PENAKSIRAN MEAN DENGAN MENGGUNAKAN *NEW RATIO ESTIMATOR* PADA *STRATIFIED RANDOM SAMPLING*

WAKHIDAH MUSLIKHAH

0305017054

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

PENAKSIRAN MEAN DENGAN MENGGUNAKAN *NEW RATIO ESTIMATOR* PADA *STRATIFIED RANDOM SAMPLING*

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh :

WAKHIDAH MUSLIKHAH

0305017054

DEPOK

2009

SKRIPSI : PENAKSIRAN MEAN DENGAN MENGGUNAKAN *NEW RATIO ESTIMATOR* PADA *STRATIFIED RANDOM SAMPLING*

NAMA : WAKHIDAH MUSLIKHAH

NPM : 0305017054

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, JULI 2009

DRA. RIANTI SETIADI, M.Si	FEVI NOVKANIZA, S.Si., M.Si
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana : 7 Juli 2009

Penguji I : Dra. Rianti Setiadi, M.Si

Penguji II : Dr. Dian Lestari

Penguji II : Arie Wibowo, S.Si.,M.Si

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamin. Segala puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, berkah dan kekuatan-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir ini dengan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam penulisan tugas akhir ini, tak terlepas dari peran serta berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang mendalam kepada :

1. Ibu Rianti Setiadi, selaku pembimbing I, yang dengan tulus, sabar dan berkenan meluangkan waktunya dalam membimbing, memberi saran dan bantuan dalam penyusunan tugas akhir ini. Terima kasih banyak, Bu.
2. Ibu Fevi Novkaniza, selaku pembimbing II, yang dengan tulus meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi arahan dalam penulisan tugas akhir ini
3. Kedua orang tua Penulis : Bp. Jamin Ikhsanudin dan Ibu Sugiyanti serta adik penulis : Nis Fatun Kasanah , yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang dan semangat. *I love my family*, Bapak, Ibu, terima kasih yaaa....
4. Ibu Titin, Ibu Sasky, Ibu Rustina, Ibu Dian dan Pak Arie selaku Penguji Kolokium dan Sidang Sarjana
5. Mas Lis, Yanuar, May, Amri, Vani, dan Ka Iif yang selalu membantu penulis dikala mengalami kesulitan, terima kasih semuanya.

6. Teman2 seperjuangan : May, Amri, Vani, Rifkoz, Cupz, Maul, Riesa, Syarah, Sinta, Ratih, Ka Iif, Ka Edi, Uni Lisa, Ka Harry,dll, Akhirnya kita bisa lulus semester ini. Alhamdulillah.

7. Terima kasih juga penulis ucapkan kepada seluruh komponen departemen matematika FMIPA UI.

8. Untuk teman-teman kost-an Villa Myrda : Gita, Dara, Ika, Grace, Ka Lian, Chora, Chisnul dan Ka Meddy. Kebersamaan dengan kalian akan selalu terkenang, Semangat....!!!!

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penulisan tugas akhir ini. Penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun dari pembaca untuk perbaikan tulisan ini. Akhir kata, penulis memohon maaf segala kekurangan dalam penulisan ini dan berharap tulisan ini nantinya dapat bermanfaat.

Terima kasih

Penulis

2009

ABSTRAK

Tulisan ini membahas suatu metode penaksiran mean dengan suatu metode yang disebut *new ratio estimator* yang diperkenalkan oleh Prasad (1989) pada *stratified random sampling*. *New ratio estimator* yang diperkenalkan oleh Prasad ini dibatasi hanya pada taksiran rasio gabungan. Pada dasarnya taksiran mean dengan *new ratio estimator* Prasad mempunyai bentuk $k^* \bar{y}_{RC}$ dimana k^* suatu konstanta dan $\bar{y}_{RC}$ adalah taksiran mean dengan menggunakan taksiran rasio konvensional. k^* ini disebut koreksi Prasad. Dapat ditunjukkan bahwa *mean square error* (MSE) dari taksiran mean menggunakan *new ratio estimator* lebih kecil daripada menggunakan taksiran rasio konvensional. Karena MSE mengukur keakuratan suatu taksiran, berarti taksiran mean menggunakan *new ratio estimator* lebih akurat daripada taksiran mean menggunakan taksiran rasio konvensional. Dalam tulisan ini dilengkapi pula suatu contoh untuk mencari taksiran mean dengan menggunakan kedua metode tersebut.

Kata kunci : *mean square error*, *new ratio estimator*, *stratified random sampling*, taksiran rasio konvensional

viii+65 hlm.; lamp.; tab

bibliografi : 5 (1977 – 2005)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Penarikan sampel secara *simple random sampling* pada populasi yang heterogen menyebabkan *sampling error* dari taksiran parameter besar. Untuk memperoleh taksiran parameter yang mempunyai standar error kecil, maka populasi yang heterogen dibagi menjadi beberapa subpopulasi yang homogen dan tidak *overlapping* yang disebut stratum, kemudian sampel diambil secara *simple random sampling* pada masing-masing stratum. Teknik penarikan sampel seperti ini disebut *stratified random sampling*.

Umumnya, tujuan penarikan sampel adalah untuk menaksir parameter populasi. Salah satu parameter populasi yang ditaksir melalui sampel adalah mean populasi. Biasanya penaksiran mean populasi dari suatu variabel dilakukan berdasarkan pengukuran data dari variabel tersebut. Namun, seringkali ada satu variabel lain, sebut X, yang berkorelasi kuat dengan variabel yang ingin diamati, sebut Y. Dengan melibatkan variabel yang berkorelasi kuat dengan variabel yang ingin diamati dapat diperoleh tambahan informasi dalam penaksiran mean dari Y. Salah satu taksiran yang melibatkan variabel yang berkorelasi kuat dengan variabel yang ingin diamati adalah taksiran rasio. Taksiran rasio dapat digunakan pada *simple random sampling* maupun *stratified random sampling*.

Pada *stratified random sampling*, ada dua cara yang berbeda untuk mendapatkan taksiran rasio yaitu metode taksiran rasio terpisah (*separate*) dan metode taksiran rasio gabungan. Pada metode taksiran rasio terpisah, pertama dilakukan penaksiran rasio mean untuk masing- masing stratum kemudian dicari taksiran mean untuk populasi dengan menggunakan formula *stratified random sampling*. Pada metode taksiran rasio gabungan, pertama dilakukan penaksiran mean populasi untuk masing- masing variabel dengan formula *stratified random sampling* kemudian perbandingan nilai taksiran ini digunakan sebagai taksiran rasio mean populasi. Jika mean dari X diketahui, maka taksiran rasio dapat digunakan untuk mencari taksiran mean dari Y.

Pada umumnya taksiran rasio konvensional merupakan taksiran yang bias sehingga taksiran mean dengan menggunakan taksiran rasio pun bias. Beberapa metode pengembangan taksiran rasio telah dilakukan tetapi tetap menghasilkan taksiran rasio yang bias, bahkan menghasilkan *mean square error* (MSE) yang lebih besar daripada taksiran rasio konvensional (Kadilar, C.,Cingi, H: 2005**)**. Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai penaksiran mean dengan menggunakan modifikasi taksiran rasio yang menghasilkan MSE lebih kecil daripada menggunakan taksiran rasio konvensional. Modifikasi taksiran rasio yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah taksiran rasio yang diperkenalkan oleh Prasad yang disebut *new ratio estimator*. Karena taksiran mean dengan menggunakan *new ratio* *estimator* mempunyai MSE yang lebih kecil daripada menggunakan taksiran rasio konvensional maka taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* dikatakan lebih akurat.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini adalah :

Bagaimana mencari taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* pada *stratified random sampling* yang lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan taksiran rasio konvensional

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menjelaskan tentang taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* pada *stratified random sampling*
2. Membuktikan bahwa taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* lebih akurat daripada menggunakan taksiran rasio konvensional
3. Dengan menggunakan data hasil panen tahun 2005 dan luas sawah tiap petak, akan dicari taksiran mean hasil panen tahun 2008 berdasarkan data *stratified random sample* tahun 2008

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai sebagai berikut :

1. Elemen sampel dalam tiap stratum diambil tanpa pengembalian dan dengan menggunakan alokasi proporsional

2. Metode yang dibahas untuk taksiran rasio pada *stratified random sampling* adalah taksiran rasio gabungan

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab. Bab I merupakan pendahuluan. Bab II merupakan landasan teori yang membahas tentang *mean square error*, *simple random sampling*, *stratified random sampling* dan taksiran rasio serta taksiran mean dengan menggunakan taksiran rasio pada *stratified random sampling*. Bab III membahas taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator*. Bab IV berisi contoh penerapan. Bab V merupakan penutup yang terdiri dari kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai dasar- dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini, yaitu *Mean Square Error* (MSE), MSE dari taksiran mean dalam *simple random sampling* dan *stratified random sampling* serta MSE dari taksiran rasio untuk mean dalam *simple random sampling* dan *stratified random sampling*.

2.1 *Mean Square Error* (MSE)

Misalkan θ merupakan suatu parameter dan $\hat{\theta}$ merupakan taksiran dari parameter θ . *Mean Square Error* (MSE) dari $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2\right]$$

Akan dibuktikan bahwa :

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right) = \text{Var}\left(\hat{\theta}\right) + \left(\text{bias}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

dimana $\left(\text{bias}\left(\hat{\theta}\right)\right) = \text{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$ dan $\text{Var}\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}\left[\left(\hat{\theta} - \text{E}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right]$

Bukti:

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{E}\left[\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]+\text{E}\left[\hat{\theta}\right]-\hat{\theta}\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{E}\left[\left(\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)+\left(\hat{\theta}-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{E}\left[\left(\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)^2+2\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\left(\hat{\theta}-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)+\left(\text{E}\left[\hat{\theta}\right]-\hat{\theta}\right)^2\right)\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{E}\left[\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)^2\right]+\text{E}\left[2\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\left(\hat{\theta}-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\right]+\text{E}\left[\left(\text{E}\left[\hat{\theta}\right]-\hat{\theta}\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{E}\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)^2+2\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\text{E}\left[\left(\hat{\theta}-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\right]+\text{E}\left[\left(\text{E}\left[\hat{\theta}\right]-\hat{\theta}\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{Var}\left(\hat{\theta}\right)+2\left(\theta-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)\left(\text{E}\left[\hat{\theta}\right]-\text{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)+\left(\text{bias}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{Var}\left(\hat{\theta}\right)+\left(\text{bias}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

Jadi, terbukti bahwa :

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\text{Var}\left(\hat{\theta}\right)+\left(\text{bias}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

Berdasarkan definisi MSE di atas, jika $\hat{\theta}$ tidak bias, maka MSE dari $\hat{\theta}$ akan sama dengan variansi dari $\hat{\theta}$

Bukti:

$\hat{\theta}$ dikatakan tidak bias jika $\text{E}\left[\hat{\theta}\right]=\theta$

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left(bias(\hat{\theta})\right)^2$$

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + \left(\theta - E(\hat{\theta})\right)^2$$

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + 0$$

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$$

Terbukti bahwa jika $\hat{\theta}$ adalah taksiran tidak bias untuk θ maka

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - m\right)^2\right] = Var(\hat{\theta})$$

Taksiran yang baik adalah taksiran parameter yang tidak bias dan memiliki variansi minimum diantara taksiran tidak bias lainnya. Pada kenyataannya, sering dijumpai taksiran yang tidak bias tetapi mempunyai variansi besar, atau taksiran yang bias tetapi mempunyai variansi kecil. Karena itu, untuk mengukur keakuratan suatu taksiran digunakan m*ean square error* (MSE) yang melibatkan bias dari taksiran dan variansi dari taksiran tersebut. Taksiran yang mempunyai MSE lebih kecil dikatakan lebih akurat.

