PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI *SPATIAL PANEL* DATA SATU ARAH

RIFKI KOSASIH

0305010548

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI *SPATIAL PANEL* DATA SATU ARAH

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

RIFKI KOSASIH

0305010548

DEPOK

2009

SKRIPSI : PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI *SPATIAL PANEL* DATA SATU ARAH

NAMA : RIFKI KOSASIH

NPM : 0305010548

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 29 JUNI 2009

DRA. SITI NURROHMAH, M. SI	Dr. DIAN LESTARI, DEA
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana:

Penguji I :

Penguji II :

Penguji III :

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala anugrah dan karunia-Nya yang terus diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dari Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Salawat dan salam kepada teladan seluruh umat manusia, Nabi Muhammad SAW, serta para pengikutnya yang istiqomah hingga akhir zaman.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam tugas akhir ini. Penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca untuk menyempurnakan tugas akhir ini.

Penulis mohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam penulisan tugas akhir ini dan penulis berharap semoga tugas akhir ini bermanfaat.

Penulis

2009

ABSTRAK

Regresi data panel merupakan suatu regresi yang menggabungkan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal.* Berdasarkan komponen errornya regresi data panel dibedakan menjadi dua yaitu komponen error satu arah dan dua arah. Pada regresi data panel dibutuhkan beberapa asumsi tentang error yaitu error mempunyai mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas. Dalam analisis regresi data panel, pada saat melakukan pengambilan observasi di suatu lokasi sering ditemui bahwa nilai observasi pada suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi disekitarnya atau dengan kata lain ada korelasi spasial antar observasi. Inilah yang disebut dengan *spatial dependent*. Jika pengaruh spasial ini ada dan tidak dilibatkan dalam model maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi. Sehingga model yang diperoleh menjadi kurang baik. Untuk itu dibutuhkan suatu model yang melibatkan pengaruh spasial dalam analisis regresi data panel yang dinamakan *spatial panel data model*. Dalam tugas akhir ini akan dibahas bagaimana cara menaksir parameter pada model regresi spasial panel satu arah dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

Kata kunci : regresi data panel, *spatial dependent*, *spatial panel data model,* metode maksimum likelihood

ix+95 hlm.; lamp.; tab.

Bibliografi : 11 (1982 – 2006)

DAFTAR ISI

		Halaman
KATA PENGANTAR	....	i
ABSTRAK	....	iii
DAFTAR ISI	....	iv
DAFTAR GAMBAR	....	vii
DAFTAR TABEL	....	viii
DAFTAR LAMPIRAN	....	ix
BAB I.	PENDAHULUAN	1
	1.1 Latar Belakang	1
	1.2 Perumusan Masalah	3
	1.3 Tujuan Penulisan	4
	1.4 Pembatasan Masalah	4
	1.5 Sistematika Penulisan	4
BAB II.	LANDASAN TEORI	6
	2.1 *Variabel random*	6
	2.2 Metode Maksimum *Likelihood*..................................	7
	2.3 Metode Transformasi Variabel..................................	8
	2.4 *Kronecker Product*	9

2.5 Diagonalisasi 11

2.6 Regresi Data Panel ……………………….................. 12

2.7 Koefisien Determinasi ………………………………. 14

2.8 Uji *Durbin Watson*…………………………………... 15

2.9 Model *Spatial Dependen* ………………................... 16

2.10 Matriks Bobot Spatial …………………….................. 17

BAB III. ANALISIS REGRESI SPATIAL PANEL SATU ARAH......... 20

3.1 Model Regresi Spatial Panel Satu Arah 20

3.2 Model Regresi Spatial Lag Panel Satu Arah.............. 21

3.2.1 Fungsi Likelihood Model Regresi Spatial Lag Panel Satu Arah……...................................... 22

3.2.2 Taksiran Parameter Model Regresi Spatial Panel Satu Arah....................................... 25

3.3 Model Regresi Spatial Panel Error Satu Arah.............. 38

3.3.1 Fungsi Likelihood Model Regresi Spatial Error Panel Satu Arah.. 41

3.2.2 Taksiran Parameter Model Regresi Spatial Panel Satu Arah.. 44

BAB IV. **APLIKASI MODEL SPATIAL PANEL**......................... 57

	4.1 *Scatter Plot* Data	58
	4.2 Penaksiran Parameter Model Regresi Panel Satu Arah……………………………………………………	59
	4.3 Gray-Scale Map Penjualan Rokok	60
	4.4 Penaksiran Parameter Model Regresi Spasial Panel Satu Arah………………………………………………..	61
	4.4.1 Model Regresi Spatial Lag Panel Satu Arah….	61
	4.4.2 Model Regresi Spasial Error Panel Satu Arah…	62
	4.5 Periksa Asumsi	63
	4.5.1 Asumsi Mean Sama Dengan Nol……..................	63
	4.5.2 Variansi Error Konstan (*Homoskedastisitas*)......	64
	4.5.3 Error berdistribusi normal..................................	65
	4.5.4 Error Saling Bebas…………………………………	66
	4.6 Kesimpulan ………..	67
BAB V	PENUTUP	68
	5.1 Kesimpulan	68
	5.2 Saran	69
DAFTAR PUSTAKA		70
LAMPIRAN		72

DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
1.	*Scatter plot* antara log harga rokok dan log penjualan rokok……..	58
2.	*Scatter plot* antara log rata-rata harga rokok dari negara bagian yang bertetanggaan dan log penjualan rokok………….........................	58
3.	Scatter plot antara pendapatan perkapita dan penjualan rokok....	59
4.	*Gray-scale map* dari variabel Perjualan Rokok............................	60
5.	*Scatter plot* antara nilai prediksi Y terhadap residual spasial lag…	64
6.	*Scatter plot* antara nilai prediksi Y terhadap residual spasial error.	64

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. *Descriptive Statistics* Regresi Spatial Lag Panel Satu Arah…… 63
2. *Descriptive Statistics* Regresi Spatial Error Panel Satu Arah…… 63
3. Uji Normal pada Model Regresi Spatial Lag Panel Satu Arah..... 65
4. Uji Normal pada Model Regresi Spatial Error Panel Satu Arah...... 66

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

1. Pembuktian θ memaksimumkan $L(\theta)$ ekivalen dengan θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$………………………………………… 72
2. pembuktian $\varepsilon_{it} = y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)$ 80
3. Pembuktian $I_T \otimes (I_N - \delta W_N)Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$ 81
4. Pembuktian taksiran untuk $\hat{\beta}$ pada model regresi spatial lag panel data satu arah dan model regresi spatial error panel data satu arah adalah unbiased... 82
5. Data…………………………………………………………….............. 85
6. Output Model…... 91
7. Pembentukan matriks pada model regresi spatial lag panel data satu arah... 93
8. Iterasi *Newton-Raphson* 94

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Dalam ilmu statistik jenis data dibagi menjadi dua yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Data *cross section* merupakan data banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu. Data *cross section* ini biasanya digunakan pada model regresi linear. Untuk memperoleh model regresi linear yang baik dibutuhkan beberapa asumsi tentang error yaitu error berdistribusi normal dengan mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas. Sedangkan data *longitudinal* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap satu individu. Sama halnya dengan model regresi pada data *cross section*, pada model regresi data longitudinal juga diperlukan asumsi tentang error yaitu error mempunyai mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis).

Ada kalanya seorang peneliti dalam analisisnya menggunakan data yang merupakan gabungan dari data *longitudinal* dan data *cross section*. Untuk mengatasi hal tersebut maka akan digunakan regresi data panel.

Regresi data panel merupakan suatu regresi yang menggabungkan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Jenis data panel dibagi menjadi dua yaitu data panel lengkap dan data panel tidak lengkap. Data panel lengkap adalah data dimana setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang sama. Sedangkan data panel tidak lengkap adalah data dimana setiap individu yang terobservasi berada pada kurun waktu yang berbeda-beda.

Berdasarkan komponen errornya model regresi data panel dibagi menjadi dua yaitu komponen error satu arah dan komponen error dua arah. Selanjutnya berdasarkan asumsi yang digunakan pada model regresi komponen error dibagi menjadi dua yaitu *fixed effect* dan *random effect.* Pada *fixed effect* diasumsikan bahwa komponen errornya merupakan parameter tetap. Sedangkan pada *random effect* diasumsikan bahwa komponen errornya merupakan *variabel random*.

Karena data panel merupakan gabungan dari data *cross section* dan data *longitudinal* maka pada regresi data panel tersebut dibutuhkan juga beberapa asumsi tentang error yaitu error mempunyai mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas.

Dalam analisis regresi data panel, pada saat melakukan pengambilan observasi di suatu lokasi sering ditemui bahwa nilai observasi pada suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi disekitarnya atau dengan kata lain ada korelasi spasial antar observasi. Inilah yang disebut dengan spasial dependen.

Model spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu model yang memperhatikan dependensi variabel dependen antar lokasi disebut model spasial lag dan model yang memperhatikan dependensi error antar lokasi disebut dengan model spasial error.

Jika pengaruh spasial ini ada dan tidak dilibatkan dalam model maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi. Sehingga model yang di peroleh menjadi kurang baik. Untuk itu dibutuhkan suatu model yang melibatkan pengaruh spasial dalam analisis data panel yang dinamakan *spatial panel data model*.

Karena regresi data panel yang melibatkan pengaruh spasial dependen ini merupakan gabungan dari data *cross section* dan *longitudinal* maka model akan mempunyai observasi yang lebih banyak dibandingkan dengan data cross section atau longitudinal saja. Karena observasinya lebih banyak maka panel data ini akan lebih banyak memberikan informasi dan akan meningkatkan ketelitian hasil estimasi. Akan tetapi karena observasinya lebih banyak maka persamaan modelnya akan menjadi lebih kompleks. Oleh karena itu diperlukan teknik tersendiri dalam menaksir parameter dari model yang menggunakan data panel yang melibatkan pengaruh spasial dependen baik itu spasial lag maupun spasial error.

Untuk itu pada tugas akhir ini akan dibahas penaksiran parameter pada regresi data panel yang melibatkan pengaruh spasial dependen baik itu spasial lag maupun spasial error dengan komponen error satu arah.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Bagaimana cara mengestimasi parameter pada model data panel yang melibatkan pengaruh spatial dependent baik spasial lag maupun spasial error dengan komponen error satu arah.

1.3 TUJUAN

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah membahas penaksiran parameter pada model regresi data panel yang melibatkan pengaruh spasial dependen baik itu spasial lag maupun spasial error dengan komponen error satu arah.

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Pada tugas akhir ini model yang akan dibahas adalah model data panel dengan efek tetap yang melibatkan pengaruh spatial dependen baik itu spasial lag maupun spasial error dengan komponen error satu arah. Metode penaksiran yang digunakan adalah metode maksimum likelihood.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan tugas akhir ini, dibagi menjadi lima bab, yaitu :

Bab I membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II membahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam analisis model regresi spatial panel data satu arah. Diantaranya adalah teori mengenai peubah acak, metode transformasi variabel, metode maksimum likelihood, *kronecker product*, data panel dan spasial dependen.

Bab III membahas analisis model regresi spasial panel data satu arah yaitu model regresi spasial lag panel satu arah dan model regresi spasial error panel satu arah, metode penaksiran parameter dan penjelasan tentang *spatial weight matrices.*

Bab IV membahas aplikasi dari model regresi spasial panel data satu arah.

Bab V berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan teori-teori dasar yang akan digunakan dalam analisis mode regresi spatial panel data, diantaranya adalah teori mengenai peubah acak, metode transformasi variabel, *kronecker product*, data panel, spatial dependen.

2.1 VARIABEL RANDOM

Misalkan terdapat suatu percobaan random pelemparan sebuah koin dengan kemungkinan hasil yaitu gambar atau angka. Maka ruang sampel dari percobaan ini adalah C = {c; c adalah gambar atau c adalah angka}. Misalkan X adalah suatu fungsi sedemikian sehingga $X(c) = 0$ jika c adalah gambar dan $X(c) = 1$ jika c adalah angka,

maka X merupakan sebuah fungsi yang memetakan elemen-elemen himpunan ruang sampel C ke himpunan bilangan real $A = \{0,1\}$. Dalam hal ini fungsi X disebut *variabel random* dengan ruang sampel C .

Definisi 1

Misalkan terdapat suatu percobaan random dengan ruang sampel C. Jika terdapat suatu fungsi X yang memetakan setiap elemen c di C ke satu dan hanya satu bilangan riil x yaitu $X(c) = x$. Maka X disebut dengan variabel random. Domain dari X adalah C dan range dari X adalah himpunan bilangan A = { x **|** $x = X(c),\ c \in C$ }.

Definisi 2

Misalkan *variabel random* X dengan ruang sampel A yang merupakan himpunan bilangan real. Jika fungsi f memenuhi sifat sifat berikut:

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$
2. $\int_A f(x)dx = 1$
3. Jika A $\subset A$ maka berlaku $P(A) =$ Pr(X$\in$A) = $\int_A f(x)dx$

Maka X disebut *variabel random* Kontinu dan f(x) disebut *probability density function* (p.d.f) dari X.

2.2 METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

Metode maksimum likelihood digunakan untuk melakukan penaksiran titik dari suatu parameter dalam suatu fungsi probabilitas.

Definisi 3

Misalkan $X_1,\ldots,X_n$ adalah sample acak dari sebuah distribusi dengan p.d.f. $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ dengan Ω adalah ruang parameter. Fungsi likelihood didefinisikan sebagai p.d.f bersama dari $X_1,\ldots,X_n$:

$$L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = f(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1,\theta)\, f(x_2,\theta) ... f(x_n,\theta), \qquad \theta \in \Omega$$

Metode maksimum likelihood untuk mencari taksiran parameter θ diperoleh dengan memaksimum fungsi likelihood dimana taksiran θ disebut $\hat{\theta}$. Selanjutnya $\hat{\theta}$ disebut taksiran maksimum likelihood dari θ. Selain memaksimumkan fungsi likelihood, untuk menaksir parameter θ dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood yaitu ln $L(\theta)$ atau biasa disebut $\ell(\theta)$. Hal tersebut dapat dibuktikan pada lampiran 1 dalam tugas akhir ini.

Nilai θ yang memaksimumkan fungsi log-likelihood diperoleh dengan mencari solusi persamaan berikut ini :

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

2.3 METODE TRANSFORMASI VARIABEL

Metode transformasi variabel digunakan untuk menentukan distribusi dari suatu peubah acak yang merupakan fungsi satu-satu dari peubah acak lainnya yang distribusinya diketahui.

Definisi 4

Misalkan $X_1,\ldots,X_n$ adalah peubah acak kontinu dengan p.d.f bersama $h(X_1, X_2, ..., X_n)$. *A* adalah ruang berdimensi n dari peubah acak *X.*

Jika $y_1 = u_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y_2 = u_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_n = u_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ didefinisikan sebagai suatu fungsi satu – satu yang memetakan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dari ruang *A* ke$\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ pada ruang *B* dan $x_1 = w_1(y_1, y_2, ..., y_n)$, $x_2 = w_2(y_1, y_2, ..., y_n), ...,$

$x_n = w_n(y_1, y_2, ..., y_n)$ merupakan fungsi inversnya,

Dan jacobian transformasi dari ruang *A* berdimensi n ke suatu ruang *B* berdimensi n didefinisikan sebagai berikut :

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

maka p.d.f bersama dari peubah acak

$$Y_1 = u_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), Y_2 = u_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), ..., Y_n = u_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

adalah :

$$g\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = h\left[w_1(y_1, y_2, ..., y_n), ..., w_n(y_1, y_2, ..., y_n)\right]\left|J\right| \qquad , \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) \in B$$

$$= 0 \qquad , \text{lainnya}$$

2.4 KRONECKER PRODUCT

Misalkan A adalah matriks berukuran N×N dan B adalah matriks berukuran T×T. maka matriks $A \otimes B$ berukuran NT×NT.

