# PENENTUAN HARGA OPSI ASIA


**KHURIYANTI**

**0305010327**

**UNIVERSITAS INDONESIA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**DEPOK**


**2009**

# PENENTUAN HARGA OPSI ASIA

**Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat**

**untuk memperoleh gelar Sarjana Sains**

**Oleh :**

**KHURIYANTI**

**0305010327**

**DEPOK**

**2009**

SKRIPSI : PENENTUAN HARGA OPSI ASIA

NAMA : KHURIYANTI

NPM : 0305010327

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 7 JULI 2009

| | |
|---|---|
| MILA NOVITA, S.Si., M.Si | SARINI, S.Si., M.Stats |
| PEMBIMBING I | PEMBIMBING II |

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana: 7 Juli 2009

Penguji I : Mila Novita, S.Si., M.Si

Penguji II : Dra Siti Aminah M.Kom

Penguji III : Dra Siti Nurrohmah M.Si

La haula wala Quwwata illa Billahi
(Tiada daya dan upaya melainkan kekuatan Allah)

*Dedicated to my beloved family, my lovely friends and everybody who loves me……*

Sesuatu yang belum dikerjakan, seringkali tampak mustahil; kita baru yakin kalau kita bisa, setelah berhasil melakukannya
(Evelyn underhill)

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya kepada Allah *Subhanahu wa Ta'ala*, Tuhan semesta alam, yang membuat penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat dan salam penulis lantunkan kepada suri tauladan kita, Muhammad *Shalallahu 'alaihi wa sallam*, beserta keluarganya yang mulia, sahabatnya yang tercinta, dan pengikutnya yang setia hingga akhir zaman. Terselesaikannya tugas akhir ini tidak lepas tanpa bantuan, bimbingan, dorongan, semangat dan doa yang tulus dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih sedalam-dalamnya kepada:

1. Orang tua penulis. Mamaku tercinta yang selalu berdoa untuk penulis dalam tiap sujudnya, Ayahku tersayang yang selalu memberikan dukungan dan motivasi yang luar biasa tanpa batas. Terima kasih atas doa dan kasih sayang kalian yang tidak permah putus dan membuat penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Mba' Mila Novita, selaku pembimbing 1 penulis. Dosenku tersayang yang dengan amat sangat sabar membimbing dan membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhirnya. Terima kasih untuk semua bantuannya yang tidak terhitung banyaknya, dukungan, semangat juga motivasi yang selalu dicurahkan untuk penulis. Terima kasih juga untuk bimbingan yang selalu menyenangkan.

3. Mba' Sarini, selaku pembimbing 2 penulis. Terima kasih yang teramat dalam untuk pengorbanannya membantu penulis menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih juga untuk suami Mba' Sarini, Ka Taufik, yang banyak berperan dalam pemrograman tugas akhir ini Tanpa bantuan pembimbing-pembimbing yang luar biasa, penulis tidak akan mampu menyelesaikan tugas nan berat ini.
4. Ibu Nur, selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasihat dan bimbingannya selama ini.
5. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis dapatkan selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
6. Seluruh karyawan, baik TU maupun Perpustakaan Matematika yang telah banyak memberikan bantuannya demi kelancaran penyusunan skripsi ini.
7. Kakak dan adik penulis. Mba' Rina, yang suatu saat nanti akan menghadapi tanggung jawab yang sama, semoga dapat menyelesaikannya dengan baik. Semangat!!. Terima kasih Vivi untuk senyumannya yang selalu diberikan kepada penulis.
8. Seluruh keluarga besar penulis. Khususnya keluarga penulis yang ada di pemalang, pasar baru dan bogor.
9. Untuk sahabat-sahabatku tercinta. Nisma, terima kasih dukungannya selama ini, sahabat terbaik yang selalu ada untuk penulis. Othe, terima kasih atas segala saran-sarannya yang sangat berarti bagi penulis. Meti, sahabatku yang sangat menyenangkan.

10. Teman-teman terbaik penulis. Inul, fika, dia, shinta, ratih, puji, icha, miranti, rani, meri , jessie, vani, ie, syarah, dan temen-teman yang lain. Terima kasih atas persahabatan yang kalian berikan kepada penulis.
11. Seluruh teman-teman 05 di matematika. Terima kasih atas kebersamaan yang indah selama ini.
12. Ka bembi, yanu, dan ka manap. Terima kasih atas bantuannya yang sangat berarti dalam penyusunan tugas akhir ini.
13. Teman-teman SMA penulis. Fitri, anggi, kristina, anis, yang selalu menyemangati penulis.
14. Teman-teman angkatan 2003-2006. Terima kasih atas bantuannya selama ini kepada penulis.
15. Pihak lainnya (yang mungkin lupa disebutkan oleh penulis) yang telah membantu penulis dengan dukungan dan doanya.

Mohon maaf jika pada skripsi ini terdapat kesalahan atau kekurangan. Semoga skrispi ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Depok, juli 2009

Penulis

Khuriyanti

**ABSTRAK**

Opsi Asia dengan *European style* adalah opsi yang *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi dan hanya dapat dieksekusi pada saat jatuh tempo saja. Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik. Untuk menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat dilakukan dengan didekati ke kerangka *Black-Scholes* sehingga didapat formula *Black-Scholes* untuk opsi *call* Asia dan opsi *put* Asia. Sedangkan untuk menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik, dilakukan melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik yang dikemukakan oleh *Michael Curran.*

Kata kunci : Opsi eksotik, *Black-Scholes*, aproksimasi *Curran*, integrasi numerik.

viii + 125 hlm.; lamp.

Bibliografi: 15 (1991-2006)

**DAFTAR ISI**

## DAFTAR LAMPIRAN

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 LATAR BELAKANG

Dalam pasar keuangan dikenal beberapa jenis bentuk instrumen keuangan, diantaranya adalah berupa kontrak. Kontrak yang nilainya diturunkan dari nilai aset dasar pada kontrak tersebut disebut instrumen derivatif atau instrumen turunan. Oleh karena itu, pasar yang memperjualbelikan instrumen jenis ini dikatakan pasar derivatif.

Contoh kontrak yang popular diperdagangkan di pasar derivatif adalah *forward, future*, dan *option* (opsi). Opsi adalah salah satu kontrak keuangan yang memberikan hak kepada pembeli opsi, tapi bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual aset dasar dengan harga yang ditentukan di awal dan dilakukan pada saat atau sebelum masa opsi berakhir. Berdasarkan waktu pengeksekusiannya, opsi terbagi menjadi 2 jenis, yaitu *European style* dan *American style*. *European style* adalah jenis opsi yang hanya dapat dieksekusi pada saat masa opsi berakhir, sedangkan *American style* adalah opsi yang dapat dieksekusi kapanpun selama masa hidup opsi.

Opsi terbagi menjadi 2 jenis, yaitu opsi vanila dan opsi eksotik. Opsi eksotik adalah opsi yang *payoff*-nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi, tapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi. Contoh opsi eksotik adalah *barrier option, lookback option* dan *Asian option* (opsi Asia).

Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi. Terdapat 2 tipe rata-rata yang akan digunakan dalam tugas akhir ini, yaitu rata-rata aritmatik dan rata-rata geometrik.

Salah satu karakteristik dari rata-rata geometrik adalah ketika harga saham berdistribusi lognormal, rata-rata geometrik harga sahamnya juga berdistribusi lognormal. Karena karakteristik tersebut, rata-rata geometrik memenuhi salah satu asumsi dari model *Black-Scholes*. Sehingga untuk menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat dilakukan dengan didekati ke kerangka *Black-Scholes*.

