METODE *DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING*

(STUDI KASUS : MENAKSIR TOTAL BANYAK KATAK

DI SEKELILING DANAU AGATIS

UNIVERSITAS INDONESIA)

ANDIKA DWI ISFANDIARI

0 3 0 3 0 1 0 0 4 4

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

METODE *DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING*

(STUDI KASUS : MENAKSIR TOTAL BANYAK KATAK DI SEKELILING DANAU AGATIS UNIVERSITAS INDONESIA)

Skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh :

ANDIKA DWI ISFANDIARI

0 3 0 3 0 1 0 0 4 4

DEPOK

2009

SKRIPSI : METODE *DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING* (STUDI KASUS : MENAKSIR TOTAL BANYAK KATAK DI SEKELILING DANAU AGATIS UNIVERSITAS INDONESIA)

NAMA : ANDIKA DWI ISFANDIARI

NPM : 0303010044

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 24 JUNI 2009

Dra. Rianti Setiadi, M.Si.	Dra. Saskya Mary S., M.Si.
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal Ujian Sidang Sarjana : 24 Juni 2009

Penguji I : Dra. Rianti Setiadi, M.Si.

Penguji II : Dr. Dian Lestari, DEA

Penguji III : Dra. Suarsih Utama

KATA PENGANTAR

Dengan rahmat dan karunia ALLAH SWT yang berlimpah, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penyelesaian tugas akhir ini juga tidak lepas dari bantuan, dukungan, serta do'a dari berbagai pihak, sehingga penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sangat besar kepada:

- Pembimbing tugas akhir penulis, Dra Rianti Setiadi MSi dan Dra Saskya Mary MSi, yang telah memberikan waktu, tenaga, pikiran, arahan, dan motivasi
- Ayah dan ibu penulis, Handi Rohandi dan Linda Marni Djohan, yang telah memberikan segalanya, terutama kasih sayang, perhatian, kesabaran, dorongan, dan tempat bernaung
- Pendamping hari-hari penulis, Desi Natasha Rufiani, yang telah memberikan waktu bersama, baik dalam suka maupun duka
- Keluarga Andromeda, Johan Andromeda, Lydia Amanda Handayani, dan Maissa Aliya Andromeda, yang telah memberikan doa dan motivasi
- Kakek dan nenek penulis, (Alm)Hassan Basri Djohan dan (Almah)Chasiah Djohan, yang telah memberikan kasih sayang sewaktu kecil, beserta (Alm)Sanapi dan (Almah)Uken Sukaenah

- Pembimbing Akademik penulis, Bevina D. Handari PhD, yang telah memberikan perhatian untuk perkembangan akademik penulis
- Dosen-dosen Matematika Universitas Indonesia khususnya Dra Netty Sunandi MSi, Milla Novita SSi MSi, Sarini SSi MStats, Dr Dian Lestari DEA, Dra Suarsih Utama, dan Fevi Novkaniza SSi MSi yang telah memberikan waktu untuk hadir dalam seminar dan sidang penulis, beserta Prof Dr Djati Kerami DEA
- Tim Pencari Katak, Ajat Ardiansyah, Pudiahwai Anton Wibowo, Bembi Prima, R.Arkan Gilang, Agustinus Gunung, Ilham Candra Budiman, Rendie Maulana Arifin, Reza Henganing, Irwanto, Yanuar Singgih Saputra, Desi Natasha Rufiani, dan Ardani, yang telah memberikan waktu dan tenaga dalam pengambilan sampel di Danau Agatis, Universitas Indonesia
- Karyawan Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, yang telah memberikan bantuan dalam segala hal di jurusan
- Sahabat-sahabat the Deplus, Priangga Adam Kartosuwiryo, Ilham Hismi Haque, Rezza Abadilla, dan I Made Yogi Pranasatya, yang telah memberikan banyak hal bersama
- Teman-teman Matematika 2003, yang telah memberikan kebersamaan selama beberapa tahun terakhir ini

- Teman-teman Matematika angkatan lain, yang telah memberikan pilihannya untuk mengejar cita-cita di kampus ini
- Teman-teman Indonesian Toon Army, CCF Wijaya, dan Futsal Sabtu Pagi, yang telah memberikan kesenangan dan keceriaan pada masa-masa penyelesaian tugas akhir ini
- Murid-murid penulis, Barry Thraser, DB, Jamie McNally, dan Kurt McNally, yang telah memberikan keceriaan tersendiri
- Keluarga Suwenda, Bapak Rema Suwenda, Ibu Fatmahani Dhamayanti, Desi Natasha Rufiani, dan Astrid Novirianti, yang telah memberikan kesabaran dan kepercayaan yang sangat besar
- dan pihak-pihak lain yang tanpa sengaja tidak disebutkan di atas, namun telah memberikan bantuan selama ini

Akhir kata, penulis sangat menyadari bahwa tugas akhir ini masih sangat jauh dari kesempurnaan, oleh karena hal tersebut penulis memohon maaf dan sangat terbuka terhadap saran dan kritik yang membangun. Semoga tugas akhir ini bermanfaat.

Penulis

ABSTRAK

Masalah yang akan dijumpai dalam pengambilan sampel di alam terbuka dengan objek pengamatan hewan yaitu tidak semua objek pengamatan dapat terdeteksi. Salah satu metode untuk mengatasinya adalah metode *Detectability Sampling*, yaitu metode pengambilan sampel dengan mempertimbangkan probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan. Jika metode *Detectability Sampling* diterapkan pada *Simple Random Sampling*, maka metode pengambilan sampel ini disebut *Detectability Simple Random Sampling*. Taksiran total populasi yang didapat dari metode *Detectability Simple Random Sampling* merupakan taksiran yang tak bias. Probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan dapat diketahui atau ditaksir dari penelitian sebelumnya.

Dalam tugas akhir ini, probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan ditaksir dari penelitian sebelumnya yang menggunakan metode *Direct Sampling*. Studi kasus penerapan metode ini digunakan dalam menaksir total banyak katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia. Hasil analisa data menunjukkan bahwa total banyak katak di sekeliling Danau Agatis adalah sebesar 266 katak. Jika banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis dibandingkan dengan banyak katak per luas yang didapat dari penelitian sebelumnya di sekeliling danau yang bersih, dimana memberikan hasil bahwa banyak katak per luas di sekeliling Danau

Agatis lebih kecil dibandingkan banyak katak per luas di danau yang bersih, maka dapat disimpulkan bahwa Danau Agatis, Universitas Indonesia telah mulai tercemar.

kata kunci : *taksiran tak bias, total populasi, simple random sampling, probabilitas terdeteksinya objek pengamatan, direct sampling*

x + 64 hlmn.

Bibliografi : 8 (1977-2009)

DAFTAR ISI

Halaman

KATA PENGANTAR i

ABSTRAK iv

DAFTAR ISI vi

DAFTAR TABEL ix

DAFTAR GAMBAR x

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Tujuan 3

1.4 Sistematika Penulisan 3

BAB II LANDASAN TEORI 5

2.1 Metode penaksiran mean dan total populasi dengan

Simple Random Sampling 5

2.1.1 Taksiran untuk mean populasi 5

2.1.2 Taksiran untuk total populasi 13

2.2 Metode untuk mencari taksiran dari probabilitas

terdeteksinya suatu objek pengamatan 15

BAB III *DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING* 20

3.1 Pengertian dasar tentang metode *Detectability Sampling* 20

3.2 Pengertian dan cara pengambilan sampel dengan

metode *Detectability Simple Random Sampling* 25

3.3 Taksiran untuk total populasi dimana sampel diambil

dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* 27

3.3.1 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek

diketahui dan bernilai sama untuk setiap

daerah pengamatan 27

3.3.2 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek

diketahui, namun memiliki nilai yang berbeda

untuk setiap daerah pengamatan 33

3.3.3 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek

tidak diketahui, namun diasumsikan bernilai

sama untuk setiap daerah pengamatan 40

BAB IV APLIKASI 45

4.1 Katak sebagai bioindikator tingkat kebersihan danau 45

4.2 Pengambilan sampel katak di sekeliling Danau Agatis

Universitas Indonesia 47

4.3 Populasi dan sampel 48

4.4 Hasil penelitian dan pembahasan 48

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 52

5.1 Kesimpulan 52

5.2 Saran 55

LAMPIRAN 56

Lampiran 1 57

Lampiran 2 58

Lampiran 3 62

DAFTAR PUSTAKA 64

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel Hasil Penelitian Di Danau Agatis 48

Tabel Analisa Deskriptif 49

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar Foto-Foto Sampah di Sekeliling Danau Agatis 51

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengambilan sampel dalam beberapa penelitian, khususnya di alam terbuka, sering dijumpai masalah dimana unit sampel yang seharusnya diamati sebagai elemen sampel, tidak dapat terdeteksi. Karena hal ini, jika ingin mencari taksiran parameter populasi, misalnya total populasi, perlu diperhatikan metode pengambilan sampel yang tepat, dengan mempertimbangkan probabilitas terdeteksinya unit sampling. Jika probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling tidak diperhatikan, maka akan didapatkan taksiran yang *underestimate* terhadap total populasi. Metode pengambilan sampel dengan memperhatikan probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling disebut metode *Detectability Sampling*. Jika metode *Detectability Sampling* diterapkan pada *Simple Random Sampling*, maka metode pengambilan sampel ini disebut *Detectability Simple Random Sampling.* Dalam metode *Detectability Sampling*, probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling dapat diketahui atau ditaksir berdasarkan data penelitian sebelumnya.

Dalam tugas akhir ini, akan dibahas tentang cara mencari taksiran total populasi pada metode pengambilan sampel *Detectability Simple*

Random Sampling jika probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan telah diketahui atau ditaksir berdasarkan data penelitian sebelumnya. Metode tersebut akan diterapkan untuk menaksir total banyak katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia, yaitu danau alami yang berada tepat di seberang Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Pengambilan sampel katak dilakukan secara *Detectabillity Simple Random Sampling* di sekeliling Danau Agatis, Unversitas Indonesia.

