (3.4)$$

Teorema 3.2 Sifat Simetris Fungsi Green

Misalkan G adalah fungsi Green untuk persamaan Poisson, maka G bersifat simetris di titik (x,y) dan titik (x_0,y_0) , yaitu ;

$$G\left(x,y;x_0,y_0\right) = G\left(x_0,y_0;x,y\right)$$

Bukti :

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan formula Green (3.4). Karena pada ruas kanan persamaan (3.4) domainnya pada batas-batas dan syarat batasnya homogen maka akan menjadi sama dengan nol atau persamaan (3.4) menjadi

$$\iint_A \left(v\nabla^2 u - u\nabla^2 v\right) dA = 0 \qquad (3.5)$$

misalkan $v = G\left(x,y;x_0,y_0\right)$ dan $u = G\left(x,y;x_1,y_1\right)$ dimana (x_0,y_0) dan (x_1,y_1) adalah titik-titik di domain A , maka berdasarkan persamaan (3.5) akan di dapatkan

$$\iint_A \left(G\left(x,y;x_0,y_0\right)\nabla^2 G\left(x,y;x_1,y_1\right)-G\left(x,y;x_1,y_1\right)\nabla^2 G\left(x,y;x_0,y_0\right)\right)dA=0$$

atau

$$\iint_A G\left(x,y;x_0,y_0\right)\nabla^2 G\left(x,y;x_1,y_1\right)dA=\iint_A G\left(x,y;x_1,y_1\right)\nabla^2 G\left(x,y;x_0,y_0\right)dA \tag{3.6}$$

berdasarkan hubungan fungsi Green dengan fungsi Delta Diract, yaitu :

$\nabla^2 G\left(x,y;x_0,y_0\right)=\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)$ dan

$\nabla^2 G\left(x,y;x_1,y_1\right)=\delta\left(x-x_1\right)\delta\left(y-y_1\right)$

maka persamaan (3.6) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\iint_A G\left(x,y;x_0,y_0\right)\delta\left(x-x_1\right)\delta\left(y-y_1\right)dA=\iint_A G\left(x,y;x_1,y_1\right)\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)dA$$

dengan mengaplikasikan sifat kedua fungsi Delta Diract di dimensi dua pada persamaan di atas maka akan didapatkan

$$G\left(x_1,y_1;x_0,y_0\right)=G\left(x_0,y_0;x_1,y_1\right)$$

Karena (x_0,y_0) dan (x_1,y_1) merupakan titik-titik di domain A maka terbukti bahwa G bersifat simetris.

3.3 Fungsi Green untuk Persamaan Poisson $\nabla^2 u(x,y) = -\lambda u(x,y)$.

Berikut ini akan ditunjukkan suatu proses pembentukan fungsi Green untuk persamaan Poisson dengan menggunakan ekspansi fungsi eigen

Pandang persamaan poisson

$$\nabla^2 u\left(x,y\right) = -\lambda u\left(x,y\right) \qquad 0 < x < L \;,\; 0 < x < H$$

dengan syarat batas Dirichlet homogen :

(i) $u(0,y) = 0 \qquad (0 < y < H)$

(ii) $u(L,y) = 0 \qquad (0 < y < H)$

(iii) $u(x,0) = 0 \qquad (0 < x < L)$

(iv) $u(x,H) = 0 \qquad (0 < x < L)$

Andaikan fungsi eigen ϕ dengan nilai eigen λ ada, maka fungsi eigen tersebut akan memenuhi persamaan Poisson yang dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\nabla^2 \phi(x,y) = -\lambda \phi(x,y)$$

Misalkan $u\left(x,y\right)$ adalah solusi dari persamaan Poison, maka $u\left(x,y\right)$ dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut

$$u(x,y) = \sum_{\lambda} a_\lambda \phi_\lambda(x,y) \tag{3.7}$$

Karena $u(x,y)$ dan $\phi_\lambda(x,y)$ merupakan solusi dari persamaan Poisson, maka

$$\nabla^2 u\left(x,y\right)=\sum_{\lambda} a_{\lambda}\nabla^2\phi_{\lambda}(x,y)=-\sum_{\lambda} a_{\lambda}\lambda\phi_{\lambda}(x,y)$$