Contoh :

Misalkan A adalah matriks berukuran 2×2 dan B adalah matriks berukuran 2×2 yaitu :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Maka: $$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- Sifat-Sifat Kronecker product

  1. $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$
  2. $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$
  3. $(kA)\otimes B=A\otimes(kB)=k(A\otimes B)$
  4. $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$

dimana *A*, *B* and *C* adalah matriks dan *k* adalah *scalar.*

Definisi 5

Misalkan A dan B adalah suatu matriks bujur sangkar yang berukuran n×n dan q×q. Jika $\lambda_1, ..., \lambda_n$ adalah nilai eigen dari A dan $\mu_1, ..., \mu_q$ adalah nilai eigen dari B maka nilai eigen dari $A\otimes B$ adalah :

$$\lambda_i \mu_j, \qquad i = 1,...,n, \qquad j = 1,...,q$$

Selanjutnya jika ingin mencari *trace* dan *determinant* dari $A \otimes B$ adalah :

$$tr(A \otimes B) = trAtrB$$

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^q \det(B)^n$$

2.5 DIAGONALISASI

Definisi 6

Suatu matriks bujur sangkar A yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$,dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal (D).

Jadi D = $P^{-1}AP$

Jika terdapat suatu matriks bujur sangkar A yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, maka determinan dari matriks A merupakan perkalian dari nilai-nilai eigennya.

Bukti :

A = PDP^{-1}

Maka :

$$\det(A) = \det(PDP^{-1})$$

$$= \det(P)\det(D)\det(P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(D)\frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(D)$$

$$= \prod_i \lambda_i$$

Misalkan I_N adalah matriks identitas berukuran $N \times N$ dan A suatu matriks bujur sangkar berukuran $N \times N$ dan mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Maka nilai eigen dari matriks $(I_N - A)$ adalah $1-\lambda$

Bukti :

Karena A suatu matriks bujur sangkar berukuran $N \times N$ dan mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ maka :

$$Ax = \lambda x$$

$$x - Ax = x - \lambda x$$

$$(I_N - A)x = (1-\lambda)x$$

Sehingga dari atas didapat bahwa nilai eigen dari matriks $(I_N - A)$ adalah$1-\lambda$

2.6 REGRESI DATA PANEL

Regresi data panel merupakan suatu regresi yang menggunakan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal.* Dimana data *cross section* merupakan data banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu. Sedangkan data *longitudinal* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap satu individu. Jadi data panel merupakan data beberapa individu yang dikumpulkan dari waktu ke waktu.

a) Jenis Data Panel dibagi menjadi dua :

- Data panel lengkap :

  Data dimana setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang sama.

- Data panel tidak lengkap :

  Data dimana setiap individu yang terobservasi berada pada kurun waktu yang berbeda-beda.

  Model Regresi Data Panel

  $y_{it} = x_{it}\beta + u_{it}$ i = 1, … , N

  t = 1, … , T

  y_{it} = Variabel dependen untuk individu ke-i waktu ke-t

  x_{it} = Variabel independen untuk individu ke-i waktu ke-t

  ε_{it} = Error individu ke-i waktu ke-t

b) Jenis Model Regresi Data Panel Berdasarkan Komponen Error

- Model Regresi Komponen Error Satu Arah

  $u_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$ i = 1, … , N ; t = 1, …, T

  Model Regresi Komponen Error Dua Arah

  $u_{it} = \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$ i = 1, … , N ; t = 1, …, T

  μ_i merupakan pengaruh individu ke-i yang tidak terobservasi

λ_t merupakan pengaruh waktu ke-t yang tidak terobsevasi

ε_{it} merupakan pengaruh yang benar-benar tidak diketahui

c) Berdasarkan Asumsi yang digunakan pada Model Regresi Panel.

Model regresi panel dibagi dua :

- Fixed Effect Model :

  dimana μ_i diasumsikan merupakan parameter tetap.

- Random Effect Model

  dimana : $\mu_i \sim N\left(0, \sigma_\mu^2\right) \quad \varepsilon_{\text{it}} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

Pada regresi data panel tersebut dibutuhkan beberapa asumsi tentang error yaitu error berdistribusi normal dengan mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas.

2.7 KOEFISIEN DETERMINASI (R^2)

Koefisien determinasi (R^2) merupakan proporsi variasi dari peubah terikat yang dapat dijelaskan oleh peubah bebas melalui model regresi linier. Nilai koefisien determinasi berada di antara nol dan satu, $0 \leq R^2 \leq 1$. Angka tersebut dapat mengukur seberapa dekat garis regresi yang terestimasi dengan data sesungguhnya. Semakin besar nilai R^2, maka semakin baik model regresi linier yang terbentuk.

Secara statistik, interpretasi dari koefisien determinasi (R^2) adalah sekitar (R^2 x 100%) variasi dari sampel pada peubah terikat dapat dijelaskan oleh peubah-peubah bebas untuk memprediksi peubah terikat dalam model regresi garis linier.

2.8 UJI *DURBIN-WATSON*

Uji *Durbin-Watson* digunakan untuk mendeteksi apakah terdapat korelasi antar-residual.

- Hipotesis: H_0: Tidak ada korelasi antar-residual

  H_1: Terdapat korelasi antar-residual

- Statistik uji DW: $d = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$

  dengan *n* adalah jumlah pengamatan dan $(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})$ menyatakan selisih antara residual yang berurutan. Dengan menjabarkan persamaan di atas, maka diperoleh

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}.$$

  Jika antar-residual tidak berkorelasi maka $\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx 0$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 2$. Jika antar-residual sangat berkorelasi positif maka $\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx \sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 0$. Jika antar-residual sangat berkorelasi negatif maka $\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} \approx -\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 4$.

2.9 MODEL SPASIAL DEPENDEN

Misalkan diamati variabel Z pada suatu lokasi, data spasial dependen adalah data dimana observasi pada lokasi *i* ,dinotasikan dengan Z_i, dipengaruhi oleh observasi pada lokasi *j* , dinotasikan dengan Z_j, dimana lokasi *j* merupakan suatu lokasi yang terletak disekitar lokasi *i.* dengan $i \neq j$. Dengan perkataan lain,

$$Z_i = f\,(Z_j) \qquad i = 1,\ldots,n$$

Terdapat dua jenis spasial dependen yaitu spasial lag dan spasial error.

A. Spasial lag

Spasial lag ini muncul saat nilai observasi variabel dependen pada suatu lokasi berkorelasi dengan nilai observasi variabel dependen di lokasi sekitarnya atau dengan perkataan lain terdapat korelasi spasial antar variabel dependen. Pada model ini terdapat fungsi dari variabel dependen pada lokasi *j* yang digunakan sebagai variabel bebas untuk memprediksi nilai dari variabel dependen pada lokasi *i*.

Anselin (1988) memberikan definisi model umum regresi spatial lag :

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

B. Spasial Error

Spasial error ini muncul saat nilai error pada suatu lokasi berkorelasi dengan nilai error di lokasi sekitarnya atau dengan perkataan lain terdapat korelasi spasial antar error. Pada model spasial error, bentuk error pada suatu lokasi *i* merupakan fungsi dari error pada lokasi *j.* (*j* merupakan suatu lokasi yang terletak disekitar lokasi *i*).

Anselin (1988) memberikan definisi model umum regresi spatial error :

$$y_i = \sum_{k=1}^{K} x_{ik} \beta_k + u_i \,, \qquad u_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} w_{ij} u_j + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

2.10 MATRIKS BOBOT SPASIAL

Spatial weight matrices W_N adalah *matrices* berukuran $N \times N$ yang menyatakan hubungan antara observasi spasial dependen. w_{ij} adalah elemen dari matriks W_N pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan $w_{ij} > 0$ untuk j = 1, 2, …, N. dimana j merupakan lokasi di sekitar observasi i.

Selanjutnya akan dijelaskan jenis – jenis Spatial weight matrices

1. Contiguity weight

1.1. Rook Contiguity

Didefinisikan :

w_{ij} = 1 jika lokasi i dan j mempunyai *common edge*

w_{ij} = 0 jika lainnya

1.2. Bishop Contiguity

Didefinisikan :

w_{ij} = 1 jika lokasi i dan j mempunyai *common vertecs*

w_{ij} = 0 jika lainnya

1.3. Queen Contiguity

Didefinisikan :

w_{ij} = 1 jika lokasi i dan j mempunyai *common edge* atau *common vertecs*

w_{ij} = 0 jika lainnya

2. Distance weight

Bobot dari matriks dapat dipandang sebagai fungsi jarak. Logikanya, jika suatu lokasi berdekatan maka karakteristik dari lokasi tersebut cenderung similar dan semakin jauh jaraknya maka karakteristik dari lokasi tersebut akan semakin bervariasi. Hal inilah yang menjadi dasar pemikiran dari bobot matriks sebagai fungsi jarak. Semakin dekat lokasi observasi maka bobot yang diberikan semakin besar. Berikut akan dibahas beberapa matriks berdasarkan jarak :

Invers jarak (*Inverse distance*)

Didefinisikan :

$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ jika $d_{ij} \le D$

$w_{ij} = 0$ jika $d_{ij} \ge D$

Dimana :

d_{ij} adalah jarak dari lokasi i dengan lokasi j biasanya dinyatakan dalam jarak antar *centroid* di R^2

D adalah suatu limit jarak yang ditentukan.

Tidak ada teori yang menjelaskan pemilihan matriks bobot spasial yang akan digunakan dalam model spasial dependen. Namun para peneliti biasanya menggunakan *queen contiguity*.

BAB III

ANALISIS REGRESI SPATIAL PANEL SATU ARAH

3.1 MODEL REGRESI SPATIAL PANEL SATU ARAH

Regresi data panel merupakan suatu regresi yang menggunakan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Dimana data *cross section* merupakan data banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu. Sedangkan data *longitudinal* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap satu individu.

Pada regresi data panel tersebut dibutuhkan beberapa asumsi tentang error yaitu error mempunyai mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas.

Dalam analisis regresi data panel, pada saat melakukan pengambilan observasi di suatu lokasi sering ditemui bahwa nilai observasi pada suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi disekitarnya atau dengan kata lain ada korelasi spasial antar observasi. Inilah yang disebut dengan spatial dependen. Model spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu model yang memperhatikan dependensi variabel dependen antar lokasi disebut model spasial lag dan model yang memperhatikan dependensi error antar lokasi disebut dengan model spasial error.Untuk itu dibutuhkan suatu model yang melibatkan aspek lokasi dalam analisis regresi data panel.

Pada bab ini akan dibahas regresi data panel yang lengkap yang melibatkan pengaruh spasial dependen baik itu spasial lag ataupun spasial error dengan menggunakan effect tetap (*fixed effect*).

Pada model regresi spatial panel lengkap satu arah ini diasumsikan bahwa matriks bobot spasial W_N konstan setiap waktu.

3.2 MODEL REGRESI SPASIAL LAG PANEL SATU ARAH

Pada model regresi spasial lag panel satu arah ini diasumsikan bahwa *spatial specific effect* (komponen error satu arah μ) adalah *fixed* (tetap).

Model umum spasial panel lag individual pada lokasi *i* dinyatakan pada persamaan berikut : $y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} + \mu_i + \varepsilon_{it}$ (3.1)

Yang dijabarkan sebagai berikut ini :

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= \delta\left(w_{11}y_{11} + w_{12}y_{21} + \ldots + w_{1N}y_{N1}\right) + x_{111}\beta_1 + x_{112}\beta_2 + \ldots x_{11K}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{11} \\
y_{21} &= \delta\left(w_{21}y_{11} + w_{22}y_{21} + \ldots + w_{2N}y_{N1}\right) + x_{211}\beta_1 + x_{212}\beta_2 + \ldots x_{21K}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{21} \\
&\vdots \\
y_{N1} &= \delta\left(w_{N1}y_{11} + w_{N2}y_{21} + \ldots + w_{NN}y_{N1}\right) + x_{N11}\beta_1 + x_{N12}\beta_2 + \ldots x_{N1K}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{N1} \\
y_{12} &= \delta\left(w_{11}y_{12} + w_{12}y_{22} + \ldots + w_{1N}y_{N2}\right) + x_{121}\beta_1 + x_{122}\beta_2 + \ldots x_{12K}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{12} \\
y_{22} &= \delta\left(w_{21}y_{12} + w_{22}y_{22} + \ldots + w_{2N}y_{N2}\right) + x_{221}\beta_1 + x_{222}\beta_2 + \ldots x_{22K}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{22} \\
&\vdots \\
y_{N2} &= \delta\left(w_{N1}y_{12} + w_{N2}y_{22} + \ldots + w_{NN}y_{N2}\right) + x_{N21}\beta_1 + x_{N22}\beta_2 + \ldots x_{N2K}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{N2} \\
&\vdots \\
y_{1T} &= \delta\left(w_{11}y_{1T} + w_{12}y_{2T} + \ldots + w_{1N}y_{NT}\right) + x_{1T1}\beta_1 + x_{1T2}\beta_2 + \ldots x_{1TK}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{1T} \\
y_{2T} &= \delta\left(w_{21}y_{1T} + w_{22}y_{2T} + \ldots + w_{2N}y_{NT}\right) + x_{2T1}\beta_1 + x_{2T2}\beta_2 + \ldots x_{2TK}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{2T} \\
&\vdots \\
y_{NT} &= \delta\left(w_{N1}y_{1T} + w_{N2}y_{2T} + \ldots + w_{NN}y_{NT}\right) + x_{NT1}\beta_1 + x_{NT2}\beta_2 + \ldots x_{NTK}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{NT}
\end{aligned}
$$

Atau dinyatakan dalam notasi matrix :

$$Y = \delta W_{NT} Y + X\beta + \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu + \varepsilon \qquad (3.2)$$

Dimana :

Y = vektor variabel dependen berukuran $NT \times 1$

X = matriks variabel independen berukuran $NT \times k$

ε = vektor error berukuran $NT \times 1$ yang independen dan berdistribusi identik dengan mean nol dan matrik kovariansi $\sigma^2 I_{NT}$.

β = vektor parameter yang berukuran $k \times 1$

δ **=** koeffisien spasial lag

μ = Spatial specific effect berukuran $N \times 1$

W_N = matriks bobot spasial berukuran $N \times N$ diketahui.

ι_T = vektor berukuran T × 1 yang setiap entrinya berisi 1.

Jika koeffisien spasial lag δ = 0 maka model umum fixed effect spatial panel lag modelnya menjadi model data panel yaitu :

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{it}} = \mu_i + \beta \mathrm{X}_{\mathrm{it}} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots, N$$

$$t = 1,\ldots, T$$

3.2.1 Fungsi Likelihood Model Regresi Spasial Lag Panel Satu Arah

Penaksiran parameter pada model regresi spatial lag panel satu arah dilakukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Metode ini digunakan untuk mendapatkan statistik yang memaksimumkan fungsi likelihood. Selanjutnya akan dibahas fungsi likelihood dari model regresi spatial panel lag satu arah.

Fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* adalah

$$L(\mu,\beta,\delta,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT})=\frac{|I_T\otimes(I_N-\delta W_N)|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}-\mu_i\right)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.3}$$

Bukti :

Pada model spasial lag diasumsikan $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I_{NT})$. Sehingga berdasarkan asumsi ini $\varepsilon_{it} \sim N(0,\sigma^2)$ dimana adalah ε_{it} error pada lokasi i dan waktu ke t .