Dalam penerapannya, taksiran probabilitas terdeteksinya katak dan taksiran untuk variansinya diperoleh dari penelitian sebelumnya dengan menggunakan metode *Direct Sampling*. Banyak katak di sekeliling danau dapat menjadi bioindikator kebersihan danau tersebut. Semakin banyak katak, berarti semakin bersih danau tersebut. Dengan membandingkan banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis terhadap banyak katak per luas di sekeliling danau yang bersih, dapat ditentukan apakah Danau Agatis masih bersih atau sudah tercemar.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini adalah bagaimana mencari taksiran total populasi berdasarkan sampel yang diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* baik jika probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan diketahui, maupun jika probabilitas terdeteksinya objek pengamatan ditaksir berdasarkan data dari penelitian sebelumnya.

1.3 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini:

1. Mencari taksiran total populasi berdasarkan sampel yang diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* jika probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan diketahui.
2. Mencari taksiran total populasi berdasarkan sampel yang diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* jika probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan ditaksir berdasarkan data dari penelitian sebelumnya.
3. Metode *Detectability Simple Random Sampling* akan diterapkan untuk menghitung total banyak katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia.
4. Membandingkan banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis terhadap banyak katak per luas di sekeliling danau yang masih bersih.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi lima bab, yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan secara singkat mengenai latar belakang, permasalahan, tujuan, pembatasan masalah, aplikasi dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini membahas landasan teori dari tugas akhir ini yaitu mengenai metode untuk mencari taksiran mean dan total populasi pada *Simple Random Sampling*. Akan dibahas jaga metode *Direct Sampling* yang akan digunakan untuk menaksir probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan

BAB III DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING

Bab ini menjelaskan mengenai bagaimana cara pengambilan sampel dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*, dan mencari taksiran total populasi dimana sampel diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*.

BAB IV APLIKASI

Bab ini menjelaskan penerapan metode *Detectability Simple Random Sampling* dalam pengambilan sampel untuk menaksir total banyak katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia.

BAB V PENUTUP

Bab ini menampilkan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang akan digunakan dalam penulisan tugas akhir ini, yaitu mengenai metode penaksiran mean dan total populasi untuk *Simple Random Sampling* dan metode untuk mencari taksiran dari probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan.

2.1 Metode penaksiran mean dan total populasi dengan *Simple Random Sampling*

Simple Random Sampling adalah cara pengambilan sampel dimana sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N. Dengan cara ini maka setiap unit populasi akan memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi sampel.

2.1.1 Taksiran untuk mean populasi

Misalkan sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N. Definisikan S adalah sampel yang terpilih secara *Simple Random Sampling.* $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah nilai-nilai dari unit sampel yang terpilih secara *Simple*

Random Sampling. Sebut $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai dari unit populasi.

Definisikan $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$ sebagai mean populasi. Selanjutnya didefinisikan

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, maka dapat dibuktikan bahwa:

1. $\bar{y}$ adalah taksiran tak bias untuk μ
2. variansi dari $\bar{y}$ adalah $V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dengan $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2$
3. $\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\bar{y})$, dimana

   $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

bukti:

Definisikan variabel indikator $z_i = \begin{cases} 1, & u_i \in S \\ 0, & u_i \notin S \end{cases}$

dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} E(z_i) &= 1 \cdot \Pr(z_i = 1) + 0 \cdot \Pr(z_i = 0) \\ &= 1 \cdot \Pr(u_i \in S) + 0 \cdot \Pr(u_i \notin S) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{n}{N}\right) + 0 \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \\ &= \frac{n}{N} \quad \text{...} (2.1.1) \end{aligned}$$

$$V(z_i) = E(z_i^2) - [E(z_i)]^2$$
$$= E(z_i) - [E(z_i)]^2$$
$$= \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2$$
$$= \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad \text{..........(2.1.2)}$$

dan $\operatorname{cov}(z_i, z_j) = E(z_i z_j) - E(z_i)E(z_j)$, dimana

$$E(z_i z_j) = \Pr(z_i = 1, z_j = 1)$$
$$= \frac{{}_{N-2}C_{n-2}}{{}_{N}C_{n}}$$
$$= \frac{\dfrac{(N-2)!}{(N-n)!(n-2)!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!\,n!}}$$
$$= \frac{\dfrac{(N-2)!}{(n-2)!}}{\dfrac{N(N-1)(N-2)!}{n(n-1)(n-2)!}}$$
$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \quad \text{..........(2.1.3)}$$

sehingga dari persamaan (2.1.1) dan (2.1.3), didapat

$$\operatorname{cov}(z_i, z_j) = E(z_i z_j) - E(z_i)E(z_j)$$
$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)\left(\frac{n}{N}\right)$$
$$= \frac{n}{N}\frac{(n-1)}{(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(z_i, z_j) &= \frac{n}{N}\frac{(n-1)}{(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right) \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{N(n-1)-(n(N-1))}{N(N-1)}\right) \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{Nn - N - Nn + n}{N(N-1)}\right) \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{n-N}{N(N-1)}\right) \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{n-N}{N}\right)\frac{1}{N-1} \\
&= \frac{n}{N}\left(\frac{n}{N}-1\right)\frac{1}{N-1} \\
&= -\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1} \quad \text{...(2.1.4)}
\end{aligned}$$

sehingga

1. akan dibuktikan bahwa $\bar{y}$ adalah taksiran tak bias untuk μ, yang berarti bahwa $E(\bar{y}) = \mu$

$$\begin{aligned}
E(\bar{y}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) \\
&= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i z_i}{n}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i E(z_i)}{n}
\end{aligned}$$

dari persamaan (2.1.1) didapat

$$E(\bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i E(z_i)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i \left(\frac{n}{N}\right)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

$$= \mu \text{..}(2.1.5)$$

$\therefore$ terbukti bahwa $\bar{y}$ adalah taksiran tak bias untuk μ.

2. akan ditunjukkan bahwa $V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dengan $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2$

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 V(z_i) + \sum\sum_{i \neq j} u_i u_j \operatorname{cov}(z_i, z_j)\right] \text{....................................}(2.1.6)$$

dari persamaan (2.1.2), (2.1.4), dan karena

$\sum\sum_{i \neq j} u_i u_j = \left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^2$, maka

$$
\begin{aligned}
V(\bar{y}) &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 V(z_i) + \sum\sum_{i\neq j} u_i u_j \operatorname{cov}(z_i, z_j)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2\left(\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\right) + \sum\sum_{i\neq j} u_i u_j\left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \sum\sum_{i\neq j}\frac{u_i u_j}{N-1}\right] \\
&= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^2}{N-1}\right] \\
&= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\frac{(N-1)\sum_{i=1}^{N} u_i^2}{(N-1)} + \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}{(N-1)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2}{(N-1)}\right] \\
&= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[N\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2}{N}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i-\mu)^2}{N-1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i-\mu)^2}{N-1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i-\mu)^2}{N}\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{...} (2.1.7)
\end{aligned}
$$

3. akan dibuktikan $\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran tak bias $V(\bar{y})$,

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$, yang berarti akan dibuktikan $E(\hat{V}(\bar{y})) = V(\bar{y})$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{V}(\bar{y})) &= E\left(\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right) \\
&= \frac{N-n}{Nn}E(s^2)
\end{aligned}
$$

dimana

$$
\begin{aligned}
E(s^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}((y_i - \mu) - (\bar{y} - \mu))^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left((y_i - \mu)^2 + (\bar{y} - \mu)^2 - 2(y_i - \mu)(\bar{y} - \mu)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)(\bar{y} - \mu)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + n(\bar{y} - \mu)^2 - 2(\bar{y} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + n(\bar{y} - \mu)^2 - 2(\bar{y} - \mu)(n(\bar{y} - \mu))\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + n(\bar{y} - \mu)^2 - 2n(\bar{y} - \mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 - n(\bar{y} - \mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}V(y) - nV(\bar{y})\right)
\end{aligned}
$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} V(y) - nV(\bar{y})\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - nV(\bar{y})\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\left(n - \frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\left(\frac{n(N-1)-(N-n)}{N-1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\left(\frac{Nn-n-N+n}{N-1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\left(\frac{Nn-N}{N-1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\frac{N(n-1)}{N-1}$$

$$= \frac{N}{N-1}\sigma^2 \quad \text{..(2.1.8)}$$

maka dari persamaan (2.1.8) didapat

$$E\left(\hat{V}(\bar{y})\right) = E\left(\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{N-n}{Nn}E\left(s^2\right)$$

$$= \frac{N-n}{Nn}\frac{N}{N-1}\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$= V(\bar{y}) \quad \text{..(2.1.9)}$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\bar{y})\right) = V(\bar{y})$, maka terbukti bahwa $\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\bar{y})$.

2.1.2 Taksiran untuk total populasi

Didefinisikan total populasi sebagai $\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ dan mean populasi sebagai $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$, selanjutnya didefinisikan taksiran untuk total populasi τ adalah $\hat{\tau} = N\bar{y} = N\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ dan dapat dibuktikan bahwa:

1. $\hat{\tau}$ merupakan taksiran tak bias untuk τ
2. Variansi dari $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = N^2\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
3. $\hat{V}(\hat{\tau}) = N^2\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$

bukti:

1. akan dibuktikan $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias τ , yang berarti akan dibuktikan $E(\hat{\tau}) = \tau$

$$E(\hat{\tau}) = E(N\bar{y})$$
$$= NE(\bar{y})$$

dari persamaan (2.1.5) didapat $E(\bar{y}) = \mu$, sehingga

$$E(\hat{\tau}) = N\mu$$
$$= \tau \quad \text{...}(2.1.10)$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, maka terbukti $\hat{\tau} = N\bar{y}$ adalah taksiran tak bias untuk τ .