Sedangkan karakteristik untuk rata-rata aritmatik adalah distribusi dari rata-rata aritmatik harga sahamnya tidak diketahui. Hal ini menyulitkan dalam penentuan harga opsi Asia, oleh karena itu perlu dilakukan aproksimasi distribusi rata-rata aritmatik. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi distribusi rata-rata tersebut, diantaranya adalah aproksimasi *Turnbull & Wakemann*, aproksimasi *Levy*, aproksimasi *Curran*, dan Monte Carlo *valuation*.

Dalam tugas akhir ini akan dijelaskan mengenai penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik yang akan didekati ke dalam kerangka *Black-Scholes*, dan menggunakan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik berdasarkan aproksimasi *Curran*.

## 1.2 PERUMUSAN MASALAH

Bagaimana cara menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

## 1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

## 1.4 PEMBATASAN MASALAH

Pembatasan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Waktu pengeksekusian opsi menggunakan *European style*.
2. Aset dasar yang digunakan berupa saham.
3. Bentuk dasar opsi Asia yang digunakan adalah *average price option*.
4. Untuk kasus opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik, hanya menghitung opsi *call* Asia.

## 1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Secara singkat, sistematika penulisan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

Bab I : Pendahuluan

Berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Berisi opsi, opsi eksotik, proses stokastik, gerak *Brown*, proses harga saham dan model *Black-Scholes* untuk *European option*.

Bab III : Membahas tentang bagaimana menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

Bab IV : Aplikasi dari penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik.

Bab V : Kesimpulan dan saran untuk tugas akhir ini.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Sebelum membahas bagaimana menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan menggunakan rata-rata aritmatik pada bab III, berikut ini akan dibahas terlebih dahulu mengenai dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini. Diantaranya mengenai opsi, opsi eksotik, proses stokastik, gerak *Brown*, proses harga saham dan model *Black-Scholes* untuk *European option*

## 2.1 OPSI

Dalam dunia ekonomi, dikenal beberapa jenis pasar keuangan, salah satunya adalah pasar derivatif. Pasar derivatif adalah pasar keuangan yang memperdagangkan instrumen keuangan yang nilainya diturunkan dari nilai aset yang lain. Instrumen yang diperjualbelikan dalam pasar derivatif, diantaranya berupa kontrak. Contoh kontrak yang paling populer diperdagangkan dalam pasar derivatif adalah *forward*, *futur*e, dan opsi.

Opsi adalah salah satu kontrak keuangan yang memberikan hak kepada pembeli opsi, tapi bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual aset dasar dengan harga yang ditentukan di awal dan dilakukan pada saat atau sebelum masa opsi berakhir. Hak tersebut diperoleh pembeli opsi dengan membayarkan sejumlah uang kepada penjual opsi yang dinamakan harga opsi.

Berdasarkan waktu pengeksekusian, opsi terbagi menjadi 2, yaitu:

1. *European style,* adalah jenis opsi yang hanya dapat dieksekusi saat masa opsi berakhir.
2. *American style,* adalah jenis opsi yang dapat dieksekusi kapanpun selama masa hidup opsi.

Istilah-istilah yang banyak digunakan dalam opsi:

1. *Holder* adalah pihak yang membeli kontrak opsi.
2. *Writer* adalah pihak yang mengeluarkan kontrak opsi.
3. *Strike price* (*K*) adalah harga yang harus dibayarkan *holder* kepada *writer* jika mengeksekusi opsi.
4. *Maturity time* (*T*) adalah waktu jatuh tempo.
5. *Payoff* adalah sejumlah nilai yang diterima *holder* saat masa opsi berakhir.
6. Aset dasar adalah aset yang menjadi dasar dari kontrak opsi.
7. Harga opsi adalah harga awal yang diberikan *holder* ke *writer* untuk memperoleh hak opsi.
8. Volatilitas adalah standar deviasi dari harga aset keuangan.
9. *Risk-free rate* atau tingkat suku bunga bebas resiko $(r)$ adalah tingkat suku bunga yang diasumsikan diperoleh jika berinvestasi aset yang bebas resiko.

Opsi terdiri dari 2 jenis, yaitu opsi vanila dan opsi eksotik. Karena pada tugas akhir ini hanya akan dibahas mengenai opsi Asia yang merupakan salah satu bentuk opsi eksotik, maka berikut ini akan dipaparkan sekilas mengenai opsi eksotik.

## 2.2 OPSI EKSOTIK

Opsi eksotik adalah opsi yang *payoff*-nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat mengeksekusi opsi, tapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi.

Contoh opsi eksotik antara lain adalah: *barrier option, lookback option*, opsi Asia, GAP *option, exchange option,*dan *compound option*. Dari contoh opsi eksotik tersebut, terdapat beberapa opsi yang sangat bergantung pada lintasan harga aset selama masa hidup opsi, yang disebut *path-dependent option*. Contoh dari *path-dependent option* adalah *barrier option, lookback option* dan opsi Asia.

Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi. Ada 2 bentuk dasar dari opsi Asia, yaitu:

1. *Average price option*

   *Average price option* adalah opsi Asia yang *payoff*-nya bergantung pada perbedaan antara rata-rata harga aset selama masa hidup opsi dengan harga eksekusi yang telah ditentukan.

   *Payoff* dari *average price option* saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} \max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)\,d\tau - K, 0\right), & \text{untuk opsi } call \text{ Asia} \\ \max\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)\,d\tau, 0\right), & \text{untuk opsi } put \text{ Asia} \end{cases}.$$

2. *Average strike option*

   *Average strike option* adalah opsi Asia yang *payoff*-nya bergantung pada perbedaan antara harga aset saat jatuh tempo dengan rata-rata harga aset selama masa hidup opsi.

   *Payoff* dari *average strike option* saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} \max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)\,d\tau - S(T), 0\right), & \text{untuk opsi } call \text{ Asia} \\ \max\left(S(T) - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)\,d\tau, 0\right), & \text{untuk opsi } put \text{ Asia} \end{cases}.$$

Opsi Asia dapat didefinisikan kembali dengan mengganti rata-rata kontinu $\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau$ dengan menggunakan rata-rata aritmatik $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$ atau rata-rata geometrik $\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}$, dimana $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T$ [4].

Dalam tugas akhir ini akan dibahas bagaimana menentukan harga *average price option* dengan menggunakan kedua rata-rata di atas. *Payoff* dari opsi tersebut dapat ditulis kembali menjadi:

- *Payoff* dari *average price option* menggunakan rata-rata aritmatik saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} \max\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S(t_i) - K, 0\right), & \text{untuk opsi } call \text{ Asia} \quad (2.2.1) \\ \max\left(K - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S(t_i), 0\right), & \text{untuk opsi } put \text{ Asia} \quad (2.2.2) \end{cases}$$

- *Payoff* dari *average price option* menggunakan rata-rata geometrik saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} \max\left(\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}} - K, 0\right), & \text{untuk opsi } call \text{ option} \quad (2.2.3) \\ \max\left(K - \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}, 0\right), & \text{untuk opsi } put \text{ option} \quad (2.2.4) \end{cases}$$

## 2.3. RATA-RATA GEOMETRIK

Jenis rata-rata yang akan digunakan dalam tugas akhir ini adalah rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik, sehingga akan dijelaskan sekilas mengenai kedua tipe rata-rata tersebut.