Sesuai dengan bentuk umum persamaan Poisson $\nabla^2 u\left(x,y\right)=f(x,y)$ maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$f(x,y)=-\sum_{\lambda} a_{\lambda}\lambda\phi_{\lambda}(x,y)$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan suatu $\phi_{\lambda}(x,y)$ dan diintegralkan pada domainnya maka akan didapatkan bentuk sebagai berikut

$$\iint f(x,y)\phi_{\lambda}(x,y)dA=\iint -\sum_{\lambda} a_{\lambda}\lambda\phi_{\lambda}(x,y)\phi_{\lambda}(x,y)dA$$

karena sifat ortogonalitas dari $\{\phi_{\lambda}(x,y)\}$ [2], maka bentuk persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$\iint f(x,y)\phi_{\lambda}(x,y)dA=-\lambda a_{\lambda}\iint \phi_{\lambda}^{2}(x,y)dA$$

namakan variabel $x=x_0$ dan $y=y_0$ pada ruas kiri dari persamaan di atas sehingga didapat

$$\iint f(x_0,y_0)\phi_{\lambda}(x_0,y_0)dA_0=-\lambda a_{\lambda}\iint \phi_{\lambda}^{2}(x,y)dA$$

atau

$$-a_{\lambda}\lambda=\frac{\iint f(x_0,y_0)\phi_{\lambda}(x_0,y_0)dA_0}{\iint \phi_{\lambda}^{2}(x,y)dA}$$

Berdasarkan persamaan di atas, maka bentuk persamaan (3.7) akan mempunyai bentuk sebagai berikut

$$u(x,y)=\sum_{\lambda}\frac{\iint f(x_0,y_0)\phi_\lambda(x_0,y_0)dA_0}{-\lambda\iint \phi_\lambda{}^2(x,y)dA}\phi_\lambda(x,y)$$

Berdasarkan representasi solusi dari persamaan Poisson (3.2) maka bentuk fungsi Greennya adalah

$$G(x,y;x_0,y_0)=\sum_{\lambda}\frac{\phi_\lambda(x,y)\phi_\lambda(x_0,y_0)}{-\lambda\iint \phi_\lambda{}^2(x,y)dA} \qquad (3.8)$$

Berikut ini akan ditunjukkan bentuk fungsi Green untuk persamaan Poisson di bawah ini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\lambda u \qquad 0<x<L\,,0<x<H \qquad (3.9)$$

dengan syarat batas Dirichlet homogen :

(i) $u(0,y)=0 \qquad (0<y<H)$

(ii) $u(L,y)=0 \qquad (0<y<H)$

(iii) $u(x,0)=0 \qquad (0<x<L)$

(iv) $u(x,H)=0 \qquad (0<x<L)$

Penyelesaian persoalan syarat batas di atas menggunakan variabel terpisah yaitu suatu metode dimana solusi dapat dinyatakan dalam bentuk

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y) \tag{3.10}$$

Jika persamaan (3.10) disubstitusikan ke (3.9) maka akan diperoleh

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0$ atau

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)}$$

Karena kedua ruas persamaan di atas masing-masing merupakan fungsi dengan variabel bebas berbeda maka dapat dimisalkan sama dengan suatu konstanta μ, sehingga diperoleh dua persamaan diferensial biasa berikut

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \tag{3.11}$$

$$Y''(y) - (\mu - \lambda)Y(y) = 0 \tag{3.12}$$

Jika persamaan (3.10) disubstitusikan ke syarat batas (i) dan (ii) maka akan didapatkan persamaan-persamaan berikut ini

$$u(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0$$

$$u(L,y) = X(L)\,Y(y) = 0$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas didapat bahwa $X(0) = X(L) = 0$ atau $Y(y) = 0$. Jika $Y(y) = 0$ maka $u(x,y) = 0$ yang berarti hanya solusi trivial yang didapat. Sehingga untuk mendapatkan solusi non-trivial haruslah $Y(y) \neq 0$ atau didapat syarat batas berikut ini