2. akan ditunjukkan variansi dari $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = N^2 \dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$.

$$V(\hat{\tau}) = V(N\bar{y})$$
$$= N^2 V(\bar{y})$$

dari persamaan (2.1.7) didapat $V(\bar{y}) = \dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$, sehingga

$$V(\hat{\tau}) = N^2 V(\bar{y})$$
$$= N^2 \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{...}(2.1.11)$$

$\therefore$ telah ditunjukkan bahwa variansi dari $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = N^2 \dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

3. akan dibuktikan bahwa $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$, yang berarti akan dibuktikan bahwa $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) = V(\hat{\tau})$

$$E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right)=E\left(\hat{V}(N\bar{y})\right)$$
$$=E\left(N^{2}\hat{V}(\bar{y})\right)$$
$$=N^{2}E\left(\hat{V}(\bar{y})\right)$$

dari persamaan (2.1.9) didapat $E\left(\hat{V}(\bar{y})\right)=\frac{\sigma^{2}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, sehingga

$$E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right)=N^{2}E\left(\hat{V}(\bar{y})\right)$$
$$=N^{2}\frac{\sigma^{2}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$
$$=V(\hat{\tau})\quad(2.1.12)$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right)=V(\hat{\tau})$, maka terbukti $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$

2.2 Metode untuk mencari taksiran dari probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan

Metode *Detectability Simple Random Sampling* merupakan suatu metode pengambilan sampel yang mempertimbangkan adanya probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan. Namun dalam penerapannya, adakalanya probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan p tidak diketahui, sehingga harus ditaksir berdasarkan data penelitian sebelumnya. Karena dalam penerapan pada tugas akhir ini nilai taksiran untuk p didapat dari penelitian sebelumnya yang menggunakan metode *Direct Sampling* untuk menaksir total banyak katak di sekeliling suatu danau, yang berada di lingkungan Kampus Universitas Indonesia Depok, maka pada subbab ini akan dijelaskan tentang metode untuk mendapatkan taksiran untuk p pada metode *Direct Sampling*. Metode *Direct Sampling* dilakukan untuk menaksir probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan p, yang dilakukan dengan cara sebagai berikut:

Ambil sampel sebanyak t objek pengamatan, ditandai, dan kemudian dilepaskan kembali ke habitatnya. Selanjutnya pada kesempatan lain, diambil lagi sampel sebanyak n objek pengamatan, dan dihitung banyak objek yang telah ditandai pada pengambilan sampel sebelumnya. Misalkan s adalah objek pengamatan yang tertandai. Karena n suatu nilai fixed, maka s akan berdistribusi $b(n, p)$ dengan p merupakan probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan.

Definisikan $\hat{p} = \frac{s}{n}$, dan dapat dibuktikan bahwa:

1. $\hat{p}$ adalah taksiran tak bias untuk p,
2. variansi untuk $\hat{p}$ adalah $V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$,
3. $\hat{V}(\hat{p}) = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{s}{n} - \frac{s^2}{n^2}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{p})$

bukti:

1. akan dibuktikan $\hat{p}$ adalah taksiran tak bias untuk p, yang berarti akan dibuktikan $E(\hat{p}) = p$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{s}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}E(s)$$

karena s berdistribusi $b(n, p)$ dengan $E(s) = np$, maka

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n}E(s)$$
$$= \frac{1}{n}np$$
$$= p \text{..}(2.2.1)$$

$\therefore$ karena $E(\hat{p}) = p$, maka terbukti $\hat{p}$ adalah taksiran tak bias untuk p

2. akan ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{p}$ adalah $V(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{s}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}V(s)$$

karena s berdistribusi $b(n, p)$ dengan $V(s) = np(1-p)$, maka

$$V(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} V(s)$$
$$= \frac{1}{n^2}(np(1-p))$$
$$= \frac{p(1-p)}{n} \qquad \text{...}(2.2.2)$$

$\therefore$ telah ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{p}$ adalah $V(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

3. akan dibuktikan bahwa $\hat{V}(\hat{p}) = \dfrac{1}{(n-1)}\left(\dfrac{s}{n} - \dfrac{s^2}{n^2}\right)$ adalah taksiran tak bias

   untuk $V(\hat{p})$, yang berarti akan dibuktikan bahwa $E(\hat{V}(\hat{p})) = V(\hat{p})$

$$E(\hat{V}(\hat{p})) = E\left(\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{s}{n} - \frac{s^2}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{(n-1)} E\left(\frac{s}{n} - \frac{s^2}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{(n-1)}\left[E\left(\frac{s}{n}\right) - E\left(\frac{s^2}{n^2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{n}E(s) - \frac{1}{n^2}E(s^2)\right]$$
$$= \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{n}E(s) - \frac{1}{n^2}\left(V(s) + (E(s))^2\right)\right]$$

karena s berdistribusi $b(n, p)$ dengan $E(s) = np$ dan $V(s) = np(1-p)$, maka

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{V}(\hat{p})\right) &= \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{n}E(s)-\frac{1}{n^2}\left(V(s)+(E(s))^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{n}(np)-\frac{1}{n^2}\left(np(1-p)+(np)^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left[p-\left(\frac{np(1-p)}{n^2}+\frac{n^2p^2}{n^2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left[p-\left(\frac{p(1-p)}{n}+p^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left[p-\frac{p(1-p)}{n}-p^2\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left[p-p^2-\frac{p(1-p)}{n}\right]\\
&= \frac{p-p^2}{(n-1)}-\frac{p(1-p)}{n(n-1)}\\
&= \frac{p(1-p)}{(n-1)}-\frac{p(1-p)}{n(n-1)}\\
&= \frac{n(p(1-p))-p(1-p)}{n(n-1)}\\
&= \frac{(p(1-p))(n-1)}{n(n-1)}\\
&= \frac{p(1-p)}{n}\\
&= V(\hat{p}) \qquad \text{(2.2.3)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\hat{p})\right)=V(\hat{p})$, maka terbukti $\hat{V}(\hat{p})$ adalah taksiran tak bias $V(\hat{p})$

BAB III

DETECTABILITY SIMPLE RANDOM SAMPLING

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai bagaimana cara pengambilan sampel dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*, serta cara mencari taksiran total populasi dimana sampel diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*.

3.1 Pengertian dasar tentang metode *Detectability Sampling*

Dalam pengambilan sampel di alam bebas dengan objek pengamatan hewan, pasti akan menemukan masalah yaitu tidak semua objek pengamatan dapat terdeteksi. Salah satu cara untuk mengatasinya adalah dengan menggunakan metode *Detectability Sampling*, yaitu sebuah metode pengambilan sampel dengan mempertimbangkan probabilitas terdeteksinya objek pengamatan.

Misal:

τ adalah total banyak objek yang sebenarnya

y adalah banyak objek pengamatan yang terdeteksi

p adalah probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan

y akan berdistribusi binomial $b(\tau, p)$ dengan $E(y) = \tau \cdot p$ dan $V(y) = \tau \cdot p(1-p)$

Jika probabilitas terdeteksinya objek pengamatan p telah diketahui, maka akan didefinisikan taksiran untuk τ adalah $\hat{\tau} = \frac{y}{p}$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa:

1. $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ
2. variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = \tau\left(\frac{1-p}{p}\right)$
3. $\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{y(1-p)}{p^2}$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$

bukti:

1. akan dibuktikan bahwa $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, dengan perkataan lain akan dibuktikan bahwa $E(\hat{\tau}) = \tau$

$$\begin{aligned} E(\hat{\tau}) &= E\left(\frac{y}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p}E(y) \\ &= \frac{1}{p}(\tau \cdot p) \\ &= \tau \quad \text{...(3.1.1)} \end{aligned}$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, maka terbukti $\hat{\tau} = \frac{y}{p}$ adalah taksiran tak bias τ.

2. akan ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = \tau\left(\frac{1-p}{p}\right)$

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &= V\left(\frac{y}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p^2} V(y) \\
&= \frac{1}{p^2}\left(\tau \cdot p(1-p)\right) \\
&= \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) \quad \text{...(3.1.2)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ terbukti bahwa variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) = \tau\left(\frac{1-p}{p}\right)$

3. akan dibuktikan bahwa $\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{y(1-p)}{p^2}$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$, dengan perkataan lain akan dibuktikan bahwa $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) = V(\hat{\tau})$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) &= E\left(\frac{y(1-p)}{p^2}\right) \\
&= \frac{(1-p)}{p^2} E(y) \\
&= \frac{(1-p)}{p^2}(\tau \cdot p) \\
&= \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) \\
&= V(\hat{\tau}) \quad \text{..(3.1.3)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) = V(\hat{\tau})$, maka terbukti $\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{y(1-p)}{p^2}$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$.

Jika probabilitas terdeteksinya objek pengamatan p tidak diketahui, namun ditaksir dengan $\hat{p}$, dimana $\hat{p}$ adalah taksiran tak bias untuk p dan $\hat{p}$ tidak berkorelasi dengan y, maka akan didefinisikan taksiran untuk total populasi τ adalah $\hat{\tau} = \frac{y}{\hat{p}}$. Variansi untuk $\hat{p}$, sebut $V(\hat{p})$, dan taksiran untuk $V(\hat{p})$, sebut $\hat{V}(\hat{p})$, dapat dicari berdasarkan metode yang digunakan untuk menaksir $\hat{p}$. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa:

1. $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ,
2. variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) \approx \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) + \frac{\tau^2}{p^2}V(\hat{p})$,

bukti:

1. akan dibuktikan $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, yang berarti akan dibuktikan bahwa $E(\hat{\tau}) = \tau$

   berdasarkan *Delta Method*, $E\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{E(Y)}{E(X)}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\tau}) &= E\left(\frac{y}{\hat{p}}\right) \\
&\approx \frac{E(y)}{E(\hat{p})} \\
&= \frac{\tau \cdot p}{p} \\
&= \tau \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, maka terbukti $\hat{\tau} = \frac{y}{\hat{p}}$ adalah taksiran tak bias untuk τ.