Rata-rata geometrik dinyatakan sebagai:

$$G = \left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{S(t_1)S(t_2)\ldots S(t_n)} \qquad (2.3.1)$$

dimana,

$S(t_i)$ = harga aset pada saat $t_i$

$n$ = banyaknya harga aset yang dirata-ratakan.

Dengan diketahui bahwa harga saham berdistribusi lognormal, ternyata rata-rata geometriknya juga berdistribusi lognormal. Karena karakteristik tersebut, rata-rata geometrik memenuhi salah satu asumsi dari model *Black-Scholes*. Sehingga harga opsi Asia dapat ditentukan dengan cara didekati ke kerangka *Black-Scholes* yang merupakan metode dasar dalam menentukan harga teoritis *European option.*

## 2.4 RATA-RATA ARITMATIK

Rata-rata aritmatik dinotasikan dengan

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) = \frac{(S(t_1) + S(t_2) + ... + S(t_n))}{n} \qquad (2.4.1)$$

dimana,

$S(t_i)$ = harga aset pada saat $t_i$

$n$ = banyaknya harga aset yang dirata-ratakan.

Rata-rata aritmatik merupakan jenis rata-rata yang populer dan sering digunakan dalam praktek investasi. Namun dalam kasus opsi Asia*,* rata-rata aritmatik memiliki beberapa kelemahan. Diantaranya adalah ketika harga saham berdistribusi lognormal, rata-rata aritmatik harga sahamnya tidak berdistribusi lognormal. Hal itu menyulitkan dalam penentuan harga opsi Asia.

Karena distribusi rata-rata aritmatik tidak diketahui, maka diperlukan aproksimasi dari distribusi rata-rata aritmatik tersebut. Hal ini mengakibatkan tidak adanya solusi eksak untuk menentukan harga opsi Asia. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik tersebut, antara lain:

1. Aproksimasi *Turnbull & Wakeman.*
2. Aproksimasi *Levy.*
3. Aproksimasi *Curran.*
4. Monte Carlo *Valuation*.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas bagaimana menentukan harga opsi Asia menggunakan aproksimasi *Curran*, yaitu melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

## 2.5 PROSES STOKASTIK

**Definisi 2.5.1 (Proses Stokastik):**

Suatu proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ adalah himpunan variabel random $X(t)$ yang dapat diindeks dengan parameter $t$, dalam himpunan indeks $T$ yang mempunyai urutan.

Jika $T$ diskrit, maka himpunan indeks $T$ dapat ditulis $T = \{0,1,...\}$. Jika $T$ kontinu, maka himpunan indeks $T$ dapat ditulis $T = [0,\infty)$.

Nilai yang mungkin dari $X(t)$ disebut *state*. Himpunan nilai yang mungkin dari $X(t)$ adalah *state space*. Berdasarkan *state space*-nya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi *state space* diskrit dan *state space* kontinu.

Karena harga saham adalah variabel random yang pergerakannya tidak diketahui secara pasti, maka dapat dikatakan bahwa pergerakan harga saham merupakan sebuah proses stokastik.

## 2.6 GERAK *BROWN*

Proses gerak *Brown* merupakan contoh dari proses *Markov* waktu kontinu dan *state space* kontinu, dan didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.6.1 (Gerak *Brown*):**

Gerak *Brown* atau disingkat GB dengan parameter variansi $\sigma^2$ adalah suatu proses stokastik $\{W(t); t \geq 0\}$, dengan sifat-sifat sebagai berikut :

1. Setiap kenaikan $W(s+t) - W(s)$ adalah berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma^2 t$.

2. Untuk setiap pasang interval waktu yang saling lepas, $(u,v],(w,y]$, dengan $0 \le u < v \le w < y$, maka kenaikan $W(y)-W(w)$ dan $W(v)-W(u)$ adalah variabel random yang independen.
3. $W(t)$ kontinu sebagai fungsi dari *t*; dan $W(0)=0$.

**Definisi 2.6.2 (Gerak *Brown* standar):**

Jika $\{W(t) \mid 0 \le t < \infty\}$ adalah GB dengan parameter variansi $\sigma^2$, maka $\left\{B(t)=\frac{1}{\sigma}W(t); 0 \le t < \infty\right\}$ adalah GB dengan parameter variansi $1$. GB seperti ini disebut GB standar.

GB standar juga memenuhi sifat-sifat dari gerak *Brown*. Proses GB standar disebut juga sebagai proses *Wiener*. GB standar atau proses *Wiener* ini akan sangat berguna dalam memodelkan pergerakan harga saham.

Dari definisi GB standar, proses *Wiener* untuk perubahan waktu $\Delta t$ mempunyai distribusi normal dengan mean kenaikan 0 dan variansi kenaikan $\Delta t$. Secara formal, jika suatu variabel $B(t)$ mengikuti proses *Wiener*, maka berlaku dua sifat berikut:

Sifat 1. Perubahan $\Delta B(t)$ selama periode waktu $\Delta t$ yang kecil, adalah

$\Delta B(t) = Z\sqrt{\Delta t}$, dengan $Z \sim N(0,1)$.

Sifat 2. $B(t)$ mengikuti proses Markov.

Proses Markov adalah proses stokastik yang jika diketahui nilai $B(t)$, maka $B(s+t)$ dimana $s+t>t$ tidak dipengaruhi $B(u)$ dimana $u<t$. Artinya jika diberikan keadaan saat sekarang dan keadaan di waktu lampau, maka keadaan mendatang hanya bergantung pada keadaan waktu sekarang dan tidak bergantung pada waktu lampau.

Misalkan $\{B(t); t \geq 0\}$ adalah suatu proses GB standar, dan misalkan $\mu$ dan $\sigma > 0$ tertentu, maka proses stokastik $\{X(t); t \geq 0\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t) \quad \text{untuk } t \geq 0 \tag{2.6.1}$$

disebut gerak *Brown* dengan *drift* $\mu$ dan parameter variansi $\sigma^2$.

Dengan menggunakan GB dengan *drift*, akan diperoleh GB yang sangat berguna dalam bidang finansial saat ini, yaitu dalam membentuk model *Black*-*Scholes* [15].

**Definisi 2.6.3 (Gerak *Brown* Geometrik):**

Jika $\{X(t); t \geq 0\}$ adalah GB dengan *drift* dengan parameter $\mu$ dan $\sigma^2$, maka proses stokastik $\{Z(t); t \geq 0\}$ yang didefinisikan dengan

$$Z(t) = Z(0)\exp\left(X(t)\right) = Z(0)\exp\left(\mu t + \sigma B(t)\right) \tag{2.6.2}$$

disebut gerak *Brown* geometrik dengan parameter $\mu$ dan $\sigma^2$. GB geometrik yang dimulai dari $Z(0)$ adalah GB standar yang dimulai dari $B(0) = 0$.

Jika persamaan (2.6.2) didiferensialkan, akan diperoleh persamaan,

$$dZ(t) = \mu Z(t)dt + \sigma Z(t)dB(t) \quad (2.6.3)$$

Sifat-sifat yang dipenuhi GB geometrik adalah :

1. $\frac{Z(t+s)}{Z(t)}, t, s > 0$ adalah berdistribusi lognormal dengan parameternya adalah $\mu s$ dan $\sigma^2 s$ .
2. Rasio pada interval waktu yang saling lepas adalah variabel random yang independen. Untuk tiap pasang interval waktu yang disjoin $(u,v],(w,y]$, dengan $0 \le u < v \le w < y$, maka rasio $\frac{Z(y)}{Z(w)}$ dan $\frac{Z(v)}{Z(u)}$ adalah independen.
3. $Z(t)$ kontinu, dengan $Z(t=0) = Z(0)$.

