GENERALISASI TEOREMA MENELAUS DAN TEOREMA CEVA PADA POLIGON DI BIDANG EUCLID

EDI SETIAWAN

0304010196

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

GENERALISASI TEOREMA MENELAUS DAN TEOREMA CEVA PADA POLIGON DI BIDANG EUCLID

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

EDI SETIAWAN

0304010196

DEPOK

2009

SKRIPSI : GENERALISASI TEOREMA MENELAUS DAN TEOREMA CEVA PADA POLIGON DI BIDANG EUCLID

NAMA : EDI SETIAWAN

NPM : 0304010196

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 17 JUNI 2009

RAHMI RUSIN, S.SI, M.SC. TECH	ARIE WIBOWO S.SI, M.SI.
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus ujian sidang sarjana :

Penguji I : Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc. Tech

Penguji II : Dra. Rustina

Penguji III : Dra. Nora Hariadi, M.Si

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga tercurah kepada junjungan Rasulullah Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat, dan para pengikutnya hingga akhir zaman.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan selesai tanpa bantuan, dorongan, dan do'a dari orang-orang di sekitar penulis. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, khususnya kepada:

1. Ibu Rahmi Rusin, selaku pembimbing I, terima kasih atas segala saran dan bimbingannya selama ini.
2. Bapak Arie Wibowo, selaku pembimbing II, terima kasih atas segala saran dan bimbingannya selama ini.
3. Ibu Yekti dan ibu Siti Aminah, selaku pembimbing akademik penulis, terima kasih atas saran, bimbingan, dan dorongan semangat selama penulis menempuh perkuliahan di matematika.

4. Bapak Djati Kerami, ibu Sri Mardiyati, ibu Kiki Ariyanti, ibu Suarsih Utama, dan ibu Nora Hariadi. Terima kasih atas saran yang diberikan pada penyusunan tugas akhir ini.
5. Seluruh dosen matematika UI yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terima kasih atas bimbingannya sehingga penulis memperoleh pengalaman akan luasnya dunia matematika.
6. Teman-teman di matematika UI yang telah membantu penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
7. Seluruh karyawan matematika UI, terima kasih atas bantuannya selama penulis kuliah di matematika UI.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Semoga skripsi ini berguna bagi penelitian selanjutnya.

Penulis

2009

ABSTRAK

Teorema Menelaus dan Teorema Ceva merupakan teorema pada *plane geometry*. Kedua teorema tersebut pertama kali dikemukakan pada segitiga, untuk selanjutnya kedua teorema tersebut dapat berlaku juga pada poligon. Pada tugas akhir ini akan dibahas pembuktian kedua teorema tersebut pada poligon menggunakan perbandingan luas pada segitiga.

Kata kunci: Teorema Menelaus, Teorema Ceva, perbandingan luas segitiga, *plane geometry*, dan poligon.

vi + 33 hlmn.;lamp.

Bilbliografi : 6 (1989 - 2006)

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Geometri sebagai salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika ada sejak 300 tahun sebelum masehi. Hal ini ditandai dengan kemunculan buku *Euclid Elements* yang terdiri dari 13 bagian. Buku tersebut memuat 465 proposisi geometri (Cederberg, 1989).

Dalam perkembangannya geometri terbagi menjadi beberapa cabang, tiga diantaranya adalah *plane geometry*, *solid geometry* dan *spherical geometry*. *Plane geometry* membahas masalah geometri terkait dengan garis, lingkaran, segitiga dan poligon pada bidang datar. *Solid geometry* membahas masalah geometri terkait garis, bola dan *polyhedron* pada suatu ruang, sedangkan *spherical geometry* membahas masalah geometri terkait dengan *spherical triangle* dan *spherical poligon* pada sebuah bola (Wiesstein, 2006). Dari setiap cabang geometri tersebut muncul teorema-teorema yang terkait dengan pokok pembahasan masalah geometrinya.

Teorema Menelaus dan Teorema Ceva merupakan salah satu teorema pada *plane geometry*. Pembuktian Teorema Menelaus pada segitiga, dapat dilakukan dengan prinsip kesebangunan maupun prinsip perbandingan luas pada segitiga. Pembuktian Teorema Ceva pada segitiga dapat dilakukan dengan menggunakan Teorema Menelaus dan prinsip perbandingan luas pada segitiga.

Teorema Menelaus dan Teorema Ceva ternyata tidak hanya berlaku pada segitiga saja, tetapi juga pada poligon. Pada tugas akhir ini akan dibahas mengenai Teorema Menelaus dan Teorema Ceva pada poligon dan pembuktian kedua teorema tersebut dengan menggunakan prinsip perbandingan luas pada segitiga.

1.2 Permasalahan

Bagaimana membuktikan Teorema Menelaus dan Teorema Ceva pada poligon dengan prinsip perbandingan luas segitiga ?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah membahas Teorema Menelaus dan Teorema Ceva pada poligon.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembuktian Teorema Menelaus dan Teorema Ceva hanya dibatasi pada bidang Euclid.

1.5 Sistematika Penulisan

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Berisi geometri insidensi pada bidang, rasio trigonometri, dan perbandingan luas segitiga.

Bab III Isi

Berisi pembuktian Teorema Menelaus dan Teorema Ceva.

Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Geometri Insidensi pada Bidang Euclid

Sebelum membahas geometri insidensi terlebih dahulu akan dijelaskan ruang Euclid. Ruang Euclid berdimensi-*n* ($\mathbf{E}^n$) pada dasarnya mempunyai elemen yang sama dengan $\mathbf{R}^n$, yaitu himpunan semua *n*-pasangan terurut $(x_1,x_2,..,x_n)$ dari bilangan riil (Jennings, 1994). Namun tidak seperti pada $\mathbf{R}^n$, pada $\mathbf{E}^n$ tidak terdapat sistem koordinat. Dengan mengacu pada pengertian tersebut, maka bidang Euclid ($\mathbf{E}^2$) akan mempunyai elemen yang sama dengan $\mathbf{R}^2$.

Geometri insidensi membahas masalah interaksi antara titik, garis, dan bidang (Kay, 2001). Adapun titik, garis, dan bidang merupakan elemen geometri yang tidak didefinisikan (Moise, 1990). Beberapa definisi dan teorema yang terdapat pada bab ini mengacu pada (Moise,1990) dan (Kay, 2001). Pembahasan geometri insidensi akan dimulai dari definisi jarak.

Definisi 2.1.1

Misalkan *S* himpunan titik-titik dan $d : S \times S \to \mathbb{R}$ adalah suatu pemetaan. Maka *d* disebut jarak jika untuk setiap P, Q, dan R anggota *S*, pemetaan *d* memenuhi:

1. $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \geq 0$.
2. $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(\mathrm{Q},\mathrm{P})$.
3. $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.
4. $d(\mathrm{P},\mathrm{S}) \leq d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + d(\mathrm{Q},\mathrm{S})$.

Untuk selanjutnya jarak antara dua titik P dan Q yaitu $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ akan dinotasikan sebagai PQ.