2. akan ditunjukkan bahwa $V(\hat{\tau}) \approx \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) + \frac{\tau^2}{p^2}V(\hat{p})$

berdasarkan *Delta Method*,

$$V\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{1}{(E(X))^2}V(Y) + \frac{(E(Y))^2}{(E(X))^4}V(X) + \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$, sehingga

$$\begin{aligned} V(\hat{\tau}) &= V\left(\frac{y}{\hat{p}}\right) \\ &\approx \frac{1}{(E(\hat{p}))^2}V(y) + \frac{(E(y))^2}{(E(\hat{p}))^4}V(\hat{p}) + \frac{2E(y)}{(E(\hat{p}))^3}\operatorname{cov}(\hat{p},y) \\ &= \frac{1}{p^2}V(y) + \frac{(\tau \cdot p)^2}{p^4}V(\hat{p}) + \frac{2(\tau \cdot p)}{p^3}\operatorname{cov}(\hat{p},y) \end{aligned}$$

karena $\hat{p}$ tidak berkorelasi dengan y, maka $\operatorname{cov}(\hat{p},y) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} V(\hat{\tau}) &\approx \frac{1}{p^2}V(y) + \frac{(\tau \cdot p)^2}{p^4}V(\hat{p}) + \frac{2(\tau \cdot p)}{p^3}\operatorname{cov}(\hat{p},y) \\ &= \frac{1}{p^2}V(y) + \frac{(\tau \cdot p)^2}{p^4}V(\hat{p}) \\ &= \frac{1}{p^2}\tau \cdot p(1-p) + \frac{\tau^2 p^2}{p^4}V(\hat{p}) \\ &= \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) + \frac{\tau^2}{p^2}V(\hat{p}) \quad \text{.........(3.1.5)} \end{aligned}$$

$\therefore$ telah ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) \approx \tau\left(\frac{1-p}{p}\right) + \frac{\tau^2}{p^2}V(\hat{p})$

Taksiran dari $V(\hat{\tau})$ dapat dicari dengan formula sebagai berikut:

$$\hat{V}(\hat{\tau}) \approx y\left(\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}^2}\right) + \frac{y^2}{\hat{p}^4}\hat{V}(\hat{p}) \quad \text{.........(3.1.6)}$$

3.2 Pengertian dan cara pengambilan sampel dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*

Detectability Simple Random Sampling adalah cara pengambilan sampel secara *Simple Random Sampling* dengan memperhatikan probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling. Probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling adalah probabilitas sebuah objek teramati (baik terlihat, terdengar, tertangkap, maupun terdeteksi oleh suatu alat pendeteksi) dalam suatu daerah pengamatan.

Metode *Detectability Simple Random Sampling* sering digunakan untuk menaksir total banyak suatu jenis hewan di daerah tertentu. Namun penaksiran total banyak objek pengamatan sangat bergantung pada probabilitas terdeteksinya objek pengamatan tersebut. Probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan, dinotasikan sebagai p, dapat dianggap telah diketahui atau ditaksir dari data penelitian sebelumnya.

Probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan dapat ditaksir dengan berbagai metode, misalnya dengan metode perbandingan banyak objek yang teramati dari udara terhadap banyak objek yang diamati dari darat, metode perbandingan jumlah salah satu spesies terhadap seluruh spesies dari objek, metode *Double Sampling*, metode *Direct Sampling*, metode *Inverse Sampling*, dan metode-metode pendeteksian lainnya. Dalam tugas akhir ini, p ditaksir berdasarkan data yang diambil dengan metode

Direct Sampling. Dengan metode *Direct Sampling* telah dibuktikan $\hat{p} = \frac{s}{n}$ adalah taksiran tak bias untuk p, dan $\hat{V}(\hat{p}) = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{s}{n} - \frac{s^2}{n^2}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk variansi dari $\hat{p}$.

Cara pengambilan sampel dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* dilakukan dengan membagi wilayah pengamatan menjadi N daerah pengamatan, kemudian dari N daerah pengamatan tersebut, dipilih n daerah pengamatan secara *Simple Random Sampling*. Dari setiap n daerah pengamatan yang terpilih, akan dicatat banyak objek yang terdeteksi di daerah pengamatan tersebut. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, untuk mencari taksiran total banyak objek di setiap daerah pengamatan bergantung pada probabilitas terdeteksinya suatu objek pengamatan p, yang untuk setiap daerah pengamatan dapat diketahui maupun tidak, dan dapat bernilai sama maupun tidak. Sehingga pembahasan mengenai penaksiran total populasi dimana sampel diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling* akan dibedakan menjadi:

1) p diketahui dan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan
2) p diketahui, namun bernilai beda untuk setiap daerah pengamatan
3) p tidak diketahui, namun ditaksir dengan $\hat{p}$ yang diasumsikan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan.

3.3 Taksiran untuk total populasi dimana sampel diambil dengan metode *Detectability Simple Random Sampling*

3.3.1 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek diketahui dan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan

Misalkan:

Wilayah pengamatan dibagi menjadi N daerah pengamatan,

Sampel merupakan n daerah pengamatan yang diambil secara *Simple Random Sampling* dari N daerah pengamatan,

Y_i adalah banyak sebenarnya objek di daerah pengamatan ke-i,

y_i adalah banyak objek terdeteksi oleh peneliti di daerah pengamatan ke-i,

p adalah probabilitas objek terdeteksi, dimana p diasumsikan diketahui dan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan.

Jika nilai-nilai $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ fixed, maka variabel random y_i berdistribusi binomial $b(Y_i, p)$, dengan $E(y_i) = Y_i p$ dan $V(y_i) = Y_i p(1-p)$. Didefinisikan taksiran untuk banyak sebenarnya objek pada daerah pengamatan ke-i, Y_i adalah $\hat{Y}_i = \frac{y_i}{p}$.

Didefinisikan total banyak objek diseluruh daerah pengamatan sebagai $\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Kemudian didefinisikan taksiran untuk total populasi adalah $\hat{\tau} = N\frac{\bar{y}}{p}$ dimana $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$. Dapat ditunjukkan bahwa:

1. $\hat{Y}_i$ adalah taksiran tak bias untuk Y_i
2. $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ
3. $V(\hat{\tau}) = N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right]$ dimana $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{(Y_i-\mu)^2}{N}$, $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$
4. $\hat{V}(\hat{\tau}) = N^2\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{p^2 n} + \left(\frac{1-p}{p^2 N}\right)\bar{y}\right]$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$,

   dimana $s^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$ dan $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

bukti:

1. akan dibuktikan $\hat{Y}_i$ adalah taksiran tak bias Y_i, yang berarti akan dibuktikan $E(\hat{Y}_i) = Y_i$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{Y}_i) &= E\left(\frac{y_i}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p}\cdot E(y_i) \\
&= \frac{1}{p}(Y_i p) \\
&= Y_i \text{...} (3.3.1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{Y}_i) = Y_i$, maka terbukti $\hat{Y}_i = \frac{y_i}{p}$ adalah taksiran tak bias untuk Y_i .

2. akan dibuktikan $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias τ, yang berarti akan dibuktikan

bahwa $E(\hat{\tau}) = \tau$

didefinisikan $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, dan dari persamaan (2.1.5) didapat $E(\bar{Y}) = \mu$,

dimana $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$.

Untuk suatu sampel s tertentu berlaku $E(y_i \mid s) = Y_i p$. Jika dimisalkan s

berukuran n, maka

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\tau}) &= E[E(\hat{\tau} \mid s)] \\
&= E\left[E\left(N\frac{\bar{y}}{p} \mid s\right)\right] \\
&= E\left[E\left(\frac{N}{np}\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] \\
&= E\left[\frac{N}{np}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] \\
&= E\left(\frac{N}{np}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i p\right)\right) \\
&= E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= E(N\bar{Y}) \\
&= NE(\bar{Y}) \\
&= N\mu \\
&= N\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Y_i \\
&= \tau \qquad \text{...(3.3.2)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, maka terbukti $\hat{\tau} = N\frac{\bar{y}}{p}$ merupakan taksiran tak bias τ .

3. akan ditunjukkan bahwa $V(\hat{\tau}) = N^2\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right)$ dengan

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{(Y_i-\mu)^2}{N}$ dan $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$

dari persamaan (2.1.5) dan (2.1.7) didapat $E(\bar{Y}) = \mu$ dan $V(\bar{Y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$,

sehingga

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &= V[E(\hat{\tau} \mid s)] + E[V(\hat{\tau} \mid s)] \\
&= V\left[E\left(N\frac{\bar{y}}{p} \mid s\right)\right] + E\left[V\left(N\frac{\bar{y}}{p} \mid s\right)\right] \\
&= V\left[E\left(\frac{N}{np}\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] + E\left[V\left(\frac{N}{np}\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] \\
&= V\left[\frac{N}{np}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] + E\left[\left(\frac{N}{np}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \mid s\right)\right] \\
&= V\left[\frac{N}{np}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i p\right)\right] + E\left[\left(\frac{N}{np}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(p(1-p)\right)\right)\right] \\
&= V\left[\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] + E\left[\left(\frac{N}{n}\right)^2\left(\frac{1-p}{p}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] \\
&= V\left[N\bar{Y}\right] + \frac{N^2}{n}\left(\frac{1-p}{p}\right)E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] \\
&= N^2 V(\bar{Y}) + \frac{N^2}{n}\left(\frac{1-p}{p}\right)E(\bar{Y}) \\
&= N^2\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \frac{N^2}{n}\left(\frac{1-p}{p}\right)\mu \\
&= N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right] \text{.......... ....(3.3.3)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ telah ditunjukkan bahwa $V(\hat{\tau}) = N^2\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right)$ dengan

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{(Y_i-\mu)^2}{N}$ dan $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$.