2.2 *Simple Random Sampling*

Simple random sampling adalah suatu metode pengambilan sampel dimana sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N dengan cara sedemikian sehingga setiap sampel yang mungkin mempunyai probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi sampel. *Simple random sampling* digunakan pada populasi yang homogen.

Pengambilan sampel dalam *simple random sampling* dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu pengambilan sampel dengan pengembalian dan pengambilan sampel tanpa pengembalian. Karena unit yang sama tidak memberikan tambahan informasi maka sering digunakan pengambilan sampel tanpa pengembalian.

Pada *simple random sampling*, setiap elemen memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi elemen sampel. Hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut :

Teorema 1

Pada *simple random sampling*, probabilitas suatu elemen terpilih menjadi elemen sampel adalah sama yaitu $\frac{n}{N}$

Bukti:

Misalkan populasi berukuran N dengan nilai- nilai : $u_1, u_2, ..., u_N$

Akan dicari probabilitas u_i terpilih menjadi elemen sampel, untuk setiap $i = 1, 2, ..., N$

Didefinisikan :

p_j = Pr (u_i muncul pada pengambilan ke- j), $j = 1, 2, ..., n$

Untuk $j = 1$, maka

$$p_1 = \text{Pr}\left(u_i \text{ muncul pada pengambilan ke-}1\right)$$

$$p_1 = \frac{1}{N}$$

untuk $j = 2$ maka

p_2 = Pr (u_i tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan muncul pada pengambilan ke-2)

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right) \quad p_2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{N}$$

Untuk $j = n$, maka

p_n = Pr (u_i tidak muncul pada pengambilan ke-1 sampai pengambilan ke

$(n-1)$ dan muncul pada pengambilan ke- n)

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-2}\right)....\left(1 - \frac{1}{N-(n-2)}\right)\left(\frac{1}{N-(n-1)}\right)$$

$$p_n = \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{N-2}{N-1}\right)\left(\frac{N-3}{N-2}\right)....\left(\frac{N-(n-1)}{N-(n-2)}\right)\left(\frac{1}{N-(n-1)}\right)$$

$$p_n = \frac{1}{N}$$

Jadi, $p_j = \frac{1}{N}$, $j = 1, 2, ..., n$

Selanjutnya, misalkan:

$\pi_i = \Pr(u_i \text{ terpilih dalam sampel })$

$A_j =$ kejadian u_i muncul pada pengambilan ke- j , $j = 1, 2, ..., n$

Maka :

$\pi_i = \Pr(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n)$

Karena $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah kejadian saling lepas, diperoleh:

$\pi_i = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + ... + \Pr(A_n)$

$\pi_i = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N}$

$\pi_i = \frac{n}{N}$

Terbukti bahwa untuk sembarang elemen populasi u_i , $i = 1, 2, ..., N$,

probabilitas u_i terpilih dalam sampel adalah $\frac{n}{N}$

2.2.1 Taksiran Mean Berdasarkan *Simple Random Sample*

Misalkan: Y adalah variabel yang ingin diamati

$u_1, u_2, ..., u_N$ adalah nilai-nilai dari Y untuk elemen- elemen populasi

$y_1, y_2, ..., y_n$ adalah nilai-nilai dari Y untuk elemen- elemen sampel dimana sampel diambil secara *simple random sampling*

Mean dari Y = μ_Y = $E[Y] = \sum_{i=1}^{N} u_i P_r(u_i$ terambil$) = \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{1}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$

Pandang suatu statistik:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Dapat dibuktikan bahwa $\overline{y}$ adalah taksiran yang tidak bias untuk mean populasi μ_Y

Untuk membuktikan bahwa $\overline{y}$ adalah taksiran tidak bias untuk μ_Y yaitu dengan menunjukkan bahwa $E(\overline{y}) = \mu_Y$

Bukti:

Definisikan variabel random Z , dimana:

$z_i = 1$, jika u_i menjadi elemen sampel, $i = 1, 2, ..., N$

$z_i = 0$ jika u_i tidak menjadi elemen sampel, $i = 1, 2, ..., N$

Sehingga didapat:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i z_i}{n}$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i z_i}{n}\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i \mathrm{E}\left[z_i\right] \qquad (2.2.1.a)$$

Nilai $\mathrm{E}\left[z_i\right]$ dapat dicari sebagai berikut :

$$\mathrm{E}\left[z_i\right] = \sum_{z_i=0}^{1} z_i \Pr\left(z_i\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i\right] = 0.\Pr\left(z_i = 0\right) + 1.\Pr\left(z_i = 1\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i\right] = 1.\Pr\left(z_i = 1\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i\right] = 1.\Pr\left(u_i \text{ menjadi elemen sampel}\right)$$

Berdasarkan teorema 1 diperoleh bahwa $\Pr\left(u_i \text{ menjadi elemen sampel}\right) = \frac{n}{N}$

sehingga

$$\mathrm{E}\left[z_i\right] = \frac{n}{N} \qquad (2.2.1.b)$$

Dengan mensubstitusikan (2.2.1.b) ke (2.2.1.a) diperoleh :

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i \mathrm{E}\left(z_i\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i \frac{n}{N}$$

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}\right] = \mu_Y$$

Karena $\mathrm{E}\left[\bar{y}\right] = \mu_Y$ maka terbukti bahwa $\bar{y}$ adalah taksiran tidak bias untuk μ_Y

2.2.2 MSE dari Taksiran Mean Berdasarkan *Simple Random Sample*

Dalam sub-bab ini akan dibahas mengenai *Mean Square Error* (MSE) dari $\bar{y}$, yaitu taksiran dari μ_Y. MSE dari $\bar{y}$ didefinisikan sebagai:

MSE($\bar{y}$) = $\mathrm{E}\left[\left(\bar{y} - \mu_Y\right)^2\right]$

Dapat dibuktikan bahwa MSE dari $\bar{y}$ adalah :

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}\right) = \left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{\sigma_Y{}^2}{n} \qquad (2.2.2.a)$$

dimana $\sigma_Y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu_Y\right)^2}{N}$ merupakan variansi dari Y

bukti :

Sesuai definisi MSE($\bar{y}$) = $\mathrm{E}\left[\left(\bar{y} - \mu_Y\right)^2\right]$, sehingga

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[\bar{y}^2 - 2\bar{y}\mu_Y + \mu^2{}_Y\right]$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[\bar{y}^2\right] - 2\mu_Y \text{E}\left[\bar{y}\right] + \mu^2{}_Y$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[\bar{y}^2\right] - 2\mu_Y \mu_Y + \mu^2{}_Y$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[\bar{y}^2\right] - \mu^2{}_Y$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^2\right] - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}\right)^2$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\text{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right] - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\text{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)^2\right] - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\text{E}\left[\sum_{i=1}^{N} (u_i z_i)^2 + \sum_{i}^{N}\sum_{j \neq i}^{N} u_i u_j z_i z_j\right] - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \text{E}\left[z_i^2\right] + \sum_{i}^{N}\sum_{j \neq i}^{N} u_i u_j \text{E}\left[z_i z_j\right]\right) - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 \qquad (2.2.2.d)$$

Sekarang akan dicari nilai $\text{E}\left[z_i^2\right]$ dan $\text{E}\left[z_i z_j\right]$

$$\text{E}\left[z_i^2\right] = \sum_{z_i=0}^{1} z_i^2 \Pr(z_i)$$

$$\text{E}\left[z_i^2\right] = 0^2 \Pr(z_i = 0) + 1^2 \Pr(z_i = 1)$$

$$\text{E}\left[z_i^2\right] = \frac{n}{N} \qquad (2.2.2.e)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i z_i\right] = \sum_{z_i=0}^{1}\sum_{z_j=0}^{1} z_i z_j \Pr\left(z_i, z_j\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i z_i\right] = \Pr\left(z_i = 1, z_j = 1\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i z_i\right] = \Pr\left(u_i \text{ dan } u_j \text{ menjadi elemen sampel}\right)$$

$$\mathrm{E}\left[z_i z_i\right] = \frac{C_{n-2}^{N-2}}{C_n^N}$$

$$\mathrm{E}\left[z_i z_i\right] = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \qquad (2.2.2.f)$$

Dengan mensubstitusikan (2.2.2.e) dan (2.2.2.f) ke (2.2.2.d) diperoleh:

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \frac{n}{N} + \left(\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2\right)\right)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\right) - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2$$

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left(\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right)$$

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \frac{Nn - N - Nn + n}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right)$$

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{N-n}{(N-1)N}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right)$$

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{N-n}{nN(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right)$$

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}) = \frac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu_Y\right)^2$$

$$\text{MSE}(\bar{y}) = \frac{N - n}{n(N - 1)} \frac{\sum_{i=1}^{N} (u_i - \mu_Y)^2}{N}$$

diketahui bahwa $\sigma_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (u_i - \mu_Y)^2}{N}$

maka diperoleh $\text{MSE}(\bar{y}) = \text{E}\left[(\bar{y} - \mu_Y)^2\right] = \left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{\sigma_Y^{\,2}}{n}$ (terbukti)

2.3 *Stratified Random Sampling*

Stratified random sampling merupakan salah satu teknik pengambilan sampel yang digunakan pada populasi yang heterogen. Dalam *stratified random sampling*, populasi yang heterogen dibagi ke dalam beberapa subpopulasi yang homogen dan tidak *overlapping*, yang disebut stratum, kemudian diambil sampel tanpa pengembalian dengan menggunakan *simple random sampling* dari masing- masing stratum.

Misalkan populasi yang heterogen berukuran N dibagi menjadi L strata dengan :

N_h : ukuran stratum ke-h

n_h : ukuran sampel yang diambil dengan *simple random sampling* pada stratum ke-h

μ_{Yh} : mean dari Y pada stratum ke-h

$\overline{y}_h$: taksiran mean berdasarkan *simple random sample* pada stratum ke-h

σ^2_{Yh} : variansi dari Y pada stratum ke-h

Karena pada tiap strata diambil sampel secara *simple random sampling*, maka pada strata ke-h , $h = 1, 2, ..., L$ berlaku :

$$\overline{y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$$ adalah taksiran tidak bias untuk μ_{Yh}

Selanjutnya, akan dibahas mengenai taksiran mean populasi pada *stratified random sampling* beserta MSE-nya

2.3.1 Taksiran Mean Berdasarkan *Stratified Random Sample*

Mean populasi dalam *stratified random sampling* = μ_Y yaitu :

$$\mu_Y = \frac{\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} y_{hi}}{N} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \mu_h}{N} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \mu_h$$

Untuk mencari taksiran mean populasi berdasarkan *stratified random sample*, dibutuhkan nilai-nilai taksiran mean di dalam setiap stratum.