## 2.7 PROSES HARGA SAHAM

Misalkan $S(t_i)$ adalah harga saham pada saat $t_i$. Untuk periode waktu $\Delta t$, ekspektasi perubahan $\Delta S$ adalah $\mu S(t_i)\Delta t$ dengan $\mu$ adalah tingkat pengembalian dari harga saham yang diharapkan. Jika volatilitas dari tingkat pengembalian selalu nol maka tingkat pengembalian akan bernilai tetap untuk setiap interval waktu. Sehingga diperoleh

$$E(\text{tingkat pengembalian = c}) = \text{c}$$

$$\mu = \text{c}$$

Untuk tingkat pengembalian yang diharapkan per periode waktu $\Delta t$, didapat

$$\mu = \frac{\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}}{\Delta t}$$

maka perubahan harga saham dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$\Delta S = \mu S(t_i)\Delta t \ , \tag{2.7.1}$$

dimana,

$$\Delta S = S(t_{i+1}) - S(t_i)$$

Namun dalam aplikasinya, volatilitas dari tingkat pengembalian tidak selalu bernilai nol. Artinya investor memiliki tingkat pengembalian yang tidak tentu untuk harga saham pada waktu yang berbeda [3]. Hal ini dapat ditulis

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\Delta t + \sigma\Delta B(t)$$

$$S(t_{i+1}) - S(t_i) = S(t_i)\left(\mu\Delta t + \sigma\Delta B(t)\right)$$

$$\Delta S = \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\Delta B(t) \tag{2.7.2}$$

dimana $B(t)$ adalah gerak *Brown* standar.

Jika dijabarkan, persamaan (2.7.2) akan menjadi

$$S(t_{i+1}) - S(t_i) = \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\Delta B(t)$$

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\Delta B(t) \tag{2.7.3}$$

Dari sifat 1 untuk GB standar, persamaan (2.7.3) dapat dituliskan kembali menjadi,

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\sqrt{\Delta t}Z_i \ , \tag{2.7.4}$$

dimana,

$S(t_{i+1})$ = harga saham pada saat $t_{i+1}$

$S(t_i)$ = harga saham pada saat $t_i$

$Z_i \sim NIID(0,1)$ .

Dengan $\Delta t \rightarrow 0$, maka persamaan (2.7.2) menjadi sebuah persamaan diferensial stokastik dengan waktu yang kontinu

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)\,, \tag{2.7.5}$$

dan solusi yang diperoleh [14] adalah

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right) \tag{2.7.6}$$

dimana *B(t)* adalah proses *Wiener* atau gerak *Brown* standar. Model persamaan (2.7.6) adalah model yang paling sering digunakan untuk model pergerakan saham [14]. Diperoleh bahwa persamaan (2.7.5) memiliki bentuk yang sesuai dengan persamaan (2.6.3), sehingga dapat dikatakan bahwa pergerakan harga saham mengikuti GB geometrik.

Dari persamaan (2.7.6), diperoleh

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right)$$

$$\frac{S(t)}{S(0)} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right)$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t) \tag{2.7.7}$$

Jika diketahui $B(t) \sim N(0,t)$, maka dapat dicari mean dan variansi untuk distribusi harga saham, yaitu sebagai berikut:

- Untuk mean dari distribusi harga saham,

$$E\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)\right] = E\left[\mu t\right] - E\left[\frac{1}{2}\sigma^2 t\right] + E\left[\sigma B(t)\right]$$

$$= \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + 0$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$$

- Untuk variansi dari distribusi harga saham,

$$\mathrm{var}\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)\right] = \mathrm{var}\left[\sigma B(t)\right]$$

$$= \sigma^2\ \mathrm{var}[B(t)]$$

$$= \sigma^2 t$$

Dengan parameter-parameter yang telah dicari, di bawah asumsi *risk-neutral* yaitu asumsi bahwa tingkat pengembalian yang diharapkan sama dengan *risk-free rate*, $\mu = r$, diperoleh

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa distribusi dari logaritma harga saham $S(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \tag{2.7.8}$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) \sim N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

$$\ln S(t) \sim N\left(\ln S(0) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \tag{2.7.9}$$

Dengan pemisalan $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ dan $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = ... = t_{n+1} - t_n$ , maka persamaan (2.7.6) dapat dituliskan menjadi

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-0) + \sigma Z\sqrt{t-0}\right)$$

$$S(t_2) = S(t_1)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1) + \sigma Z\sqrt{(t_2 - t_1)}\right)$$

$$\vdots$$

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z\right). \tag{2.7.10}$$

## 2.8 MODEL *BLACK-SCHOLES*

Model *Black-Scholes* adalah metode yang dipopulerkan oleh *Fischer Black* dan *Myron Scholes* pada tahun 1973 untuk menentukan harga teoritis *European* opsi *call*.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model *Black-Scholes* adalah :

1. Harga aset berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu$ dan $\sigma^2$ yang diketahui dan konstan.
2. *Continuously compounded return* berdistribusi normal dengan parameter $\mu$ dan $\sigma^2$ konstan.
3. Penjualan aset untuk efisiensi diperbolehkan.
4. Tidak ada biaya transaksi atau pajak.
5. Tidak ada dividen selama masa hidup opsi.
6. Tidak ada kesempatan bagi arbitras.
7. Perdagangan aset keuangan bersifat kontinu.
8. Tingkat suku bunga bebas resiko atau *risk-free rate*, $r$, konstan dan sama untuk semua perdagangan opsi.

Harga *European* opsi *call* dapat dihitung dengan menggunakan *risk neutral valuation* yaitu menentukan harga opsi dengan membawanya ke dalam dunia *risk-neutral*. Yang akan dilakukan adalah mengasumsikan tingkat pengembalian yang diharapkan adalah *risk-free rate*, $\mu = r$, kemudian mencari nilai saat ini dari ekspektasi *cash flow* saat jatuh tempo dengan menggunakan *risk-free rate*. Harga opsi saat ini merupakan *expected value* yang didiskon dan dinotasikan sebagai berikut:

$$C = e^{-rT} E[\,payoff\,]$$

$$= e^{-rT} E[\max(S(T) - K, 0)]$$

dimana,

$C$ = harga opsi *call*.

$r$ = *risk-free rate*.

$T$ = waktu jatuh tempo

$S(0)$ = harga saham saat ini, atau harga saham saat $t = 0$.

$S(T)$ = harga saham saat jatuh tempo, atau harga saham saat $t = T$ .

$K$ = *strike price*.

Dengan menggunakan *risk neutral valuation* [15], diperoleh harga *European* opsi *call* adalah

$$C = S(0)N\left[d_1\right] - Ke^{-rT}N\left[d_2\right]$$

dimana,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Menggunakan cara yang serupa dengan *European* opsi *call*, akan didapat pula harga *European* opsi *put*, yaitu

$$P = Ke^{-rT}N\left[-d_2\right] - S(0)N\left[-d_1\right]$$

dimana

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} .$$

# BAB III

# PENENTUAN HARGA OPSI ASIA

Pada bab ini akan dibahas bagaimana menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

## 3.1 PENENTUAN HARGA OPSI ASIA MENGGUNAKAN RATA-RATA GEOMETRIK

Penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat dilakukan dengan cara didekati ke kerangka *Black-Scholes*, namun sebelum itu harus memenuhi asumsi kelognormalan dari rata-rata geometrik harga saham. Sehingga sebelum pembentukan formula *Black-Scholes* untuk kasus opsi Asia, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa rata-rata geometrik berdistribusi lognormal. Pembuktian kelognormalan distribusi rata-rata geometrik harga saham dan pembentukan formula *Black-Scholes* untuk opsi *call* Asia dan opsi *put* Asia akan dijelaskan pada subbab berikut ini.