4. akan dibuktikan $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$, dengan perkataan lain, akan dibuktikan bahwa $E(\hat{V}(\hat{\tau})) = V(\hat{\tau})$

Misalkan $\mathbf{y} = y_1, y_2, ..., y_N$ adalah nilai dari y_i jika seluruh N daerah pengamatan terpilih menjadi sampel

Dengan mengondisikan bersyarat $\mathbf{y}$, maka *Simple Random Sampling* untuk n unit, akan menghasilkan

$$E(\bar{y} \mid \mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$$

$$V(\bar{y} \mid \mathbf{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i\right)^2$$

dan

$$V(E(\bar{y} \mid \mathbf{y})) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i\right) = \frac{1}{N^2}V\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}V(y_i) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}Y_i\,p(1-p) = \frac{p(1-p)}{N^2}\sum_{i=1}^{N}Y_i$$

$$\begin{aligned} E(\hat{V}(\hat{\tau})) &= E(E(\hat{V}(\hat{\tau}) \mid \mathbf{y})) \\ &= E\left(E\left(N^2\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{p^2 n} + \left(\frac{1-p}{p^2 N}\right)\bar{y}\right] \mid \mathbf{y}\right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) &= E\left(E\left(\frac{N^2}{p^2}\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}+\left(\frac{1-p}{N}\right)\bar{y}\right] \mid \mathbf{y}\right)\right) \\
&= \frac{N^2}{p^2}E\left(E\left(\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}+\left(\frac{1-p}{N}\right)\bar{y} \mid \mathbf{y}\right)\right) \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E\left(E\left(\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n} \mid \mathbf{y}\right)\right)+E\left(E\left(\left(\frac{1-p}{N}\right)\bar{y} \mid \mathbf{y}\right)\right)\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)+E\left(\left(\frac{1-p}{N}\right)E(\bar{y} \mid \mathbf{y})\right)\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)+E\left(\left(\frac{1-p}{N}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)+\left(\frac{1-p}{N^2}\right)E\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)+\left(\frac{1-p}{N^2}\right)\sum_{i=1}^{N} E(y_i)\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[\left(\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\right)+\left(\frac{p(1-p)}{N^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Y}_i\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}\left[E(V(\bar{y} \mid \mathbf{y}))+V(E(\bar{y} \mid \mathbf{y}))\right] \\
&= E\left(V\left(\frac{N}{p}\bar{y} \mid \mathbf{y}\right)\right)+V\left(E\left(\frac{N}{p}\bar{y} \mid \mathbf{y}\right)\right) \\
&= E(V(\hat{\tau} \mid \mathbf{y}))+V(E(\hat{\tau} \mid \mathbf{y})) \\
&= V(\hat{\tau}) \qquad (3.3.4)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right)=V(\hat{\tau})$, maka terbukti $\hat{V}(\hat{\tau}) = N^2\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{p^2 n}+\left(\frac{1-p}{p^2 N}\right)\bar{y}\right]$

merupakan taksiran tak bias $V(\hat{\tau})$, dimana $s^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$ dan $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

3.3.2 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek diketahui, namun memiliki nilai yang berbeda untuk setiap daerah pengamatan

Misalkan:

Wilayah pengamatan terdiri dari N daerah pengamatan,

Sampel merupakan n daerah pengamatan yang dipilih secara *Simple Random Sampling,*

Y_i adalah banyak sebenarnya objek di daerah pengamatan ke-i,

y_i adalah banyak objek terdeteksi oleh peneliti di daerah pengamatan ke-i,

p_i adalah probabilitas suatu objek terdeteksi untuk daerah pengamatan ke-i, dimana setiap p_i diasumsikan diketahui.

Jika nilai-nilai $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ fixed, maka variabel random y_i berdistribusi binomial $b(Y_i, p_i)$, dengan $E(y_i) = Y_i p_i$ dan $V(y_i) = Y_i p_i (1 - p_i)$. Didefinisikan taksiran untuk banyak sebenarnya objek pada daerah pengamatan Y_i, adalah $\hat{Y}_i = \dfrac{y_i}{p_i}$.

Didefinisikan total banyak objek diseluruh daerah pengamatan sebagai $\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Kemudian didefinisikan taksiran total populasi adalah $\hat{\tau} = \dfrac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{p_i}$.

Dapat ditunjukkan bahwa:

1. $\hat{Y}_i$ adalah taksiran tak bias untuk Y_i
2. $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ

3. $V(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N-n}{n}\right)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)Y_i Y_{i'} + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$

4. $\hat{V}(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{y_i^2}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$.

bukti:

1. akan dibuktikan $\hat{Y}_i$ adalah taksiran tak bias Y_i, yang berarti akan dibuktikan bahwa $E(\hat{Y}_i) = Y_i$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{Y}_i) &= E\left(\frac{y_i}{p_i}\right) \\
&= \frac{1}{p_i}\cdot E(y_i) \\
&= \frac{1}{p_i}(Y_i p_i) \\
&= Y_i \qquad \text{..(3.3.5)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{Y}_i) = Y_i$, maka terbukti $\hat{Y}_i = \frac{y_i}{p_i}$ adalah taksiran tak bias untuk Y_i.

2. akan dibuktikan $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias τ, yang berarti $E(\hat{\tau}) = \tau$

didefinisikan $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$, dan dari persamaan (2.1.5) didapat $E(\bar{Y}) = \mu$, dimana $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$.

Untuk suatu sampel s tertentu berlaku $E(y_i \mid s) = Y_i p_i$. Jika dimisalkan s berukuran n, maka

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\tau}) &= E[E(\hat{\tau} \mid s)] \\
&= E\left[E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right] \\
&= E\left[\frac{N}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right] \\
&= E\left[\frac{N}{n}E\left(\frac{y_1}{p_1}+\frac{y_2}{p_2}+\ldots+\frac{y_n}{p_n} \mid s\right)\right] \\
&= E\left[\frac{N}{n}\left(\frac{1}{p_1}E(y_1 \mid s)+\frac{1}{p_2}E(y_2 \mid s)+\ldots+\frac{1}{p_n}E(y_n \mid s)\right)\right] \\
&= E\left[\frac{N}{n}\left(\frac{1}{p_1}Y_1 p_1+\frac{1}{p_2}Y_2 p_2+\ldots+\frac{1}{p_n}Y_n p_n\right)\right] \\
&= NE\left[\frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)\right] \\
&= NE(\bar{Y}) \\
&= N\mu \\
&= N\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}Y_i \\
&= \tau \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, terbukti $\hat{\tau} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i}$ adalah taksiran tak bias τ.

3. akan ditunjukkan

$$
V(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N-n}{n}\right)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)Y_iY_{i'} + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i
$$

$$V(\hat{\tau}) = V[E(\hat{\tau} \mid s)] + E[V(\hat{\tau} \mid s)]$$

$$= V\left[E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right] + E\left[V\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right]$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right] + \frac{N^2}{n^2}E\left[V\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i} \mid s\right)\right]$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left[E\left(\frac{y_1}{p_1} + \ldots + \frac{y_n}{p_n} \mid s\right)\right] + \frac{N^2}{n^2}E\left[V\left(\frac{y_1}{p_1} + \ldots + \frac{y_n}{p_n} \mid s\right)\right]$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left(E\left(\frac{y_1}{p_1} \mid s\right) + \ldots + E\left(\frac{y_n}{p_n} \mid s\right)\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(V\left(\frac{y_1}{p_1} \mid s\right) + \ldots + V\left(\frac{y_n}{p_n} \mid s\right)\right)$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left(\frac{1}{p_1}E(y_1 \mid s) + \ldots + \frac{1}{p_n}E(y_n \mid s)\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(\frac{1}{p_1^2}V(y_1 \mid s) + \ldots + \frac{1}{p_n^2}V(y_n \mid s)\right)$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left(\frac{1}{p_1}Y_1 p_1 + \ldots + \frac{1}{p_n}Y_n p_n\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(\frac{1}{p_1^2}Y_1 p_1(1-p_1) + \ldots + \frac{1}{p_n^2}Y_n p_n(1-p_n)\right)$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V(Y_1 + \ldots + Y_n) + \frac{N^2}{n^2}E\left(Y_1\left(\frac{1-p_1}{p_1}\right) + \ldots + Y_n\left(\frac{1-p_n}{p_n}\right)\right)$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\right)$$

misalkan variabel indikator $z_i = \begin{cases} 1 & ,unit\ ke-i\ menjadi\ sampel \\ 0 & ,unit\ ke-i\ bukan\ sampel \end{cases}$, sehingga

$$V(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\right)$$

$$= \frac{N^2}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i z_i\right) + \frac{N^2}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i z_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\right)$$

dari persamaan (2.1.6), (2.1.1), (2.1.2), dan (2.1.4) didapat

$V\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 V(z_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1} Y_i Y_{i'} \operatorname{cov}(z_i, z_{i'})$ dengan $E(z_i) = \frac{n}{N}$,

$V(z_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$, dan $\operatorname{cov}(z_i, z_{i'}) = \left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right)$, sehingga

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &= \frac{N^2}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i z_i\right) + \frac{N^2}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i z_i \left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\right) \\
&= \frac{N^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 V(z_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1} Y_i Y_{i'} \operatorname{cov}(z_i, z_{i'})\right] + \frac{N^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i \left(\frac{1-p_i}{p_i}\right) E(z_i)\right) \\
&= \frac{N^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1} Y_i Y_{i'}\left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right)\right] + \frac{N^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\left(\frac{n}{N}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 \frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1} Y_i Y_{i'}\left(-\frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right) + \sum_{i=1}^{N} Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\left(\frac{N}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2\left(\frac{N}{n}-1\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1} Y_i Y_{i'}\left(\left(-\frac{N}{n}+1\right)\frac{1}{N-1}\right) + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n} Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N-n}{n}\right)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}\left(-\frac{N+n}{n(N-1)}\right)Y_i Y_{i'} + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i \quad \text{..........................(3.3.7)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ telah ditunjukkan

$$V(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N-n}{n}\right)Y_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)Y_i Y_{i'} + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i .$$