Misalkan $\bar{y}_{st}$ adalah taksiran mean populasi dengan menggunakan formula *stratified random sampling*

Didefinisikan :

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \bar{y}_h$$

Dapat dibuktikan bahwa $\bar{y}_{st}$ adalah taksiran yang tidak bias untuk μ_Y .

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $\bar{y}_{st}$ adalah taksiran yang tidak bias untuk μ_Y yaitu dengan menunjukkan $\mathrm{E}\left[\bar{y}_{st}\right] = \mu_Y$

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_{st}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \bar{y}_h\right] = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \mathrm{E}\left[\bar{y}_h\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_{st}\right] = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \mu_{Y_h}$$

Karena $\mathrm{E}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \mu_{Y_h} = \mu_Y$, maka terbukti bahwa $\bar{y}_{st}$ adalah taksiran yang tidak bias untuk μ_Y

Selanjutnya akan dibahas mengenai *mean square error* (MSE) dari taksiran mean dari Y berdasarkan *stratified random sample*.

2.3.2 MSE dari Taksiran Mean *Berdasarkan Stratified Random Sample*

Dalam sub-bab ini akan dibahas mengenai *Mean Square Error* (MSE) dari $\overline{y}_{st}$. MSE dari $\overline{y}_{st}$ didefinisikan sebagai :

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \text{E}\left[\left(\overline{y}_{st} - \mu_Y\right)^2\right]$$

Dapat ditunjukkan bahwa:

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h}$$

dengan $\sigma_{Y_h}{}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)^2}{N_h}$ adalah variansi dari Y pada strata ke-h

Bukti :

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \text{E}\left[\left(\overline{y}_{st} - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \text{E}\left[\left(\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\overline{y}_h - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \text{E}\left[\left(\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\overline{y}_h\right)^2\right] - 2\mu_Y\text{E}\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\overline{y}_h\right] + \mu_Y{}^2$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{st}\right) = \text{E}\left[\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\overline{y}_h\right)^2 - \sum_{h=1}^{L}\sum_{k\neq h}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_k}{N}\overline{y}_k\overline{y}_h\right] - 2\mu_Y{}^2 + \mu_Y{}^2$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]-\sum_{h=1}^{L}\sum_{k\neq h}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_k}{N}\text{E}\left[\bar{y}_k\bar{y}_h\right]-\mu_Y{}^2 \qquad (2.3.2.a)$$

Untuk menyelesaikan (2.3.2.a), maka akan dicari $\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]$ dan

$\text{E}\left[\bar{y}_k\bar{y}_h\right]$ terlebih dahulu.

Diketahui bahwa :

$$\text{Var}\left(\bar{y}_h\right)=\text{E}\left[\left(\bar{y}_h-\text{E}\left[\bar{y}_h\right]\right)^2\right]$$

Sehingga

$$\text{Var}\left(\bar{y}_h\right)=\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]-2\text{E}\left[\bar{y}_h\right]\text{E}\left[\bar{y}_h\right]+\left(\text{E}\left[\bar{y}_h\right]\right)^2$$

$$\text{Var}\left(\bar{y}_h\right)=\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]-\left(\text{E}\left[\bar{y}_h\right]\right)^2 \qquad (2.3.2.b)$$

karena $\bar{y}_h$ tidak bias untuk μ_{Y_h} maka berdasarkan definisi MSE pada sub-bab 2.1, Variansi ($\bar{y}_h$) = MSE($\bar{y}_h$) . Diketahui pula bahwa

$\text{MSE}(\bar{y}_h)=\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h}$ sehingga (2.3.2.b) menjadi :

$$\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{\sigma_h{}^2}{n_h}=\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]-\left(\text{E}\left[\bar{y}_h\right]\right)^2$$

$$\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h}=\text{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right]-\mu^2{}_{Y_h}$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\bar{y}_h\right)^2\right] = \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \mu^2{}_{Y_h} \quad (2.3.2.c)$$

Selanjutnya,

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_k \bar{y}_h\right] = \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{y}_k\right) + \mathrm{E}\left[\bar{y}_k\right]\mathrm{E}\left[\bar{y}_h\right]$$

Karena antara strata yang satu dengan yang lain tidak *overlapping* maka nilai $\mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{y}_k\right) = 0$ sehingga :

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_k \bar{y}_h\right] = \mathrm{E}\left[\bar{y}_k\right]\mathrm{E}\left[\bar{y}_h\right] = \mu_{Y_k}\mu_{Y_h} \quad (2.3.2.d)$$

Dengan mensubstitusikan (2.3.2.c) dan (2.3.2.d) ke (2.3.2.a) diperoleh:

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \mu_{Y_h}{}^2\right) - \sum_{h=1}^{L}\sum_{k \neq h}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_k}{N}\mu_{Y_k}\mu_{Y_h} - \mu_Y{}^2$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\mu_{Y_h}{}^2 - \sum_{h=1}^{L}\sum_{k \neq h}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_k}{N}\mu_{Y_k}\mu_{Y_h} - \mu_Y{}^2$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\mu_{Y_h}\right)^2 - \sum_{h=1}^{L}\sum_{k \neq h}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_k}{N}\mu_{Y_k}\mu_{Y_h} - \mu_Y{}^2$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \left(\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\mu_{Y_h}\right)^2 - \mu_Y{}^2$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} + \mu_Y{}^2 - \mu_Y{}^2$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h}$$

Terbukti bahwa MSE dari taksiran mean dalam *stratified random sampling* adalah :

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h} \text{ dengan } \sigma_{Y_h}{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)^2}{N_h}$$

2.4 Taksiran Rasio

Dalam penaksiran mean populasi seperti yang sudah dibahas sebelumnya hanya dilakukan pengukuran terhadap satu variabel yaitu variabel Y. Namun, seringkali ada variabel tambahan, X, yang berkorelasi kuat dengan variabel Y yang ingin dilibatkan dalam penaksiran mean populasi dari Y. Salah satu taksiran yang melibatkan variabel yang berkorelasi kuat dengan variabel yang ingin diamati adalah taksiran rasio.

Taksiran rasio dapat diterapkan pada *simple random sampling* dan *stratified random sampling*. Pada *stratified random sampling*, ada dua metode untuk mencari taksiran rasio yaitu metode taksiran rasio terpisah dan metode taksiran rasio gabungan. Namun, dalam tugas akhir ini metode taksiran rasio dalam *stratified random sampling* yang dibahas adalah taksiran rasio gabungan.

Berikut adalah pembahasan taksiran rasio gabungan pada masing-masing teknik sampling tersebut.

2.4.1 Taksiran Rasio dalam *Simple Random Sampling*

Misal diambil *simple random sample* berukuran n dari populasi berukuran N . Untuk mencari taksiran rasio, variabel yang ingin diamati, Y , dan variabel tambahan , X , diukur pada setiap elemen sampel dimana X dan Y berkorelasi kuat. x_i adalah pengukuran X pada elemen ke-i dan y_i adalah pengukuran Y pada elemen ke i , $i = 1, 2, ..., n$

Rasio dinyatakan dengan $R = \dfrac{\mu_Y}{\mu_X}$

dimana μ_Y : mean dari variabel Y

μ_X : mean dari variabel X

Rasio R dapat ditaksir dengan r yaitu :

$$r = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

dimana $\bar{y}$: taksiran tidak bias untuk μ_Y

$\bar{x}$: taksiran tidak bias untuk μ_X

Dapat dibuktikan bahwa r adalah taksiran yang bias untuk R

Buktinya sebagai berikut :

Untuk membuktikan bahwa r adalah taksiran bias untuk R dengan menunjukkan bahwa $\mathrm{E}[r] \neq R$

Diketahui dari definisi covariansi yaitu :

$$\mathrm{Cov}(r,\overline{x}) = \mathrm{E}[r\overline{x}] - \mathrm{E}[r]\mathrm{E}[\overline{x}]$$

$$\mathrm{Cov}(r,\overline{x}) = \mathrm{E}\left[\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\overline{x}\right] - \mathrm{E}[r]\mu_X$$

$$\mathrm{Cov}(r,\overline{x}) = \mu_Y - \mathrm{E}[r]\mu_X$$

Dengan membagi kedua ruas dengan $\mu_X \neq 0$, diperoleh :

$$\frac{\mathrm{Cov}(r,\overline{x})}{\mu_X} = \frac{\mu_Y - \mathrm{E}[r]\mu_X}{\mu_X}$$

$$\frac{\mathrm{Cov}(r,\overline{x})}{\mu_X} = \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \mathrm{E}[r]$$

$$\frac{\mathrm{Cov}(r,\overline{x})}{\mu_X} = R - \mathrm{E}[r]$$

$$\mathrm{E}[r] = R - \frac{\mathrm{Cov}(r,\overline{x})}{\mu_X} \qquad (2.4.1.a)$$

Nilai $\mathrm{Cov}(r,\overline{x})$ tidak mungkin nol karena terdapat korelasi antara r dengan $\overline{x}$. Karena $\mathrm{E}[r] \neq R$ maka terbukti bahwa r adalah taksiran yang bias untuk R. Besarnya bias dari r adalah :

$$E[r]-R=-\frac{\mathrm{Cov}(r,\bar{x})}{\mu_X}=-\frac{\rho_{r\bar{x}}\sigma_r\sigma_{\bar{x}}}{\mu_X}=-\rho_{r\bar{x}}\sigma_r C_{\bar{x}} \qquad (2.4.1.b)$$

$$\left|E[r]-R\right|\le\sigma_r C_{\bar{x}}$$

dimana :

$\mathrm{Cov}(r,\bar{x})$	: covariansi antara r dengan $\bar{x}$
$\rho_{r\bar{x}}$	: korelasi antara r dengan $\bar{x}$
σ_r	: *standar error* dari r
$\sigma_{\bar{x}}$	: *standar error* dari $\bar{x}$
$C_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\mu_X}$	: koefisien variasi dari $\bar{x}$

Dengan menggunakan aproksimasi deret taylor derajat satu di sekitar $(\bar{x},\bar{y})=(\mu_X,\mu_Y)$ untuk $r=\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ maka dapat ditunjukkan bahwa bias(r) mendekati nol.