Definisi 2.1.2

Misalkan $f : L \to \mathbb{R}$ adalah korespondensi satu-satu antara garis *L* dan bilangan riil. Jika untuk setiap titik P dan Q pada garis *L* berlaku PQ = $|\, f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{Q})|$, maka *f* adalah sistem koordinat dari garis *L*.

Berdasarkan Definisi 2.1.2, maka didapat aksioma yang mengaitkan titik-titik pada sebuah garis dengan bilangan riil.

Aksioma 2.1.1

Setiap titik pada sebuah garis dapat dipasangkan dengan sebuah bilangan riil yang selanjutnya disebut sebagai koordinat, sehingga:

1. Setiap titik pada garis memiliki koordinat yang unik.
2. Tidak ada dua titik yang dipasangkan pada koordinat yang sama.
3. Untuk sembarang dua titik P dan Q pada garis L, maka terdapat suatu sistem koordinat sedemikian sehingga titik P dipasangkan ke nol dan titik Q dipasangkan ke bilangan riil positif.
4. Jika titik A dan B pada garis masing-masing memiliki koordinat a dan b, maka $AB = |a - b|$.

Definisi 2.1.3

Untuk sembarang tiga titik A, B, dan C, maka B dikatakan terletak diantara A dan C yang biasa ditulis A-B-C, jika A, B, dan C adalah tiga titik berbeda, terletak pada satu garis, dan berlaku $AB + BC = AC$.

Berdasarkan Definisi 2.1.3, maka diperoleh definisi dan aksioma yang membahas elemen geometri.

Definisi 2.1.4

1. Ruas garis yang menghubungkan titik A dan titik B yang dinotasikan dengan $\overline{AB}$ didefinisikan sebagai $\overline{AB} = \{X \mid A\text{-}X\text{-}B,\ X = A, \text{ atau } X = B\}$.

   Ruas garis $\overline{AB}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

2. Sinar yang berpangkal di titik A dan melalui titik B yang dinotasikan dengan $\overrightarrow{AB}$ didefinisikan sebagai $\overrightarrow{AB} = \{X \mid A\text{-}X\text{-}B,\ A\text{-}B\text{-}X,\ X = A, \text{ atau } X = B\}$.

   Sinar $\overrightarrow{AB}$ dapat digambar sebagai berikut:

3. Garis yang melalui titik A dan titik B yang dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{AB}$ didefinisikan sebagai $\overleftrightarrow{AB} = \{X \mid X\text{-}A\text{-}B,\ A\text{-}X\text{-}B,\ A\text{-}B\text{-}X,\ X = A, \text{ atau } X = B\}$.

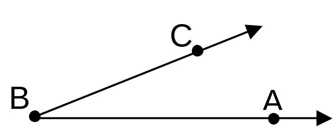
   Garis $\overleftrightarrow{AB}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

4. Sudut ABC yang dinotasikan dengan $\angle ABC$ didefinisikan sebagai

   $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$, dengan A, B, dan C tidak terletak pada satu garis.

   Sudut $\angle ABC$ dapat digambarkan sebagai berikut:

Aksioma 2.1.2

Setiap sudut $\angle ABC$ dapat dikaitkan dengan suatu bilangan riil antara 0 dan 180, yang selanjutnya disebut ukuran sudut yang dinotasikan dengan $m\angle ABC$.

Berkenaan dengan sudut dan ukuran sudut, maka didapat definisi berikut:

Definisi 2.1.5

Dua buah sudut dikatakan *supplementary pair*, jika jumlah dari ukuran sudutnya adalah 180, jika jumlah dari ukuran sudutnya 90 dikatakan *complementary pair*.

Definisi 2.1.6

Sudut siku-siku adalah sudut yang besarnya 90. Dua buah garis atau sinar dikatakan tegaklurus jika kedua garis atau sinar tersebut memuat sudut siku-siku.

2.2 Rasio Trigonometri pada Segitiga

Sebelum membahas trigonometri pada segitiga, akan diberikan definisi dari segitiga, yaitu:

Definisi 2.2.1

Jika A, B, dan C adalah titik-titik pada sebuah bidang dan ketiganya tidak segaris, maka himpunan $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ disebut segitiga. Titik A, B, dan C disebut titik sudut dan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$ disebut sisi segitiga.

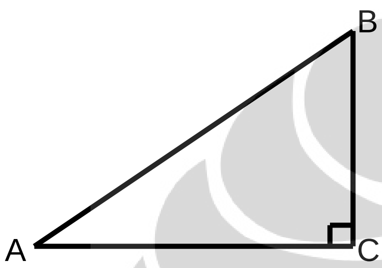
Oleh karena segitiga merupakan gabungan dari tiga buah ruas garis yang masing-masing merupakan himpunan bagian dari sebuah sinar, maka pada segitiga terdapat tiga buah sudut. Adapun sudut yang terdapat pada segitiga berdasarkan Definisi 2.2.1 di atas adalah $\angle ABC = \angle B$, $\angle BCA = \angle C$, dan $\angle CAB = \angle A$.

Berdasarkan ukuran sudut terbesar yang dimiliki sebuah segitiga, maka segitiga dibedakan menjadi tiga, yaitu segitiga lancip, segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul.

Berkenaan dengan segitiga siku-siku, maka terdapat definisi rasio trigonometri pada segitiga.

Definisi 2.2.2

Misalkan segitiga ABC siku-siku di titik C ($m\angle ACB = 90$), maka didefinisikan rasio trigonometri sebagai berikut:



$\sin\angle A = \dfrac{BC}{BA}$, $\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$, dan $\tan\angle A = \dfrac{CB}{CA}$

juga

$\sin\angle B = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos\angle B = \dfrac{BC}{BA}$, dan $\tan\angle B = \dfrac{CA}{CB}$

Selanjutnya juga didefinisikan bahwa:

$\sin\angle(180 - A) = \sin\angle A$, dan $\cos\angle(180 - A) = -\cos\angle A$.

2.3 Perbandingan Luas pada Segitiga

Pembahasan pada subbab 2.3 akan dimulai dengan definisi dari tinggi segitiga, yaitu:

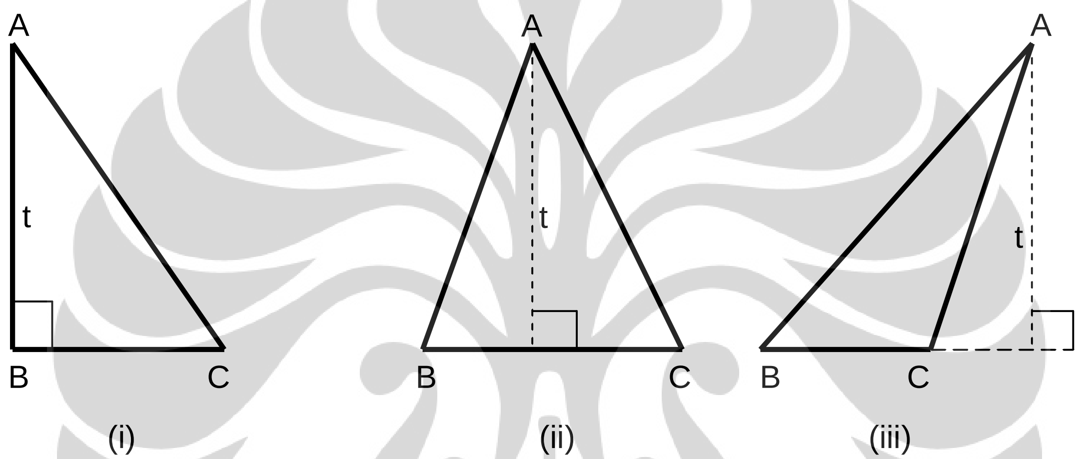
Definisi 2.3.1

Tinggi sebuah segitiga adalah ruas garis yang melalui sebuah titik sudut segitiga dan tegak lurus dengan garis yang memuat sisi di hadapannya (sisi alas).