4. akan dibuktikan

$\hat{V}(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{y_i^2}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i$ adalah

taksiran tak bias $V(\hat{\tau})$, yang berarti akan dibuktikan bahwa $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right) = V(\hat{\tau})$

$$
\begin{aligned}
E\left(E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\mid s\right)\right) &= E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{y_i^2}{p_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{y_i^2}{p_i^2}\mid s\right)\right)+E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}}\mid s\right)\right)\\
&\quad +E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{p_i^2}\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}}\mid s\right)\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{y_i^2}{p_i^2}\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}E\left(\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}}\mid s\right)\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}E\left(\hat{Y}_i^{\,2}\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}E\left(\hat{Y}_i\hat{Y}_{i'}\mid s\right)\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\frac{y_i}{p_i}\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(V\left(\hat{Y}_i\mid s\right)+\left(E\left(\hat{Y}_i\mid s\right)\right)^2\right)\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}E\left(\hat{Y}_i\mid s\right)E\left(\hat{Y}_{i'}\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\hat{Y}_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}V\left(\hat{Y}_i\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\hat{Y}_i\mid s\right)\right)^2\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\right)+E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)E\left(\hat{Y}_i\mid s\right)\right)\\
&= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}V\left(\frac{y_i}{p_i}\mid s\right)\right)+E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i^{\,2}\right)\\
&\quad +E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\right)+E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\right)
\end{aligned}
$$

$$E\left(E\left(\hat{V}(\hat{\tau}) \mid s\right)\right) = E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2}V\left(y_i \mid s\right)\right) + E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)$$

$$+ E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\right) + E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\right)$$

$$= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2}\left(Y_i p_i (1-p_i)\right)\right) + E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)$$

$$+ E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\right) + E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\right)$$

$$= E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)\right) + E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)$$

$$+ E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\right) + E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\right)$$

misalkan variabel indikator $z_i = \begin{cases} 1 & ,unit\ ke-i\ menjadi\ sampel \\ 0 & ,unit\ ke-i\ bukan\ sampel \end{cases}$, sehingga

$$E\left(E\left(\hat{V}(\hat{\tau}) \mid s\right)\right) = E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i z_i\right) + E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 z_i\right)$$

$$+ E\left(\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_i z_i Y_{i'} z_{i'}\right) + E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i z_i\right)$$

$$= \frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i E(z_i) + \frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 E(z_i)$$

$$+ \frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}E(z_i z_{i'}) + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i E(z_i)$$

dari bab sebelumnya, telah dibuktikan bahwa $E(z_i) = \frac{n}{N}$, $E(z_i z_{i'}) = \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1}\right)$

sehingga

$$E\left(E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\mid s\right)\right)=\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\,\frac{n}{N}+\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2\,\frac{n}{N}$$

$$+\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}\,\frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1}\right)+\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i\,\frac{n}{N}$$

$$=\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i+\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2$$

$$+\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$=\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2+\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}+\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$=\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2+\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}+\left(\frac{N-n}{n}+1\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$=\left(\frac{N-n}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}Y_i^2+\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}Y_iY_{i'}+\left(\frac{N}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N-n}{n}\right)Y_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'\neq 1}\left(\frac{-N+n}{n(N-1)}\right)Y_iY_{i'}+\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)Y_i$$

$$=V(\hat{\tau})\quad\text{..}(3.3.8)$$

$\therefore$ karena $E\left(\hat{V}(\hat{\tau})\right)=V(\hat{\tau})$, maka terbukti $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias $V(\hat{\tau})$

3.3.3 Jika probabilitas terdeteksinya suatu objek tidak diketahui, namun diasumsikan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan

Misalkan:

Wilayah pengamatan dibagi menjadi N daerah pengamatan, Sampel merupakan n daerah pengamatan yang diambil secara *Simple Random Sampling* dari N daerah pengamatan,

Y_i adalah banyak sebenarnya objek di daerah pengamatan ke-i,

y_i adalah banyak objek terdeteksi oleh peneliti di daerah pengamatan ke-i,

p adalah probabilitas suatu objek pengamatan terdeteksi,

$\hat{p}$ adalah taksiran tak bias untuk p dimana $\hat{p}$ diasumsikan sama untuk setiap daerah pengamatan dan $\hat{p}$ tidak berkorelasi dengan y_i

$V(\hat{p})$ adalah variansi dari $\hat{p}$,

$\hat{V}(\hat{p})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{p})$,

Nilai dari $\hat{p}$ dan $\hat{V}(\hat{p})$ dicari berdasarkan metode yang digunakan pada penelitian sebelumnya.

Didefinisikan taksiran untuk total populasi τ, adalah $\hat{\tau} = N\frac{\bar{y}}{\hat{p}}$, dimana $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Maka dapat dibuktikan bahwa:

1. $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ
2. variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah $V(\hat{\tau}) \approx N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})\right]$,

bukti:

1. akan dibuktikan bahwa $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, yang berarti bahwa akan dibuktikan bahwa $E(\hat{\tau}) = \tau$

$$
\begin{aligned}
E\left(E(\hat{\tau} \mid s)\right) &= E\left(E\left(N \frac{\bar{y}}{\hat{p}} \mid s \right)\right) \\
&= E\left(E\left(\frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\hat{p}} \mid s \right)\right) \\
&= \frac{N}{n} E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\hat{p}} \mid s \right)\right) \\
&= \frac{N}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{y_i}{\hat{p}} \mid s \right)\right)
\end{aligned}
$$

berdasarkan *Delta Method*, $E\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{E(Y)}{E(X)}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
E\left(E(\hat{\tau} \mid s)\right) &= \frac{N}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{y_i}{\hat{p}} \mid s \right)\right) \\
&= \frac{N}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{E(y_i \mid s)}{E(\hat{p})} \right) \\
&= \frac{N}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i p}{p} \right) \\
&= \frac{N}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right) \\
&= NE\left(\bar{Y}\right) \\
&= N\mu \\
&= N\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Y_i \\
&= \tau \quad \text{..(3.3.9)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ karena $E(\hat{\tau}) = \tau$, maka terbukti $\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ

2. akan ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah

$$V(\hat{\tau}) \approx N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})\right],$$

berdasarkan *Delta Method*,

$$V\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{1}{(E(X))^2}V(Y) + \frac{(E(Y))^2}{(E(X))^4}V(X) + \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$, sehingga

$$\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &= V\left(N\frac{\bar{y}}{\hat{p}}\right) \\
&= N^2V\left(\frac{\bar{y}}{\hat{p}}\right) \\
&\approx N^2\left[\frac{1}{(E(\hat{p}))^2}V(\bar{y}) + \frac{(E(\bar{y}))^2}{(E(\hat{p}))^4}V(\hat{p}) + \frac{2E(\bar{y})}{(E(\hat{p}))^3}\operatorname{cov}(\hat{p},\bar{y})\right] \\
&= N^2\left[\frac{1}{p^2}V(\bar{y}) + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p}) + \frac{2\mu}{p^3}\operatorname{cov}(\hat{p},\bar{y})\right]
\end{aligned}$$

karena $\hat{p}$ tidak berkorelasi dengan y_i, maka $\operatorname{cov}(\hat{p},\bar{y}) = 0$,

sehingga

$$\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &\approx N^2\left[\frac{1}{p^2}V(\bar{y}) + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p}) + \frac{2\mu}{p^3}\operatorname{cov}(\hat{p},\bar{y})\right] \\
&= N^2\left[\frac{1}{p^2}V(\bar{y}) + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})\right] \\
&= \frac{N^2}{p^2}V(\bar{y}) + N^2\frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p}) \\
&= V\left(\frac{N}{p}\bar{y}\right) + N^2\frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})
\end{aligned}$$

dari persamaan (3.3.3) didapat

$$V\left(N\frac{\bar{y}}{p}\right) = N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right]$$, sehingga

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\tau}) &\approx V\left(\frac{N}{p}\bar{y}\right) + N^2\frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p}) \\
&= N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n}\right] + N^2\frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p}) \\
&= N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})\right] \quad \text{.............................(3.3.10)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ telah ditunjukkan bahwa variansi untuk $\hat{\tau}$ adalah

$$
V(\hat{\tau}) \approx N^2\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{p^4}V(\hat{p})\right]
$$

Taksiran untuk $V(\hat{\tau})$ dapat dicari dengan formula sebagai berikut:

$$
\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{\hat{p}^2}\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n} + \left(\frac{1-\hat{p}}{N}\right)\bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{\hat{p}^2}\hat{V}(\hat{p})\right] \quad \text{.......................................(3.3.11)}
$$

BAB IV

APLIKASI

Pada bab ini akan dijelaskan penerapan metode *Detectability Simple Random Sampling* dalam menaksir total populasi katak di sekeliling Danau Agatis Universitas Indonesia.

4.1 Katak sebagai bioindikator tingkat kebersihan danau

Katak adalah salah satu jenis amfibi, yang merupakan hewan *ectothermal*, yang berarti hewan yang suhu tubuhnya berfluktuasi tergantung pada suhu lingkungan di sekitarnya (Sutanto 2006). Amfibi juga merupakan hewan yang dapat hidup di dua habitat, yaitu habitat air dan habitat darat. Kehidupan amfibi secara umum sangat berhubungan erat dengan air, karena air berkaitan dengan sebagian dari siklus hidupnya, yaitu pada saat fase telur dan fase berudu (Sutanto 2006).

Katak baik digunakan sebagai bioindikator kebersihan air karena katak lebih menyukai hidup di habitat dekat dengan perairan yang bersih. Selain itu, katak memiliki jumlah yang berlimpah di alam, mudah diamati, dan perilakunya mudah dipantau (Sutanto 2006). Biasanya katak hanya dapat hidup di suatu habitat tertentu dan tak mudah untuk berpindah tempat, sehingga jika habitat tempat hidupnya terganggu, maka siklus hidup dan regenerasi katak tersebut akan terganggu, dan pada akhirnya populasi di habitat tersebut akan menurun. Sebagai contoh seharusnya katak banyak hidup di habitat dekat perairan tenang yang luas dan terbuka seperti Danau Agatis, Universitas Indonesia. Jika banyak katak di sekeliling Danau Agatis hanya sedikit, hal itu mengindikasikan bahwa Danau Agatis sudah mulai tercemar. Suatu penelitian pernah dilakukan pada tahun 2006 di sekeliling salah satu danau di Kampus Universitas Indonesia Depok, yang memiliki keadaan yang similar dengan Danau Agatis. Dari penelitian yang menggunakan metode *Direct Sampling* tersebut, didapat taksiran probabilitas katak terdeteksi adalah sebesar $\hat{p} = 0.3390$, taksiran untuk variansi $\hat{p}$ sebesar $\hat{V}(\hat{p}) = 0.001126$. Dengan mempertimbangkan taksiran probabilitas katak terdeteksi beserta taksiran dari variansinya diatas, akan ditaksir total banyak katak di sekeliling Danau Agatis untuk tahun 2008, beserta sampling errornya. Dari suatu penelitian di sekeliling danau yang bersih, didapat banyak katak per luas adalah sebesar 1.13. Dengan membandingkan banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis terhadap banyak katak per luas di sekeliling danau yang bersih tersebut, dapat diindentifikasi kebersihan Danau Agatis, Universitas Indonesia. Taksiran probabilitas terdeteksinya katak di salah satu danau di Kampus Universitas Indonesia Depok dapat digunakan karena probabilitas terdeteksinya katak tidak dipengaruhi lingkungan (Thompson 2002).