Sebelumnya, perhatikan aproksimasi deret Taylor derajat satu dari suatu fungsi dua peubah $f(x,y)$ di sekitar $(x,y)=(a,b)$ yaitu :

$$f(x,y)\approx f(a,b)+\frac{f_x(a,b)}{1!}(x-a)+\frac{f_y(a,b)}{1!}(y-b)$$

dimana

$f_x(a,b)$: turunan parsial pertama dari $f(x,y)$ terhadap x di titik (a,b)

$f_y(a,b)$: turunan parsial pertama dari $f(x,y)$ terhadap y di titik (a,b)

Pandang $f(x,y)=\frac{y}{x}$ sehingga berlaku $f(\bar{x},\bar{y})=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$

Aproksimasi deret Taylor untuk $f(\bar{x},\bar{y})=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ di sekitar $(\bar{x},\bar{y})=(\mu_X,\mu_Y)$ adalah sebagai berikut:

$$f(\bar{x},\bar{y})=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\approx f(\mu_X,\mu_Y)+f_{\bar{x}}(\mu_X,\mu_Y)(\bar{x}-\mu_X)+f_{\bar{y}}(\mu_X,\mu_Y)(\bar{y}-\mu_Y) \qquad (2.4.1.c)$$

$$f_{\bar{x}}(\mu_X,\mu_Y)=\left.\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{x}}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}=\left.-\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}=-\frac{\mu_Y}{\mu_X^{\ 2}} \qquad (2.4.1.d)$$

$$f_{\bar{y}}(\mu_X,\mu_Y)=\left.\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{y}}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}=\left.\frac{1}{\bar{x}}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}=\frac{1}{\mu_X} \qquad (2.4.1.e)$$

Dengan mensubstitusikan (2.4.1.d) dan (2.4.1.e) ke (2.4.1.c) diperoleh :

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\approx\frac{\mu_Y}{\mu_X}-\frac{\mu_Y}{\mu_X^{\ 2}}(\bar{x}-\mu_X)+\frac{1}{\mu_X}(\bar{y}-\mu_Y) \qquad (2.4.1.f)$$

Dengan mengekspektasikan kedua ruas pada (2.4.1.f), diperoleh :

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right] \approx \mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\left(\bar{x} - \mu_X\right) + \frac{1}{\mu_X}\left(\bar{y} - \mu_Y\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X}\right] - \mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\left(\bar{x} - \mu_X\right)\right] + \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mu_X}\left(\bar{y} - \mu_Y\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\mathrm{E}\left[\bar{x} - \mu_X\right] + \frac{1}{\mu_X}\mathrm{E}\left[\bar{y} - \mu_Y\right]$$

$$= R - \frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\left(\mu_X - \mu_X\right) + \frac{1}{\mu_X}\left(\mu_Y - \mu_Y\right)$$

$$= R$$

Sehingga:

$$\mathrm{E}\left[r\right] - R = \mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right] - R \approx 0 \qquad (2.4.1.g)$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa : dengan aproksimasi deret Taylor derajat satu untuk r di sekitar titik $\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\mu_X, \mu_Y\right)$ didapatkan bias$\left(r\right)$ mendekati nol

2.4.2 MSE dari Taksiran Rasio Berdasarkan *Simple Random Sample*

Berdasarkan definisi MSE yang telah dibahas dalam sub-bab 2.1, maka MSE dari r adalah :

$$\mathrm{MSE}\left(r\right) = \mathrm{E}\left[\left(r - R\right)^2\right] = \mathrm{var}\left(r\right) + \left(\mathrm{bias}\left(r\right)\right)^2.$$

Dengan aproksimasi Taylor derajat satu, bias$\left(r\right)$ ≈ 0 maka

MSE $(r) \approx$ Var (r)

Dari (2.4.1.f) yaitu :

$$\frac{\overline{y}}{\overline{x}} \approx \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\overline{x} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\overline{y} - \mu_Y)$$

Maka :

$$\text{MSE}(r) \approx \text{Var}(r) = \text{Var}\left(\frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\overline{x} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\overline{y} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r) \approx \text{Var}\left(\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\overline{x} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\overline{y} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r) \approx \left(\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}\right)^2 \text{Var}(\overline{x} - \mu_X) + \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}(\overline{y} - \mu_Y) + 2\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^3}\text{Cov}\left((\overline{x} - \mu_X), (\overline{y} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r) \approx \left(\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}\right)^2 \text{Var}(\overline{x}) + \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}(\overline{y}) + 2\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^3}\text{Cov}(\overline{x}, \overline{y})$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{{\mu_X}^2}\text{Var}(\overline{y} - R\overline{x}) \qquad (2.4.2.a)$$

Selanjutnya akan dicari $\text{Var}(\overline{y} - R\overline{x})$

Definisikan suatu variabel D dengan nilai- nilai $d_i = y_i - Rx_i$ untuk setiap elemen populasi

Mean populasi dari $D = \mu_d = \mathrm{E}[d_i] = \mathrm{E}[y_i - Rx_i] = \mathrm{E}[y_i] - R\mathrm{E}[x_i] = \mu_Y - R\mu_X = 0$

Variansi populasi dari $D = \sigma_d^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \mu_d)^2}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}((y_i - Rx_i) - 0)^2}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N}$

Misalkan diambil n elemen populasi secara *simple random sampling*, akan didapatkan :

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - Rx_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - R\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - R\bar{x} \qquad (2.4.2.b)$$

Diketahui bahwa pada *Simple random sampling*

$$\mathrm{Var}(\bar{y}) = \mathrm{MSE}(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma_Y^2}{n},$$

Maka :

$$\mathrm{Var}(\bar{d}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma_d^2}{n} = \left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N} \qquad (2.4.2.c)$$

Dari (2.4.2.b) dan (2.4.2.c) didapat :

$$\mathrm{Var}(\bar{y} - R\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N} \qquad (2.4.2.d)$$

Dengan mensubstitusikan (2.4.2.d) ke (2.4.2.a) diperoleh :

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{{\mu_X}^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N}$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i + \mu_Y - \mu_Y)^2$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_Y - Rx_i + \mu_Y)^2$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_Y - Rx_i + R\mu_X)^2$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((y_i - \mu_Y) - R(x_i - \mu_X)\right)^2$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{(N-1)n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((y_i - \mu_Y)^2 - 2R(y_i - \mu_Y)(x_i - \mu_X) + R^2(x_i - \mu_X)^2\right)$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(y_i - \mu_Y)^2}{N} - 2R\frac{(y_i - \mu_Y)(x_i - \mu_X)}{N} + R^2\frac{(x_i - \mu_X)^2}{N}\right)$$

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa : dengan aproksimasi deret Taylor derajat satu untuk r di sekitar titik $(\bar{x}, \bar{y}) = (\mu_X, \mu_Y)$ didapatkan :

$$\text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$$

2.4.3 Taksiran Mean dengan Menggunakan Taksiran Rasio Berdasarkan *Simple Random Sample*

Jika μ_X diketahui, maka taksiran rasio dapat digunakan untuk mencari taksiran mean dari Y. Taksiran mean dari Y dengan menggunakan taksiran rasio berdasarkan *simple random sample* dinotasikan dengan $\overline{y}_r$

Didefinisikan :

$$\overline{y}_r = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}\mu_X = r\mu_X$$

$\overline{y}_r$ adalah taksiran bias untuk μ_Y

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $\overline{y}_r$ adalah taksiran bias untuk μ_Y dengan menunjukkan bahwa $\mathrm{E}\left[\overline{y}_r\right] \neq \mu_Y$ atau $\mathrm{E}\left[\overline{y}_r - \mu_Y\right] \neq 0$

$$\mathrm{E}[\overline{y}_r - \mu_Y] = \mathrm{E}\left[\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\mu_X - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\mu_X\right]$$

$$\mathrm{E}[\overline{y}_r - \mu_Y] = \mu_X \mathrm{E}\left[\frac{\overline{x}}{\overline{y}} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right]$$

$$\mathrm{E}[\overline{y}_r - \mu_Y] = \mu_X \mathrm{E}[r - R] \qquad (2.4.3.a)$$

Diketahui bahwa $\mathrm{E}[r - R] = -\frac{\mathrm{Cov}\left(r, \overline{x}\right)}{\mu_X}$ sehingga (2.4.3.a) menjadi :

$$E[\bar{y}_r - \mu_Y] = \mu_X \left(-\frac{\text{Cov}(r,\bar{x})}{\mu_X} \right)$$

$$E[\bar{y}_r - \mu_Y] = -\text{Cov}(r,\bar{x})$$

$$E[\bar{y}_r - \mu_Y] = -\rho_{r\bar{x}}\sigma_r\sigma_{\bar{x}}$$

$$\left|E[\bar{y}_r - \mu_Y]\right| \le \sigma_r\sigma_{\bar{x}}$$

Terbukti bahwa $\bar{y}_r$ adalah taksiran bias untuk μ_Y dengan bias sebesar -Cov(r, $\bar{x}$)

Dengan aproksimasi Taylor untuk r di sekitar $(\bar{x},\bar{y}) = (\mu_X, \mu_Y)$, maka bias$(\bar{y}_r)$ mendekati nol.

Dengan mensubstitusikan (2.4.1.d) yaitu $E[r - R] \approx 0$ ke (2.4.3.a) akan diperoleh :

$$E[\bar{y}_r - \mu_Y] = \mu_X E[r - R] \approx 0$$

Berarti $E[\bar{y}_r] - \mu_Y \approx 0$ atau Bias$(\bar{y}_r) \approx 0$

2.4.4 MSE dari Taksiran Mean dengan Menggunakan Taksiran Rasio

MSE dari $\bar{y}_r$ didefinisikan sebagai :

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) = E\left[(\bar{y}_r - \mu_Y)^2\right]$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) = \text{E}\left[(r\mu_X - R\mu_X)^2\right]$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) = \text{E}\left[\mu_X{}^2 (r - R)^2\right]$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) = \mu_X{}^2\text{E}\left[(r - R)^2\right] \qquad (2.4.4.a)$$

Dari sub-bab 2.4.2 diketahui bahwa:

$$\text{E}\left[(r - R)^2\right] = \text{MSE}(r) \approx \frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$$

Sehingga (2.4.4.a) menjadi :

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) = \mu_X{}^2\text{E}\left[(r - R)^2\right]$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) \approx \mu_X{}^2\frac{1}{\mu_X^2}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) \approx \left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$$

Jadi , $\text{MSE}(\bar{y}_r) \approx \left(\frac{N - n}{N - 1}\right)\frac{1}{n}\left(\sigma_Y^2 - 2R\sigma_{YX} + R^2\sigma_X^2\right)$ (2.4.4.b)

Berikutnya akan dibahas mengenai taksiran rasio dalam *stratified random sampling*.

2.4.5 Taksiran Rasio dalam *Stratified Random Sampling*

Misalkan R_C menyatakan rasio gabungan untuk populasi dalam *Stratified Random Sampling*, maka :

$$R_C = \frac{\mu_Y}{\mu_X} \quad \text{(c menyatakan combined)}$$

Taksiran dari R_C sebut sebagai r_C yaitu perbandingan taksiran mean dari Y dengan taksiran mean dari X dalam *stratified random sampling*, ditulis :

$$r_C = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}$$

r_C merupakan taksiran yang bias untuk R_C dengan buktinya adalah sebagai berikut :

Untuk membuktikan bahwa r_C merupakan taksiran yang bias untuk R_C dengan menunjukkan bahwa :

$$\text{E}\left[r_C\right] \neq R_C \quad \text{atau} \quad \text{E}\left[r_C - R_C\right] \neq 0$$

Diketahui dari definisi covariansi yaitu :

$$\text{Cov}\left(r_C, \bar{x}_{st}\right) = \text{E}\left[r_C \bar{x}_{st}\right] - \text{E}\left[r_C\right]\text{E}\left[\bar{x}_{st}\right]$$

$$\text{Cov}\left(r_C,\bar{x}_{st}\right)=\text{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{x}_{st}\right]\text{-}\,\text{E}\left[r_C\right]\mu_X$$

$$\text{Cov}\left(r_C,\bar{x}_{st}\right)=\mu_Y\ \text{-}\,\text{E}\left[r_C\right]\mu_X$$

Dengan membagi kedua ruas dengan μ_X , diperoleh :

$$\frac{\text{Cov}\left(r_C,\bar{x}_{st}\right)}{\mu_X}=\frac{\mu_Y\ \text{-E}[r_C]\mu_X}{\mu_X}=R_C\ \text{-}\ E[r_C]$$

$$\text{E}\left[r_C\right]\text{-}\,R_C=\text{-}\frac{\text{Cov}\left(r_C,\bar{x}_{st}\right)}{\mu_X} \qquad (2.4.5.a)$$

Karena $\text{E}\left[r_C\right]\neq R_C$, maka r_C merupakan taksiran yang bias untuk R_C

dengan bias sebesar $\text{-}\dfrac{\text{Cov}\left(r_C,\bar{x}_{st}\right)}{\mu_X}$

Dengan menggunakan aproksimasi deret taylor derajat satu di sekitar $\left(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}\right)=\left(\mu_X,\mu_Y\right)$ untuk $r_C=\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}$ maka dapat ditunjukkan bahwa bias(r_C) mendekati nol.