P.d.f. dari ε_{it} :

$$f(\varepsilon_{it})=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty<\varepsilon_{it}<\infty$$

i = 1 ,…, N

t = 1 ,…, T

P.d.f. bersama dari *n* peubah acak $\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}...,\varepsilon_{NT}$ adalah :

$$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}...,\varepsilon_{NT})=f(\varepsilon_{11})f(\varepsilon_{21})...f(\varepsilon_{NT})$$

$$=\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2}\right]\right)\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2}\right]\right)...\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} {\varepsilon_{it}}^2}{2\sigma^2} \right] \right)$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp\left[-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2} \right] \right)$$

P.d.f. bersama dari variabel dependen *Y* diperoleh dengan metode transformasi variabel yang memetakan ruang ε berdimensi *NT* ke sebuah ruang **Y** berdimensi *NT*.

$$Y = \delta W_{NT} Y + X\beta + (\iota_T \otimes I_N)\mu + \varepsilon$$

$$\varepsilon = Y - \delta W_{NT} Y - X\beta - (\iota_T \otimes I_N)\mu$$

$$\varepsilon = I_{NT} Y - \delta W_{NT} Y - X\beta - (\iota_T \otimes I_N)\mu$$

$$\varepsilon = (I_T \otimes I_N) Y - \delta(I_T \otimes W_N) Y - X\beta - (\iota_T \otimes I_N)\mu$$

$$\varepsilon = (I_T \otimes I_N) Y - (I_T \otimes \delta W_N) Y - X\beta - (\iota_T \otimes I_N)\mu$$

$$\varepsilon = (I_T \otimes (I_N - \delta W_N)) Y - X\beta - (\iota_T \otimes I_N)\mu$$

Atau bisa ditulis dalan persamaan :

$$\varepsilon_{it} = y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i$$

Jacobian dari transformasi ini adalah $\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right| = \left| I_T \otimes (I_N - \delta W_N) \right|$ yang menyatakan determinan dari matriks $I_T \otimes (I_N - \delta W_N)$ yang berukuran $N \times T$.

Sehingga diperoleh p.d.f bersama dari peubah acak $y_{11}, y_{21}..., y_{NT}$

adalah : $f(y_{11}, y_{21}, ..., y_{NT}) = f(\varepsilon_{11}) f(\varepsilon_{21}) ... f(\varepsilon_{NT}) \left| J \right|$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2} \right] \right) \left| I_T \otimes (I_N - \delta W_N) \right|$$

$$= \left(\frac{\left| I_T \otimes (I_N - \delta W_N) \right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}^{\ 2}}{2\sigma^2} \right] \right)$$

$$= \left(\frac{\left| I_T \otimes (I_N - \delta W_N) \right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right] \right)$$

Fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* adalah :

$$L(\mu, \beta, \delta, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT}) = f(y_{11}, y_{21}, ... y_{NT})$$

$$L(\mu, \beta, \delta, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT}) = \frac{| I_T \otimes (I_N - \delta W_N) |}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right]$$

3.2.2 Taksiran Parameter Model Regresi Spasial Lag Panel Satu Arah

Taksiran parameter untuk model regresi spasial lag panel satu arah diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood yang ekuivalen dengan memaksimumkan logaritma dari fungsi likelihood pada persamaan diatas. Logaritma dari fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* dapat ditulis sebagai berikut :

$$LnL = LnL(\beta, \delta, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT})$$

$$= Ln\left(\frac{\left|I_T \otimes (I_N - \delta W_N)\right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right]\right)$$

$$= -\frac{NT}{2} Ln(2\pi\sigma^2) + Ln\left(\left|I_T \otimes (I_N - \delta W_N)\right|\right) - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

Berdasarkan definisi 5 maka :

$$\left|I_T \otimes (I_N - \delta W_N)\right| = \left|I_T\right|^N \cdot \left|(I_N - \delta W_N)\right|^T = \left|(I_N - \delta W_N)\right|^T$$

Sehingga :

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \quad (3.4)$$

Taksiran untuk $\mu, \sigma^2, \beta, \delta$ diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi log likelihood pada persamaan diatas secara simultan yaitu :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu} = 0 \qquad \frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = 0 \qquad \frac{\partial LnL}{\partial \delta} = 0$$

- **Taksiran untuk μ adalah** :

$$\mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk}) \quad (3.5)$$

Bukti :

Nilai exstrem untuk μ diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \left(-\frac{NT}{2} Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \mu_i}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = \frac{\partial\left(-\frac{NT}{2} Ln(2\pi\sigma^2)\right)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial\left(TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right|\right)}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \mu_i}$$

Perhatikan fungsi log likelihood diatas. Hanya suku terakhir yang merupakan fungsi parameter μ, sehingga suku-suku sebelumnya dianggap sebagai konstanta. Nilai maksimum log likelihood pada persamaan diatas dapat dicapai ketika suku terakhir dari fungsi likelihood tersebut bernilai minimum sehingga :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_{it} - \delta\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k - \sum_{t=1}^{T}\mu_i = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T}\mu_i = \sum_{t=1}^{T} y_{it} - \delta \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k$$

$$T\mu_i = \sum_{t=1}^{T} y_{it} - \delta \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k$$

$$\mu_i = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} y_{it} - \delta \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k \right)$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k)$$

- **Taksiran untuk σ^2 adalah** :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(Y^* - \hat{\delta}(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\hat{\beta}\right)'\left(Y^* - \hat{\delta}(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\hat{\beta}\right)}{NT} \qquad (3.6)$$

Bukti :

Nilai exstrem untuk σ^2 diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial\left(-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \sigma^2}$$

$$-\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

$$\frac{NT}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \mu_i)^2}{NT}$$

untuk memudahkan mencari penaksir $\hat{\sigma}^2$ akan disubstitusikan $\hat{\mu}_i$ yang sudah didapatkan kedalam persamaan diatas sehingga :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}))^2}{NT}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right) - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \frac{1}{T}\delta\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \left(\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk}\right)\right)\right\}^2}{NT}$$

Misalkan : $y_{it}^* = y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$ $\qquad$ $x_{itk}^* = x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}^* - \delta\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt}^* - \sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}^*\right\}^2}{NT}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{\ *}\right)^2}{NT}$$

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis $\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{\ *}\right)^2 = \left(\varepsilon^*\right)'\varepsilon^*$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\varepsilon^*\right)'\varepsilon^*}{NT}$$

Dimana :

$$\varepsilon^* = Y^* - \delta W_{NT} Y^* - X^*\beta$$

$$\varepsilon^* = Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta$$

$$Y^* = QY \qquad X^* = QX \qquad (I_T \otimes W_N)Y^* = Q(I_T \otimes W_N)Y$$

Dengan :

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T}\iota_T\left(\iota_T\right)' \otimes I_N$$

Sehingga :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)}{NT}$$

- **Taksiran untuk β adalah** :

$$\hat{\beta} = \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'Y^* - \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\delta(I_T \otimes W_N)Y^* \qquad (3.7)$$

Dimana :

$$Y^* = QY \qquad X^* = QX \qquad (I_T \otimes W_N)Y^* = Q(I_T \otimes W_N)Y$$

Dengan :

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T}\iota_T\left(\iota_T\right)' \otimes I_N$$

Sehingga :

$$\hat{\beta} = \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'QY - \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'Q\delta(I_T \otimes W_N)Y$$

Bukti :

Nilai exstrem untuk β diperoleh dengan:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta}=\frac{\partial\left\{-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it}-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\partial\beta}$$

(3.8)

Setelah itu untuk memudahkan mencari penaksir β maka akan disubstitusikan $\hat{\mu}_i$ yang sudah didapatkan kedalam fungsi log likelihood pada persamaan 3.4 sehingga :

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it}-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it}-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}))^2}{2\sigma^2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(y_{it}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right)-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}+\frac{1}{T}\delta\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}-\left(\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}\right)\right)\right\}^2}{2\sigma^2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(y_{it}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right)-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}\left(y_{jt}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{jt}\right)-\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}\right)\right\}^2}{2\sigma^2}$$

Misalkan :

$$y_{it}^*=y_{it}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{it} \qquad\qquad x_{itk}^*=x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}$$

Maka :

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}^*-\delta\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}^*-\sum_{k=1}^{K}\beta_k x_{itk}^*\right\}^2}{2\sigma^2}$$

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{*}\right)^2}{2\sigma^2}$$

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis $\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{*}\right)^2 = \left(\varepsilon^{*}\right)'\varepsilon^{*}$.

Sehingga :

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\left(\varepsilon^{*}\right)'\varepsilon^{*}}{2\sigma^2}$$

Dimana :

$$\varepsilon^{*} = Y^{*} - \delta W_{NT} Y^{*} - X^{*}\beta$$

$$\varepsilon^{*} = Y^{*} - \delta(I_T \otimes W_N)Y^{*} - X^{*}\beta$$

$$Y^{*} = QY \qquad X^{*} = QX \qquad (I_T \otimes W_N)Y^{*} = Q(I_T \otimes W_N)Y$$

Dengan :

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T}\iota_T\left(\iota_T\right)' \otimes I_N$$

Sehingga fungsi log likelihoodnya bisa ditulis :

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\left(Y^{*} - \delta(I_T \otimes W_N)Y^{*} - X^{*}\beta\right)'\left(Y^{*} - \delta(I_T \otimes W_N)Y^{*} - X^{*}\beta\right)}{2\sigma^2} \qquad (3.9)$$

Jadi dari peramaan 3.8 dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = \frac{\partial\left\{-\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\left(Y^{*} - \delta(I_T \otimes W_N)Y^{*} - X^{*}\beta\right)'\left(Y^{*} - \delta(I_T \otimes W_N)Y^{*} - X^{*}\beta\right)}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \beta}$$

Perhatikan fungsi log likelihood diatas. Hanya suku terakhir yang merupakan fungsi parameter β, sehingga suku-suku sebelumnya dianggap sebagai konstanta. Nilai maksimum log likelihood pada persamaan diatas dapat dicapai ketika suku terakhir dari fungsi likelihood tersebut bernilai minimum Sehingga :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta}=\frac{\partial\left\{-\frac{\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}-X^{*}\beta\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}-X^{*}\beta\right)}{2\sigma^{2}}\right\}}{\partial \beta}$$

(3.10)

Misalkan suku terakhir dari fungsi log likelihoodnya adalah :

$$S(\beta)=\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}-X^{*}\beta\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}-X^{*}\beta\right)$$

Maka :

$$S(\beta)=\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)-\beta'\left(X^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)$$

$$-\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)'X^{*}\beta+\beta'\left(X^{*}\right)'X^{*}\beta$$

Karena $\left(\beta'\left(X^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)\right)'=\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)'X^{*}\beta$ berukuran 1×1 maka :

$\beta'\left(X^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)=\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)'X^{*}\beta$ mempunyai nilai skalar yang sama

Sehingga :

$$S(\beta)=\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)-2\beta'\left(X^{*}\right)'\left(Y^{*}-\delta(I_{T}\otimes W_{N})Y^{*}\right)+\beta'\left(X^{*}\right)'X^{*}\beta$$

Jadi dari peramaan 3.10 dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = \frac{\partial\left\{-\dfrac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right) - 2\beta'\left(X^*\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right) + \beta'\left(X^*\right)'X^*\beta}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \beta}$$

Nilai exstrem untuk β diperoleh dengan:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

$$= -\frac{-2\left(X^*\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right) + 2\left(X^*\right)'X^*\beta}{2\sigma^2} = 0$$

$$\left(X^*\right)'X^*\beta = \left(X^*\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right)$$

$$\left(X^*\right)'X^*\beta = \left(X^*\right)'\left(Y^* - (I_T \otimes \delta W_N)Y^*\right)$$

$$\hat{\beta} = \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^*\right)$$

$$\hat{\beta} = \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'Y^* - \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\delta(I_T \otimes W_N)Y^*$$

$$\hat{\beta} = \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'QY - \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'Q\delta(I_T \otimes W_N)Y$$

Persamaan diatas dapat ditulis :

$$\hat{\beta} = \beta_{ols} - \delta\beta_{lag} \qquad (3.11)$$

Dimana :

$$\beta_{ols} = \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'Y^* = \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'QY$$

$$\beta_{lag} = \left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'(I_T \otimes W_N)Y^* = \left(X'Q'QX\right)^{-1}X'Q'Q\delta(I_T \otimes W_N)Y$$

β_{ols} merupakan parameter yang diperoleh dengan metode OLS dari model $Y^* = X^*\beta + e_{ols}$

β_{lag} merupakan parameter yang diperoleh dengan metode OLS dari model $(I_T \otimes W_N)Y^* = X^*\beta + e_{lag}$

- **Taksiran untuk δ**

untuk menaksir parameter δ yang memaksimumkan fungsi log likelihood tersebut tidak diperoleh dengan memiminimumkan suku terakhir dari persamaan (3.9). Hal ini disebabkan oleh adanya suku $Ln\left|(I_N - \delta W_N)\right|$ yang merupakan fungsi dari parameter δ. Menurut Ord pada tahun 1975, solusi dari masalah ini adalah dengan menguraikan $\left|I_N - \delta W_N\right| = \prod_i (1 - \delta\omega_i)$, dimana ω_i merupakan nilai eigen dari W_N (Anselin 2006). Menurut Pace dan barry metode lain yang digunakan untuk menghitung $Ln\left|(I_N - \delta W_N)\right|$ adalah dengan menggunakan *direct sparse matrix algorithms* seperti dekomposisi LU (Anselin 2006).

Untuk menaksir parameter δ langkah pertama substitusikan :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)}{NT}$$

Ke dalam persamaan log likelihood (3.9) dibawah ini :

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln(2\pi\sigma^2) + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)}{2\sigma^2}$$

Sehingga :

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln(2\pi) - \frac{NT}{2}Ln\sigma^2 + TLn\left|(I_N - \delta W_N)\right| - \frac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)}{2\frac{\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)'\left(Y^* - \delta(I_T \otimes W_N)Y^* - X^*\beta\right)}{NT}}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)-\frac{NT}{2}Ln\frac{\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta\right)'\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta\right)}{NT}+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{NT}{2}$$

Karena $\hat{\beta}=\beta_{ols}-\delta\beta_{lag}$ (3.11) maka :

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)-\frac{NT}{2}Ln\frac{\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\left(\beta_{ols}-\delta\beta_{lag}\right)\right)'\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\left(\beta_{ols}-\delta\beta_{lag}\right)\right)}{NT}$$

$$\ldots+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{NT}{2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)-\frac{NT}{2}Ln\frac{\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta_{ols}+X^*\delta\beta_{lag}\right)'\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta_{ols}+X^*\delta\beta_{lag}\right)}{NT}$$

$$\ldots+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{NT}{2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)-\frac{NT}{2}Ln\frac{\left(Y^*-X^*\beta_{ols}-\delta\left((I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta_{lag}\right)\right)'\left(Y^*-X^*\beta_{ols}-\delta\left((I_T\otimes W_N)Y^*-X^*\beta_{lag}\right)\right)}{NT}$$

$$\ldots+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{NT}{2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)-\frac{NT}{2}Ln\frac{\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)'\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)}{NT}+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|-\frac{NT}{2}$$

$$LnL=-\frac{NT}{2}Ln(2\pi)+\frac{NT}{2}LnNT-\frac{NT}{2}-\frac{NT}{2}Ln\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)'\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|$$

$$LnL=C-\frac{NT}{2}Ln\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)'\left(e_{ols}-\delta e_{lag}\right)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|$$

$$LnL=C-\frac{NT}{2}Ln\left(e_{ols}'e_{ols}-2\delta e_{lag}'e_{ols}+\delta^2 e_{lag}'e_{lag}\right)+TLn\left|(I_N-\delta W_N)\right|$$

$$LnL=C-\frac{NT}{2}Ln\left(e_{ols}'e_{ols}-2\delta e_{lag}'e_{ols}+\delta^2 e_{lag}'e_{lag}\right)+TLn\prod_i\left(1-\delta\omega_i\right)$$

Nilai exstrem untuk δ diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = \frac{\partial \left(C - \frac{NT}{2} Ln\left(e_{ols}\,' e_{ols} - 2\delta e_{lag}\,' e_{ols} + \delta^2 e_{lag}\,' e_{lag} \right) + TLn \prod_i \left(1 - \delta \omega_i\right) \right)}{\partial \delta}$$

Karena nilai log likelihood yang didapatkan merupakan fungsi polinomial terhadap δ maka solusi untuk δ menjadi tidak unik. sehingga diperlukan suatu iterasi numerik untuk mendapatkan panaksir untuk δ yang memaksimumkan fungsi log likelihood tersebut.