4.2 Pengambilan sampel katak di sekeliling Danau Agatis Universitas Indonesia

Pengambilan sampel dilakukan pada bulan November 2008, pada malam hari antara pukul 18:00 hingga 21:00. Alat bantu yang digunakan adalah ember dengan tutup rapat, meteran, lampu emergensi, senter, jaring bergagang panjang, kamera digital, kertas, dan alat tulis. Penelitian dilakukan di sekeliling Danau Agatis Universitas Indonesia, yang merupakan danau alami yang berada di seberang Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Penelitian pertama dilakukan untuk melihat lokasi pengambilan sampel dan penentuan pembagian daerah pengamatan. Sekeliling Danau Agatis dibagi menjadi 23 daerah pengamatan per 10 meter, dengan batasan pengamatan hingga 2 meter keluar danau.

Penelitian kedua adalah saat pengambilan sampel, yang dilakukan dengan cara sebagai berikut, daerah pengamatan 10x2 meter persegi yang dipilih secara acak sebagai sampel disusuri secara perlahan dengan menggunakan lampu emergensi dan senter. Pada saat seekor katak terdeteksi, segera ditutup ruang geraknya dengan menggunakan jaring bergagang panjang, dan ditangkap menggunakan tangan, kemudian dimasukkan ke dalam ember yang ditutup rapat.

4.3 Populasi dan sampel

Dalam tugas akhir ini, sekeliling Danau Agatis dibagi menjadi $N = 23$ daerah pengamatan yang sama besar $(20m^2)$. Dari 23 daerah pengamatan tersebut, diambil sampel secara *Simple Random Sampling* sebanyak $n = 12$ daerah pengamatan. Dari masing-masing daerah pengamatan yang menjadi sampel dilakukan pengamatan banyak katak yang terdeteksi. Data yang diperoleh adalah sebagai berikut:

4.4 Hasil penelitian dan pembahasan

Hasil penelitian di sekeliling Danau Agatis Universitas Indonesia, disajikan dalam tabel di bawah ini:

n	Banyak katak
1	6
2	2
3	4
4	5
5	4
6	3
7	3
8	4
9	1
10	3
11	5
12	7

Dengan menggunakan bantuan program SPSS 13.0, dihasilkan analisa deskriptif dari data sebagai berikut:

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
katak	12	1.00	7.00	3.9167	1.67649
Valid N (listwise)	12				

Dari tabel di atas didapat: $N = 23,\ n = 12,\ \bar{y} = 3.9167,\ s^2 = 1.67649$, dan telah diketahui bahwa dari penelitian yang pernah dilakukan didapat $\hat{p} = 0.3390$, $\hat{V}(\hat{p}) = 0.001126$,

sehingga dari persamaan (3.3.9) dan (3.3.11) akan didapat:

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau} &= N\frac{\bar{y}}{\hat{p}} \\
&= 23\left(\frac{3.9167}{0.3390}\right) \\
&= 23(11.553687) \\
&= 265.734801 \\
&\approx 266
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{V}(\hat{\tau}) &= \frac{N^2}{\hat{p}^2}\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n} + \left(\frac{1-\hat{p}}{N}\right)\bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{\hat{p}^2}\hat{V}(\hat{p})\right] \\
&= \frac{(23)^2}{(0.3390)^2}\left[\left(\frac{23-12}{23}\right)\frac{(1.67649)^2}{12} + \left(\frac{1-(0.3390)}{23}\right)(3.9167) + \frac{(3.9167)^2}{(0.3390)^2}(0.001126)\right] \\
&= \frac{529}{0.114921}\left[\frac{11}{23}\left(\frac{2.81062}{12}\right) + \frac{0.6610}{23}(3.9167) + \frac{15.34054}{0.114921}(0.001126)\right] \\
&= 4603.16217(0.112017 + 0.112563 + 0.150307) \\
&= 4603.16217(0.374887) \\
&= 1725.66566 \\
&\approx 1726
\end{aligned}
$$

selanjutnya dapat dihitung *sampling error* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
SE &= (1.44)\sqrt{\hat{V}(\hat{\tau})} \\
&= (1.44)\sqrt{1726} \\
&= 59.82502 \\
&\approx 60
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Total populasi katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia diperkirakan sebanyak $\hat{\tau} \approx 266$ ekor katak. Dengan tingkat kepercayaan 85%, dipercaya total populasi katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia berada pada interval $(206\,,\,326)$

Banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis $\frac{266}{460} = 0.578$, sedangkan dari penelitian sebelumnya dilakukan di sekeliling danau yang bersih didapat banyak katak per luas adalah sebesar 1.13. Sehingga dapat disimpulkan bahwa densitas katak di sekeliling Danau Agatis lebih sedikit dibanding densitas katak di sekeliling danau yang bersih, yang berarti Danau Agatis dapat dikatakan sudah mulai tercemar. Hal ini didukung oleh fakta bahwa banyak ditemukan sampah di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia seperti yang terlihat pada foto-foto berikut:

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini akan dijelaskan kesimpulan dan saran yang dapat diambil dari tugas akhir ini, baik dari aplikasinya, maupun dari keseluruhan tugas akhir ini.

5.1 Kesimpulan

1. Untuk menaksir total populasi dimana tidak semua objek pengamatan dapat terdeteksi, metode *Detectability Simple Random Sampling* baik digunakan karena menghasilkan taksiran yang tak bias.

2. Taksiran untuk total populasi dimana sampelnya diambil berdasarkan metode *Detectability Simple Random Sampling* jika probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling diketahui dan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan adalah

$$\hat{\tau} = N\frac{\bar{y}}{p}$$

dengan sampling error $(1.44)\sqrt{\hat{V}(\hat{\tau})}$ dimana

$$\hat{V}(\hat{\tau}) = N^2\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{p^2 n} + \left(\frac{1-p}{p^2 N}\right)\bar{y}\right]$$

$\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, dan $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$

3. Taksiran untuk total populasi dimana sampelnya diambil berdasarkan metode *Detectability Simple Random Sampling* jika probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling diketahui namun bernilai beda untuk setiap daerah pengamatan adalah

$$\hat{\tau} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{p_i}$$

dengan sampling error $(1.44)\sqrt{\hat{V}(\hat{\tau})}$ dimana

$$\hat{V}(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{N-n}{n}\right)\frac{y_i^2}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'\neq 1}\frac{N}{n}\left(\frac{-N+n}{n(n-1)}\right)\frac{y_i}{p_i}\frac{y_{i'}}{p_{i'}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{N}{n}\left(\frac{1-p_i}{p_i^2}\right)y_i$$

$\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, dan $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\hat{\tau})$

4. Taksiran untuk total populasi dimana sampelnya diambil berdasarkan metode *Detectability Simple Random Sampling* jika probabilitas terdeteksinya suatu unit sampling ditaksir dari penelitian sebelumnya dan bernilai sama untuk setiap daerah pengamatan adalah

$$\hat{\tau} = N\frac{\bar{y}}{\hat{p}}$$

dengan sampling error $(1.44)\sqrt{\hat{V}(\hat{\tau})}$ dimana

$$\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{\hat{p}^2}\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n} + \left(\frac{1-\hat{p}}{N}\right)\bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{\hat{p}^2}\hat{V}(\hat{p})\right]$$

$\hat{\tau}$ adalah taksiran tak bias untuk τ, dan $\hat{V}(\hat{\tau})$ adalah taksiran bias untuk $V(\hat{\tau})$.

5. Dari contoh penerapan, didapat hasil bahwa:
   - Taksiran total banyak katak di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia adalah sebesar $\hat{\tau} \approx 266$ katak dengan sampling error $SE \approx 60$
   - Densitas banyak katak per luas di sekeliling Danau Agatis, Universitas Indonesia, lebih kecil dibanding densitas banyak katak di sekeliling danau yang bersih, sehingga dapat disimpulkan Danau Agatis sudah mulai tercemar

5.2 Saran

1. Metode *Detectability Sampling* dapat diterapkan tidak hanya pada pengambilan sampel dengan *Simple Random Sampling*, namun juga dengan metode pengambilan sampel lainnya, seperti *Stratified Random Sampling*, *Cluster Sampling*, dan metode-metode pengambilan sampel lainnya.

2. Pimpinan Universitas Indonesia seharusnya lebih memperhatikan kebersihan dari danau-danau alami yang terdapat di lingkungan kampus Universitas Indonesia, Depok, Jawa Barat.