Selanjutnya, luas sebuah segitiga dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 2.3.1

Luas sebuah segitiga adalah setengah dari hasil kali antara sisi alas dengan tinggi segitiga yang bersesuaian dengan sisi alas tersebut (Moise, 1990).



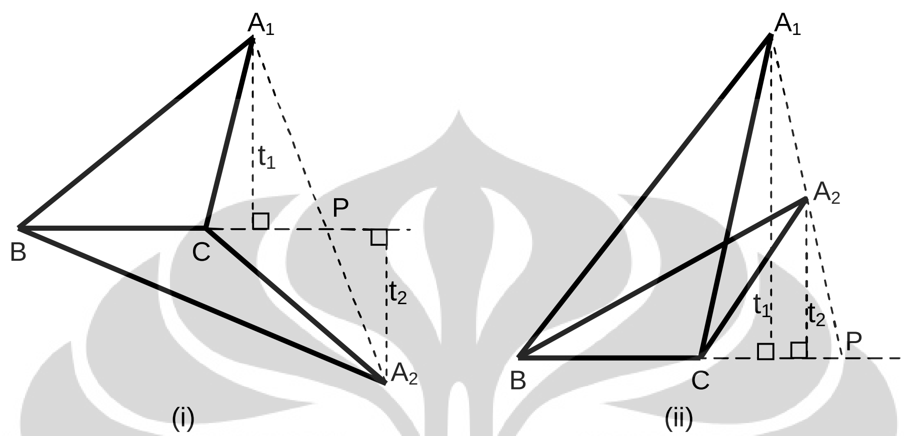
Gambar 2.3.1

Untuk ketiga segitiga pada Gambar 2.3.1, luas segitiga ABC yang selanjutnya dinotasikan dengan [ABC] adalah:

$$[ABC] = \frac{1}{2}(BC)t \tag{2.3.1}$$

Setelah membahas luas segitiga, maka akan dibahas perbandingan luas segitiga.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.3.2

Pada Gambar 2.3.2 (i) dan (ii) berlaku:

$$[A_1BC] = \frac{1}{2}(BC)t_1, \text{ dan } [A_2BC] = \frac{1}{2}(BC)t_2 .$$

dari rasio trigonometri, $t_1 = (A_1P)\sin\angle P$ dan $t_2 = A_2P\sin\angle P$.

Sehingga diperoleh:

$$\frac{[A_1BC]}{[A_2BC]} = \frac{A_1P}{A_2P} \qquad (2.3.2)$$

Persamaan (2.3.2) inilah yang kemudian disebut perbandingan luas pada segitiga.

BAB III

TEOREMA MENELAUS DAN TEOREMA CEVA PADA POLIGON

Sebelum membahas Teorema Menelaus dan Teorema Ceva, akan diberikan definisi poligon, yaitu:

Definisi 3.1.1

Misalkan diketahui n buah titik V_1, V_2, …, V_{n-1}, dan V_n, dan ruas garis $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$, …, $\overline{V_{n-1}V_n}$ dan $\overline{V_nV_1}$, maka poligon $V_1V_2…V_n$ adalah $\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V_iV_{i+1}}$, dimana pemberian indeks adalah dalam modulo-n.

Perlu ditekankan bahwa pada Definisi 3.1.1 poligon yang dimaksudkan tidak mengalami degenerasi yaitu, untuk $i \neq j \neq k$, maka $V_i \neq V_j \neq V_k$ dan $V_i \notin \overline{V_jV_k}$.

3.1 Teorema Menelaus

Sebelum melakukan pembuktian Teorema Menelaus, diasumsikan bahwa garis yang memotong poligon tidak sejajar dengan sisi poligon dan tidak memotong poligon tepat pada titik sudut poligon tersebut. Pengertian memotong sisi poligon yang dimaksud adalah garis dapat memotong poligon pada sisi atau perpanjangan sisi poligon. Pembuktikan Teorema Menelaus, akan dimulai dari teorema Menelaus pada segitiga, kemudian pada segiempat, dan terakhir pada poligon.

3.1.1 Teorema Menelaus pada Segitiga

Teorema 3.1.1

Andaikan sebuah garis memotong segitiga $V_1V_2V_3$ di titik W_1, W_2 dan W_3 masing-masing pada sisi $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$ dan $\overline{V_3V_1}$, maka berlaku:

$$\frac{V_1W_1}{W_1V_2} \times \frac{V_2W_3}{W_3V_3} \times \frac{V_3W_3}{W_3V_1} = 1.$$

Bukti:

Ambil dua titik W_i dan W_j dengan $W_i \neq W_j$, lalu jadikan $\overline{W_iW_j}$ sebagai alas segitiga.

Misalkan diambil $\overline{W_2W_3}$ sebagai alas segitiga, maka:

Pada segitiga $W_3V_1W_2$ dan segitiga $W_3V_2W_2$ diperoleh $\frac{V_1W_1}{W_1V_2} = \frac{[W_3V_1W_2]}{[W_3V_2W_2]}$.

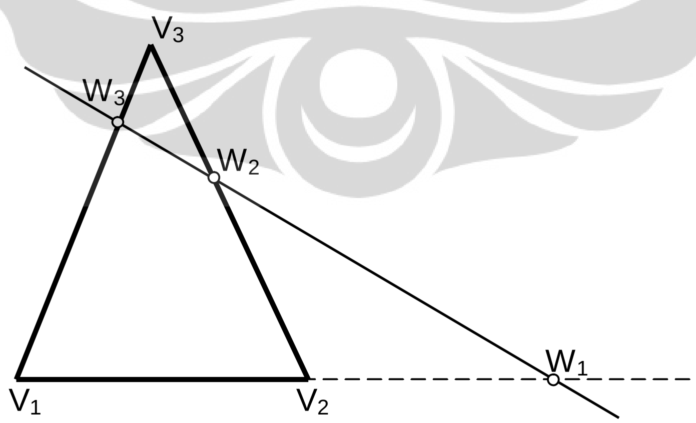
Pada segitiga $W_3V_2W_2$ dan segitiga $V_3W_3W_2$ diperoleh $\frac{V_2W_2}{W_2V_3} = \frac{[W_3V_2W_2]}{[V_3W_3W_2]}$.

Pada segitiga $V_3W_3W_2$ dan segitiga $W_3V_1W_2$ diperoleh $\frac{V_3W_3}{W_3V_1} = \frac{[V_3W_3W_2]}{[W_3V_1W_2]}$.