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{3.13}$$

Jika persamaan (3.10) disubstitusikan ke syarat batas (iii) dan (iv) maka akan didapatkan persamaan-persamaan berikut ini

$$u(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0$$

$$u(x,H) = X(x)\,Y(H) = 0$$

Berdasarkan kedua persamaan diatas didapat bahwa $Y(0) = Y(H) = 0$ atau $X(x) = 0$. Jika $X(x) = 0$ maka $u(x,y) = 0$ yang berarti solusi trivial yang didapat. Sehingga untuk mendapatkan solusi non-trivial haruslah $X(x) \neq 0$ atau didapat syarat batas berikut ini

$$Y(0) = Y(H) = 0 \qquad (3.14)$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan (3.11) dengan syarat batas (3.13). Persamaan karakteristik dari persamaan (3.11) adalah $p^2 + \mu = 0$ atau $p^2 = -\mu$. Nilai-nilai μ yang mungkin adalah $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Berikut ini akan ditunjukkan nilai-nilai μ agar persamaan (3.11) mempunyai solusi yang non-trivial :

i. Kemungkinan pertama $\mu > 0$

   Jika $\mu > 0$, maka $p = \pm\sqrt{-\mu} = \pm i\sqrt{\mu}$. Karena persamaan (3.11) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya bilangan kompleks maka solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah $X(x) = c_0 e^{i\sqrt{\mu}x} + c_{01} e^{-i\sqrt{\mu}x}$ [3]. Solusi ini dapat juga ditulis dalam bentuk berikut

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\mu}x + c_2 \sin\sqrt{\mu}x \tag{3.15}$$

dimana c_1, c_2 adalah konstanta riil.

Jika syarat batas $X(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.15), maka akan didapatkan solusi berikut

$$X(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu}x \tag{3.16}$$

Jika syarat batas $X(L) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.16), maka akan didapatkan nilai $c_2 = 0$ atau $\sin\sqrt{\mu}L = 0$. Karena yang diinginkan adalah solusi non-trivial, maka harus memenuhi $\sin\sqrt{\mu}L = 0$. Nilai $\sqrt{\mu}L$ merupakan pembuat nol dari fungsi sinus, yaitu $\sqrt{\mu}L = n\pi$, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$. Dengan demikian diperoleh nilai $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ dan $X_n(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu_n}x$ dengan $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$.

ii. Kemungkinan kedua $\mu = 0$

Jika $\mu = 0$ maka persamaan (3.11) akan menjadi $X''(x) = 0$, sehingga solusinya adalah

$$X(x) = c_3 + c_4 x \tag{3.17}$$

dimana c_3, c_4 adalah konstanta riil [3].

Jika syarat batas $X(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.17), maka akan di dapatkan solusi dengan bentuk

$$X(x) = c_4 x \tag{3.18}$$

Jika syarat batas $X(L) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.18) , maka $c_4 = 0$. Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh $X(x) = 0$ yang merupakan solusi trivial.

iii. Kemungkinan ketiga $\mu < 0$

Jika $\mu < 0$, maka $p = \pm\sqrt{-\mu}$. Karena persamaan (3.11) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya real berbeda maka solusinya

$$X(x) = c_5 e^{\sqrt{-\mu}x} + c_6 e^{-\sqrt{-\mu}x} \tag{3.19}$$

dimana c_5, c_6 adalah konstanta riil [3].

Kemudian syarat batas $X(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.19), sehingga akan didapatkan $c_5 = -c_6$, maka persamaan (3.19) menjadi

$$X(x) = c_6 (e^{-\sqrt{-\mu}x} - e^{\sqrt{-\mu}x}) \tag{3.20}$$

Jika syarat batas $X(L) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.20) , maka persamaan (3.20) akan menjadi $c_6 (e^{-\sqrt{-\mu}L} - e^{\sqrt{-\mu}L}) = 0$. Karena $(e^{-\sqrt{-\mu}L} - e^{\sqrt{-\mu}L}) \neq 0$ maka $c_6 = 0$. Dengan demikian $X(x) = 0$, sehingga pada kemungkinan ketiga ini juga diperoleh solusi yang trivial.