Pandang $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$, maka $f(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})=\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}$

Aproksimasi deret Taylor untuk $f(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})=\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}$ di sekitar $\left(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}\right)=\left(\mu_X,\mu_Y\right)$ adalah sebagai berikut:

$$f\left(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}\right)\approx f\left(\mu_X,\mu_Y\right)+f_{\bar{x}_{st}}\left(\mu_X,\mu_Y\right)\left(\bar{x}_{st}-\mu_X\right)+f_{\bar{y}_{st}}\left(\mu_X,\mu_Y\right)\left(\bar{y}_{st}-\mu_Y\right)$$

$$\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\approx\frac{\mu_Y}{\mu_X}-\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}(\bar{x}_{st}-\mu_X)+\frac{1}{\mu_X}(\bar{y}_{st}-\mu_Y) \qquad (2.4.5.b)$$

Dengan mengekspektasikan kedua ruas, diperoleh :

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]\approx\mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X}-\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\left(\bar{x}_{st}-\mu_X\right)+\frac{1}{\mu_X}\left(\bar{y}_{st}-\mu_Y\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]\approx\mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X}\right]-\mathrm{E}\left[\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\left(\bar{x}_{st}-\mu_X\right)\right]+\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mu_X}\left(\bar{y}_{st}-\mu_Y\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]\approx\frac{\mu_Y}{\mu_X}-\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}\mathrm{E}\left[\left(\bar{x}_{st}-\mu_X\right)\right]+\frac{1}{\mu_X}\mathrm{E}\left[\left(\bar{y}_{st}-\mu_Y\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]\approx R_C-\frac{\mu_Y}{\mu_X{}^2}(\mu_X-\mu_X)+\frac{1}{\mu_X}(\mu_Y-\mu_Y)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]\approx R_C$$

Sehingga $\mathrm{E}\left[r_C\right]-R_C=\mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right]-R_C\approx 0$ (2.4.5.c)

Kesimpulan : dengan menggunakan aproksimasi taylor order satu untuk r_C di sekitar $\left(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}\right)=\left(\mu_X,\mu_Y\right)$ akan diperoleh bias (r_C) mendekati nol.

2.4.6 MSE dari Taksiran Rasio Berdasarkan *Stratified Random Sample*

Berdasarkan definisi MSE yang telah dibahas dalam sub-bab 2.1, maka MSE dari r_C adalah :

$$\text{MSE}(r_C) = \text{E}\left[(r_C - R_C)^2\right] = \text{var}(r_C) + (\text{bias}(r_C))^2.$$

Dengan aproksimasi Taylor derajat satu, bias(r_C) ≈ 0 maka

MSE (r_C) $\approx$ Var (r_C)

Dari (2.4.5.b) yaitu :

$$\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \approx \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\bar{x}_{st} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\bar{y}_{st} - \mu_Y)$$

Sehingga ,

$$\text{MSE}(r_C) \approx \text{Var}\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right) = \text{Var}\left(\frac{\mu_Y}{\mu_X} - \frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\bar{x}_{st} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\bar{y}_{st} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r_C) \approx \text{Var}\left(-\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}(\bar{x}_{st} - \mu_X) + \frac{1}{\mu_X}(\bar{y}_{st} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r_C) \approx \left(\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}\right)^2 \text{Var}(\bar{x}_{st} - \mu_X) + \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}(\bar{y}_{st} - \mu_Y) - 2\,\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^3} Cov\left((\bar{x}_{st} - \mu_X), (\bar{y}_{st} - \mu_Y)\right)$$

$$\text{MSE}(r_C) \approx \left(\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^2}\right)^2 \text{Var}(\bar{x}_{st}) + \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}(\bar{y}_{st}) - 2\,\frac{\mu_Y}{{\mu_X}^3} Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})$$

$$\text{MSE}(r_C) \approx \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st}) \qquad (2.4.6.a)$$

Akan dicari Var$(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st})$ terlebih dahulu

Ambil $w_{hi} = y_{hi} - R_C x_{hi}$ untuk setiap elemen populasi

Pada stratum ke-h, mean populasi dari W adalah μ_{W_h}

$$\mu_{W_h} = \mathrm{E}\left[w_{hi}\right] = \mathrm{E}\left[y_{hi} - R_C x_{hi}\right] = \mathrm{E}\left[y_{hi}\right] - R_C \mathrm{E}\left[x_{hi}\right] = \mu_{Y_h} - R_C \mu_{X_h} \qquad (2.4.6.b)$$

Variansi dari U pada strata ke-h adalah $\sigma^2_{W_h} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(w_{hi} - \mu_{W_h}\right)^2}{N_h}$ (2.4.6.c)

Dari (2.4.6.b) dan (2.4.6.c) didapat :

$$\sigma^2_{W_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(\left(y_{hi} - R_C x_{hi}\right) - \left(\mu_{Y_h} - R_C \mu_{X_h}\right)\right)^2}{N_h}$$

$$\sigma^2_{W_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right) - R_C\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)\right)^2}{N_h} \qquad (2.4.6.d)$$

Untuk n elemen populasi pada strata ke-h, berlaku :

$$\bar{w}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \bar{y}_{hi} - R_C \bar{x}_{hi}}{n_h} = \bar{y}_h - R_C \bar{x}_h$$

$$\bar{w}_{st} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \bar{w}_h = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N}\left(\bar{y}_h - R_C \bar{x}_h\right) = \bar{y}_{st} - R_C \bar{x}_{st} \qquad (2.4.6.e)$$

Karena pada *stratified random sampling*

$$\mathrm{Var}\left(\bar{y}_{st}\right) = \mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{\sigma_{Y_h}{}^2}{n_h}$$

maka

$$\text{Var}\left(\bar{w}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{\sigma_{W_h}{}^2}{n_h} \qquad (2.4.6.f)$$

Dengan mensubstitusikan (2.4.6.d) dan (2.4.6.e) ke (2.4.6.f) didapat :

$$\text{Var}\left(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right) - R_C\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)\right)^2}{N_h} \qquad (2.4.6.g)$$

Sehingga (2.4.6.a) menjadi :

$$\text{MSE}\left(r_C\right)\approx\left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \text{Var}\left(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st}\right)$$

$$\text{MSE}\left(r_C\right)\approx\left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right) - R_C\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)\right)^2}{N_h}$$

$$\text{MSE}\left(r_C\right)\approx\left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)^2 - 2R_C\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right) + R_C{}^2\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)^2\right)}{N_h}$$

diketahui bahwa

$$\sigma_{Y_h}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)^2}{N_h},\ \sigma_{X_h}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)^2}{N_h},\ \text{dan}\ \sigma_{YX_h}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \mu_{Y_h}\right)\left(x_{hi} - \mu_{X_h}\right)}{N_h}$$

Maka :

$$\text{MSE}\left(r_C\right) \approx \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{\left(N_h - 1\right) n_h}\right) \left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C \sigma_{XYh} + R_C^{\,2} \sigma_{Xh}^2\right) \qquad (2.4.6.h)$$

Kesimpulan :

Dengan aproksimasi deret taylor derajat satu, didapatkan

$$\text{MSE}\left(r_C\right) \approx \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{\left(N_h - 1\right) n_h}\right) \left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C \sigma_{XYh} + R_C^{\,2} \sigma_{Xh}^2\right)$$

2.4.7 Taksiran Mean dengan Menggunakan Taksiran Rasio Berdasarkan ***Stratified Random Sample***

Jika μ_X diketahui, maka taksiran rasio gabungan dapat digunakan untuk menaksir mean dari Y. Taksiran mean dari Y dengan menggunakan taksiran rasio gabungan berdasarkan *stratified random sample* dinotasikan dengan $\overline{y}_{Rc}$.

Didefinisikan :

$$\overline{y}_{Rc} = r_c \mu_X = \frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}} \mu_X$$

Dapat dibuktikan bahwa $\overline{y}_{Rc}$ merupakan taksiran yang bias untuk μ_Y

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $\overline{y}_{Rc}$ merupakan taksiran yang bias untuk μ_Y yaitu dengan menunjukkan bahwa $\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] \neq \mu_Y$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC} - \mu_Y\right] = \mathrm{E}\left[\frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}}\mu_X - R_C\mu_X\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC} - \mu_Y\right] = \mu_X \mathrm{E}\left[\frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}} - R_C\right] \qquad (2.4.7.a)$$

dari (2.4.5.a) diperoleh bahwa $\mathrm{E}[r_C] - R_C = -\frac{\mathrm{Cov}(r_C, \overline{x}_{st})}{\mu_X}$ sehingga :

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC} - \mu_Y\right] = \mu_X\left(-\frac{\mathrm{Cov}(r_C, \overline{x}_{st})}{\mu_X}\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC} - \mu_Y\right] = -\mathrm{Cov}(r_C, \overline{x}_{st}) \qquad (2.4.7.b)$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] = \mu_Y - \mathrm{Cov}(r_C, \overline{x}_{st})$$

Karena $\mathrm{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] \neq \mu_Y$ maka $\overline{y}_{Rc}$ merupakan taksiran yang bias untuk μ_Y dengan bias sebesar $-\mathrm{Cov}(r_C, \overline{x}_{st})$

Dengan menggunakan aproksimasi taylor derajat satu untuk r_C di sekitar $\left(\overline{x}_{st}, \overline{y}_{st}\right) = \left(\mu_X, \mu_Y\right)$ akan diperoleh bias ($\overline{y}_{Rc}$) akan mendekati nol.

Dari (2.4.7.a) dan (2.4.5.c) diperoleh :

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_{RC} - \mu_Y\right] = \mu_X \mathrm{E}\left[\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} - R_C\right] \approx 0$$

Karena bias dari $\bar{y}_{Rc}$ dinyatakan dengan $\mathrm{E}\left[\bar{y}_{RC}\right] - \mu_Y = \mathrm{E}\left[\bar{y}_{RC} - \mu_Y\right]$ yang nilainya mendekati nol maka terbukti bahwa :

dengan menggunakan aproksimasi taylor order satu untuk r_C di sekitar $\left(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}\right) = \left(\mu_X, \mu_Y\right)$ akan diperoleh bias ($\bar{y}_{Rc}$) akan mendekati nol.