Sehingga dari ketiga hal di atas, diperoleh bahwa:

$$\frac{V_1W_1}{W_1V_2} \times \frac{V_2W_2}{W_2V_3} \times \frac{V_3W_3}{W_3V_1} = \frac{[W_3V_1W_2]}{[W_3V_2W_2]} \times \frac{[W_3V_2W_2]}{[V_3W_3W_2]} \times \frac{[V_3W_3W_2]}{[W_3V_1W_2]} = 1. \ \square$$

Berikut adalah contoh kondisi sebuah garis yang memotong segitiga:



Selanjutnya akan dibuktikan Teorema Menelaus pada segiempat.

3.1.2 Teorema Menelaus pada Segiempat

Teorema 3.1.2

Andaikan sebuah garis memotong segiempat $V_1V_2V_3V_4$ di titik W_1, W_2, W_3 dan W_4 masing-masing pada sisi V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4 dan V_4V_1, maka berlaku:

$$\frac{V_1W_1}{W_1V_2} \times \frac{V_2W_2}{W_2V_3} \times \frac{V_3W_3}{W_3V_4} \times \frac{V_4W_4}{W_4V_1} = 1.$$

Bukti:

Ambil dua titik W_i dan W_j dengan $W_i \neq W_j$, lalu jadikan $\overline{W_iW_j}$ sebagai alas segitiga.

Misalkan diambil $\overline{W_1W_2}$ sebagai alas segitiga, maka:

Dari segitiga $V_1W_1W_2$ dan $V_2W_1W_2$ diperoleh $\dfrac{V_1W_1}{W_1V_2} = \dfrac{[V_1W_1W_2]}{[V_2W_2W_1]}$.

Dari segitiga $V_2W_2W_1$ dan $V_3W_1W_2$ diperoleh $\dfrac{V_2W_2}{W_2V_3} = \dfrac{[V_2W_2W_1]}{[V_3W_1W_2]}$.

Dari segitiga $V_3W_1W_2$ dan $V_4W_1W_2$ diperoleh $\dfrac{V_3W_3}{W_3V_4} = \dfrac{[V_3W_1W_2]}{[V_4W_1W_2]}$.

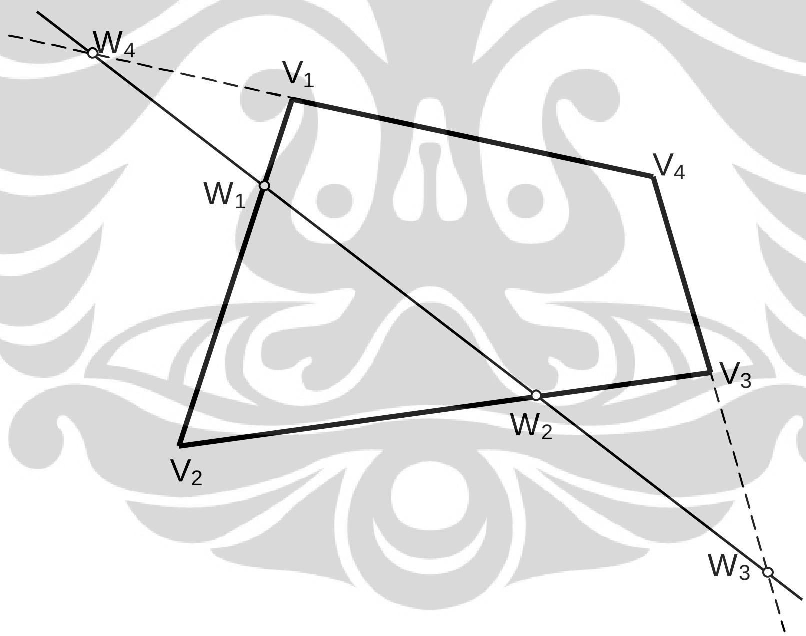
Dari segitiga $V_1W_1W_2$ dan $V_4W_1W_2$ diperoleh $\dfrac{V_4W_4}{W_4V_1} = \dfrac{[V_4W_1W_2]}{[V_1W_1W_2]}$.

Sehingga diperoleh:

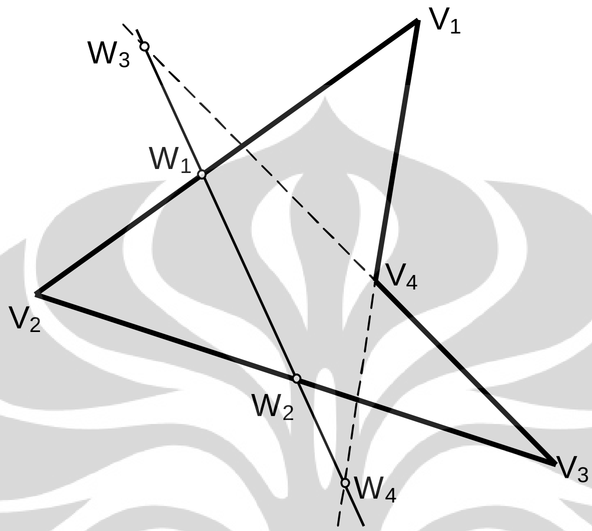
$$\frac{V_1W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_2W_2}{W_2V_3}\times\frac{V_3W_3}{W_3V_4}\times\frac{V_4W_4}{W_4V_1}=\frac{[V_1W_1W_2]}{[V_2W_2W_1]}\times\frac{[V_2W_2W_1]}{[V_3W_1W_2]}\times\frac{[V_3W_1W_2]}{[V_4W_1W_2]}\times\frac{[V_4W_1W_2]}{[V_1W_1W_2]}=1. \quad \square$$

Berikut adalah beberapa contoh kondisi dari sebuah garis yang memotong segiempat $V_1V_2V_3V_4$:

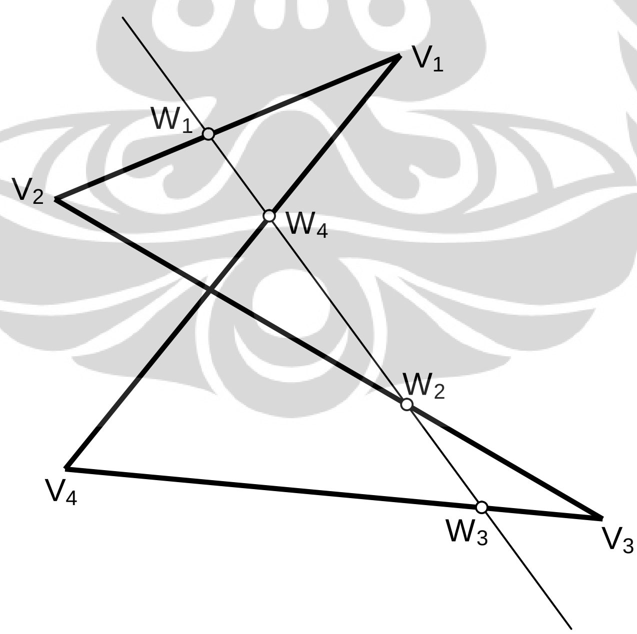
Contoh 1:



Contoh 2:



Contoh 3:



3.1.3 Teorema Menelaus pada Poligon

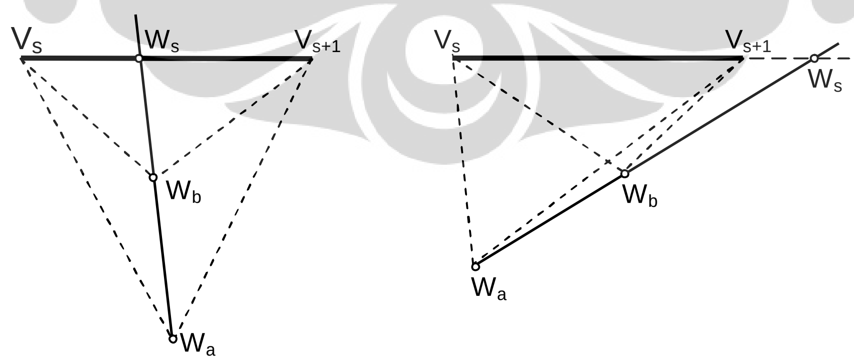
Teorema 3.1.3

Misal diketahui poligon $V_1V_2V_3....V_n$. Misalkan pula sebuah garis memotong poligon di titik $W_1, W_2, ..., W_n$ masing-masing pada sisi $V_1V_2, V_2V_3, ..., V_nV_1$, maka berlaku:

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{V_jW_j}{W_jV_{j+1}} = 1.$$

Bukti:

Mula-mula tentukan dahulu dua titik W_a dan W_b dengan $W_a \neq W_b$, lalu jadikan $\overline{W_aW_b}$ sebagai alas segitiga. Maka untuk setiap sisi poligon V_sV_{s+1} dengan s =1, 2, 3, …, n, terdapat dua kemungkinan, yaitu:



Gambar 3.1.1

Untuk kedua kasus pada Gambar 3.1.1, berlaku hal yang sama, yaitu:

$$\frac{V_sW_s}{W_sV_{s+1}}=\frac{[V_sW_aW_b]}{[V_{s+1}W_aW_b]}.$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}\frac{V_jW_j}{W_jV_{j+1}} &= \prod_{j=1}^{n}\frac{[V_jW_aW_b]}{[V_{j+1}W_aW_b]}\\ &= \frac{[V_1W_aW_b]}{[V_2W_aW_b]}\frac{[V_2W_aW_b]}{[V_3W_aW_b]}\cdots\frac{[V_{n-1}W_aW_b]}{[V_nW_aW_b]}\frac{[V_nW_aW_b]}{[V_{n+1}W_aW_b]}\\ &= \frac{[V_1W_aW_b]}{[V_{n+1}W_aW_b]}=\frac{[V_1W_aW_b]}{[V_1W_aW_b]}=1.\ \square\end{aligned}$$

3.2 Teorema Ceva

Pada Teorema Ceva berikut, teorema melibatkan satu titik selain titik sudut poligon, maka titik yang dimaksud adalah titik yang jika dibuat garis melalui titik tersebut dan titik sudut poligon, maka garis yang terbentuk tidak sejajar dengan sisi poligon serta tidak memotong poligon pada titik sudut yang lain. Pembuktian pada Teorema Ceva akan dimulai dari Teorema Ceva pada segitiga, kemudian segiempat, dan terakhir pada poligon.

3.2.1 Teorema Ceva pada Segitiga

Teorema 3.2.1

Misalkan $V_1V_2V_3$ adalah segitiga, lalu C adalah titik yang diberikan. Misalkan pula W_i adalah titik potong garis CV_i dengan ruas $V_{i-1}V_{i+1}$ dengan i =1, 2, 3 , maka berlaku:

$$\frac{V_3W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_2W_3}{W_3V_1}\times\frac{V_1W_2}{W_2V_3}=1.$$

Bukti:

Dari segitiga CV_3V_1 dan CV_1V_2 dengan sisi alas CV_1 diperoleh $\frac{V_3W_1}{W_1V_2}=\frac{[CV_3V_1]}{[CV_1V_2]}$.

Dari segitiga CV_1V_2 dan CV_2V_3 dengan sisi alas CV_2 diperoleh $\frac{V_1W_2}{W_2V_3}=\frac{[CV_1V_2]}{[CV_2V_3]}$.

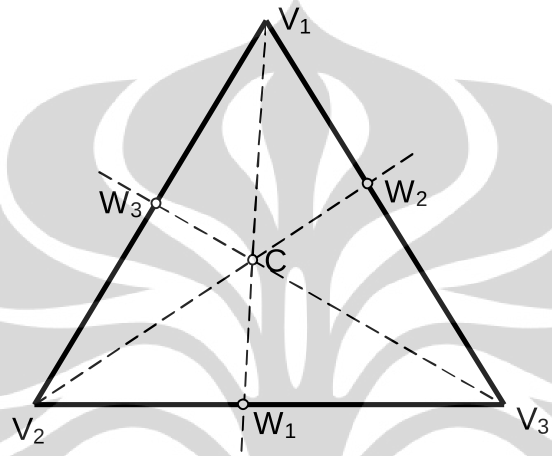
Dari segitiga CV_2V_3 dan CV_3V_1 dengan sisi alas CV_3 diperoleh $\frac{V_2W_3}{W_3V_1}=\frac{[CV_2V_3]}{[CV_3V_1]}$.

Sehingga diperoleh bahwa:

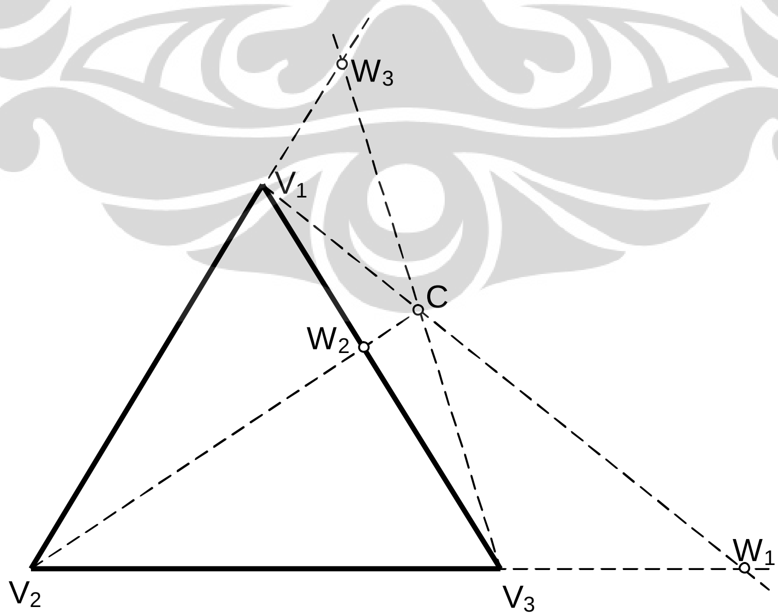
$$\frac{V_3W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_1W_2}{W_2V_3}\times\frac{V_2W_3}{W_3V_1}=\frac{[CV_3V_1]}{[CV_1V_2]}\times\frac{[CV_1V_2]}{[CV_2V_3]}\times\frac{[CV_2V_3]}{[CV_3V_1]}=1. \quad \square$$

Berikut adalah contoh kondisi segitiga dengan titik C yang dimaksudkan:

Contoh 1:



Contoh 2:



3.2.2 Teorema Ceva pada Segiempat

Teorema 3.2.2

Misalkan $V_1V_2V_3V_4$ adalah segiempat, dan C adalah titik yang diberikan. Misalkan pula W_i adalah titik potong garis CV_i dengan ruas $V_{i-1}V_{i+1}$ dengan i =1, 2, 3, 4 , maka berlaku:

$$\frac{V_4W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_1W_2}{W_2V_3}\times\frac{V_2W_3}{W_3V_4}\times\frac{V_3W_4}{W_4V_1}=1.$$

Bukti:

Dari segitiga CV_1V_2 dan CV_4V_1 dengan sisi alas CV_1 diperoleh $\frac{V_4W_1}{W_1V_2}=\frac{[CV_4V_1]}{[CV_1V_2]}$.