Pada iterasi ini fungsi objektif LnL diaproksimasi dengan *second order taylor series* disekitar *initial value* $\delta^{(1)}$. Secara umum metode ini melakukan aproksimasi dengan taylor order kedua untuk log likelihood disekitar nilai parameter permulaan, yaitu :

$$LnL = LnL\Big|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta - \delta^{(1)} \right) + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \frac{\left(\delta - \delta^{(1)} \right)^2}{2}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter δ dengan operasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta - \delta^{(1)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)} \right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\right|_{\delta^{(1)}} \left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(1)}}$$

$$\left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\right|_{\delta^{(1)}}\right)^{-1}$$

$$\delta^{(2)} = \delta^{(1)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\right|_{\delta^{(1)}}\right)^{-1}$$

Bila persamaan diatas , $\delta^{(2)}$ menggantikan $\delta^{(1)}$ maka akan diperoleh $\delta^{(3)}$ dan seterusnya. Sehingga persamaan umumnya dapat ditulis sebagai berikut : $\delta^{(n+1)} = \delta^{(n)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(n)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\right|_{\delta^{(n)}}\right)^{-1}$

Persamaan inilah yang disebut dengan *Newton-Raphson Iteration*. Jika iterasi sudah konvergen yaitu $\delta^{(n+1)} = \delta^{(n)}$, atau $\left|\delta^{(n+1)} - \delta^{(n)}\right| < \varepsilon$ maka dari persamaan diatas dapat disimpulkan $\left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(n)}} = 0$ dimana memenuhi syarat kondisi turunan pertama.

3.3 MODEL REGRESI SPATIAL ERROR PANEL SATU ARAH

Pada model regresi spatial error panel satu arah ini diasumsikan bahwa *spatial specific effect* μ adalah *fixed* (tetap).

Model spasial error panel individual pada lokasi *i* dinyatakan pada persamaan berikut :

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k + \mu_i + \phi_{it}\,, \qquad (3.12)$$

$$\phi_{it} = \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij}\phi_{jt} + \varepsilon_{it}$$

Yang dijabarkan sebagai berikut :

$$y_{11} = x_{111}\beta_1 + x_{112}\beta_2 + \ldots x_{11K}\beta_K + \mu_1 + \phi_{11}$$
$$y_{21} = x_{211}\beta_1 + x_{212}\beta_2 + \ldots x_{21K}\beta_K + \mu_2 + \phi_{21}$$
$$\vdots$$
$$y_{N1} = x_{N11}\beta_1 + x_{N12}\beta_2 + \ldots x_{N1K}\beta_K + \mu_N + \phi_{N1}$$
$$y_{12} = x_{121}\beta_1 + x_{122}\beta_2 + \ldots x_{12K}\beta_K + \mu_1 + \phi_{12}$$
$$y_{22} = x_{221}\beta_1 + x_{222}\beta_2 + \ldots x_{22K}\beta_K + \mu_2 + \phi_{22}$$
$$\vdots$$
$$y_{N2} = x_{N21}\beta_1 + x_{N22}\beta_2 + \ldots x_{N2K}\beta_K + \mu_N + \phi_{N2}$$
$$\vdots$$
$$y_{1T} = x_{1T1}\beta_1 + x_{1T2}\beta_2 + \ldots x_{1TK}\beta_K + \mu_1 + \phi_{1T}$$
$$y_{2T} = x_{2T1}\beta_1 + x_{2T2}\beta_2 + \ldots x_{2TK}\beta_K + \mu_2 + \phi_{2T}$$
$$\vdots$$
$$y_{NT} = x_{NT1}\beta_1 + x_{NT2}\beta_2 + \ldots x_{NTK}\beta_K + \mu_N + \phi_{NT}$$
$$\phi_{11} = \rho\left(w_{11}\phi_{11} + w_{12}\phi_{21} + \ldots + w_{1N}\phi_{N1}\right) + \varepsilon_{11}$$
$$\phi_{21} = \rho\left(w_{21}\phi_{11} + w_{22}\phi_{21} + \ldots + w_{2N}\phi_{N1}\right) + \varepsilon_{21}$$
$$\vdots$$
$$\phi_{N1} = \rho\left(w_{N1}\phi_{11} + w_{N2}\phi_{21} + \ldots + w_{NN}\phi_{N1}\right) + \varepsilon_{N1}$$
$$\phi_{12} = \rho\left(w_{11}\phi_{12} + w_{12}\phi_{22} + \ldots + w_{1N}\phi_{N2}\right) + \varepsilon_{12}$$
$$\phi_{22} = \rho\left(w_{21}\phi_{12} + w_{22}\phi_{22} + \ldots + w_{2N}\phi_{N2}\right) + \varepsilon_{22}$$
$$\vdots$$
$$\phi_{N2} = \rho\left(w_{N1}\phi_{12} + w_{N2}\phi_{22} + \ldots + w_{NN}\phi_{N2}\right) + \varepsilon_{N2}$$
$$\vdots$$
$$\phi_{1T} = \rho\left(w_{11}\phi_{1T} + w_{12}\phi_{2T} + \ldots + w_{1N}\phi_{NT}\right) + \varepsilon_{1T}$$
$$\phi_{2T} = \rho\left(w_{21}\phi_{1T} + w_{22}\phi_{2T} + \ldots + w_{2N}\phi_{NT}\right) + \varepsilon_{2T}$$
$$\vdots$$
$$\phi_{NT} = \rho\left(w_{N1}\phi_{1T} + w_{N2}\phi_{2T} + \ldots + w_{NN}\phi_{NT}\right) + \varepsilon_{NT}$$

Atau dinyatakan dalam notasi matrix :

$$Y = X\beta + \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu + \phi \qquad (3.13)$$

$$\phi = \rho W_{NT}\phi + \varepsilon$$

Dimana :

Y = vektor variabel dependen berukuran $NT \times 1$

X = vektor variabel independen berukuran $NT \times k$

ϕ = vektor error berukuran $NT \times 1$

ε = vektor error berukuran $NT \times 1$ yang independen dan berdistribusi identik dengan mean nol dan matrik kovariansi $\sigma^2 I_{NT}$.

β = vektor parameter yang berukuran $k \times 1$

ρ **=** koeffisien spasial error

μ = Spatial specific effect

W = matriks bobot spasial berukuran $N \times N$ diketahui.

ι_T = vektor berukuran T × T yang setiap entrinya berisi 1.

Jika koeffisien spasial lag ρ = 0 maka model umum fixed effect spatial panel error modelnya menjadi model data panel yaitu :

$$Y_{it} = \mu_i + \beta X_{it} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots, N$$

$$t = 1,\ldots, T$$

3.3.1 Fungsi Likelihood Model Regresi Spatial Error Panel Satu Arah

Penaksiran parameter pada spatial error panel model ini adalah dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Metode ini digunakan untuk mencari statistik yang memaksimumkan fungsi likelihood. Selanjutnya akan dibahas fungsi likelihood dari model regresi spatial error panel data. Fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* adalah :

$$L(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT})=\frac{\left|I_T\otimes(I_N-\rho W_N)\right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}...$$

$$\exp\left[-\frac{\left(\left(I_T\otimes\left(I_N-\rho W_N\right)\right)\left(Y-X\beta-\left(\iota_T\otimes I_N\right)\mu\right)'\left(I_T\otimes\left(I_N-\rho W_N\right)\right)\left(Y-X\beta-\left(\iota_T\otimes I_N\right)\mu\right)\right)}{2\sigma^2}\right] \qquad (3.14)$$

Bukti :

Pada model spasial error diasumsikan error $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I_{NT})$. Sehingga berdasarkan asumsi ini $\varepsilon_{it} \sim N(0,\sigma^2)$ dimana adalah ε_{it} error pada lokasi i dan waktu ke t .

P.d.f. dari ε_{it} :

$$f(\varepsilon_{it})=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{it}{}^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty<\varepsilon_{it}<\infty$$

i = 1 ,…, N

t = 1 ,…, T

P.d.f. bersama dari *n* peubah acak $\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}...,\varepsilon_{NT}$ adalah :

$$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}...,\varepsilon_{NT}) = f(\varepsilon_{11})\,f(\varepsilon_{21})...f(\varepsilon_{NT})$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{{\varepsilon_{it}}^2}{2\sigma^2}\right]\right)\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{{\varepsilon_{it}}^2}{2\sigma^2}\right]\right)...\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{{\varepsilon_{it}}^2}{2\sigma^2}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}{\varepsilon_{it}}^2}{2\sigma^2}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right]\right)$$

P.d.f. bersama dari variabel dependen *Y* diperoleh dengan metode transformasi variabel yang memetakan ruang ε berdimensi *NT* ke sebuah ruang **Y** berdimensi *NT*

$$Y = X\beta + \mu + \phi$$

$$\phi = \rho W_{NT}\phi + \varepsilon$$

$$I_{NT}\phi = \rho\left(I_T \otimes W_N\right)\phi + \varepsilon$$

$$\varepsilon = I_{NT}\phi - \rho\left(I_T \otimes W_N\right)\phi$$

$$\varepsilon = \left(I_T \otimes I_N\right)\phi - \rho\left(I_T \otimes W_N\right)\phi$$

$$\varepsilon = \left(I_T \otimes I_N\right)\phi - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)\phi$$

$$\varepsilon = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\phi$$

$$\phi = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)^{-1}\varepsilon$$

Lalu substitusi ke persamaan sehingga

$$Y = X\beta + \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu + \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)^{-1}\varepsilon$$

$$\varepsilon = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y - X\beta - \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)$$

Atau dapat ditulis menjadi :

$$\varepsilon_{it} = y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)$$ (lampiran 1)

Jacobian dari transformasi ini adalah $\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right|$ yang menyatakan determinan dari matriks $I_T \otimes (I_N - \rho W_N)$ yang berukuran $N \times T$.

Sehingga diperoleh p.d.f bersama dari peubah acak $y_{11}, y_{21}..., y_{NT}$ adalah :

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}^{2}}{2\sigma^2}\right]\right)\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right|$$

$$= \left(\frac{\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}\exp\left[-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right]\right)$$

Fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* adalah

$$L(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT}) = f(y_{11}, y_{21}, ...y_{NT})$$

$$L(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT}) = \frac{\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}}...$$

$$\exp\left[-\frac{\left(\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y - X\beta - \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y - X\beta - \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)\right)}{2\sigma^2}\right]$$

3.3.2 Taksiran Parameter Model Regresi Spatial Error Panel Satu Arah

Taksiran parameter untuk model regresi spasial error panel didapatkan dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood yang ekuivalen dengan memaksimumkan logaritma dari fungsi likelihood pada persamaan diatas. Logritma dari fungsi likelihood dari variabel dependen *Y* dapat ditulis sebagai berikut :

$$LnL = LnL(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT})$$

$$LnL(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11}..., y_{NT}) = Ln\left(\frac{|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NT}{2}}} ... \right.$$

$$\left. ...\exp\left[-\frac{\left(\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y - X\beta - \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y - X\beta - \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)\right)}{2\sigma^2} \right] \right)$$

$$= -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + Ln\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{ y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k \left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j \right) \right\}^2}{2\sigma^2}$$

Berdasarkan definisi 5 maka :

$$\left|I_T \otimes (I_N - \rho W_N)\right| = \left|I_T\right|^N \cdot \left|I_N - \rho W_N\right|^T = \left|I_N - \rho W_N\right|^T$$

Sehingga :

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{ y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k \left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j \right) \right\}^2}{2\sigma^2} \tag{3.15}$$

Taksiran untuk $\mu, \sigma^2, \beta, \rho$ diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi log likelihood pada persamaan diatas secara simultan yaitu :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu} = 0 \qquad \frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = 0 \qquad \frac{\partial LnL}{\partial \rho} = 0$$

- **Taksiran untuk μ adalah :**

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\hat{\beta}_k \right) \qquad (3.16)$$

Bukti :

Nilai ekstrem untuk μ diperoleh dengan:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \left\{ -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{ y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)\right\}^2}{2\sigma^2} \right\}}{\partial \mu_i}$$

Perhatikan fungsi log likelihood diatas. Hanya suku terakhir yang merupakan fungsi parameter **μ**, sehingga suku-suku sebelumnya dianggap sebagai konstanta. Nilai maksimum log likelihood pada persamaan diatas dapat dicapai ketika suku terakhir dari fungsi likelihood tersebut bernilai minimum Sehingga :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left\{ y_{it} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \mu_j \right) \right\}^2}{2\sigma^2} \right\}}{\partial \mu_i}$$

$$\frac{2}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \left\{ y_{it} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \mu_j \right) \right\} (1 - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij}) = 0$$

$$\frac{2(1 - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij})}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \left\{ y_{it} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \mu_j \right) \right\} = 0$$

Karena $\frac{2(1 - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij})}{2\sigma^2} \neq 0$ maka :

$$\sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\mu_i - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \mu_j \right) \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \rho \sum_{j} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) \right) - \sum_{t=1}^{T} \left(\mu_i - \rho \sum_{j} w_{ij} \mu_j \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \rho \sum_{j} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) \right) - T \left(\mu_i - \rho \sum_{j} w_{ij} \mu_j \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \rho \sum_{j} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) \right) = T \left(\mu_i - \rho \sum_{j} w_{ij} \mu_j \right)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N \right) \right) \left(Y - X\beta \right) = T \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N \right) \right) \left(\left(\iota_T \otimes I_N \right) \mu \right)$$

$$\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N \right) \right) \sum_{t=1}^{T} \left(Y - X\beta \right) = T \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N \right) \right) \left(\left(\iota_T \otimes I_N \right) \mu \right)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(Y - X\beta\right) = T\left(\left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu\right)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - x_{it}\beta\right) = T\mu_i$$

$$T\mu_i = \sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - x_{it}\beta\right)$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\hat{\beta}_k\right)$$

- **Taksiran untuk σ^2 adalah :**

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{NT} \tag{3.17}$$

Bukti :

Nilai exstrem untuk σ^2 diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial\left\{-\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)\right\}^2}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \sigma^2}$$

$$-\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)\right\}^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

$$\frac{NT}{2\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}-\rho\sum_{j}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}-\rho\sum_{j=1}^{N}w_{ij}x_{jtk}\right)-\left(\mu_i-\rho\sum_{j}w_{ij}\mu_j\right)\right\}^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}-\rho\sum_{j=1}^{N}w_{ij}x_{jtk}\right)-\left(\hat{\mu}_i-\rho\sum_{j}w_{ij}\hat{\mu}_j\right)\right\}^2}{NT}$$

Setelah itu untuk memudahkan mencari penaksir $\hat{\sigma}^2$ akan disubstitusikan $\hat{\mu}_i$ pada persamaan (3.16) ke dalam persamaan diatas sehingga :

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}-\rho\sum_{j=1}^{N}w_{ij}x_{jtk}\right)-\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\sum_{k=1}^{K}x_{itk}\hat{\beta}_k\right)-\rho\sum_{j}w_{ij}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{jt}-\sum_{k=1}^{K}x_{itk}\hat{\beta}_k\right)\right)\right\}^2}{NT}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(y_{it}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right)-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}\left(y_{jt}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{jt}\right)-\left(\sum_{k=1}^{K}\hat{\beta}_k\left(x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}\right)\right)+\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}\sum_{k=1}^{K}\hat{\beta}_k\left(x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}\right)\right\}^2}{NT}$$

Misalkan : $y_{it}^{*}=y_{it}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{it}$ $\qquad$ $x_{itk}^{*}=x_{itk}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{itk}$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}^{*}-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}y_{jt}^{*}-\sum_{k=1}^{K}x_{itk}^{*}\hat{\beta}_k+\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}\sum_{k=1}^{K}x_{itk}^{*}\hat{\beta}_k\right\}^2}{NT}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}^{*}-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}y_{jt}^{*}-\sum_{k=1}^{K}\hat{\beta}_k\left(x_{itk}^{*}-\hat{\rho}\sum_{j}w_{ij}x_{jtk}^{*}\right)\right\}^2}{NT}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{*}\right)^2}{NT}$$