### 3.1.1 Karakteristik Rata-Rata Geometrik Dalam opsi Asia

Rata-rata geometrik adalah tipe rata-rata yang jarang digunakan dalam praktek keuangan, namun mudah dipakai untuk menentukan harga opsi dalam kasus opsi Asia. Karakteristik utama dari rata-rata geometrik adalah ketika harga saham berdistribusi lognormal, rata-rata geometrik harga sahamnya juga berdistribusi lognormal. Hal itu dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Berdasarkan persamaan harga aset dalam waktu diskrit, (2.7.10), diketahui bahwa,

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right)$$

$$\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right)$$

$$\ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i \tag{3.1.1}$$

dimana

$S(t_{i+1})$ = harga saham pada saat $t_{i+1}$

$S(t_i)$ = harga saham pada saat $t_i$

$\sigma$ = volatilitas dari harga aset.

$\Delta t$ = $t_{i+1} - t_i$ .

$Z_i \sim NIID(0,1)$ .

Dari persamaan (2.7.9) diketahui bahwa harga saham dengan waktu jatuh tempo $T$ berdistribusi lognormal. Distribusi tersebut diperlukan untuk mendapatkan ekspektasi *payoff* yang nantinya akan didiskon dan menghasilkan formula *Black-Scholes.*

Telah diketahui sebelumnya bahwa p*ayoff* pada *European* opsi *call* adalah $\max\left(S(T)-K,0\right)$. Karena *payoff* opsi Asia bergantung pada rata-rata harga saham, maka harga saham saat jatuh tempo, $S(T)$, disubstitusi dengan rata-rata geometrik menjadi $\max\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}-K,0\right)$.

$\prod_{i=1}^{n} S(t_i)$ merupakan bentuk perkalian harga saham pada waktu $t_i$, yaitu

$$\prod_{i=1}^{n} S(t_i)=S(t_1)S(t_2)...S(t_{n-1})S(t_n)$$

$$=S(t_n)S(t_{n-1})...S(t_2)S(t_1)$$

dengan $t_i=i\Delta t$ dan $n\Delta t=T$.

$$\prod_{i=1}^{n} S(t_i)=\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\right)^1\left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right)^2...\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)^{n-1}\left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)}\right)^n\left(S(t_0)\right)^n$$

kedua ruas dibagi dengan $S(t_0)^n$,

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(t_0)\right)^n}=\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\right)^1\left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right)^2...\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)^{n-1}\left(\frac{S(t_1)}{S(t_0)}\right)^n.$$

Dengan memisalkan $S(t_0)=S(0)$, persamaan di atas dapat dibuat dalam bentuk ln, menjadi

$$\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)=\ln\left\{\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\right)^1\left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right)^2...\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)^{n-1}\left(\frac{S(t_1)}{S(0)}\right)^n\right\}$$

$$= \ln\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\right)^1 + \ln\left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right)^2 + \ldots + \ln\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)^{n-1} + \ln\left(\frac{S(t_1)}{S(0)}\right)^n$$

$$= \ln\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\right) + 2\ln\left(\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right) + \ldots + (n-1)\ln\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) + n\ln\left(\frac{S(t_1)}{S(0)}\right). \qquad (3.1.2)$$

Substitusikan (3.1.1) ke dalam (3.1.2), sehingga persamaan (3.1.2) menjadi

$$\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right) = \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-1}\right) + 2\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-2}\right)$$

$$+ \ldots + n\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_0\right). \qquad (3.1.3)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari mean dan variansi untuk distribusi dari logaritma rata-rata geometrik, sebagai berikut:

- Mean dari logaritma rata-rata geometrik adalah

$$E\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right] = E\left[\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{S(0)^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)\right].$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.3), ekspektasi di atas dapat ditulis menjadi

$$E\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right] = \frac{1}{n}E\left[\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-1}\right)+2\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-2}\right)\right.$$

$$\left.+\ldots+n\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(E\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-1}\right]+2E\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-2}\right]\right.$$

$$\left.+\ldots+nE\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_0\right]\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}E\left[Z_{n-1}\right]\right)+2\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}E\left[Z_{n-2}\right]\right)\right.$$

$$\left.+\ldots+n\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}E\left[Z_0\right]\right)\right).$$

Dengan $Z_i \sim NIID(0,1)$ , maka

$$E\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right] = \frac{1}{n}\left(\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)+2\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)\ldots+n\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\left(1+2+3+\ldots+(n-1)+n\right) \qquad (3.1.4)$$

$$=\frac{1}{n}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\,\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(Lampiran 1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{2n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\ . \tag{3.1.5}$$

- Variansi dari logaritma rata-rata geometrik adalah

$$\operatorname{var}\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right] = \operatorname{var}\left[\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left[\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} S(t_i)}{\left(S(0)\right)^n}\right)\right].$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.3), persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi bentuk berikut:

$$Var\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right] = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left[\left(\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-1}\right) + 2\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + n\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_0\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\operatorname{var}\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-1}\right] + 4\operatorname{var}\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{n-2}\right]\right.$$

$$+\ldots+n^2\operatorname{var}\left[\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_0\right]\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\sigma^2\Delta t\operatorname{var}\left[Z_{n-1}\right]+4\sigma^2\Delta t\operatorname{var}\left[Z_{n-2}\right]+\ldots+n^2\sigma^2\Delta t\operatorname{var}\left[Z_0\right]\right).$$

Dengan $Z_i \sim NIID(0,1)$ , maka:

$$\operatorname{var}\left[\ln\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right)\right]=\frac{1}{n^2}\left(\sigma^2\Delta t+2^2\sigma^2\Delta t+\ldots+(n-1)^2\sigma^2\Delta t+n^2\sigma^2\Delta t\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sigma^2\Delta t\left(1+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right) \tag{3.1.6}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sigma^2\Delta t\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(Lampiran 2)}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\sigma^2 T\ . \tag{3.1.7}$$

Berdasarkan hasil pada (3.1.5) dan (3.1.7), dapat diperoleh

$$\ln\left[\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right]\sim N\left(\frac{(n+1)}{2n}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\sigma^2 T\right)$$

$$\ln\left[\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{S(0)}\right]\sim N\left(\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T,\hat{\sigma}^2 T\right) \tag{3.1.8}$$

$$\ln\left[\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}\right] \sim N\left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T, \hat{\sigma}^2 T\right) \quad (3.1.9)$$

dimana,

$S(0)$ = harga saham saat $t = 0$

$T$ = waktu jatuh tempo

$n$ = banyaknya harga saham yang dihitung

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Persamaan (3.1.9) menunjukkan bahwa logaritma rata-rata geometrik harga saham berdistribusi normal, yang berarti bahwa rata-rata geometrik harga saham berdistribusi lognormal.