Dari segitiga CV_1V_2 dan CV_2V_3 dengan sisi alas CV_2 diperoleh $\frac{V_1W_2}{W_2V_3}=\frac{[CV_1V_2]}{[CV_2V_3]}$.

Dari segitiga CV_2V_3 dan CV_3V_4 dengan sisi alas CV_3 diperoleh $\frac{V_2W_3}{W_3V_4}=\frac{[CV_2V_3]}{[CV_3V_4]}$.

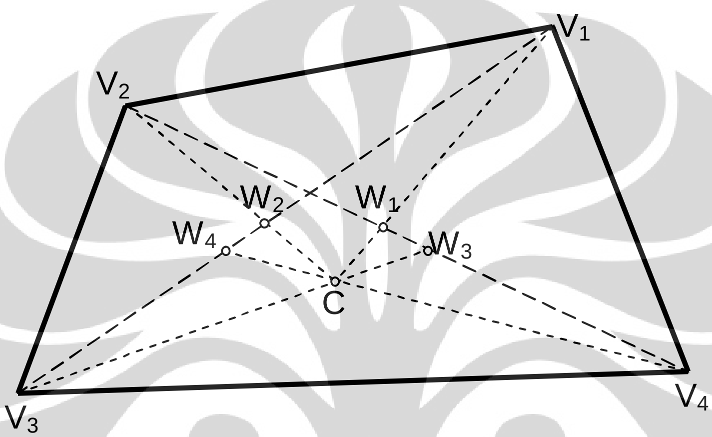
Dari segitiga CV_3V_4 dan CV_4V_1 dengan sisi alas CV_4 diperoleh $\frac{V_3W_4}{W_4V_1}=\frac{[CV_3V_4]}{[CV_4V_1]}$.

Sehingga diperoleh:

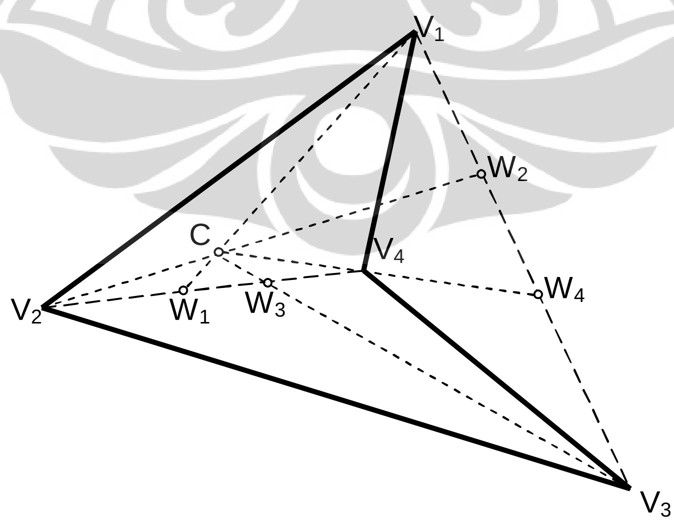
$$\frac{V_4W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_1W_2}{W_2V_3}\times\frac{V_2W_3}{W_3V_4}\times\frac{V_3W_4}{W_4V_1}=\frac{[CV_4V_1]}{[CV_1V_2]}\times\frac{[CV_1V_2]}{[CV_2V_3]}\times\frac{[CV_2V_3]}{[CV_3V_4]}\times\frac{[CV_3V_4]}{[CV_4V_1]}=1.\ \square$$

Berikut adalah beberapa contoh kondisi segiempat dan titik C seperti yang dimaksudkan di atas:

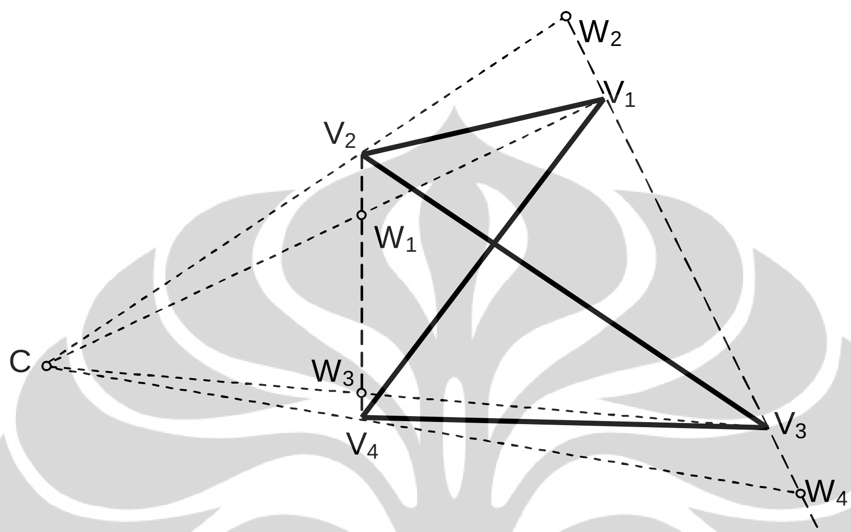
Contoh 1:



Contoh 2:



Contoh 3:



Setelah membahas Teorema Ceva pada segiempat, selanjutnya akan dibahas Teorema Ceva pada poligon.