Lampiran 1:

Pembuktian: $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

bukti:

Misalkan terdapat dua variabel random X dan Y, dengan bobot masing-masing a dan b, maka

$$
\begin{aligned}
V(aX+bY) &= E\left((aX+bY)^2\right)-(E(aX+bY))^2 \\
&= E\left(a^2X^2+2abXY+b^2Y^2\right)-(E(aX)+E(bY))^2 \\
&= E\left(a^2X^2\right)+E(2abXY)+E\left(b^2Y^2\right)-\left((E(aX))^2+2E(aX)E(bY)+(E(bY))^2\right) \\
&= a^2E\left(X^2\right)+2abE(XY)+b^2E\left(Y^2\right)-(E(aX))^2-2E(aX)E(bY)-(E(bY))^2 \\
&= a^2E\left(X^2\right)+2abE(XY)+b^2E\left(Y^2\right)-a^2(E(X))^2-2abE(X)E(Y)-b^2(E(Y))^2 \\
&= a^2E\left(X^2\right)-a^2(E(X))^2+b^2E\left(Y^2\right)-b^2(E(Y))^2+2abE(XY)-2abE(X)E(Y) \\
&= a^2\left[E\left(X^2\right)-(E(X))^2\right]+b^2\left[E\left(Y^2\right)-(E(Y))^2\right]+2ab[E(XY)-E(X)E(Y)] \\
&= a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ terbukti $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

Lampiran 2:

Pembuktian:

1. $E\left(\dfrac{Y}{X}\right) \approx \dfrac{E(Y)}{E(X)}$

2. $V\left(\dfrac{Y}{X}\right) \approx \dfrac{(E(Y))^2}{(E(X))^4}V(X) + \dfrac{1}{(E(X))^2}V(Y) - \dfrac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$

bukti:

Delta Method merupakan suatu metode pendekatan ekspansi deret Taylor yang sering digunakan untuk mencari pendekatan variansi untuk fungsi dari variabel random. Ekspansi deret Taylor untuk fungsi $f(x)$ jika diketahui nilai dari a adalah sebagai berikut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

namun sering kali bentuk derajat yang lebih tinggi dapat diabaikan sehingga menghasilkan pendekatan

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Jika terdapat variabel random Y yang merupakan fungsi dari variabel random X, atau dengan perkataan lain $Y = f(X)$, maka ekspansi deret Taylor dari $Y = f(X)$ dengan diketahui nilai dari $E(X)$, akan berbentuk

$$Y \approx f(E(X)) + f'(E(X))(X - E(X))$$

dan akan didapatkan juga hasil sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &\approx E\left(f(E(X)) + f'(E(X))(X - E(X))\right) \\
&= E\left(f(E(X)) + f'(E(X))X - f'(E(X))E(X)\right) \\
&= E\left(f(E(X))\right) + E\left(f'(E(X))X\right) - E\left(f'(E(X))E(X)\right) \\
&= E\left(f(E(X))\right) + f'(E(X))E(X) - f'(E(X))E(E(X)) \\
&= E\left(f(E(X))\right) + f'(E(X))E(X) - f'(E(X))E(X) \\
&= E\left(f(E(X))\right)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
V(Y) &\approx V\left(f(E(X)) + f'(E(X))(X - E(X))\right) \\
&= V\left(f(E(X)) + f'(E(X))X - f'(E(X))E(X)\right) \\
&= V\left(f'(E(X))X\right) \\
&= \left(f'(E(X))\right)^2 V(X)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan dijelaskan ekspansi deret Taylor untuk dua variabel. Misalkan terdapat fungsi $f(x,y)$, jika diketahui nilai dari $x_0 = a$ dan $y_0 = b$, maka ekspansi deret Taylor dari $f(x,y)$ adalah

$$
f(x,y) \approx f(a,b) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x-a) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(a,b)} (y-b) + \ldots
$$

Jika terdapat $f(X,Y)$ yang merupakan fungsi dari dua variabel random X dan Y dengan diketahui nilai dari $E(X)$ dan $E(Y)$, maka ekspansi deret Taylor untuk $f(X,Y)$ adalah

$$
f(X,Y) \approx f(E(X),E(Y)) + \left.\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}\right|_{(E(X),E(Y))} (X - E(X)) + \left.\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}\right|_{(E(X),E(Y))} (Y - E(Y)) + \ldots
$$

Sehingga jika $f(X,Y)=\frac{Y}{X}$, dan diketahui nilai dari $E(X)$ dan $E(Y)$, maka

ekspansi deret Taylor untuk $f(X,Y)=\frac{Y}{X}$ adalah

$$
\begin{aligned}
f(X,Y) &= \frac{Y}{X} \\
&\approx f(E(X),E(Y)) + \left.\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}\right|_{(E(X),E(Y))}(X-E(X)) + \left.\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}\right|_{(E(X),E(Y))}(Y-E(Y)) \\
&= \frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}(X-E(X)) + \frac{1}{E(X)}(Y-E(Y))
\end{aligned}
$$

sehingga akan didapatkan hasil sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{Y}{X}\right) &\approx E\left(\frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}(X-E(X)) + \frac{1}{E(X)}(Y-E(Y))\right) \\
&= E\left(\frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}X - \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X) + \frac{1}{E(X)}Y - \frac{1}{E(X)}E(Y)\right) \\
&= E\left(\frac{E(Y)}{E(X)}\right) + E\left(\frac{-E(Y)}{(E(X))^2}X\right) - E\left(\frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X)\right) + E\left(\frac{1}{E(X)}Y\right) - E\left(\frac{1}{E(X)}E(Y)\right) \\
&= \frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X) - \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(E(X)) + \frac{1}{E(X)}E(Y) - \frac{1}{E(X)}E(E(Y)) \\
&= \frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X) - \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X) + \frac{1}{E(X)}E(Y) - \frac{1}{E(X)}E(Y) \\
&= \frac{E(Y)}{E(X)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ maka terbukti $E\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{E(Y)}{E(X)}$

dan

$$V\left(\frac{Y}{X}\right) \approx V\left(\frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}(X - E(X)) + \frac{1}{E(X)}(Y - E(Y))\right)$$

$$= V\left(\frac{E(Y)}{E(X)} + \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}X - \frac{-E(Y)}{(E(X))^2}E(X) + \frac{1}{E(X)}Y - \frac{1}{E(X)}E(Y)\right)$$

$$= V\left(\frac{-E(Y)}{(E(X))^2}X\right) + V\left(\frac{1}{E(X)}Y\right) - \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= \left(\frac{-E(Y)}{(E(X))^2}\right)^2 V(X) + \left(\frac{1}{E(X)}\right)^2 V(Y) - \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= \frac{(E(Y))^2}{(E(X))^4}V(X) + \frac{1}{(E(X))^2}V(Y) - \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$\therefore$ maka terbukti bahwa

$$V\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{(E(Y))^2}{(E(X))^4}V(X) + \frac{1}{(E(X))^2}V(Y) - \frac{2E(Y)}{(E(X))^3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

Lampiran 3:

Pembuktian:

1. $E(E(X_2 \mid X_1)) = E(X_2)$
2. $V(X_2) = E(V(X_2 \mid X_1)) + V(E(X_2 \mid X_1))$

bukti:

Misalkan:

X_1 dan X_2 adalah variabel random diskrit

p.d.f bersama dari X_1 dan X_2 adalah $f(x_1, x_2)$

p.d.f marginal dari X_1 adalah $f_1(x_1) = \sum_{x2} f(x_1, x_2)$

p.d.f marginal dari X_2 adalah $f_2(x_2) = \sum_{x1} f(x_1, x_2)$

maka

$$
\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{x1}\sum_{x2} x_2 f(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x1}\sum_{x2} x_2 f(x_1, x_2) \cdot \frac{f_1(x_1)}{f_1(x_1)} \\
&= \sum_{x1}\left(\sum_{x2} x_2 \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}\right) \cdot f_1(x_1) \\
&= \sum_{x1}\left(\sum_{x2} x_2 f(x_2 \mid x_1)\right) \cdot f_1(x_1) \\
&= \sum_{x1} E(x_2 \mid x_1) \cdot f_1(x_1) \\
&= E(E(x_2 \mid x_1))
\end{aligned}
$$

$\therefore$ terbukti bahwa $E(E(X_2 \mid X_1)) = E(X_2)$

dan

$$V(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2$$

dari pembuktian sebelumnya didapat $E(E(X_2 \mid X_1)) = E(X_2)$, sehingga

$$\begin{aligned}
V(X_2) &= E(E(X_2^2 \mid X_1)) - [E(E(X_2 \mid X_1))]^2 \\
&= E(E(X_2^2 \mid X_1)) - [E(E(X_2 \mid X_1))]^2 + E([E(X_2 \mid X_1)]^2) - E([E(X_2 \mid X_1)]^2) \\
&= E(E(X_2^2 \mid X_1)) - E([E(X_2 \mid X_1)]^2) + E([E(X_2 \mid X_1)]^2) - [E(E(X_2 \mid X_1))]^2 \\
&= \left\{E(E(X_2^2 \mid X_1)) - E([E(X_2 \mid X_1)]^2)\right\} + \left\{E([E(X_2 \mid X_1)]^2) - [E(E(X_2 \mid X_1))]^2\right\} \\
&= E\left\{E(X_2^2 \mid X_1) - [E(X_2 \mid X_1)]^2\right\} + \left\{E([E(X_2 \mid X_1)]^2) - [E(E(X_2 \mid X_1))]^2\right\} \\
&= E(V(X_2 \mid X_1)) + V(E(X_2 \mid X_1))
\end{aligned}$$

$\therefore$ terbukti bahwa $V(X_2) = E(V(X_2 \mid X_1)) + V(E(X_2 \mid X_1))$

DAFTAR PUSTAKA

Cochran, W.G. 1977. *Sampling Techniques* (3rd ed). John Wiley and Sons

Hogg, R.V. and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics* (5th ed). Prentice Hall Inc.

Ramsey, F.L., & Harrison, K. 2004. *A closer look at detectability*. Journal of Environment and Ecological Statistics: 73-84

Scheaffer, R.L., Mendenhall III, W., Ott, L. 1996. *Elementary Survey Sampling* (5th ed). Duxburry Press

Sutanto, D. 2006. *Struktur komunitas amfibi di kampus Universitas Indonesia, Depok, Jawa Barat*. Skripsi

Thompson, S.K. 2002. *Sampling* (2nd ed). Wiley series in probability and statistics

Thompson, S.K., & Seber, G.A.F. 2002. *Detectability in conventional and adaptive sampling*. Journal of Biometrics, 50: 712-724

http://www.math.umt.edu/patterson/549/Delta.pdf *(25 Maret 2009 12:11 WIB)*