2.4.8 MSE dari Taksiran Mean dengan Menggunakan Taksiran Rasio Berdasarkan *Stratified Random Sample*

MSE dari $\bar{y}_{Rc}$ didefinisikan sebagai :

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) = \mathrm{E}\left[\left(\bar{y}_{RC} - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) = \mathrm{E}\left[\left(r_C \mu_X - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) = \mathrm{E}\left[\left(r_C \mu_X - R_C \mu_X\right)^2\right]$$

$$\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) = \mu_X^{\;2} \mathrm{E}\left[\left(r_C - R_C\right)^2\right] \qquad (2.4.8.a)$$

Dari (2.4.6.c) diperoleh bahwa

$$E\left[\left(r_C - R_C\right)^2\right] \approx \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{Xh}^2\right)$$

Sehingga didapat :

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) = \mu_X{}^2 E\left[\left(r_C - R_C\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx \mu_X{}^2\left(\frac{1}{\mu_X}\right)^2 \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{Xh}^2\right)$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{Xh}^2\right)$$

Kesimpulan :

dengan menggunakan aproksimasi taylor derajat satu untuk r_C di sekitar $(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) = (\mu_X, \mu_Y)$ akan didapatkan nilai aproksimasi untuk MSE$\left(\bar{y}_{RC}\right)$ yaitu :

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{Xh}^2\right)$$

BAB III

PENAKSIRAN MEAN DENGAN MENGGUNAKAN *NEW RATIO ESTIMATOR* PADA *STRATIFIED RANDOM SAMPLING*

Pada bab ini akan dibahas mengenai penaksiran mean pada *stratified random sampling* dengan menggunakan modifikasi dari taksiran rasio. Metode ini disebut *new ratio estimator*. Dengan metode ini dapat ditunjukkan bahwa taksiran mean yang diperoleh lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan taksiran rasio konvensional.

3.1 Penaksiran Mean dengan Menggunakan *New Ratio Estimator* dalam *Stratified Random Sampling*

Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai taksiran mean dari Y dengan menggunakan taksiran rasio konvensional dalam *stratified random sampling.* Taksiran mean yang diperoleh merupakan taksiran yang bias. Untuk mendapatkan taksiran mean yang lebih baik saat melibatkan variabel tambahan X, Prasad memperkenalkan metode penaksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator*.

Misalkan :

$\bar{y}_{stp}$: menyatakan taksiran μ_Y dengan menggunakan *new ratio estimator* dalam *stratified random sampling*

Taksiran μ_Y dengan menggunakan *new ratio estimator* dalam *stratified random sampling* yang diperkenalkan oleh Prasad memiliki bentuk dasar :

$$\bar{y}_{stp} = k^* \bar{y}_{RC} \quad (3.1.a)$$

dimana :

$\bar{y}_{RC}$: taksiran mean yang menggunakan taksiran rasio dalam *stratified random sampling*

k^* : suatu konstanta yang meminimumkan MSE$\left(\bar{y}_{stp}\right)$, k^* disebut koreksi Prasad

$\bar{y}_{stp}$ merupakan taksiran yang bias untuk μ_Y

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $\bar{y}_{stp}$ merupakan taksiran yang bias untuk μ_Y yaitu dengan menunjukkan bahwa $\text{E}\left[\bar{y}_{stp}\right] \neq \mu_Y$ atau $\text{E}\left[\bar{y}_{stp} - \mu_Y\right] \neq 0$

$$\text{E}\left[\bar{y}_{stp} - \mu_Y\right] = \text{E}\left[k^* \bar{y}_{RC} - \mu_Y\right]$$

$$\text{E}\left[\bar{y}_{stp} - \mu_Y\right] = k^* \text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right] - \mu_Y \quad (3.1.b)$$

Dari (2.4.7.b) diperoleh bahwa $\text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right] = \mu_Y + \text{Cov}\left(r_C, \bar{x}_{st}\right)$. Dengan mensubstitusikan nilai dari $\text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right]$ ke (3.1.b) didapat :

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_{stp} - \mu_Y\right] = \left(k^* - 1\right)\mu_Y + k^*\mathrm{Cov}\left(r_C, \bar{x}_{st}\right)$$

Jadi, $\bar{y}_{stp}$ merupakan taksiran yang bias dengan bias sebesar

$\left(k^* - 1\right)\mu_Y + k^*\mathrm{Cov}\left(r_C, \bar{x}_{st}\right)$

Dengan menggunakan aproksimasi deret Taylor derajat satu untuk r_C,

dapat ditunjukkan bahwa bias dari $\bar{y}_{stp}$ akan mendekati $\left(k^* - 1\right)\mu_Y$

Bukti sebagai berikut :

Dari sub-bab 2.4.7 diperoleh bahwa dengan aproksimasi Taylor derajat satu , $\mathrm{E}\left[\bar{y}_{RC}\right] \approx \mu_Y$ sehingga (3.1.b) akan menjadi :

$$\mathrm{E}\left[\bar{y}_{stp} - \mu_Y\right] = k^*\mathrm{E}\left[\bar{y}_{RC}\right] - \mu_Y \approx k^*\mu_Y - \mu_Y = \left(k^* - 1\right)\mu_Y$$

Terbukti bahwa dengan menggunakan aproksimasi deret Taylor untuk r_C, bias dari $\bar{y}_{stp}$ akan mendekati $\left(k^* - 1\right)\mu_Y$

Taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* pada (3.1.a) lebih akurat dibandingkan dengan taksiran mean yang menggunakan taksiran rasio dalam *stratified random sampling*. Penjelasan mengenai keakuratan taksiran ini akan dibahas selanjutnya.

Sebelum melihat keakuratan taksiran ini, terlebih dahulu akan dibahas mengenai *mean square error* (MSE) dari $\bar{y}_{stp}$

3.2 MSE dari $\overline{y}_{stp}$

MSE dari $\overline{y}_{stp}$ didefinisikan sebagai :

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \text{E}\left[\left(\overline{y}_{stp} - \mu_Y\right)^2\right]$$

Akan dicari bentuk dari $\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right)$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \text{E}\left[\left(\overline{y}_{stp} - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \text{E}\left[\left(k^*\overline{y}_{RC} - \mu_Y\right)^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \text{E}\left[\left(k^*\overline{y}_{RC}\right)^2 - 2k^*\overline{y}_{RC}\mu_Y + \mu_Y^2\right]$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\overline{y}_{RC}\right)^2\right] - 2k^*\mu_Y \text{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] + \mu_Y^2 \qquad (3.2.a)$$

Dari sub-bab sebelumnya diketahui bahwa :

bias($\overline{y}_{RC}$) mendekati nol dengan aproksimasi Taylor, sehingga $\text{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] - \mu_Y \approx 0$

atau dengan perkataan lain $\text{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] \approx \mu_Y$

sehingga (3.2.a) dapat ditulis sebagai :

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\overline{y}_{RC}\right)^2\right] - 2k^*\mu_Y \text{E}\left[\overline{y}_{RC}\right] + \mu_Y^2$$

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) = \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\overline{y}_{RC}\right)^2\right] - 2k^*\mu_Y^2 + \mu_Y^2$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\bar{y}_{RC}\right)^2\right] - 2k^*\mu_Y^2 + \mu_Y^2 + \left(k^*\right)^2 \mu_Y^2 - \left(k^*\right)^2 \left(\text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right]\right)^2$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\bar{y}_{RC}\right)^2\right] - \left(k^*\right)^2 \left(\text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right]\right)^2 - 2k^*\mu_Y^2 + \mu_Y^2 + \left(k^*\right)^2 \mu_Y^2$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \text{E}\left[\left(\bar{y}_{RC}\right)^2 - \left(\text{E}\left[\bar{y}_{RC}\right]\right)^2\right] + \mu_Y^2 \left(-2k^* + 1 + \left(k^*\right)^2\right)$$

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \text{Var}\left(\bar{y}_{RC}\right) + \mu_Y^2 \left(k^* - 1\right)^2 \qquad (3.2.b)$$

Dari sub-bab 2.4.8 diperoleh bahwa :

$$\text{Var}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{1}{n_h} \left(\sigma_{Yh}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{Xh}^2\right)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\text{Var}\left(\bar{y}_{RC}\right)$ ke (3.2.b) akan menjadi :

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{1}{n_h} \left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2 \left(k^* - 1\right)^2 \qquad (3.2.c)$$

Taksiran yang paling akurat adalah taksiran yang memiliki MSE terkecil maka dari bentuk $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$ pada (3.2.c) akan dicari nilai k^* yang meminimumkan bentuk tersebut. Caranya adalah dengan mencari turunan dari $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$ terhadap k^* kemudian disama dengankan nol seperti berikut ini :

$$\frac{d\left(\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)\right)}{dk^*} \approx \frac{d\left(\left(k^*\right)^2 \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{1}{n_h} \left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2 \left(k^* - 1\right)^2\right)}{dk^*} = 0$$

$$\frac{d\left(\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)\right)}{dk^*} \approx 2k^*\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + 2\mu_Y^2\left(k^* - 1\right) = 0$$

Sehingga

$$2k^*\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + 2\mu_Y^2\left(k^* - 1\right) = 0$$

$$2k^*\left(\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2\right) - 2\mu_Y^2 = 0$$

$$2k^*\left(\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2\right) = 2\mu_Y^2$$

$$k^* = \frac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2} \qquad (3.2.d)$$

Nilai k^* pada (3.2.d) tersebut terletak antara 0 sampai 1.

Setelah dicari turunan pertama dari $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$, selanjutnya untuk membuktikan bahwa k^* pada (3.2.d) meminimumkan $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$ maka akan ditunjukkan bahwa turunan kedua dari $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$ terhadap k^* bernilai positif

Turunan kedua dari $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)$ terhadap k^* adalah sebagai berikut :

$$\frac{d^2\left(MSE\left(\bar{y}_{stp}\right)\right)}{dk^{*2}} \approx \frac{d\left(2k^*\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + 2\mu_Y^2\left(k^* - 1\right)\right)}{dk^*}$$

$$\frac{d^2\left(\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right)\right)}{dk^{*2}} \approx 2\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R\sigma_{XYh} + R^2\sigma_{X_h}^2\right) + 2\mu_Y^2$$

Diketahui bahwa $\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right)$ menyatakan Variansi dari $\bar{y}_{RC}$ maka nilainya positif. Oleh karena itu, turunan kedua dari MSE$\left(\bar{y}_{stp}\right)$ terhadap k^* bernilai positif.