Sehingga dari ketiga kemungkinan diatas didapatkan solusi

$X_n(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu_n}\, x$ dengan $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Berikut ini akan dicari solusi dari persamaan (3.12) dengan syarat batas (3.14). Persamaan eigen untuk persamaan (3.12) adalah $p^2 - \mu + \lambda = 0$, atau $p^2 = (\lambda - \mu)$, sebut $(\lambda - \mu) = \tau$. Karena $p^2 = \tau$ maka akan mengakibatkan tiga kemungkinan, yaitu $\tau > 0, \tau = 0$ dan $\tau < 0$.

i. Kemungkinan pertama $\tau > 0$

Jika $\tau > 0$, maka $p = \pm\sqrt{\tau}$. Karena persamaan (3.12) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya bilangan riil berbeda maka solusinya

$$Y(y) = c_7 e^{\sqrt{\tau}y} + c_8 e^{-\sqrt{\tau}y} \tag{3.21}$$

dimana c_7, c_8 adalah konstanta riil [3].

Jika syarat batas $Y(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.21), sehingga akan didapatkan $c_7 = -c_8$, maka solusinya menjadi

$$Y(y) = c_8(e^{-\sqrt{\tau}y} - e^{\sqrt{\tau}y}) \tag{3.22}$$

Jika syarat batas $Y(H) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.22), maka persamaan (3.22) menjadi $c_8(e^{-\sqrt{\tau}H} - e^{\sqrt{\tau}H}) = 0$. Karena $(e^{-\sqrt{\tau}H} - e^{\sqrt{\tau}H}) \neq 0$

maka $c_8 = 0$, dengan demikian $Y(y) = 0$, sehingga pada kasus pertama diperoleh solusi yang trivial.

ii. Kemungkinan kedua $\tau = 0$

Jika $\tau = 0$ maka persamaan (3.12) akan menjadi maka $Y''(y) = 0$, sehingga

$$Y(y) = c_9 + c_{10} y \qquad (3.23)$$

Jika syarat batas $Y(0) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.23) , maka solusinya

$$Y(y) = c_{10} y \qquad (3.24)$$

Jika syarat batas $Y(H) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.24) , maka $c_{10} = 0$. Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh $Y(y) = 0$ yang merupakan solusi trivial.

iii. Kemungkinan ketiga $\tau < 0$

Jika $\tau < 0$, maka $p = \pm i\sqrt{\tau}$. Karena persamaan (3.12) adalah persamaan diferensial linier homogen order dua koefisien konstan dengan nilai-nilai karakteristiknya bilangan kompleks maka solusinya [3]

$Y(y) = c_{02} e^{i\sqrt{\tau} y} + c_{03} e^{-i\sqrt{\tau} y}$. Solusi ini juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$Y(y) = c_{11} \cos\sqrt{\tau} y + c_{12} \sin\sqrt{\tau} y \qquad (3.25)$$

dimana c_{11}, c_{12} adalah konstanta riil.

Kemudian syarat batas $Y(0)=0$ di substitusikan ke persamaan (3.25) maka solusinya menjadi

$$Y\ (y\ ) = c_{12} \sin \sqrt{\tau} y \tag{3.26}$$

Jika syarat batas $Y\ (H\ )=0$ disubstitusikan ke persamaan (3.26) , maka akan diperoleh $c_{12}=0$ atau $\sin \sqrt{\tau} H\ =0$. Karena yang diinginkan adalah solusi non-trivial, maka harus memenuhi $\sin \sqrt{\tau} H\ =0$, agar $\sin \sqrt{\tau} H\ =0$ maka $\sqrt{\tau} H$ haruslah pembuat nol dari fungsi sinus, yaitu $\sqrt{\tau} H\ = m\pi$, dengan $m\ =1,2,3,.....$ Dengan demikian diperoleh nilai $\tau_m\ =-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$ dan $Y_m\,(y\,) = c_{12} \sin \sqrt{\tau_m}\, y$.