Karena rata-rata geometrik terbukti berdistribusi lognormal, maka penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat didekati ke kerangka *Black-Scholes*.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka selanjutnya akan dibahas mengenai pembentukan formula *Black-Scholes* untuk menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik.

### 3.1.2 Pembentukan Formula *Black-Scholes* untuk Menentukan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-Rata Geometrik

### 3.1.2.1 Opsi *Call* Asia

Harga opsi *call* Asia dengan rata-rata geometrik dapat dihitung dengan menggunakan formula *Black-Scholes* berikut ini,

$$C = e^{-rT}\left(S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] - KN\left[\hat{d}_2\right]\right)$$

dimana,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}.$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}.$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

*Bukti:*

Penentuan harga opsi Asia menggunakan *risk-neutral valuation*, yaitu penentuan harga opsi yang dibawa ke dalam dunia *risk-neutral* dengan mengasumsikan bahwa nilai tingkat pengembalian yang diharapkan sama dengan *risk-free rate*. Yang akan dilakukan adalah mencari nilai saat ini dari ekspektasi *cash flow* pada waktu jatuh tempo dengan menggunakan *risk-free rate*.

Harga opsi saat ini merupakan *expected value* yang didiskon dari *payoff* yang dinotasikan sebagai berikut:

$$C = e^{-rT} E[\,payoff\,]. \tag{3.1.10}$$

Dengan memasukkan nilai *payoff* (2.2.3) ke persamaan (3.1.10), didapat

$$C = e^{-rT} E\left[\max\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}} - K, 0\right)\right]$$

$$= e^{-rT} E\left[\max\left(G - K, 0\right)\right]$$

dengan $G$ adalah rata-rata geometrik.

Dengan menggunakan definisi ekspektasi, persamaan di atas berubah menjadi,

$$C = e^{-rT} \int_0^{\infty} \max\left(g - K, 0\right) p(g)dg$$

$$= e^{-rT} \left\{ \int_0^{K} \max\left(g - K, 0\right) p(g)dg + \int_K^{\infty} \max\left(g - K, 0\right) p(g)dg \right\}$$

$$= e^{-rT} \left\{ 0 + \int_K^{\infty} \max\left(g - K, 0\right) p(g)dg \right\}$$

$$= e^{-rT} \int_K^{\infty} \max\left(g - K, 0\right) p(g)dg\,, \tag{3.1.11}$$

dengan $p(g)$ adalah *pdf* dari variabel random $G$, dan ditulis

$$p(g) = \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} \exp\left( -\frac{1}{2}\left( \frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right)^2 \right). \tag{3.1.12}$$

Perhatikan kembali persamaan (3.1.11), persamaan tersebut dapat dituliskan kembali menjadi

$$C = e^{-rT}\int_K^\infty \left(g-K\right) p(g)dg$$

$$= e^{-rT}\int_K^\infty gp(g)dg - Ke^{-rT}\int_K^\infty p(g)dg \qquad (3.1.13)$$

= I – II.

Diperoleh 2 persamaan, yaitu

persamaan I = $e^{-rT}\int_K^\infty gp(g)dg$ dan persamaan II = $Ke^{-rT}\int_K^\infty p(g)dg$ .

Selanjutnya akan dijelaskan penentuan nilai $C$, melalui proses sebagai berikut:

1. Langkah pertama adalah menemukan solusi untuk persamaan I.

   $p(g)$ pada (3.1.12), dimasukkan ke bagian integral persamaan I

$$\int_K^\infty gp(g)dg = \int_K^\infty g\frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg$$

$$= \int_K^\infty \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg\ .$$

Untuk mempermudah perhitungan, akan dilakukan beberapa kali transformasi variabel, yaitu:

a) Mengubah variabel $g$ menjadi variabel $b$ dengan memisalkan

$$b = \ln g \text{ , maka } g = e^{b}, \tag{3.1.14}$$

diferensialkan kedua ruas, diperoleh

$$db = \frac{1}{g}\,dg \rightarrow dg = g\,db$$

$$\rightarrow dg = e^{b}\,db. \tag{3.1.15}$$

Dengan melakukan tranformasi menggunakan persamaan (3.1.14) dan (3.1.15), bagian integral persamaan I akan menjadi

$$\int_{K}^{\infty} gp(g)dg = \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} \exp\left( b - \frac{1}{2}\left( \frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right)^{2} \right) db. \tag{3.1.16}$$

Jika $H = b - \frac{1}{2}\left( \frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right)^{2}$, maka persamaan (3.1.16) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{K}^{\infty} gp(g)dg = \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{H}\,db. \tag{3.1.17}$$

Persamaan $H$ dapat dimodifikasi dengan cara,

$$H = b - \frac{1}{2}\left( \frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right)^{2}$$

$$=\frac{2b\hat{\sigma}^2T-\left(b-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2}{2\hat{\sigma}^2T}$$

$$=\frac{2b\hat{\sigma}^2T-\left(b^2+\left(\ln S(0)\right)^2+\left(\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2+2\ln S(0)\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T-2b\ln S(0)-2b\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{2\hat{\sigma}^2T}$$

$$=\frac{-\left(-2b\hat{\sigma}^2T+b^2+\left(\ln S(0)\right)^2+\left(\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2+2\ln S(0)\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T-2b\ln S(0)-2b\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{2\hat{\sigma}^2T}$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-2b\ln S(0)-2b\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T-2b\hat{\sigma}^2T+\left(\ln S(0)\right)^2+2\ln S(0)\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T+\left(\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-b\left(2\ln S(0)+2\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T+2\hat{\sigma}^2T\right)+\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-b\left(2\ln S(0)+2\hat{\mu}T-\hat{\sigma}^2T+2\hat{\sigma}^2T\right)+\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2-\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-b\left(2\ln S(0)+2\hat{\mu}T+\hat{\sigma}^2T\right)+\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T-\hat{\sigma}^2T\right)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-b\left(2\ln S(0)+2T\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\right)+\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2+\left(\hat{\sigma}^2T\right)^2-2\hat{\sigma}^2T\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(b^2-2b\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)+\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2+\left(\hat{\sigma}^2T\right)^2-\left(2\ln S(0)\hat{\sigma}^2T+2\hat{\mu}\hat{\sigma}^2T^2+\hat{\sigma}^4T^2\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2T}\left(\left(b-\left(\ln S(0)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)^2+\hat{\sigma}^4T^2-2\ln S(0)\hat{\sigma}^2T-2\hat{\mu}\hat{\sigma}^2T^2-\hat{\sigma}^4T^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(\left(b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)^2 - 2\hat{\sigma}^2 T\left(\ln S(0) + \hat{\mu}T\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2}_{v} + \ln S(0) + \hat{\mu}T\ .$$

Pada akhirnya, $H$ dapat dituliskan kembali menjadi,

$$H = -\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T\ ,$$

dan persamaaan (3.1.17) menjadi

$$\int_K^\infty gp(g)dg = \int_{\ln K}^\infty \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}v^2 + \ln S_0 + \hat{\mu}T\right)db\ . \qquad (3.1.18)$$

b) Mengubah variabel $b$ menjadi variabel $v$ dengan memisalkan

$$v = \frac{b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$v\hat{\sigma}\sqrt{T} = b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)$$

$$b = v\hat{\sigma}\sqrt{T} + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right), \qquad (3.1.19)$$

diferensialkan kedua ruas, diperoleh

$$db = \hat{\sigma}\sqrt{T}dv\ . \qquad (3.1.20)$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan (3.1.19) dan (3.1.20), akan mengubah persamaan (3.1.18) menjadi,

$$\int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T\right) db = \int_{\frac{\ln K - \ln S(0) - T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T} \hat{\sigma}\sqrt{T}\, dv .$$