3.2.3 Teorema Ceva pada Poligon

Teorema 3.2.3

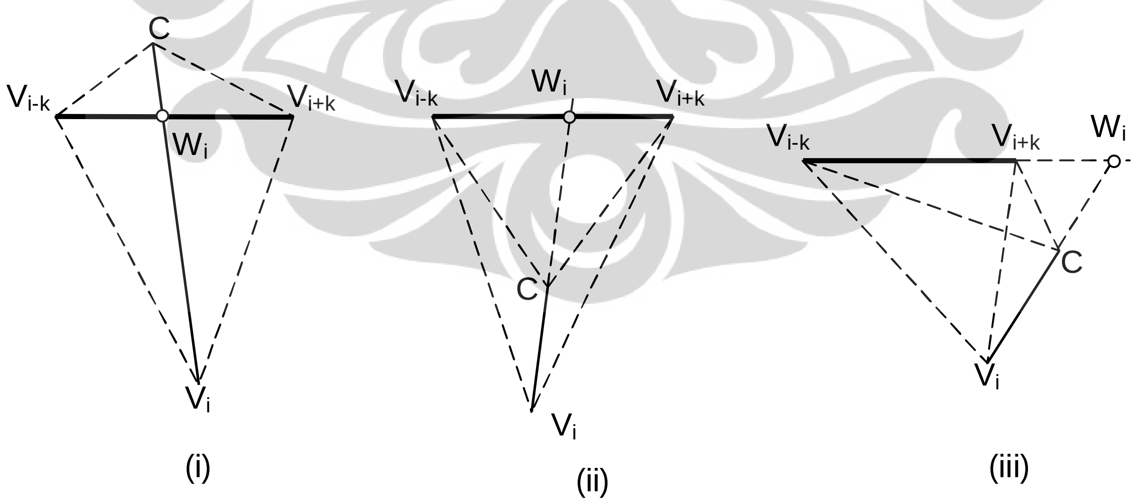
Jika diketahui poligon $V_1V_2V_3\ldots V_n$, dan sebuah titik C, lalu misalkan garis CV_i memotong garis $V_{i-k}V_{i+k}$ di titik W_i untuk i = 1, 2, …, n dan $k \in \mathbb{N}$ dimana $k < \frac{n}{2}$,

Maka berlaku:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}} = 1.$$

Bukti:

Dari keterangan bahwa garis CV_i memotong garis $V_{i-k}V_{i+k}$ di titik W_i , maka terdapat beberapa kondisi yang mungkin, yaitu:



Gambar 3.2.1

Akan tetapi, pada ketiga kasus pada Gambar 3.2.1 tetap berlaku:

$$\frac{V_{i\text{-}k}W_i}{W_iV_{i+k}} = \frac{[CV_{i\text{-}k}V_i]}{[CV_iV_{i+k}]}.$$

Kemudian dari $1 \le k < \frac{n}{2}$, maka $2k < n$. Misalkan $n = 2k + j$, maka:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\frac{V_{i\text{-}k}W_i}{W_iV_{i+k}} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{[CV_{i\text{-}k}V_i]}{[CV_iV_{i+k}]} \\
&= \frac{[CV_{1\text{-}k}V_1]}{[CV_1V_{1+k}]}\frac{[CV_{2\text{-}k}V_2]}{[CV_2V_{2+k}]}\cdots\frac{[CV_{\text{-}1}V_{k\text{-}1}]}{[CV_{k\text{-}1}V_{2k\text{-}1}]}\frac{[CV_0V_k]}{[CV_kV_{2k}]}\cdots \\
&\quad \frac{[CV_1V_{k+1}]}{[CV_{k+1}V_{2k+1}]}\frac{[CV_2V_{k+2}]}{[CV_{k+2}V_{2k+2}]}\cdots\frac{[CV_{k\text{-}1}V_{2k\text{-}1}]}{[CV_{2k\text{-}1}V_{3k\text{-}1}]}\frac{[CV_kV_{2k}]}{[CV_{2k}V_{3k}]}\frac{[CV_{k+1}V_{2k+1}]}{[CV_{2k+1}V_{3k+1}]}\cdots \\
&\quad \frac{[CV_{n\text{-}2k}V_{n\text{-}k}]}{[CV_{n\text{-}k}V_n]}\frac{[CV_{n\text{-}2k+1}V_{n\text{-}k+1}]}{[CV_{n\text{-}k+1}V_{n+1}]}\cdots\frac{[CV_{k+j\text{-}1}V_{2k+j\text{-}1}]}{[CV_{n\text{-}1}V_{n\text{-}1+k}]}\frac{[CV_{k+j}V_{2k+j}]}{[CV_nV_{n+k}]}.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa penyebut pada *k*-suku pertama akan tercoret dengan pembilang pada *k*-suku berikutnya. Sedangkan penyebut pada *j*-suku berikutnya akan tercoret dengan pembilang pada *j*-suku terakhir. Sehingga suku yang tersisa adalah pembilang pada *k*-suku pertama dan penyebut pada *k*-suku terakhir, yaitu:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\frac{V_{i\text{-}k}W_i}{W_iV_{i+k}} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{[CV_{i\text{-}k}V_i]}{[CV_iV_{i+k}]} \\
&= \frac{[CV_{1\text{-}k}V_1]}{[CV_{n\text{-}k+1}V_{n+1}]}\frac{[CV_{2\text{-}k}V_2]}{[CV_{n\text{-}k+2}V_{n+2}]}\cdots\frac{[CV_{\text{-}1}V_{k\text{-}1}]}{[CV_{n\text{-}1}V_{n\text{-}1+k}]}\frac{[CV_0V_k]}{[CV_nV_{n+k}]} \\
&= \frac{[CV_{1\text{-}k}V_1]}{[CV_{1\text{-}k}V_1]}\frac{[CV_{2\text{-}k}V_2]}{[CV_{2\text{-}k}V_2]}\cdots\frac{[CV_{n\text{-}1}V_{k\text{-}1}]}{[CV_{n\text{-}1}V_{k\text{-}1}]}\frac{[CV_nV_k]}{[CV_nV_k]} = 1. \;\square
\end{aligned}$$

Berikut adalah skema pencoretan yang dimaksudkan seperti di atas:

$$\frac{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k-\text{suku pembilang pertama}}\;\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k-\text{suku pembilang kedua}}\;\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{j-\text{suku pembilang terakhir}}}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k-\text{suku penyebut pertama}}\;\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{j-\text{suku penyebut kedua}}\;\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k-\text{suku penyebut terakhir}}}$$

Selanjutnya akan diberikan contoh skema pencoretannya, yaitu:

Untuk k = 1, maka:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\frac{V_{i-1}W_i}{W_iV_{i+1}} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{[CV_{i-1}V_i]}{[CV_iV_{i+1}]}\\ &= \frac{[CV_0V_1]}{[CV_1V_2]}\frac{[CV_1V_2]}{[CV_2V_3]}\cdots\frac{[CV_{i-2}V_{i-1}]}{[CV_{i-1}V_i]}\frac{[CV_{i-1}V_i]}{[CV_iV_{i+1}]}\frac{[CV_iV_{i+1}]}{[CV_{i+1}V_{i+2}]}\cdots\frac{[CV_{n-2}V_{n-1}]}{[CV_{n-1}V_n]}\frac{[CV_{n-1}V_n]}{[CV_nV_{n+1}]}\\ &= \frac{[CV_0V_1]}{[CV_nV_{n+1}]} = \frac{[CV_nV_1]}{[CV_nV_1]} = 1. \ \square\end{aligned}$$

Untuk k = 2, maka:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\frac{V_{i-2}W_i}{W_iV_{i+2}} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{[CV_{i-2}V_i]}{[CV_iV_{i+2}]}\\ &= \frac{[CV_{-1}V_1]}{[CV_1V_3]}\frac{[CV_0V_2]}{[CV_2V_4]}\frac{[CV_1V_3]}{[CV_3V_5]}\cdots\frac{[CV_{n-4}V_{n-2}]}{[CV_{n-2}V_n]}\frac{[CV_{n-3}V_{n-1}]}{[CV_{n-1}V_{n+1}]}\frac{[CV_{n-2}V_n]}{[CV_nV_{n+2}]}\\ &= \frac{[CV_{-1}V_1]}{[CV_{n-1}V_{n+1}]}\frac{[CV_0V_2]}{[CV_nV_{n+2}]} = \frac{[CV_{n-1}V_1]}{[CV_{n-1}V_1]}\frac{[CV_nV_2]}{[CV_nV_2]} = 1. \ \square\end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan penjelasan dari bab-bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa Teorema Menelaus dan Teorema Ceva berlaku pada poligon, serta Perbandingan luas segitiga dapat digunakan dalam pembuktian Teorema Menelaus dan Teorema Ceva.