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis $\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}{}^{*}\right)^{2} = \left(\varepsilon^{*}\right)'\varepsilon^{*}$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\varepsilon^*\right)'\varepsilon^*}{NT}$$

Dimana :

$$\varepsilon^* = Y^* - \rho W_{NT} Y^* - \left(X^* - \rho W_{NT} X^*\right)\beta$$

$$\varepsilon^* = I_{NT} Y^* - \rho (I_T \otimes W_N) Y^* - \left(I_{NT} X^* - \rho (I_T \otimes W_N) X^*\right)\beta$$

$$\varepsilon^* = (I_T \otimes I_N) Y^* - \rho (I_T \otimes W_N) Y^* - \left((I_T \otimes I_N) X^* - \rho (I_T \otimes W_N) X^*\right)\beta$$

$$\varepsilon^* = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right) Y^* - \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right) X^* \beta$$

$$\varepsilon^* = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^* \beta\right)$$

$$Y^* = QY \qquad X^* = QX \qquad (I_T \otimes W_N) Y^* = Q (I_T \otimes W_N) Y$$

Dengan :

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T}\iota_T \left(\iota_T\right)' \otimes I_N$$

Sehingga :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{NT}$$

- **Taksiran untuk β adalah :**

$$\hat{\beta} = \left[\left(\left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right) X^*\right)\right)'\left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right) X^*\right)\right]^{-1} \times$$

$$\left(\left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right) X^*\right)\right)'\left(Y^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right) Y^*\right) \qquad (3.18)$$

Dimana

$$Y^* = QY \qquad X^* = QX \qquad (\mathrm{I_T} \otimes \mathrm{W_N})\mathrm{Y}^* = \mathrm{Q}(\mathrm{I_T} \otimes \mathrm{W_N})\mathrm{Y}$$

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T} i_T \left(i_T\right)' \otimes I_N$$

Bukti :

Nilai exstrem untuk β diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = \frac{\partial \left\{ = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{ y_{it} - \rho \sum_j w_{ij} y_{jt} - \left(x_{it} - \rho \sum_j w_{ij} x_{jt} \right)\beta - \left(\mu_i - \rho \sum_j w_{ij}\mu_j \right) \right\}^2}{2\sigma^2} \right\}}{\partial \beta}$$

(3.19)

Setelah itu untuk memudahkan mencari penaksir β maka akan disubstitusikan $\hat{\mu}_i$ yang sudah didapat kedalam fungsi log likelihood pada persamaan (3.15) sehingga :

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| \ldots$$

$$\ldots - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{ y_{it} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k \left(x_{itk} - \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk} \right) - \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - x_{it}\hat{\beta}\right) - \rho \sum_j w_{ij} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{jt} - x_{jt}\hat{\beta}\right) \right) \right\}^2}{2\sigma^2}$$

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| \ldots$$

$$\ldots - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right) - \left(\rho \sum_{j} w_{ij}\left(y_{jt} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{jt}\right)\right) - \left(\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk}\right) - \left(\rho \sum_{j} w_{ij}\left(x_{jtk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{jtk}\right)\right)\right)\right\}^2}{2\sigma^2}$$

Misalkan : $y_{it}^{*} = y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$ $\qquad x_{itk}^{*} = x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk}$

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left\{y_{it}^{*} - \rho\sum_{j} w_{ij} y_{jt}^{*} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk}^{*} - \rho\sum_{j} w_{ij} x_{jtk}^{*}\right)\right\}^2}{2\sigma^2}$$

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{*}\right)^2}{2\sigma^2}$$

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis $\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\varepsilon_{it}^{*}\right)^2 = \left(\varepsilon^{*}\right)'\varepsilon^{*}$.

$$LnL = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\left(\varepsilon^{*}\right)'\varepsilon^{*}}{2\sigma^2}$$

Dimana :

$$\varepsilon^{*} = \left(Y^{*} - \rho W_{NT} Y^{*}\right) - \left(X^{*} - \rho W_{NT} X^{*}\right)$$

$$\varepsilon^{*} = \left(\left(I_T \otimes I_N\right)Y^{*} - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)Y^{*} - \left(\left(I_T \otimes I_N\right)X^{*} - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)X^{*}\right)\beta\right)$$

$$\varepsilon^{*} = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^{*} - X^{*}\beta\right)$$

$$Y^{*} = QY \qquad X^{*} = QX \qquad (I_T \otimes W_N)Y^{*} = Q(I_T \otimes W_N)Y$$

$$Q = I_{NT} - \frac{1}{T} i_T \left(i_T\right)' \otimes I_N$$

Sehingga fungsi log likelihoodnya dapat ditulis menjadi :

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{2\sigma^2}$$

(3.20)

Jadi dari persamaan (3.19) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = \frac{\partial\left\{ = -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \beta}$$

Nilai exstrem untuk β diperoleh dengan :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = 0$$

Perhatikan fungsi log likelihood diatas. Hanya suku terakhir yang merupakan fungsi parameter **β**, sehingga suku-suku sebelumnya dianggap sebagai konstanta. Nilai maksimum log likelihood pada persamaan diatas dapat dicapai ketika suku terakhir dari fungsi likelihood tersebut bernilai minimum Sehingga :

$$\frac{\partial\left\{-\frac{\left(\left(Y^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)Y^* - \left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)X^*\right)\beta\right)\right)'\left(Y^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)Y^* - \left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)X^*\right)\beta\right)}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \beta} = 0$$

Misalkan :

$$X^{**} = \left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)X^*\right) \qquad Y^{**} = \left(Y^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right)Y^*\right)$$

Maka :

$$\frac{\partial\left\{-\frac{\left(Y^{**} - X^{**}\beta\right)'\left(Y^{**} - X^{**}\beta\right)}{2\sigma^2}\right\}}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial\left\{-\frac{\left(Y^{**}\right)'Y^{**}-\left(X^{**}\beta\right)'Y^{**}-\left(Y^{**}\right)'\left(X^{**}\beta\right)+\left(X^{**}\beta\right)'\left(X^{**}\beta\right)}{2\sigma^2}\right\}}{\partial\beta}=0$$

Karena $\left(\left(X^{**}\beta\right)'Y^{**}\right)'=\left(Y^{**}\right)'\left(X^{**}\beta\right)$ dan berukuran 1×1 maka :

$\left(X^{**}\beta\right)'Y^{**}=\left(Y^{**}\right)'\left(X^{**}\beta\right)$ mempunyai nilai skalar yang sama Sehingga :

$$\frac{\partial\left\{-\frac{\left(Y^{**}\right)'Y^{**}-2\beta'\left(X^{**}\right)'Y^{**}+\beta'\left(X^{**}\right)'X^{**}\beta}{2\sigma^2}\right\}}{\partial\beta}=0$$

$$\frac{2\left(X^{**}\right)'Y^{**}-2\left(X^{**}\right)'\left(X^{**}\right)\beta}{2\sigma^2}=0$$

$$\left(X^{**}\right)'Y^{**}-\left(X^{**}\right)'X^{**}\beta=0$$

$$\left(X^{**}\right)'Y^{**}=\left(X^{**}\right)'X^{**}\beta$$

$$\hat{\beta}=\left[\left(X^{**}\right)'X^{**}\right]^{-1}\left(X^{**}\right)'Y^{**}$$

Sehingga :

$$\hat{\beta}=\left[\left(\left(X^{*}-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^{*}\right)\right)'\left(X^{*}-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^{*}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\left(\left(X^{*}-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^{*}\right)\right)'\left(Y^{*}-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)Y^{*}\right)$$

- **Taksiran untuk ρ**

Untuk menaksir parameter ρ tidak diperoleh dengan memiminimumkan suku terakhir dari persamaan (3.20). Hal ini disebabkan oleh adanya suku $Ln\left|(I_N-\rho W_N)\right|$ yang merupakan fungsi dari parameter ρ. Menurut Ord pada tahun 1975, solusi dari masalah ini adalah dengan menguraikan $\left|I_N - \delta W_N\right| = \prod_i (1 - \delta\omega_i)$, dimana ω_i merupakan nilai eigen dari W_N (Anselin 2006). Menurut Pace dan barry metode lain yang digunakan untuk menghitung $Ln\left|(I_N - \delta W_N)\right|$ adalah dengan menggunakan *direct sparse matrix algorithms* seperti dekomposisi LU (Anselin 2006).

Perhatikan fungsi log likelihood dari persamaan (3.19) ini :

$$LnL(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11} ..., y_{NT}) = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\sigma^2\right) + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| \ldots$$

$$\ldots - \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{2\sigma^2}$$

Untuk memudahkan perhitungan substitusikan $\hat{\sigma}^2$ kedalam fungsi log likelihood sehingga :

$$LnL(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT}) = -\frac{NT}{2} Ln(2\pi) - \frac{NT}{2} Ln\frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{NT} + \ldots$$

$$\ldots\ TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{2\frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{NT}}$$

$$LnL(\mu, \beta, \rho, \sigma^2, y_{11} ..., y_{NT}) = -\frac{NT}{2} Ln\left(2\pi\right) - \frac{NT}{2} Ln\frac{\varepsilon^{*}{}'\varepsilon^*}{NT} + TLn\left|I_N - \rho W_N\right|$$

$$- \frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{2\frac{\left[\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)\right]'\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)}{NT}}$$

$$LnL(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT}) = -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\right) - \frac{NT}{2}Ln\frac{\varepsilon^{*}{}'\varepsilon^{*}}{NT} + TLn\left|I_N - \rho W_N\right| - \frac{NT}{2}$$

$$LnL(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT}) = C - \frac{NT}{2}Ln\frac{\varepsilon^{*}{}'\varepsilon^{*}}{NT} + TLn\left|I_N - \rho W_N\right|$$

$$LnL(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT}) = C - \frac{NT}{2}Ln\frac{\varepsilon^{*}{}'\varepsilon^{*}}{NT} + TLn\prod_i\left(1-\rho\omega_i\right)$$

$$LnL(\mu,\beta,\rho,\sigma^2,y_{11}...,y_{NT}) = C - \frac{NT}{2}Ln\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}^{*} - \rho\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}^{*} - \left(x_{it}^{*} - \rho\sum_{j=1}^{N}w_{ij}x_{jt}^{*}\right)\beta\right)^2}{NT}_i + TLn\prod_i\left(1-\rho\omega\right)$$

Karena nilai log likelihood yang didapatkan merupakan fungsi polinomial terhadap ρ maka solusi untuk ρ menjadi tidak unik. Sehingga diperlukan suatu iterasi numerik untuk mendapatkan penaksir dari ρ yang memaksimalkan fungsi log likelihood tersebut.

Cara menaksir parameter ρ sama dengan cara menaksir δ pada model regresi spatial lag panel satu arah.

Pada iterasi ini fungsi objektif LnL diaproksimasi dengan *second order taylor series* disekitar *initial value* $\rho^{(1)}$. Secara umum metode ini melakukan aproksimasi dengan taylor order kedua untuk log likelihood disekitar nilai parameter permulaan, yaitu :

$$LnL = LnL\big|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial LnL}{\partial\rho}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\rho-\rho^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial\rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\frac{\left(\rho-\rho^{(1)}\right)^2}{2}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter ρ dengan operasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \rho} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}} \left(\rho - \rho^{(1)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \rho} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}} \left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}} \left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}}$$

$$\left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\right)^{-1}$$

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\right)^{-1}$$

Bila persamaan diatas , $\rho^{(2)}$ menggantikan $\rho^{(1)}$ maka akan diperoleh $\rho^{(3)}$ dan seterusnya. Sehingga persamaan umumnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(n)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(n)}}\right)^{-1}$$

Persamaan inilah yang disebut dengan *Newton-Raphson Iteration*. Jika iterasi sudah konvergen yaitu $\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)}$, atau $\left|\rho^{(n+1)} - \rho^{(n)}\right| < \varepsilon$ maka dari persamaan diatas dapat disimpulkan $\left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(n)}} = 0$ dimana memenuhi syarat kondisi turunan pertama.

BAB IV

APLIKASI MODEL SPATIAL PANEL

Pada bab ini akan dibahas tentang contoh dari penaksiran parameter model regresi spatial panel satu arah. Penaksiran parameter model regresi spatial panel satu arah ini akan dilakukan dengan menggunakan bantuan *software SPSS 13, Eviews* 3 dan *Matlab* 7.

Data yang digunakan adalah data penjualan rokok di 46 negara bagian Amerika selama 6 tahun.

Variabel yang digunakan adalah :

- Variabel respon :

  $LogC_{it}$ = konsumsi rokok oleh perokok yang berusia 14 tahun atau lebih di negara bagian ke-i pada waktu ke-t. (dalam skala logaritma)

- Variabel independent :

  $LogP_{it}$ = harga rokok (dalam skala logaritma)

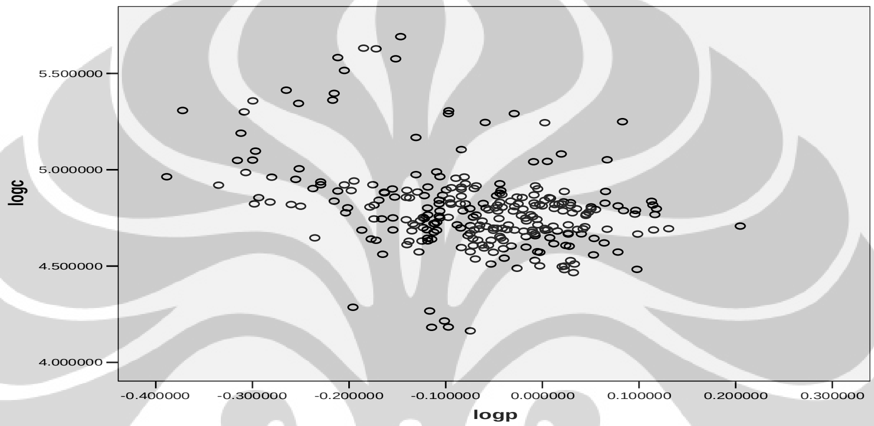
  $LogY_{it}$ = pendapatan perkapita (dalam skala logaritma)

  $LogPn_{it}$ =rata-rata harga rokok dari negara bagian yang bertetanggaan (dalam skala logaritma)

Tujuan : Ingin melihat bagaimana variabel-variabel independen mempengaruhi variabel dependen.

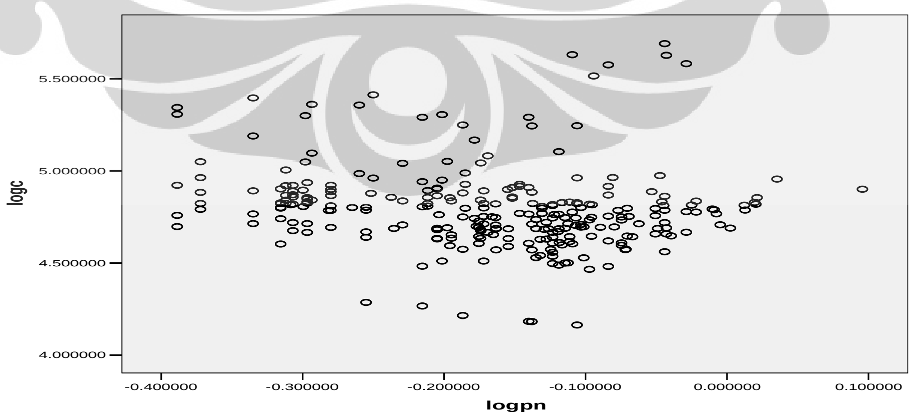
4.1 SCATTER PLOT DATA

Scatter plot data ini merupakan suatu plot yang digunakan untuk melihat hubungan antar variabel. Scatter plot data tersebut adalah sebagai berikut :



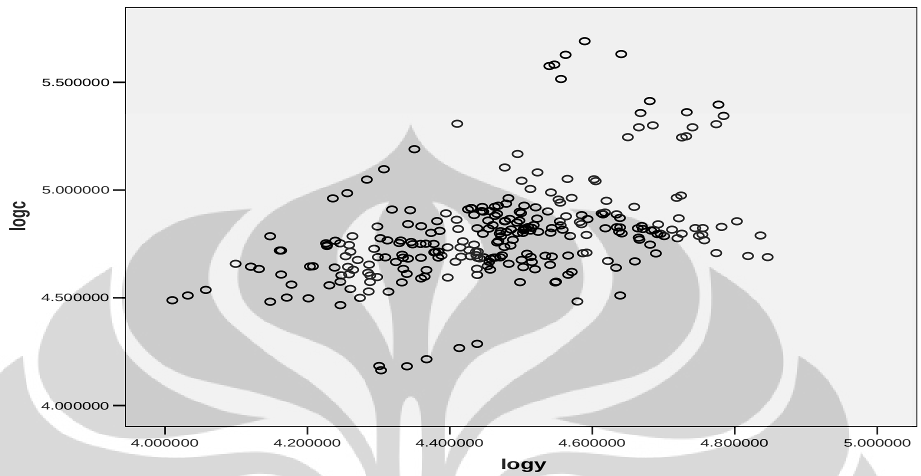
Gambar 1.Scatter plot antara log harga rokok dan log penjualan rokok

Dari gambar 1 terlihat bahwa ada hubungan linear antara log harga rokok dan log penjualan rokok.