Karena sifat kesimetrisan dari distribusi normal, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$\int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T\right) db = \int_{-\infty}^{\frac{\ln S(0) - \ln K + T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{\ln S(0)} e^{\hat{\mu}T} dv .$$

Misalkan $\hat{d}_1 = \dfrac{\ln S(0) - \ln K + T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$, bagian integral persamaan I dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned}\int_{K}^{\infty} gp(g)dg &= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{\ln S(0)} e^{\hat{\mu}T} db \\ &= S(0)e^{\hat{\mu}T} \int_{-\infty}^{\hat{d}_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\ &= S(0)e^{\hat{\mu}T} N\left[\hat{d}_1\right].\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa solusi dari persamaan I adalah

$$e^{-rT} S(0)e^{\hat{\mu}T} N\left[\hat{d}_1\right], \tag{3.1.21}$$

dengan $N\left[\hat{d}_1\right]$ adalah *cumulative distribution function (cdf)* normal standar dari $\hat{d}_1$, dengan

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}.$$

2. Langkah kedua adalah menemukan solusi untuk persamaan II. $p(g)$ pada (3.1.12), dimasukkan ke persamaan II,

$$Ke^{-rT}\int_K^\infty p(g)dg = Ke^{-rT}\int_K^\infty \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg. \quad (3.1.22)$$

Untuk memudahkan, akan diubah variabel $g$ menjadi variabel $u$, dengan memisalkan

$$u = \frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \quad (3.1.23)$$

$$u = \frac{\ln g}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} - \frac{\ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$

diferensialkan kedua ruas terhadap $g$, akan didapat

$$du = \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{T}}dg$$

$$dg = g\hat{\sigma}\sqrt{T}du. \quad (3.1.24)$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan (3.1.23) dan (3.1.24), akan mengubah persamaan (3.1.22) menjadi

$$Ke^{-rT}\int_{K}^{\infty} p(g)dg = Ke^{-rT}\int_{\frac{\ln K-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du\,.$$

Karena sifat kesimetrisan dari distribusi normal, maka integral di atas dapat diubah menjadi

$$Ke^{-rT}\int_{K}^{\infty} p(g)dg = Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{\frac{\ln S(0)-\ln K+\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du\,.$$

Misalkan $\hat{d}_2 = \dfrac{\ln S(0)-\ln K+T\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$, bagian integral persamaan II dapat dituliskan kembali menjadi

$$Ke^{-rT}\int_{K}^{\infty} p(g)dg = Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{\hat{d}_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right)dv$$

$$= Ke^{-rT}N\left[\hat{d}_2\right].$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa solusi dari persamaan II adalah

$$Ke^{-rT}N\left[\hat{d}_2\right] \qquad (3.1.25)$$

dengan $N\left[\hat{d}_2\right]$ adalah *cdf* normal standar dari $\hat{d}_2$, dengan

$$\hat{d}_2 = \left[ \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right].$$

Setelah mendapat solusi dari persamaan I dan II, substitusi (3.1.21) dan (3.1.25) ke dalam (3.1.13), diperoleh

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT}\int_K^\infty gp(g)dg - Ke^{-rT}\int_K^\infty p(g)dg \\ &= e^{-rT}S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] - Ke^{-rT}N\left[\hat{d}_2\right] \\ &= e^{-rT}\left(S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] - KN\left[\hat{d}_2\right]\right) \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

dimana,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}.$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}.$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \qquad \blacksquare$$

### 3.1.2.2 Opsi *Put* Asia

Harga opsi *put* Asia dengan rata-rata geometrik dapat dihitung menggunakan formula *Black-Scholes* berikut ini,

$$P = e^{-rT}\left(KN\left[-\hat{d}_2\right] - S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]\right)$$

dimana $\hat{d}_1$, $\hat{d}_2$, $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ sama nilainya dengan perhitungan nilai opsi *call* Asia pada 3.1.2.1.

*Bukti:*

Sama halnya dengan menentukan opsi *call* Asia, untuk penentuan harga opsi *put* Asia menggunakan *risk-neutral valuation*. Yaitu penentuan harga opsi yang dibawa ke dalam dunia *risk-neutral* dengan mengasumsikan bahwa nilai tingkat pengembalian yang diharapkan sama dengan *risk-free rate*. Yang akan dilakukan adalah mencari nilai saat ini dari ekspektasi *cash flow* pada waktu jatuh tempo dengan menggunakan *risk-free rate*.

Harga opsi saat ini merupakan *expected value* yang didiskon dari *payoff* yang dinotasikan sebagai berikut,

$$P = e^{-rT}E[\,payoff\,] \qquad (3.1.27)$$

memasukkan nilai *payoff* (2.2.4) ke persamaan (3.1.27), diperoleh

$$P = e^{-rT}E\left[\max\left(K - \left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}, 0\right)\right]$$

$$= e^{-rT}E\left[\max\left(K - G, 0\right)\right].$$

Dengan menggunakan definisi ekspektasi, maka harga opsi dapat ditulis sebagai berikut:

$$P = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(K - g, 0\right) p(g)dg \,.$$

$$= e^{-rT} \left\{ \int_{0}^{K} \max\left(K - g, 0\right) p(g)dg + \int_{K}^{\infty} \max\left(K - g, 0\right) p(g)dg \right\}$$

$$= e^{-rT} \left\{ \int_{0}^{K} \max\left(K - g, 0\right) p(g)dg + 0 \right\}$$

$$= e^{-rT} \int_{0}^{K} \max\left(K - g, 0\right) p(g)dg \,. \qquad (3.1.28)$$

Ubah bagian integral (3.1.28) menjadi

$$P = e^{-rT} \int_{0}^{K} \left(K - g\right) p(g)dg$$

$$= Ke^{-rT} \int_{0}^{K} p(g)dg - e^{-rT} \int_{0}^{K} gp(g)dg \qquad (3.1.29)$$

= I – II.

Diperoleh 2 persamaan, yaitu persamaan I = $Ke^{-rT} \int_{0}^{K} p(g)dg$ dan persamaan II = $e^{-rT} \int_{0}^{K} gp(g)dg$ .

Selanjutnya akan dijelaskan penentuan nilai $P$ , melalui proses sebagai berikut:

1 Langkah pertama adalah menemukan solusi untuk persamaan I.

$p(g)$ pada (3.1.12), dimasukkan ke persamaan I,

$$Ke^{-rT}\int_0^K p(g)dg = Ke^{-rT}\int_0^K \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg\,. \quad (3.1.30)$$

Ubah variabel $g$ menjadi variabel $u$, dengan pemisalan seperti (3.1.23)

$$u=\frac{\ln g-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$u=\frac{\ln g}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}-\frac{\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$

diferensialkan kedua ruas terhadap $g$, akan didapat (3.1.24)

$$du=\frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{T}}dg$$

$$dg=g\hat{\sigma}\sqrt{T}du\,.$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan (3.1.23) dan (3.1.24), persamaan (3.1.30) akan berubah menjadi

$$Ke^{-rT}\int_0^K p(g)dg = Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{\frac{\ln K-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)g\hat{\sigma}\sqrt{T}du$$

$$=Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{\frac{\ln K-\ln S(0)-\left(\hat{\mu}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du$$

$$= Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{\frac{-\left(\ln S(0) - \ln K + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du .$$