Karena turunan kedua dari MSE$\left(\bar{y}_{stp}\right)$ terhadap k^* bernilai positif, maka

$$k^* = \frac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h-1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2}$$ meminimumkan MSE$\left(\bar{y}_{stp}\right)$

Informasi populasi sebelumnya dibutuhkan untuk mencari k^*. Ketika nilai $\mu_Y, \mu_X, \sigma_{Yh}^2, \sigma_{Xh}^2, \sigma_{XYh}$ dari populasi sebelumnya diketahui maka k^* dapat dihitung

Dengan demikian, taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* dalam *stratified random sampling* yang diperkenalkan oleh Prasad memiliki bentuk :

$$\bar{y}_{stp} = \frac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2}\bar{y}_{RC} \qquad (3.2.e)$$

Besarnya k^* bergantung pada besarnya $n_h, \sigma_{Y_h}^2, \sigma_{X_h}^2, \sigma_{XYh}$. Karena taksiran rasio dapat digunakan jika terdapat korelasi yang kuat antara Y dan X, maka σ_{XYh} harus besar. Jika n_h semakin kecil maka k^* juga semakin kecil. Jika $\sigma_{Y_h}^2$ dan $\sigma_{X_h}^2$ makin besar maka k^* makin kecil. Perlu diingat bahwa jika n_h terlalu kecil maka sampel yang diambil tidak mewakili populasi dan jika $\sigma_{Y_h}^2$ dan $\sigma_{X_h}^2$ terlalu besar berarti pembagian strata kurang tepat.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa koreksi Prasad k^* dapat memberikan koreksi terhadap taksiran mean $\bar{y}_{RC}$ jika terjadi kesalahan pembentukan strata dan kurangnya ukuran sampel secara simultan.

Selanjutnya, akan dibahas keakuratan dari taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* daripada menggunakan taksiran rasio konvensional

3.3 Perbandingan Keakuratan dari $\bar{y}_{stp}$ dengan $\bar{y}_{RC}$

Seperti yang telah dibahas dalam sub-bab 2.1 bahwa suatu taksiran dikatakan lebih akurat daripada taksiran yang lain jika memiliki *Mean Square Error* (MSE) yang lebih kecil. Dalam sub-bab ini akan dicari taksiran manakah yang lebih akurat antara $\bar{y}_{stp}$ dan $\bar{y}_{RC}$ untuk menaksir μ_Y yaitu dengan membandingkan MSE kedua taksiran tersebut.

Diketahui bahwa :

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2\left(k^* - 1\right)^2$$

dimana $k^* = \dfrac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2}$

dan

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right)$$

Sebut $v = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right)$

Maka $\text{MSE}\left(\bar{y}_{stp}\right) \approx \left(k^*\right)^2 v + \mu_Y^2\left(k^* - 1\right)^2$ dan $\text{MSE}\left(\bar{y}_{RC}\right) \approx v$

Perhatikan nilai dari $\dfrac{\mu_Y^2 - v}{\mu_Y^2 + v}$

Karena $v = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right)$ menyatakan aproksimasi dari variansi $\bar{y}_{RC}$ yang nilainya positif, maka berlaku :

$$\frac{\mu_Y^2 - v}{\mu_Y^2 + v} < \frac{\mu_Y^2}{\mu_Y^2 + v} \tag{3.3.a}$$

Dari (3.2.d) diperoleh bahwa : $k^* = \dfrac{\mu_Y^2}{v + \mu_Y^2}$ sehingga (3.3.a) menjadi :

$$\frac{\mu_Y^2 - v}{\mu_Y^2 + v} < k^* \tag{3.3.b}$$

Dengan mengalikan kedua ruas pada (3.3.b) dengan $\mu_Y^2 + v$ didapat :

$$\mu_Y^2 - v < k^* \left(\mu_Y^2 + v \right)$$

$$0 < k^* \left(\mu_Y^2 + v \right) - \mu_Y^2 + v$$

$$0 < \left(k^* - 1 \right) \mu_Y^2 + \left(k^* + 1 \right) v \tag{3.3.c}$$

Karena nilai k^* terletak antara 0 sampai 1 , maka

nilai $\left(k^* - 1 \right) < 0$

sehingga jika kedua ruas pada (3.3.c) dikalikan dengan $\left(k^* - 1 \right) < 0$ akan

menjadi :

$$0 > \left(k^* - 1 \right) \left[\left(k^* - 1 \right) \mu_Y^2 + \left(k^* + 1 \right) v \right]$$

$$0 > \left(k^* - 1 \right)^2 \mu_Y^2 + \left(k^* - 1 \right) \left(k^* + 1 \right) v$$

$$0 > \left(k^* - 1\right)^2 \mu_Y^2 + \left(\left(k^*\right)^2 - 1\right) v$$

$$v > \left(k^* - 1\right)^2 \mu_Y^2 + \left(k^*\right)^2 v \qquad (3.3.d)$$

Karena $\left(k^*\right)^2 v + \mu_Y^2 \left(k^* - 1\right)^2$ menyatakan aproksimasi dari MSE$\left(\overline{y}_{stp}\right)$ dan

v menyatakan aproksimasi dari MSE$\left(\overline{y}_{RC}\right)$ maka (3.3.d) dapat ditulis:

$$\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) < \text{MSE}\left(\overline{y}_{RC}\right)$$

Karena MSE$\left(\overline{y}_{stp}\right) <$ MSE$\left(\overline{y}_{RC}\right)$ maka $\overline{y}_{stp}$ lebih akurat dibandingkan $\overline{y}_{RC}$

Dapat disimpulkan bahwa : Taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* dalam *stratified random sampling* lebih akurat daripada menggunakan taksiran rasio konvensional.

BAB IV

PENERAPAN

Dalam bab ini, akan dibahas contoh penggunaan taksiran mean dengan menggunakan 2 metode yaitu taksiran rasio konvensional dan *new ratio estimator* pada *stratified random sampling*.

Suatu pengamatan dilakukan untuk mengetahui mean dari hasil panen tiap petak sawah dalam satu tahun di kelurahan Tangkil, Sragen tahun 2008. Akan dilakukan pengambilan sampel tahun 2008. Perlu menjadi catatan bahwa data populasi tahun 2005 diketahui.

Penghitungan hasil panen ini dilakukan dengan memperhitungkan luas sawah tiap petak. Luas sawah tiap petak berpengaruh pada besar kecilnya hasil panen sehingga peneliti ingin melibatkan luas tanah tiap petak untuk menaksir mean hasil panen. Karena diduga hasil panen berkorelasi kuat dengan luas petak tanah, maka akan digunakan taksiran rasio untuk mencari taksiran mean hasil panen tiap petak sawah dalam 1 tahun.

Sawah yang ada di kelurahan Tangkil, Sragen terbagi menjadi 2 macam yang memiliki tingkat kesuburan yang berbeda. Perbedaan tingkat kesuburan tanah ini menyebabkan ada sawah yang dapat panen 3 kali dalam setahun (120 petak sawah) dan ada juga sawah yang hanya dapat panen 2 kali dalam setahun (30 petak sawah). Dengan kondisi populasi yang seperti ini, pengambilan sampel dilakukan secara *stratified random sampling* dengan menganggap tingkat kesuburan tanah sebagai strata dan petak sawah sebagai unit sampling.

Dalam penelitian ini, variabel yang ingi diamati, Y, adalah hasil panen tiap petak sawah dalam satu tahun (dalam satuan kuintal). Sedangkan variabel tambahan, X, adalah luas petak sawah (dalam satuan m^2)

Misalkan

N_1 = banyak petak sawah populasi pada strata ke-1 (tanah subur)

N_2 = banyak petak sawah populasi pada strata ke-2 (tanah tidak subur)

Diketahui bahwa :

N_1 = 120 petak dan N_2 = 30 petak, sehingga

Ukuran populasi yang dinotasikan dengan N adalah :

$N = N_1 + N_2 = 120 + 30 = 150$

Dari data populasi tahun 2005 diperoleh informasi sebagai berikut :

Mean dari $Y = \mu_Y = 61.1019$ kw

Mean dari $X = \mu_X = 3247.3333$ m^2

Variansi dari X pada strata 1 = ${\sigma_{X1}}^2 = 410553.9$

Variansi dari X pada strata 2 = $\sigma_{X2}{}^2$ = 145241.4

Variansi dari Y pada strata 1 = $\sigma_{Y1}{}^2$ = 194.5651

Variansi dari Y pada strata 2 = $\sigma_{Y2}{}^2$ = 27.96527

Dengan diketahuinya data populasi tahun 2005, informasi mengenai populasi tahun 2005 ini akan digunakan dalam penaksiran mean hasil panen tahun 2008.

Untuk dapat menggunakan taksiran rasio, pertama diperiksa terlebih dahulu korelasi antara X dengan Y. Hal ini penting untuk dilakukan karena syarat untuk dapat digunakan taksiran rasio adalah korelasi antara Y dan X harus kuat. Korelasi dihitung untuk masing- masing strata. Dengan menggunakan SPSS 16.0, output korelasi antara Y dan X dapat dilihat pada tabel 1 dan 2 dan diperoleh :

Pada strata 1 : korelasi antara Y dan X secara signifikans adalah 0.968

Pada strata 2 : korelasi antara Y dan X secara signifikans adalah 0.883

Korelasi antara Y dan X pada masing- masing strata sangat kuat sehingga taksiran rasio dapat digunakan.

Tabel 1 : Korelasi antara Y dan X pada strata 1

Correlations

		luas_X1	panen_Y1
Luas_X1	Pearson Correlation	1	.968**
	Sig. (2-tailed)		0
	Sum of Squares and Cross-products	4.89E+07	1.03E+06
	Covariance	410553.922	8648.083
	N	120	120
panen_Y1	Pearson Correlation	.968**	1
	Sig. (2-tailed)	0	
	Sum of Squares and Cross-products	1.03E+06	2.32E+04
	Covariance	8648.083	194.565
	N	120	120

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabel 2 : Korelasi antara Y dan X pada strata 2

Correlations

		luas_X2	panen_Y2
Luas_X2	Pearson Correlation	1	.883**
	Sig. (2-tailed)		0
	Sum of Squares and Cross-products	4.21E+06	5.16E+04
	Covariance	1.45E+05	1779.745
	N	30	30
panen_Y2	Pearson Correlation	.883**	1
	Sig. (2-tailed)	0	
	Sum of Squares and Cross-products	5.16E+04	810.993
	Covariance	1.78E+03	27.965
	N	30	30

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Untuk pengamatan diambil sampel di tahun 2008 dengan menggunakan *stratified random sampling* dari suatu populasi berukuran 150 petak sawah yang memiliki 2 jenis tingkat kesuburan tanah. Misalkan diambil sampel berukuran 40 dengan alokasi proporsional, maka ukuran sampel pada masing- masing strata adalah sebagai berikut :

$$n_1 = \frac{120}{150}(40) = 32$$

$$n_2 = \frac{30}{150}(40) = 8$$

Dengan menggunakan spss 16.0, deskriptif dari sampel dapat dilihat sebagai berikut :

Tabel 3 : statistik deskriptif sampel strata 1

Descriptive Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Variance
luas_x1	32	3075	780.405	609032
hasil_panen_y1	32	63.297	16.4836	271.708
Valid N (listwise)	32			

Tabel 4 : statistik deskriptif sampel strata 2

Descriptive Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Variance
luas_x2	8	3650	160.357	25714.3
hasil_panen_y2	8	48.753	2.24453	5.03791
Valid N (listwise)	8			

Dari tabel 3 dan tabel 4, diperoleh :

rata- rata hasil panen pada strata 1 = $\overline{y}_1 = 63.297$

rata- rata hasil panen pada strata 2 = $\overline{y}_2 = 48.753$

rata- rata luas petak sawah pada strata 1 = $\overline{x}_1 = 3075$

rata- rata luas petak sawah pada strata 2 = $\overline{x}_2 = 3650$

Selanjutnya akan dilakukan penaksiran mean dari hasil panen tiap petak sawah dalam satu tahun dengan menggunakan 2 metode yaitu taksiran rasio konvensional dan *new ratio estimator*

4.1 Taksiran Mean dengan Menggunakan Taksiran Rasio Konvensional

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa $\overline{y}_{RC} = \dfrac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}} \mu_X$

menyatakan taksiran untuk mean dengan menggunakan taksiran rasio konvensional pada *stratified random sampling*.