Gambar 2. Scatter plot antara log rata-rata harga rokok dari negara bagian yang bertetanggaan dan log penjualan rokok

Dari gambar 2 terlihat bahwa ada hubungan linear antara log rata-rata harga rokok dari negara bagian yang bertetanggaan dan log penjualan rokok



Gambar 3. Scatter plot antara log pendapatan perkapita dan log penjualan rokok

Dari gambar 3 terlihat bahwa ada hubungan linear antara log pendapatan perkapita dan log penjualan rokok.

4.2 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI PANEL SATU ARAH

Model regresi panel satu arah dengan efek tetap adalah :

$$y_{it} = \mu_i + x_{it}\beta + \varepsilon_{it}$$

Dimana μ_i merupakan pengaruh individu ke-i yang tidak terobservasi Dalam contoh kasus ini μ_i yang dimaksud adalah adanya aturan larangan merokok pada suatu wilayah yang menyebabkan menurunnya penjualan rokok pada suatu wilayah.

Berdasarkan hasil yang terdapat pada lampiran 6 yang didapatkan dari program eviews, maka model regresi panel sebagai berikut:

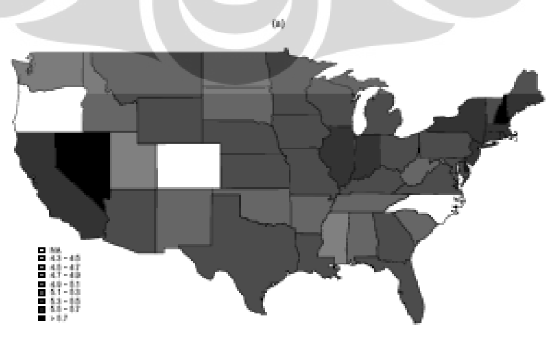
$$\log \hat{C}_{it} = 1.605485 - 1.041989 \log P_{it} + 0.146363 \log PN_{it} + 0.703143 \log Y_{it}$$

Akan tetapi dari hasil tersebut terlihat bahwa nilai R-squared sangat kecil yaitu 0.386135, hal ini menunjukkan bahwa taksiran model yang didapat kurang baik.

Selanjutnya karena melakukan pengambilan observasi di lokasi – lokasi yang berdekatan maka muncul dugaan bahwa nilai observasi pada suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi disekitarnya atau dengan kata lain ada korelasi spatial antar observasi. Oleh karena itu akan dibuat *gray-scale map* dari variabel Perjualan Rokok.

4.3 GRAY-SCALE MAP DARI VARIABEL PENJUALAN ROKOK

Gray-scale map digunakan untuk melihat distribusi spatial dari sebuah variabel.



Gambar 4. *Gray-scale map* dari variabel Perjualan Rokok

Dari gambar 4 terlihat bahwa terdapat pola spasial dari variabel Perjualan Rokok. Daerah yang berdekatan cenderung memiliki nilai yang similar yang digambarkan dengan pola warna yang sama.

Selanjutnya akan dibuat model regresi panel satu arah yang melibatkan pengaruh spatial baik itu spatial lag atau spatial error.

4.4 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI SPASIAL PANEL

4.4.1 Model Regresi Spasial Lag Panel Satu Arah.

Model regresi spatial lag panel satu arah dengan efek tetap adalah :

$$y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + x_{it}\beta + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

Berdasarkan hasil yang terdapat pada lampiran 6 yang didapatkan dari program Matlab 7, maka taksiran model regresi spasial lag panel dengan komponen error satu arah (μ_i) sebagai berikut:

$$\log \hat{C}_{it} = 0.198966 \log \sum_{j=1}^{N} w_{ij} C_{jt} - 0.608632 \log \mathrm{P}_{it} + 0.233016 \log \mathrm{PN}_{it} + 0.294657 \log \mathrm{Y}_{it}$$

Dari lampiran 6 didapatkan bahwa nilai R-squared didapatkan sudah sangat besar yaitu 0.9729, sehingga taksiran model regresi spatial lag panel dengan komponen error satu arah (μ_i) sudah bagus.

4.4.2 Model Regresi Spasial Error Panel Satu Arah

Model regresi spatial error panel satu arah dengan efek tetap adalah :

$$y_{it} = x_{it}\beta + \mu_i + \phi_{it}$$

$$\phi_{it} = \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij}\phi_{it} + \varepsilon_{it}$$

Berdasarkan hasil yang terdapat pada lampiran 6 yang didapatkan dari program Matlab 7, maka taksiran model regresi spasial error panel satu arah (μ_i) dengan efek tetap sebagai berikut

$$\log C_{it} = -0.618106 \log \mathrm{P}_{\mathrm{it}} + 0.129409 \log \mathrm{PN}_{\mathrm{it}} + 0.335804 \log \mathrm{Y}_{\mathrm{it}} + 0.299957 \log \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \phi_{it}$$

Dari lampiran 6 didapatkan bahwa nilai R-squared sudah sangat besar yaitu 0.9742, sehingga taksiran model regresi spasial error panel satu arah (μ_i) dengan efek tetap sudah bagus.

Selanjutnya akan dilakukan uji asumsi pada model regresi spasial panel lag satu arah dan spasial panel error satu arah

4.5 PERIKSA ASUMSI

Dalam model regresi spasial panel diasumsikan bahwa error berdistribusi normal dengan meannya nol dan variansinya konstan serta error saling bebas.

4.5.1 Asumsi Mean Sama Dengan Nol

akan diperiksa apakah $E(\varepsilon_{it}) = 0$. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

a) Regresi spasial lag panel satu arah

Tabel 1. Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
residlag	276	-.112300	.157440	-.00000002	.035322948
Valid N (listwise)	276				

Pada tabel di atas terlihat bahwa *mean residual*-nya mendekati nol, yang dengan kata lain menunjukkan bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$.

b) Regresi spasial error panel satu arah

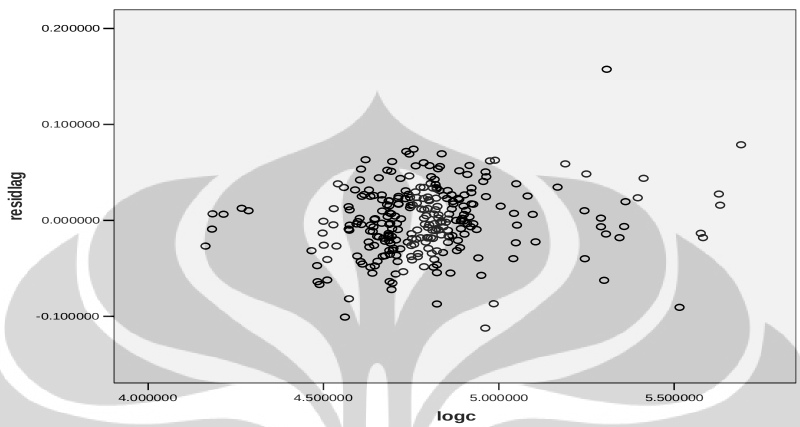
Tabel 2. Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
residerror	276	-.113460	.135540	-.00000003	.039121948
Valid N (listwise)	276				

Pada tabel di atas terlihat bahwa *mean residual*-nya mendekati nol, yang dengan kata lain menunjukkan bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$.

4.5.2 Variansi Error Konstan (*Homoskedastisitas*)

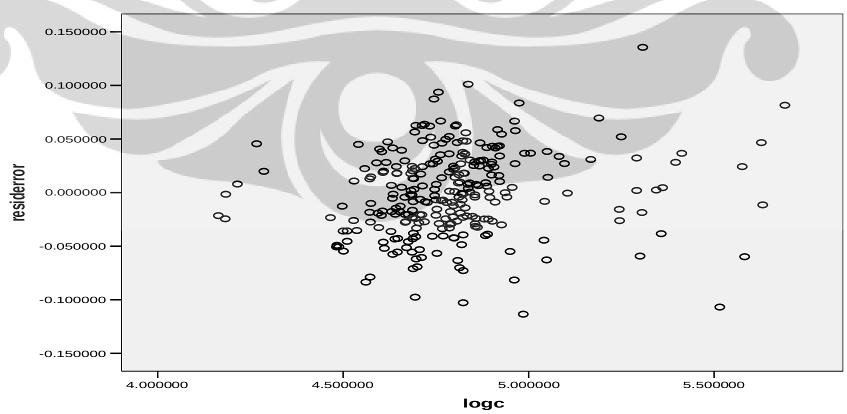
a) Regresi spasial lag panel satu arah



Gambar 5. *Scatter plot* antara nilai prediksi Y terhadap residual spasial lag

Berdasarkan gambar 5 terlihat bahwa nilai prediksi dari variabel dependen Y terhadap residual tidak membentuk pola tertentu, maka asumsi variansi konstan (*homoskedastisitas*) dianggap terpenuhi.

Regresi spasial error panel satu arah



Gambar 6. *scatter plot* antara nilai prediksi dari variabel dependen Y terhadap residual spasial error

Berdasarkan gambar 5 terlihat bahwa antara nilai prediksi dari variabel dependen Y terhadap residual tidak membentuk pola tertentu, maka asumsi variansi konstan (*homoskedastisitas*) dianggap terpenuhi.

4.5.3 Error Berdistribusi Normal

a) Regresi spatial lag panel satu arah

Asumsi ini akan di uji dengan Shapiro-Wilk.

Tabel 3. *Tests of Normality*

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
residlag	.031	276	.200(*)	.989	276	.029

* This is a lower bound of the true significance.

a Lilliefors Significance Correction

Berdasarkan uji Shapiro-Wilk di atas, dengan Hipotesis :

H0 : residual berdistribusi Normal

H1 : residual tidak berdistribusi Normal

Statistik uji: $W = \dfrac{1}{\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\hat{\varepsilon}})}\left[\sum_{t=1}^{T/2} a_t(\hat{\varepsilon}^{(T-t+1)} - \hat{\varepsilon}^{(t)})\right]^2.$

Aturan keputusan: H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha$

Dengan tingkat signifikasi 5 % didapatkan bahwa residual tidak berdisribusi normal.

b) Regresi spatial error panel satu arah

Tabel 4. *Tests of Normality*

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
residerror	.035	276	.200(*)	.996	276	.720

* This is a lower bound of the true significance.

a Lilliefors Significance Correction

Berdasarkan uji Shapiro-Wilk di atas, dengan Hipotesis :

H0 : residual berdistribusi Normal

H1 : residual tidak berdistribusi Normal

Dengan tingkat signifikasi 5 % didapatkan bahwa residual berdisribusi normal.

4.5.4 Error Saling Bebas

Akan diuji apakah terdapat korelasi antar-residual dengan menggunakan uji *Durbin-Watson*. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

Hipotesis: H_0 : Tidak ada korelasi antar-residual,

H_1 : Terdapat korelasi antar-residual.

Tingkat signifikansi: α = 0,05.

Statistik uji: $d = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$.

Aturan keputusan: H_0 ditolak jika nilai statistik uji $d \approx 2$.

Karena nilai stastistik uji *Durbin-Watson* dari model regresi spatial lag panel data satu arah dan spatial error panel data satu arah adalah d = 1.8047 dan d = 1.8004 mendekati nilai 2, maka diputuskan untuk menolak H_0. Jadi, dapat disimpulkan bahwa pada tingkat signifikansi lima persen residual tidak saling berkorelasi atau dengan kata lain tidak terjadi otokorelasi.

4.6 KESIMPULAN

Berikut adalah kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yaitu :

1. Pada model regresi spasial lag panel data satu arah diperoleh bahwa asumsi kenormalan tidak terpenuhi sehingga taksiran model yang didapat kurang baik.
2. Pada model regresi spasial error panel satu arah semua asumsi terpenuhi sehingga taksiran model yang diperoleh dapat menggambarkan keadaan penjualan rokok di 46 negara Amerika selama 6 tahun.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Model spasial dependen merupakan model yang memperhatikan dependensi spasial antara suatu lokasi dengan lokasi lainnya. Model spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu spasial lag dan spasial error.

Model spasial lag ini muncul saat nilai observasi variabel dependen pada suatu lokasi berkorelasi dengan nilai observasi variabel dependen di lokasi sekitarnya. Sedangkan model spasial error muncul saat nilai error pada suatu lokasi berkorelasi dengan nilai error di lokasi sekitarnya.

Dalam analisis regresi data panel, jika pengaruh spasial ini ada dan tidak dilibatkan dalam model maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi, sehingga model yang di peroleh menjadi kurang baik. Untuk itu dibutuhkan suatu model yang melibatkan pengaruh spatial baik itu spatial lag atau spatial error dalam analisis data panel. Model yang melibatkan pengaruh spasial ini dinamakan *spatial panel data model*. Dengan memperhatikan pengaruh spasial dependen ini diharapkan model yang didapat menjadi lebih baik dalam mempresentasikan data. Penaksiran parameter menggunakan metode maksimum likelihood.

5.2 SARAN

Saran yang perlu diperhatikan adalah

1. model yang akan dibahas hanyalah model data panel dengan efek tetap (fixed effect) yang melibatkan pengaruh spatial dependen baik itu spasial lag maupun spasial error dengan komponen error satu arah. Untuk pembahasan lebih lanjut perlu juga diperhatikan model data panel dengan efek acak (random effect) yang melibatkan pengaruh spatial dependen baik itu spatial lag atau spatial error.
2. Dalam tugas akhir ini pengaruh spatial yang dibahas hanyalah spatial lag (variabel dependen antar lokasi saling berkorelasi) dan spatial error (error antar lokasi saling berkorelasi). Untuk pembahasan lebih lanjut perlu juga diperhatikan adanya korelasi antar variabel bebas antar lokasi.
3. Diperlukan pembahasan tentang pengujian autokorelasi model spasial dependen, yaitu dengan Morans I.

DAFTAR PUSTAKA

Andra, Novi. 2007. *Model Regresi Linear pada Data Spatial Dependen*, Skripsi. Universitas Indonesia, Depok

Anselin, Luc. Le Gallo J., Jayet H. 2006. *Spatial Panel Econometrics. In: Matyas L, SevestreP. (eds) The Econometrics of Panel Data, Fundamentals and Recent Developments in Theoryand Practice*, 3rd edn. Kluwer, Dordrecht, pp 901-969

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. 7th *edition*. Interaksara, Batam *Centre*

Baltagi, Badi H. 2005. *Econometric Analysis of Panel Data*. 3rd ed. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

Elhorst , J P. 2003. *Specification and Estimation of Spatial Panel Data Models*. International Regional Science Review 26(3):244-268

Hogg, Robert V. & Allen T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.*Prentice-Hall International, New jersey

Mendenhall, W. & T. Sinsisch. 1990. *A Second Course in Statistics*: *Regression Analysis*, 5th *edition*. Prentice Hall International, New York

Montgomery, D.C. & E.A. Peck. 1992. *Introduction to Linear Regression Analysis*, 2nd *edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York

Nachrowi, D.N. & H. Usman. 2006. *Pedoman Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Lembaga Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

Rencher, Alvin C. 2002. *Method of Multivariate Analysis,* 2nd *edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Shearle, S Hayley. 1982. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

http://www.rug.nl/staff/j.p.elhorst/index, 8 April 2009, pk. 19.30.

http://www.regroningen.nl/elhorst/software.html, 8 April 2009, pk. 19.45.

http://www.spatial-econometrics.com/, 8 April 2009, pk. 20.00.