Sehingga dari ketiga kasus diatas didapatkan nilai $\tau_m\ =-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$ dan $Y_m\,(y\,) = c_{12} \sin \sqrt{\tau_m}\, y$. Karena $(\lambda-\mu)=\tau$ maka diperoleh hubungan $(\lambda_{nm}-\mu_n)=\tau_m$, sehingga dengan mensubstitusikan nilai μ_n dan τ_m diperoleh nilai λ_{nm} , yaitu :

$$\lambda_{nm} = \left(\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)$$

dan solusinya adalah

$$u_{nm}(x,y) = a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} \tag{3.27}$$

dengan $n = 1, 2, 3, ...$ dan $m = 1, 2, 3, ...$

Dengan menggunakan prinsip superposisi yang menyatakan kombinasi linier dari solusi persamaan diferensial parsial juga merupakan solusinya [4] maka persamaan (3.27) akan mempunyai bentuk

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{H} \tag{3.28}$$

Dengan melihat bentuk persamaan (3.28) dan bentuk umum dari persamaan (3.7), maka nilai

$$\phi_{\lambda}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{H} \tag{3.29}$$

$$\iint \phi_{\lambda}^{2}(x, y)dA = \int_0^L\int_0^H \left(\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\right)^2 dxdy = \frac{L}{2}\frac{H}{2} \tag{3.30}$$

Persamaan (3.29) dan persamaan (3.30) disubstitusikan ke persamaan (3.8) , maka akan diperoleh bentuk fungsi Green sebagai berikut

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{-4}{LH}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{m\pi y_0}{H}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

Berdasarkan representasi solusi dari persamaan Poisson (3.2), maka bentuk umum solusi dari persamaan poisson adalah

$$u(x,y)=\int_0^L\int_0^H f(x_0,y_0)\frac{-4}{LH}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{m\pi y_0}{H}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}dx_0\,dy_0$$

BAB IV

PENUTUP

Pada bab II dan III telah ditunjukkan bahwa persamaan Laplace dengan syarat batas Dirichlet homogen hanya akan mendapatkan solusi trivial. Agar persamaan Poisson mempunyai solusi non-trivial diperlukan kondisi $f(x,y) \neq 0$ atau syarat batas yang non-homogen. Pada tugas akhir ini dipilih $f(x,y) \neq 0$. Terdapat dua buah kondisi untuk $f(x,y) \neq 0$, yaitu :

1. $f(x,y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$

diperoleh :

a. Fungsi Green memenuhi persamaan poisson

$$\nabla^2 \left[G(x,y;x_0,y_0) \right] = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

b. Fungsi Green bersifat simetris

$$G(x,y;x_0,y_0) = G(x_0,y_0;x,y)$$

2. $f(x,y) = -\lambda u(x,y)$

diperoleh bentuk umum fungsi Green untuk persamaan Poisson sebagai berikut

$$G(x,y;x_0,y_0) = \frac{-4}{LH}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{m\pi y_0}{H}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bleecker, D., G. Csordas. 1995. *Basic Partial Differential Equations*, Chapman & Hall, .

[2] Haberman, Richard. 2004. *Applied Partial Differential Equations*, 4th ed. Prentice-Hall International. kota.hal.

[3] Ross.L.Ross. 1989. *Introduction To Ordinary Differential Equations*. 4th ed . Jhon Wiley. New York. xi + 609 hlm.

[4] Trims, Donald W. 1990. *Applied Differential Equations*. International Thomson Publishing. Boston: xv + 485 hlm.

[5] Zill.D.G, Cullen.M.R. 1997. *Differential Equations With Boundary Value Problems*. International Thomson Publishing. Kota.hal.