Sebelumnya, dicari terlebih dahulu nilai $\overline{y}_{st}$ dan $\overline{x}_{st}$

$$\overline{y}_{st} = \sum_{h=1}^{2} \frac{N_h}{N} \overline{y}_h$$

$$\overline{y}_{st} = \frac{(120)(63.297) + (30)(48.753)}{150} = 60.38775$$

$$\overline{x}_{st} = \sum_{h=1}^{2} \frac{N_h}{N} \overline{x}_h = \frac{120}{150} 3075 + \frac{30}{150} 3650 = 3190$$

Dengan menggunakan $\mu_X = 3247.3333$ didapat :

$$\overline{y}_{RC} = \frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}} \mu_X = 61.47308256 \text{ kw}$$

Jadi, dengan menggunakan taksiran rasio konvensional, diperoleh taksiran mean hasil panen tiap petak sawah dalam 1 tahun yaitu 61.47308256 kw

4.2 Taksiran Mean dengan Menggunakan *New Ratio Estimator*

Dari sub-bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* adalah :

$$\overline{y}_{stp} = k^* \overline{y}_{RC}$$

dengan $k^* = \dfrac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{1}{n_h} \left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C \sigma_{XYh} + R_C{}^2 \sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2}$

Karena populasi tahun 2005 diketahui, maka k^* dapat dihitung.

Diketahui bahwa :

$\sigma_{X1}{}^2 = 410553.9$, $\sigma_{X2}{}^2 = 145241.4$, $\sigma_{Y1}{}^2 = 194.5651$, $\sigma_{Y2}{}^2 = 27.96527$

$\mu_Y = 61.1019$ kw dan $\mu_X = 3247.3333$ m^2

$$R_C = \frac{\mu_Y}{\mu_X} = \frac{61.1019}{3247.3333} = 0.018816024$$

N_1 = 120 , N_2 = 30, n_1 = 32 dan n_2 = 8

Sehingga nilai k^* adalah :

$$k^* = \frac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2} = 0.999918034$$

Dengan mensubstitusikan nilai k^* diperoleh :

$$\bar{y}_{stp} = (0.999918034)(61.47308256) = 61.46878302$$

Jadi, dengan menggunakan *new ratio estimator*, diperoleh taksiran mean hasil panen tiap petak sawah dalam 1 tahun yaitu 61.46878302 kw

Dalam contoh ini, didapat nilai k^* = $0.999918034 \approx 1$ sehingga $\bar{y}_{stp} \approx \bar{y}_{RC}$. Dengan perkataan lain, koreksi Prasad tidak begitu memberikan dampak pada besarnya taksiran mean. Walaupun demikian, taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* tetap lebih akurat dibandingkan taksiran mean dengan taksiran rasio konvensional.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang didapat :

1. Jika terdapat variabel bantu X yang berkorelasi kuat dengan variabel yang ingn diamati Y dengan mean dari X diketahui, maka taksiran rasio dapat digunakan untuk menaksir mean dari Y pada *simple random sampling* maupun *stratified random sampling*

2. Taksiran mean dari Y dengan menggunakan taksiran rasio konvensional adalah :

   $$\overline{y}_{RC} = \frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}}\mu_X$$

   Taksiran mean dengan menggunakan *new ratio estimator* adalah :

   $$\overline{y}_{stp} = k^*\overline{y}_{RC}$$

   dimana $k^* = \dfrac{\mu_Y^2}{\sum_{h=1}^{L}\left(\dfrac{N_h}{N}\right)^2\left(\dfrac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\dfrac{1}{n_h}\left(\sigma_{Y_h}^2 - 2R_C\sigma_{XYh} + R_C{}^2\sigma_{X_h}^2\right) + \mu_Y^2}$

   k^* dihitung melalui informasi yang didapat dari populasi pada waktu sebelumnya. k^* ini disebut sebagai koreksi Prasad yang dapat memberikan koreksi terhadap taksiran mean dengan menggunakan taksiran rasio konvensional jika terjadi kesalahan pembentukan strata dan kurangnya ukuran sampel secara simultan

3. Telah dibuktikan bahwa $\text{MSE}\left(\overline{y}_{stp}\right) < \text{MSE}\left(\overline{y}_{RC}\right)$ sehingga taksiran rasio untuk mean pada *stratified random sampling* dengan metode *new ratio estimator* lebih akurat dibandingkan dengan metode konvensional

5.2 Saran

Untuk selanjutnya semoga tulisan ini dapat dikembangkan untuk mencari *new ratio estimator* dalam teknik sampling yang lain

DAFTAR PUSTAKA

Al Hariry, Heri. 2003. *Taksiran Rasio dalam Stratified Random Sampling*. Depok : Universitas Indonesia

Cochran, W.G. 1977. Sampling Techniques. 3rd ed. New York : Wiley

Govindarajulu, Zakkula. 1999. E*lements of Sampling Theory and Methods*. Prentice Hall, Upper Saddle River.

Kadilar, C.,Cingi, H. 2005. *Sampling Theory a New Ratio Estimator in Stratified Random Sampling*. Communications in Statistics-Theory and Method. 34: 597-602.

Thompson, S.K. 1992. *Sampling*. New York : John Wiley and Sons, Inc

LAMPIRAN 1

Deret Taylor Fungsi 2 Peubah

Andaikan $f(x,y)$ adalah suatu fungsi dua peubah yang memiliki turunan parsial kontinu sampai derajat $(n+1)$ pada semua titik yang terletak pada ruas garis yang menghubungkan titik (a,b) dengan $(a+h,b+k)$ pada domain, maka $f(x,y)$ dapat diaproksimasi oleh fungi polinomial di suatu titik dalam ruas garis tersebut.

Misalkan titik (c,d) adalah titik dalam ruas garis yang menghubungkan (a,b) dan $(a+h,b+k)$, maka aproksimasi deret Taylor derajat n untuk $f(x,y)$ di sekitar titik (c,d) adalah :

$$f(x,y) \approx P_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_x^j D_y^{m-j} f(c,d)(x-c)^j (y-d)^{m-j}$$

dimana

$P_n(x,y)$ adalah suatu fungsi polinomial

$D_x^j D_y^{m-j} f(c,d)$ adalah turunan parsial fungsi $f(x,y)$ di titik (c,d)

Sehingga aproksimasi deret Taylor derajat satu untuk fungsi $f(x,y)$ di sekitar titik (c,d) adalah :

$$f(x,y) \approx P_1(x,y) = \sum_{m=0}^{1}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_x^j D_y^{m-j} f(c,d)(x-c)^j (y-d)^{m-j}$$

$$= \frac{1}{0!0!} f(c,d) + \frac{1}{0!1!} D_y^1 f(c,d)(y-d) + \frac{1}{1!0!} D_x^1 f(c,d)(x-c)$$

$$= f(c,d) + D_y^1 f(c,d)(y-d) + D_x^1 f(c,d)(x-c)$$

dengan

$D_y^1 f(c,d)$: turunan parsial pertama fungsi $f(x,y)$ terhadap y di titik (c,d)

$D_x^1 f(c,d)$: turunan parsial pertama fungsi $f(x,y)$ terhadap x di titik (c,d)

LAMPIRAN 2 : Populasi Strata 1 Tahun 2005

Luas_X1	Hasil panen _Y1	Luas_X1	Hasil panen _Y1	Luas_X1	Hasil panen _Y1
4000	89	3500	76.5	3500	72.5
3800	74	3300	62	3500	76.1
3800	77	3300	62.45	3500	73
3800	77.8	3300	64.1	3500	75.7
3800	77.5	3000	59	3500	73.1
3800	80	3000	56.3	3500	73.3
3800	77.8	3000	60	3500	77.1
3800	77	3000	53.75	3500	75.75
3800	78.5	3000	54.5	3500	74
3800	80	3000	52.83	3500	73.77
3800	77	3000	55.4	2700	54.45
3800	72.5	3000	57.05	2700	49.24
3800	78	3000	58.85	2700	57.13
3800	78.5	3000	59.3	2700	51.88
3800	79	3000	61.25	2700	54
3800	79	3000	56.85	2700	50
3800	78	3000	56.25	2700	59.25
3800	74.8	3000	60.79	2700	56.95
3800	78	3000	59	1700	36.36
3800	76.8	3000	58.01	1700	35
3800	75.8	3300	59.6	1700	36.1
3800	75	3000	60.8	1700	38.5
3800	80.75	3000	56.42	1700	39.01
4000	83.7	3000	57	1700	36.4
4000	81.4	3000	59.1	1700	37.1
4000	84.57	3000	55.39	1700	36.2
4000	89	3000	54.5	1700	37.15
4000	84.27	3000	59.7	1700	37
4000	85.3	3000	53.25	1700	38.6
4000	88.57	3000	59.26	1700	36.17
4000	87.5	3300	65	3500	71.6
4000	83.65	3300	68	2700	52.3
3800	78.5	3300	71	2700	55.35
3500	74	3300	71.5	2700	55.3
3500	70.5	3300	69	2700	50.7
3500	75.5	3300	68	2700	52.5
3500	74	3300	65	2700	56.75
3500	70	3300	64.5	2700	52.6
3500	69.3	3000	53.25	2700	52.55
2700	51.76	3300	62	2700	53.32

Populasi Strata 2 Tahun 2005

Luas_X2	Hasil panen_Y2	Luas_X2	Hasil panen _Y2
3800	54	3500	47.5
3800	50.1	3500	47
3800	55	3500	49
3800	52.8	3500	46.95
3800	47.1	3500	50.5
3800	49	3500	48.85
3500	50.22	3500	50
3500	51.77	1700	24
3500	51.75	3500	44
3500	45	3800	50
3500	44.9	3800	48.85
3500	48.6	3800	48
3500	49.35	3800	50.55
3500	50.9	3800	51
3500	45.1	3800	50

Hasil panen dihitung dalam satuan kuintal

Luas tanah dihitung dalam satuan m^2

LAMPIRAN 3

Data Sampel Tahun 2008

luas_x1	hasil panen_y1	luas_x1	hasil panen_y1	luas_x2	hasil panen_y2
4000	89	3000	53.75	3800	49
3800	77.8	3000	57.05	3500	51.77
3800	80	3000	59.3	3500	44.9
3800	77.8	3000	56.85	3500	47.5
3800	77	3000	60.79	3500	47
4000	83.7	3000	60.8	3800	48.85
4000	81.4	3000	59.1	3800	51
4000	84.27	3000	55.39	3800	50
4000	87.5	3000	59.26		
3500	72.5	3300	68		
3500	76.1	2700	52.55		
3500	75.7	2700	56.95		
3500	76.5	1700	36.1		
1700	37.1	1700	38.6		
1700	37	1700	36.17		
3300	62.45	1700	39.01		