Lampiran 1

Akan dibuktikan :

θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

Dimana θ = $(\theta_1, \theta_2, ... \theta_p)$

Bukti :

$(\rightarrow)$Oleh karena θ memaksimumkan $L(\theta)$ maka :

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

  $\vdots$

  $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$

- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

- $D = \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} \cdot \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \theta_j}\right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p.j = 1, 2, …, p. i $\neq$ j

akan ditunjukkan bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$ yaitu :

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = \dfrac{1}{L(\theta)} \cdot \dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = \dfrac{1}{L(\theta)} \cdot 0$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$$

- $$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

- $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} + \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} + \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot 0 + \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i}$$

$$= \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0$$

- $D = \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p.j = 1, 2, …, p.

  i $\neq$ j

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}}{L(\theta)} \right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right)}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}}{L(\theta)} \right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}}{\partial \theta_j} \right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)}{L^2(\theta)}$$

$$D = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2$$

$$=\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot L(\theta)-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)}{L^2(\theta)}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\cdot L(\theta)-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)}{L^2(\theta)}\right)-\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)}{L^2(\theta)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{L^4(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\cdot L^2(\theta)+\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot L(\theta)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\cdot L(\theta)\right]$$

$$-\frac{1}{L^4(\theta)}\left[\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\cdot L(\theta)^2+\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2-2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)\right]$$

$$=\frac{L^2(\theta)}{L^4(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]+$$

$$\frac{L(\theta)}{L^4(\theta)}\left[-2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]$$

$$=\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{L^3(\theta)}\left[-2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)\cdot 0\cdot 0\right)-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot(0)^2-(0)^2\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]$$

$$=\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]>\frac{1}{L^2(\theta)}\cdot 0=0$$

$$\therefore D=\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_j}-\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2>0,$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Akan dibuktikan :

$(\leftarrow)$Oleh karena θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$ maka :

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$
- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

  $\vdots$
- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p
- $D = \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p.j = 1, 2, …, p.

  i $\neq$ j

akan ditunjukkan bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ yaitu :

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{L(\theta)}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1}$$

  $$= L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$
- $\therefore \dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $\vdots$

  $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{L(\theta)}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p}$$

$$= L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} + L(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\left[(0)^2 + L^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= L(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < L(\theta) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0$$

$D = \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \theta_j}\right) > 0,$ i = 1, 2, …, p.j = 1, 2, …, p. i $\neq$ j

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} = \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} = \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2 + L^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j} + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\theta_j}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\right]\right)\cdot\left(\frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]\right) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j} + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln \overset{2}{L}(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)$$

$$= \frac{1}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^4(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right.$$

$$+L^2(\theta)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} + L^2(\theta)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}$$

$$-\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^4(\theta)\cdot\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$= \frac{L^4(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$+\frac{L^2(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$= L^2(\theta)\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$= +\left[(0)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} + (0)^2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2} - 2\cdot 0\cdot 0\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$= L^2(\theta)\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2\right] > L^2(\theta)\cdot 0 = 0$$

$$\therefore D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2 > 0,$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $L(\theta)$.

Terbukti bahwa θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

LAMPIRAN 2

- Akan dibuktikan bahwa error pada model regresi spatial error satu arah

adalah : $\varepsilon_{it} = y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)$

Bukti :

Model regresi spatial error satu arah adalah :

$y_{it} = \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k + \mu_i + \phi_{it}$, dimana $\phi_{it} = \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\phi_{jt} + \varepsilon_{it}$

Maka $\varepsilon_{it} = \phi_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\phi_{jt}$ dimana

$$\phi_{it} = y_{it} - \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k - \mu_i$$

$$\phi_{jt} = y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} x_{jtk}\beta_k - \mu_j$$

Jadi

$$\varepsilon_{it} = y_{it} - \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k - \mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\left(y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} x_{jtk}\beta_k - \mu_j\right)$$

$$\varepsilon_{it} = y_{it} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_{itk} - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_{jtk}\right) - \left(\mu_i - \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\mu_j\right)$$

(terbukti)

LAMPIRAN 3

Akan ditunjukkan bahwa $I_T \otimes (I_N - \delta W_N)Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$

$$y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

Substitusikan $\mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk})$ ke dalam persamaan diatas.

$$y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk}) + \varepsilon_{it}$$

$$y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \left(y_{jt} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{jt} \right) + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk} \right) + \varepsilon_{it}$$

Misalkan :

$$y_{it}^* = y_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it} \qquad x_{itk}^* = x_{itk} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{itk}$$

$$y_{it}^* = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt}^* + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk}^* + \varepsilon_{it}$$

Atau dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$Y^* = \delta W_{NT} Y^* + X^*\beta + \varepsilon^*$$

$$Y^* - \delta W_{NT} Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

$$I_{NT} Y^* - \delta \left(I_T \otimes W_N \right) Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

$$\left(I_T \otimes I_N \right) Y^* - \delta \left(I_T \otimes W_N \right) Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

$$I_T \otimes (I_N - \delta W_N) Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

LAMPIRAN 4

1. Akan dibuktikan bahwa taksiran untuk $\hat{\beta}$ pada model regresi spatial lag panel data satu arah adalah unbiased yaitu :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$$

Bukti :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'Y^*-\left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\delta(I_T\otimes W_N)Y^*\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\left(Y^*-\delta(I_T\otimes W_N)Y^*\right)\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left(\left(X^*\right)'X^*\right)^{-1}\left(X^*\right)'\left(I_T\otimes(I_N-\delta W_N)Y^*\right)\right)$$

pada lampiran 3 diketahui bahwa $I_T\otimes(I_N-\delta W_N)Y^*=X^*\beta+\varepsilon^*$

Maka :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'\left(X^*\beta+\varepsilon^*\right)\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'X^*\beta+\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'\varepsilon^*\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'X^*\beta\right)+E\left(\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'\varepsilon^*\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E(\beta)+\left[\left(X^*\right)'X^*\right]^{-1}\left(X^*\right)'E\left(\varepsilon^*\right)$$

Karena $E\left(\varepsilon^*\right)$ = 0 maka :

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E\left(\beta\right)$$

Sehingga :

$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$ (terbukti)

2. Akan dibuktikan bahwa taksiran dari β pada model regresi spatial error panel data satu arah adalah taksiran yang unbiased yaitu :

$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$.

Bukti :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right]^{-1}\times\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(Y^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)Y^*\right)\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right]^{-1}\times\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(\left(I_T\otimes\left(I_N-\rho W_N\right)\right)Y^*\right)\right)$$

Karena :

$$\varepsilon^* = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right)\left(Y^* - X^*\beta\right)$$

$$\left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right) X^*\beta + \varepsilon^* = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right) Y^*$$

$$\left(X^* - \left(I_T \otimes \rho W_N\right) X^*\right)\beta + \varepsilon^* = \left(I_T \otimes \left(I_N - \rho W_N\right)\right) Y^*$$

Maka :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right]^{-1}\times\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)'\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\beta+\varepsilon^*\right)\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\left[\left(\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right)'\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\right]^{-1}\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)'\left(X^*-\left(I_T\otimes\rho W_N\right)X^*\right)\beta\right)+$$

$$E\left(\left[\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)'\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)\right]^{-1}\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)'\varepsilon^{*}\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E(\beta)+\left[\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)'\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)\right]^{-1}\left(X^{*}-\left(I_{T}\otimes\rho W_{N}\right)X^{*}\right)'E\left(\varepsilon^{*}\right)$$

Karena $E\left(\varepsilon^{*}\right)=E\left(\varepsilon\right)=0$ maka :

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\beta\right)$$

Sehingga :

$E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$ (terbukti)

LAMPIRAN 5

DATA

id	year	logc	logp	logpn	logy
_1	0	4.481872	0.022728	-0.08388	4.147724
_2	0	4.750136	-0.106	-0.07455	4.358906
_3	0	4.644391	-0.11886	-0.17545	4.120516
_4	0	4.822698	0.017094	-0.106	4.663844
_5	0	4.964242	-0.106	-0.08076	4.718354
_6	0	5.104733	-0.08388	-0.11886	4.476998
_7	0	5.412984	-0.26495	-0.25008	4.68057
_8	0	4.862135	-0.08388	-0.04406	4.40947
_9	0	4.65396	-0.04406	-0.16523	4.286604
_10	0	4.596129	-0.08388	-0.07455	4.297846
_11	0	4.887337	0.022728	-0.28005	4.634086
_12	0	4.900076	-0.15511	-0.28005	4.446947
_13	0	4.693181	0.0422	-0.17545	4.429141
_14	0	4.60617	-0.07146	-0.17545	4.438434
_15	0	4.961445	-0.28005	-0.25008	4.235759
_16	0	4.764735	-0.06838	-0.11886	4.239137
_17	0	4.909709	-0.08388	-0.15176	4.318704
_18	0	4.801559	-0.11886	-0.26495	4.502615
_19	0	4.85203	0.008584	-0.15176	4.582358
_20	0	4.899331	-0.08388	-0.15511	4.49791
_21	0	4.733563	-0.06224	-0.07455	4.41481
_22	0	4.488636	-0.0262	-0.11886	4.010242
_23	0	4.922168	-0.17545	-0.28005	4.463019
_24	0	4.754452	-0.07146	-0.08388	4.328858
_25	0	4.695925	-0.04707	-0.17545	4.388386
_26	0	5.245444	-0.05919	-0.106	4.649986
_27	0	5.575949	-0.15176	-0.08388	4.539662
_28	0	4.869072	-0.00866	-0.08388	4.721426
_29	0	4.60417	-0.03212	-0.1092	4.247546
_30	0	4.827513	-0.00866	-0.106	4.6344
_31	0	4.574711	-0.07455	-0.07146	4.246219
_32	0	4.865995	-0.1221	-0.28005	4.484066
_33	0	4.727388	-0.1092	-0.17545	4.293643
_34	0	4.763028	0.044951	-0.1221	4.468
_35	0	4.962145	-0.08076	-0.106	4.482228
_36	0	4.561218	-0.16523	-0.04406	4.177609
_37	0	4.609162	-0.06224	-0.07455	4.258406
_38	0	4.693181	-0.06531	-0.28005	4.253625
_39	0	4.685828	0.002869	-0.11886	4.359403
_40	0	4.16356	-0.07455	-0.106	4.303398
_41	0	4.858261	-0.0262	-0.15176	4.453614
_42	0	4.810557	-0.25008	-0.28005	4.385757
_43	0	4.620059	0.064	-0.08388	4.571063
_44	0	4.785824	-0.106	-0.28005	4.147666

_45	0	4.713127	-0.03509	-0.06224	4.43651
_46	0	4.916325	-0.06838	-0.08388	4.430257
_1	1	4.50092	-0.00273	-0.11235	4.170958
_2	1	4.734443	-0.01648	-0.09722	4.396768
_3	1	4.633758	-0.17202	-0.20492	4.131955
_4	1	4.819475	-0.00273	-0.09722	4.670913
_5	1	4.974663	-0.13081	-0.04743	4.724623
_6	1	5.167639	-0.13081	-0.17851	4.495051
_7	1	5.357529	-0.29956	-0.25991	4.667751
_8	1	4.797442	0.118086	-0.07055	4.446386
_9	1	4.687671	-0.07055	-0.23548	4.309331
_10	1	4.611152	-0.14017	-0.11846	4.33955
_11	1	4.870607	-0.04173	-0.30694	4.638831
_12	1	4.889597	-0.21163	-0.30694	4.466431
_13	1	4.681205	-0.01926	-0.20492	4.457207
_14	1	4.630838	-0.11846	-0.20492	4.456673
_15	1	4.985659	-0.30694	-0.25991	4.255834
_16	1	4.752728	-0.09722	-0.17202	4.226016
_17	1	4.906755	-0.09422	-0.20492	4.344239
_18	1	4.806477	-0.17851	-0.29956	4.524176
_19	1	4.865224	-0.04743	-0.20492	4.593345
_20	1	4.893352	-0.14017	-0.21163	4.50001
_21	1	4.721174	-0.11235	-0.12771	4.427122
_22	1	4.51086	-0.05316	-0.17202	4.03208
_23	1	4.92144	-0.20492	-0.30694	4.445534
_24	1	4.765587	-0.11846	-0.14017	4.331003
_25	1	4.685828	-0.1093	-0.20492	4.438601
_26	1	5.291293	-0.09722	-0.14017	4.665417
_27	1	5.515443	-0.20492	-0.09422	4.555977
_28	1	4.797442	0.050476	-0.13081	4.725613
_29	1	4.465908	0.032174	-0.09722	4.246368
_30	1	4.807294	0.050476	-0.13081	4.63749
_31	1	4.57368	-0.12771	-0.12462	4.28783
_32	1	4.858261	-0.15279	-0.30694	4.497588
_33	1	4.688592	0.005435	-0.20492	4.298866
_34	1	4.74232	-0.00546	-0.17851	4.485218
_35	1	4.768988	0.045281	-0.13081	4.488511
_36	1	4.646312	-0.23548	-0.07055	4.207759
_37	1	4.629863	-0.12462	-0.12771	4.264203
_38	1	4.675629	-0.11235	-0.30694	4.270539
_39	1	4.712229	-0.06472	-0.17202	4.379536
_40	1	4.183576	-0.09722	-0.14017	4.300724
_41	1	4.902307	-0.07055	-0.20492	4.456137
_42	1	4.819475	-0.25991	-0.30694	4.411605
_43	1	4.607168	0.024227	-0.14017	4.566106
_44	1	4.719391	-0.13392	-0.30694	4.163195
_45	1	4.714025	-0.08825	-0.11235	4.43944

_46	1	4.910447	-0.11846	-0.14017	4.425417
_1	2	4.497585	0.020409	-0.12327	4.201394
_2	2	4.74667	-0.0448	-0.11457	4.434069
_3	2	4.608166	-0.05564	-0.12327	4.163137
_4	2	4.812184	0	-0.0448	4.682699
_5	2	4.787492	0.084	0.012804	4.74948
_6	2	5.043425	0.005141	-0.17411	4.500714
_7	2	5.300315	-0.30852	-0.29804	4.684966
_8	2	4.817051	0.114341	-0.12327	4.485991
_9	2	4.699571	-0.12327	-0.17718	4.333002
_10	2	4.628887	-0.13796	-0.13206	4.367124
_11	2	4.826712	0.064861	-0.31556	4.638966
_12	2	4.902307	-0.23742	-0.31556	4.444754
_13	2	4.68675	-0.02876	-0.13501	4.464044
_14	2	4.736198	-0.12619	-0.13501	4.476573
_15	2	5.048573	-0.31556	-0.29804	4.283475
_16	2	4.752728	-0.12327	-0.06936	4.245938
_17	2	4.855929	-0.02083	-0.21161	4.381987
_18	2	4.816241	-0.17411	-0.30852	4.558425
_19	2	4.822698	0.020409	-0.21161	4.618287
_20	2	4.856707	-0.14092	-0.23742	4.477634
_21	2	4.647271	0.007702	-0.03943	4.452895
_22	2	4.536891	-0.06936	-0.12327	4.057368
_23	2	4.798267	-0.0749	-0.31556	4.46996
_24	2	4.71133	-0.13206	-0.13796	4.377896
_25	2	4.683057	-0.13501	-0.12912	4.441994
_26	2	5.244389	0.002574	-0.13796	4.725768
_27	2	5.582368	-0.21161	-0.02876	4.546766
_28	2	4.793308	0.055152	-0.01036	4.754656
_29	2	4.49981	0.022931	-0.11457	4.27378
_30	2	4.779123	0.047808	-0.02876	4.665029
_31	2	4.541165	-0.03943	-0.13206	4.260247
_32	2	4.800737	-0.05837	-0.31556	4.495427
_33	2	4.685828	-0.01036	-0.12619	4.334227
_34	2	4.675629	-0.01036	-0.17411	4.500661
_35	2	4.819475	0.012804	0.020409	4.503772
_36	2	4.640537	-0.17718	-0.12327	4.238224
_37	2	4.529368	-0.00776	-0.13501	4.286015
_38	2	4.603168	0.027956	-0.31556	4.288179
_39	2	4.667206	0.04041	-0.12327	4.407896
_40	2	4.18205	-0.11457	-0.13796	4.33971
_41	2	4.808927	-0.02876	-0.21161	4.471111
_42	2	4.822698	-0.29804	-0.31556	4.438445
_43	2	4.571613	-0.00258	-0.13796	4.547985
_44	2	4.740575	-0.14092	-0.31556	4.227319
_45	2	4.667206	-0.00776	-0.02876	4.455256