Sebagai bahan diskusi selanjutnya, kedua teroema tersebut dapat dicobakan pada bidang geometri yang lain, seperti bidang Lobachevsky maupun pada cabang geometri yang lain, seperti *solid geometry* dan *sphere geometry*.

DAFTAR PUSTAKA

1. Cederberg, Judith N., 1989, *A course in modern geometries*, Springer-Verlag New York Inc., xii + 232 hlm.

2. Grunbaum, Branko & G.C. Shephard, 1995, Mathematics Magazine : *Ceva, Menelaus, and the Area Principle (vol. 68 no. 4)*, hlm 254-268.

3. Jennings, George A., 1994, Modern geometry with applications, Springer-verlag New York Inc., v + 187 hlm.

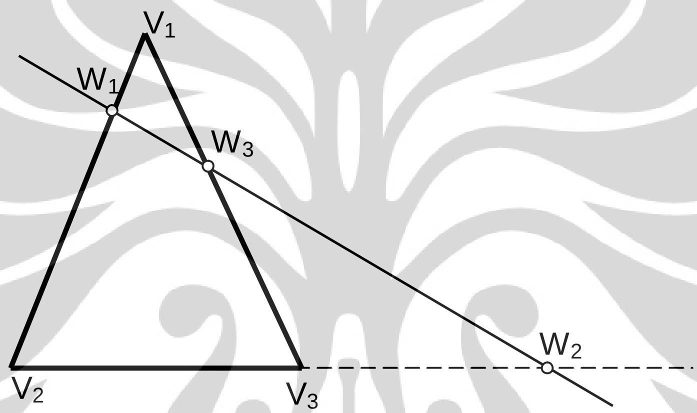
4. Kay, David C., 2001, *College geometry : a discovery approach*, 2nd ed. Addison Wesley Longman Inc., xviii + 636 hlm.

5. Moise, Edwin E., 1990, *Elementary geometry from advanced standpoint*, 3rd ed. Addison Wesley Publishing Company Inc., x + 501 hlm.

6. Wiesstein, Eric, 2006, *CRC concise encyclopedia of mathematics*, CRC Press, 3236 hlm.

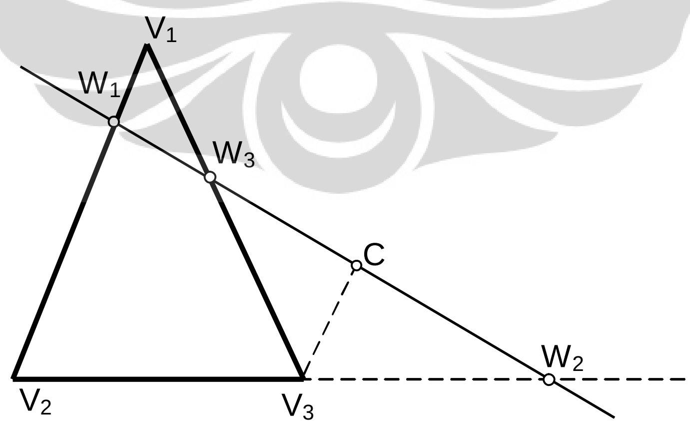
LAMPIRAN 1

Pembuktian Teorema Menelaus pada segitiga dengan prinsip kesebangunan.



Bukti :

Misalkan garis yang melalui V_3 memotong garis W_1W_2 di C, maka:



Dari segitiga $V_2W_2W_1$ sebangun dengan V_3W_2C, maka berlaku : $\frac{W_1V_2}{CV_3}=\frac{V_2W_2}{V_3W_2}$

atau $\frac{CV_3}{W_1V_2}\times\frac{V_2W_2}{V_3W_2}=1$.

Dari segitiga $V_3C\ W_3$ sebangun dengan $V_1W_1W_3$, maka berlaku : $\frac{CV_3}{V_1W_1}=\frac{V_3W_3}{W_3V_1}$

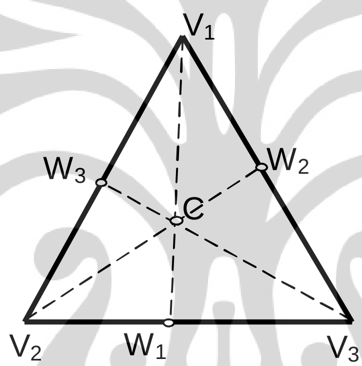
atau $\frac{V_1W_1}{CV_3}\times\frac{V_3W_3}{W_3V_1}=1$.

Sehingga diperoleh:

$$\frac{V_1W_1}{CV_3}\times\frac{V_3W_3}{W_3V_1}\times\frac{CV_3}{W_1V_2}\times\frac{V_2W_2}{V_3W_2}=\frac{V_1W_1}{W_1V_2}\times\frac{V_3W_3}{W_3V_1}\times\frac{V_2W_2}{W_2V_3}=1. \quad \square$$

LAMPIRAN 2

Pembuktian Teorema Ceva pada segitiga dengan memanfaatkan teorema Menelaus.



Bukti :

Dengan menerapkan teorema Menelaus pada segitiga $V_1V_2W_1$ dengan garis yang memotongnya adalah garis V_3W_3, maka diperoleh :

$$\frac{V_2V_3}{V_3W_1} \times \frac{W_1C}{CV_1} \times \frac{V_1W_3}{W_3V_2} = 1 \text{ atau } \frac{V_3W_1}{V_2V_3} \times \frac{CV_1}{W_1C} \times \frac{W_3V_2}{V_1W_3} = 1 \qquad \text{(i)}$$

Dengan menerapkan teorema Menelaus pada segitiga $V_1W_1V_3$ dengan garis yang memotongnya adalah garis V_2W_2, maka diperoleh :

$$\frac{V_3V_2}{V_2W_1} \times \frac{W_1C}{CV_1} \times \frac{V_1W_2}{W_2V_3} = 1 \text{ atau } \frac{V_3V_2}{V_2W_1} \times \frac{V_1W_2}{W_2V_3} = \frac{CV_1}{W_1C} \qquad \text{(ii)}$$

Sehingga dengan substitusi (ii) ke (i) diperoleh :

$$\frac{V_3W_1}{V_2V_3} \times \left(\frac{V_3V_2}{V_2W_1} \times \frac{V_1W_2}{W_2V_3} \right) \times \frac{W_3V_2}{V_1W_3} = \frac{V_3W_1}{W_1V_2} \times \frac{V_1W_2}{W_2V_3} \times \frac{V_2W_3}{W_3V_1} = 1. \quad \square$$