_46	2	4.884316	-0.12912	-0.13796	4.434038
_1	3	4.558079	0.052897	-0.12335	4.230815
_2	3	4.696837	-0.05064	-0.10125	4.473317
_3	3	4.645352	-0.04288	-0.0958	4.203538
_4	3	4.795791	-0.01995	-0.05064	4.691304
_5	3	4.767289	0.11641	-0.00743	4.75733
_6	3	5.082025	0.019561	-0.16908	4.523036
_7	3	5.361292	-0.21699	-0.29346	4.732632
_8	3	4.812184	0.078332	-0.12335	4.513101
_9	3	4.751001	-0.12335	-0.16616	4.3662
_10	3	4.68675	-0.18678	-0.16325	4.383778
_11	3	4.833102	0.021979	-0.29678	4.669484
_12	3	4.93663	-0.22934	-0.29678	4.47903
_13	3	4.685828	-0.05064	-0.15456	4.461233
_14	3	4.632785	-0.04031	-0.15456	4.519479
_15	3	5.096813	-0.29678	-0.29346	4.307393
_16	3	4.785824	-0.03008	-0.07696	4.263222
_17	3	4.891852	-0.04288	-0.172	4.394471
_18	3	4.841822	-0.16908	-0.29346	4.584779
_19	3	4.799091	0.01227	-0.172	4.641369
_20	3	4.837075	-0.03263	-0.22934	4.51769
_21	3	4.757033	-0.00993	-0.05064	4.466222
_22	3	4.657763	-0.07696	-0.04288	4.0992
_23	3	4.8489	-0.0958	-0.29678	4.494184
_24	3	4.750136	-0.15456	-0.18678	4.377309
_25	3	4.687671	-0.15456	-0.16325	4.470677
_26	3	5.249652	0.082888	-0.18678	4.731904
_27	3	5.627621	-0.172	-0.04288	4.562523
_28	3	4.829113	0.029199	0.019561	4.781466
_29	3	4.528289	0.029199	-0.10125	4.313828
_30	3	4.81462	0.029199	-0.025	4.68686
_31	3	4.590057	-0.04031	-0.15456	4.359485
_32	3	4.825109	-0.06109	-0.29678	4.514648
_33	3	4.748404	-0.01744	-0.0958	4.347717
_34	3	4.666265	0.098672	-0.16908	4.51525
_35	3	4.813809	-0.00743	0.01227	4.503731
_36	3	4.744932	-0.16616	-0.12335	4.258615
_37	3	4.571613	-0.05064	-0.16325	4.332614
_38	3	4.666265	0.026798	-0.29678	4.324229
_39	3	4.69043	0.036368	-0.04288	4.41569
_40	3	4.215086	-0.10125	-0.18678	4.367373
_41	3	4.823502	-0.025	-0.172	4.506316
_42	3	4.85515	-0.29346	-0.29678	4.477048
_43	3	4.574711	-0.00495	-0.18678	4.54916
_44	3	4.714025	0.026798	-0.29678	4.260377
_45	3	4.657763	-0.00743	-0.05064	4.482578

_46	3	4.880527	-0.16325	-0.18678	4.463367
_1	4	4.61611	0.011891	-0.11123	4.285007
_2	4	4.828314	-0.09531	-0.11659	4.510036
_3	4	4.643429	0.053563	-0.11123	4.256817
_4	4	4.816241	-0.04652	-0.09531	4.711933
_5	4	4.707727	0.204794	-0.0048	4.774018
_6	4	5.051777	0.067077	-0.19775	4.565075
_7	4	5.396351	-0.2154	-0.33504	4.777102
_8	4	4.836282	0.112987	-0.02177	4.555696
_9	4	4.762174	-0.02177	-0.2036	4.418207
_10	4	4.837075	-0.2154	-0.19484	4.460124
_11	4	4.841033	0.002389	-0.3119	4.692365
_12	4	5.005288	-0.25166	-0.3119	4.513129
_13	4	4.695011	0.002389	-0.10324	4.533981
_14	4	4.70953	-0.07448	-0.10324	4.591981
_15	4	5.189618	-0.3119	-0.33504	4.350156
_16	4	4.830711	-0.04402	-0.11123	4.29824
_17	4	4.916325	-0.0072	-0.1466	4.429704
_18	4	4.891852	-0.19775	-0.33504	4.613025
_19	4	4.769837	0.095745	-0.1466	4.666142
_20	4	4.878246	-0.04402	-0.25166	4.563176
_21	4	4.572647	0.078201	-0.0719	4.498529
_22	4	4.719391	-0.11123	-0.04402	4.161058
_23	4	4.867534	-0.10324	-0.3119	4.522437
_24	4	4.805659	-0.04152	-0.2154	4.479527
_25	4	4.653008	-0.01689	-0.19484	4.540754
_26	4	5.291293	-0.02913	-0.2154	4.740624
_27	4	5.691035	-0.1466	-0.04402	4.589323
_28	4	4.85515	0.007151	0.021303	4.803016
_29	4	4.598146	-0.01689	-0.11659	4.364563
_30	4	4.786658	0.021303	-0.04402	4.700908
_31	4	4.642466	-0.0719	-0.06677	4.503046
_32	4	4.823502	-0.08484	-0.3119	4.54308
_33	4	4.801559	-0.04903	-0.10324	4.373499
_34	4	4.691348	0.067077	-0.19775	4.543278
_35	4	4.90082	-0.0048	0.095745	4.537502
_36	4	4.776599	-0.2036	-0.02177	4.30228
_37	4	4.634729	-0.06677	-0.19484	4.437856
_38	4	4.714025	-0.0048	-0.33504	4.384053
_39	4	4.687671	0.115121	-0.04903	4.447514
_40	4	4.266896	-0.11659	-0.2154	4.413172
_41	4	4.927254	-0.04402	-0.1466	4.504265
_42	4	4.919981	-0.33504	-0.3119	4.520524
_43	4	4.483003	0.097917	-0.2154	4.579067
_44	4	4.766438	-0.01203	-0.33504	4.312318
_45	4	4.689511	-0.03654	0.002389	4.513566
_46	4	4.941642	-0.19484	-0.2154	4.554962

_1	5	4.633758	-0.05319	-0.17425	4.33463
_2	5	4.854371	-0.1374	-0.19593	4.554347
_3	5	4.682131	0.015643	-0.17425	4.341281
_4	5	4.823502	-0.10686	-0.1374	4.744489
_5	5	4.694096	0.130712	-0.08947	4.818668
_6	5	5.041488	-0.00905	-0.22936	4.604736
_7	5	5.344246	-0.25228	-0.38871	4.784283
_8	5	4.887337	0.065383	-0.05319	4.615017
_9	5	4.785824	-0.04609	-0.28169	4.471864
_10	5	4.80238	-0.20142	-0.25518	4.541431
_11	5	4.823502	-0.07967	-0.37224	4.755172
_12	5	5.049856	-0.29977	-0.37224	4.602288
_13	5	4.70592	-0.05795	-0.16358	4.689256
_14	5	4.74667	-0.12201	-0.16358	4.681191
_15	5	5.307773	-0.37224	-0.38871	4.41033
_16	5	4.841822	-0.10686	-0.17425	4.341293
_17	5	4.927254	-0.07967	-0.18503	4.467839
_18	5	4.922168	-0.22936	-0.38871	4.658829
_19	5	4.797442	0.035402	-0.18503	4.69585
_20	5	4.895598	-0.09937	-0.29977	4.617707
_21	5	4.670958	0.026668	-0.11947	4.621879
_22	5	4.744932	-0.17425	-0.10686	4.227299
_23	5	4.883559	-0.16358	-0.37224	4.585058
_24	5	4.786658	-0.08211	-0.25518	4.568872
_25	5	4.669084	-0.0748	-0.25518	4.659764
_26	5	5.305789	-0.09689	-0.20142	4.774066
_27	5	5.631212	-0.18503	-0.10937	4.640593
_28	5	4.789157	0.096538	-0.00905	4.83608
_29	5	4.594109	-0.06034	-0.19593	4.396978
_30	5	4.776599	0.031045	-0.10937	4.719539
_31	5	4.688592	-0.11947	-0.11441	4.846211
_32	5	4.79165	-0.05557	-0.37224	4.591793
_33	5	4.821088	-0.09441	-0.16358	4.454551
_34	5	4.706824	0.011198	-0.22936	4.586794
_35	5	4.955827	-0.08947	0.035402	4.552546
_36	5	4.832306	-0.28169	-0.04609	4.359757
_37	5	4.639572	-0.11441	-0.25518	4.633356
_38	5	4.697749	-0.08456	-0.38871	4.43715
_39	5	4.70411	0.04406	-0.10686	4.508234
_40	5	4.286341	-0.19593	-0.25518	4.438372
_41	5	4.989071	-0.10937	-0.18503	4.541903
_42	5	4.963544	-0.38871	-0.37224	4.570991
_43	5	4.51086	0.033226	-0.20142	4.639138
_44	5	4.758749	-0.10686	-0.38871	4.345616
_45	5	4.695925	-0.04139	-0.07967	4.566022
_46	5	4.950177	-0.25518	-0.20142	4.619767

LAMPIRAN 6

OUTPUT MODEL

1. MODEL REGRESI PANEL SATU ARAH

Dependent Variable: LOGC?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/07/09 Time: 01:36
Sample: 1 276
Included observations: 276
Total panel observations 276

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOGP?	-1.041989	0.121016	-8.610354	0.0000
LOGPN?	0.146363	0.124377	1.176771	0.2403
LOGY?	0.703143	0.066013	10.65159	0.0000
Fixed Effects				
_A--C	1.605485			

R-squared	0.386135	Mean dependent var	4.798510
Adjusted R-squared	0.379364	S.D. dependent var	0.226930
S.E. of regression	0.178776	Sum squared resid	8.693389
Log likelihood	223.5546	F-statistic	85.54694
Durbin-Watson stat	0.469263	Prob(F-statistic)	0.000000

2. MODEL REGRESI SPATIAL LAG PANEL DATA SATU ARAH

Dependent Variable = logcit

R-squared = 0.9729

Rbar-squared = 0.9670

sigma^2 = 0.0014

Durbin-Watson = 1.8047

Nobs,Nvar,TNvar = 276, 3, 50

log-likelihood = 514.76733

# of iterations = 12

min and max rho = -1.0000, 1.0000

total time in secs = 0.0630

time for lndet = 0.0470

No lndet approximation used

****

Variable	Coefficient	Asymptot t-stat	z-probability
logp	-0.608632	-12.653520	0.000000
logpn	0.233016	3.559311	0.000372
logy	0.294657	7.708424	0.000000
W*dep.var.	0.198966	2.952892	0.003148

3. MODEL REGRESI SPATIAL ERROR PANEL DATA SATU ARAH

Dependent Variable = logcit
R-squared = 0.9742
Rbar-squared = 0.9687
sigma^2 = 0.0013
Durbin-Watson = 1.8004
log-likelihood = 519.38811
Nobs,Nvar,TNvar = 276, 3, 49
iterations = 13
min and max rho = -0.9900, 0.9900
total time in secs = 0.1090
time for optimiz = 0.0310
time for lndet = 0.0620
No lndet approximation used

****

Variable	Coefficient	Asymptot t-stat	z-probability
Logp	-0.618106	-13.173758	0.000000
logpn	0.129409	2.020164	0.043366
logy	0.335804	7.491020	0.000000
spat.aut.	0.299957	4.467190	0.000008

LAMPIRAN 7

MODEL REGRESI SPASIAL LAG PANEL SATU ARAH

$$Y = \delta W_{NT} Y + X\beta + \left(\iota_T \otimes I_N\right)\mu + \varepsilon$$

Dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{N2} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ y_{2T} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{bmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \begin{matrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & w_{NN} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & w_{NN} \end{matrix} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & & \begin{matrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & w_{NN} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{N2} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ y_{2T} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{bmatrix} + \ldots$$

$$\begin{bmatrix} x_{111} & x_{112} & \cdots & x_{11k} \\ x_{211} & x_{212} & \cdots & x_{21k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N11} & x_{N12} & \cdots & x_{N1k} \\ x_{121} & x_{122} & \cdots & x_{12k} \\ x_{221} & x_{222} & \cdots & x_{22k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N21} & x_{N22} & \cdots & x_{N2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1T1} & x_{1T2} & \cdots & x_{1Tk} \\ x_{2T1} & x_{2T2} & \cdots & x_{2Tk} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{NT1} & x_{NT2} & x_{NT2} & x_{NTk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \varepsilon_{2T} \\ \vdots \\ \varepsilon_{NT} \end{pmatrix}$$

LAMPIRAN 8

ITERASI NEWTON-RAPHSON

Misalkan diketahui :

$$L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) ... f(x_n, \theta),$$

Taksiran parameter θ diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood yang ekuivalen dengan memaksimumkan logaritma dari fungsi likelihood. Nilai θ yang memaksimumkan fungsi log-likelihood diperoleh dengan mencari solusi persamaan berikut ini :

$$\frac{\partial Ln(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Kadang kala untuk mendapatkan taksiran θ tidak langsung didapatkan. Untuk mengatasi hal ini diperlukan suatu iterasi numerik yaitu iterasi newton-raphson.

Pada iterasi ini fungsi objektif LnL diaproksimasi dengan *second order taylor series* disekitar *initial value* $\theta^{(1)}$. Secara umum metode ini melakukan aproksimasi dengan taylor order kedua untuk log likelihood disekitar nilai parameter permulaan, yaitu :

$$LnL = LnL\big|_{\theta^{(1)}} + \frac{\partial LnL}{\partial \theta}\bigg|_{\theta^{(1)}} \left(\theta - \theta^{(1)}\right) + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta^{(1)}} \frac{\left(\theta - \theta^{(1)}\right)^2}{2}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter θ dengan operasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(1)}} \left(\theta - \theta^{(1)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(1)}} \left(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(1)}} \left(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(1)}}$$

$$\left(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(1)}}\right)^{-1}$$

$$\theta^{(2)} = \theta^{(1)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(1)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(1)}}\right)^{-1}$$

Bila persamaan diatas , $\theta^{(2)}$ menggantikan $\theta^{(1)}$ maka akan diperoleh $\theta^{(3)}$ dan seterusnya. Sehingga persamaan umumnya dapat ditulis sebagai berikut : $\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(n)}} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(n)}}\right)^{-1}$

Persamaan inilah yang disebut dengan *Newton-Raphson Iteration*. Jika iterasi sudah konvergen yaitu $\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)}$, atau $\left|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\right| < \varepsilon$ maka dari persamaan diatas dapat disimpulkan $\left.\frac{\partial LnL}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(n)}} = 0$ dimana memenuhi syarat kondisi turunan pertama.