Misalkan $\hat{d}_2 = \dfrac{\ln S(0) - \ln K + T\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ , bagian integral persamaan II dapat dituliskan kembali menjadi

$$Ke^{-rT} \int_{K}^{\infty} f(g)dg = Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{-\hat{d}_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

$$= Ke^{-rT} N\left[-\hat{d}_2\right].$$

Jadi, bisa disimpulkan bahwa solusi dari persamaan I adalah

$$Ke^{-rT} N\left[-\hat{d}_2\right] \tag{3.1.31}$$

dengan $N\left[-\hat{d}_2\right]$ adalah *cdf* normal standar dari $-\hat{d}_2$, dimana

$$\hat{d}_2 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right].$$

2. Langkah kedua adalah menemukan solusi untuk persamaan II.

   $p(g)$ pada (3.1.12), dimasukkan ke bagian integral persamaan II,

$$\int_0^K gp(g)dg = \int_0^K g\,\frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg$$

$$= \int_0^K \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)dg\ .$$

Untuk mempermudah perhitungan, akan dilakukan beberapa kali transformasi variabel, yaitu

a) Mengubah variabel $g$ menjadi variabel $b$ dengan pemisalan menggunakan (3.1.14)

$b = \ln g$ , maka $g = e^b$ ,

diferensialkan kedua ruas seperti (3.1.15)

$$db = \frac{1}{g}dg \ \rightarrow\ dg = gdb$$

$$\rightarrow\ dg = e^b db\ .$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan (3.1.14) dan (3.1.15) , bagian integral persamaan II akan menjadi

$$\int_0^K gp(g)dg = \int_{-\infty}^{\ln K} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}}\exp\left(b - \frac{1}{2}\left(\frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2\right)db$$

Jika $H = b - \frac{1}{2}\left(\frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2$,

maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^K gp(g)dg = \int_{-\infty}^{\ln K} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^H db. \tag{3.1.32}$$

Persamaan $H$ dapat dimodifikasi dengan cara,

$$H = b - \frac{1}{2}\left(\frac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2$$

$$= \frac{2b\hat{\sigma}^2 T - \left(b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2}{2\hat{\sigma}^2 T}$$

$$= \frac{2b\hat{\sigma}^2 T - \left(b^2 + (\ln S(0))^2 + \left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2 + 2\ln S(0)\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T - 2b\ln S(0) - 2b\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{2\hat{\sigma}^2 T}$$

$$= \frac{-\left(-2b\hat{\sigma}^2 T + b^2 + (\ln S(0))^2 + \left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2 + 2\ln S(0)\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T - 2b\ln S(0) - 2b\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{2\hat{\sigma}^2 T}$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - 2b\ln S(0) - 2b\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T - 2b\hat{\sigma}^2 T + (\ln S(0))^2 + 2\ln S(0)\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T + \left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - b\left(2\ln S(0) + 2\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T + 2\hat{\sigma}^2 T\right) + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - b\left(2\ln S(0) + 2\hat{\mu}T - \hat{\sigma}^2 T + 2\hat{\sigma}^2 T\right) + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2\right)T\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - b\left(2\ln S(0) + 2\hat{\mu}T + \hat{\sigma}^2 T\right) + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T - \hat{\sigma}^2 T\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - b\left(2\ln S(0) + 2T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\right) + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2 T\right)^2 - 2\hat{\sigma}^2 T\left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(b^2 - 2b\left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right) + \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2 T\right)^2 - \left(2\ln S(0)\hat{\sigma}^2 T + 2\hat{\mu}\hat{\sigma}^2 T^2 + \hat{\sigma}^4 T^2\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(\left(b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)^2 + \hat{\sigma}^4 T^2 - 2\ln S(0)\hat{\sigma}^2 T - 2\hat{\mu}\hat{\sigma}^2 T^2 - \hat{\sigma}^4 T^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 T}\left(\left(b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)\right)^2 - 2\hat{\sigma}^2 T\left(\ln S(0) + \hat{\mu}T\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)}_{v}^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T \,.$$

Pada akhirnya, persamaan $H$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$H = -\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T$$

dan persamaaan (3.1.31) menjadi

$$\int_0^K gp(g)dg = \int_{-\infty}^{\ln K} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T\right) db \,. \qquad (3.1.33)$$

b) Mengubah variabel $b$ menjadi variabel $v$ dengan pemisalan (3.1.19), yaitu

$$b = v\hat{\sigma}\sqrt{T} + \left( \ln S(0) + \left( \hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \right) T \right),$$

diferensialkan kedua ruas, didapat (3.1.20)

$$db = \hat{\sigma}\sqrt{T}\, dv .$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan (3.1.19) dan (3.1.20), persamaan (3.1.33) akan berubah menjadi

$$\int_{-\infty}^{\ln K} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T} db = \int_{-\infty}^{\frac{\ln K - \ln S(0) - T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2 + \ln S(0) + \hat{\mu}T} \hat{\sigma}\sqrt{T}\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{-\left(\frac{\ln S(0) - \ln K + T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{\ln S(0)} e^{\hat{\mu}T} dv .$$

Misalkan $\hat{d}_1 = \frac{\ln S(0) - \ln K + T\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$, bagian integral persamaan II akan berubah menjadi

$$\int_0^K gp(g)dg = \int_{-\infty}^{\ln K} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{\ln S(0)} e^{\hat{\mu}T} db$$

$$= S(0)e^{\hat{\mu}T} \int_{-\infty}^{-\hat{d}_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$$

$$= S(0)e^{\hat{\mu}T} N\left[-\hat{d}_1\right].$$

Jadi, bisa disimpulkan bahwa solusi dari persamaan II adalah

$$e^{-rT}\ S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right], \tag{3.1.34}$$

dengan $N\left[-\hat{d}_1\right]$ adalah *cdf* normal standar dari $-\hat{d}_1$, dimana

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}.$$

Setelah mendapat solusi dari persamaan I dan II, substitusi (3.1.31) dan (3.1.32) ke dalam (3.1.29), diperoleh

$$P = Ke^{-rT}\int_0^K p(g)dg - e^{-rT}\int_0^K gp(g)dg$$

$$= Ke^{-rT}N\left[-\hat{d}_2\right]-e^{-rT}S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]$$

$$= e^{-rT}\left(KN\left[-\hat{d}_2\right]-S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]\right) \tag{3.1.35}$$

dimana,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right)+\left(\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T},$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \qquad \blacksquare$$

### 3.1.3 *Put-Call Parity*

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai formula *put-call parity* untuk kasus opsi Asia. Diketahui *put-call parity* standar adalah

$$C - P = S(0) - Ke^{-rT}.$$

Dengan membuat persamaan yang serupa dengan *put-call parity* standar dan menggunakan harga opsi *call* Asia (3.1.29) juga opsi *put* Asia (3.1.35) yang telah dicari, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
C - P &= e^{-rT}\left(S(0)e^{-\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] - KN\left[\hat{d}_2\right]\right) - e^{-rT}\left(KN\left[-\hat{d}_2\right] - S(0)e^{-\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]\right) \\
&= e^{-rT}\left\{\left(S(0)e^{-\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] + S(0)e^{-\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]\right) - \left(KN\left[\hat{d}_2\right] + KN\left[-\hat{d}_2\right]\right)\right\} \\
&= e^{-rT}\left\{S(0)e^{-\hat{\mu}T}\left(N\left[\hat{d}_1\right] + N\left[-\hat{d}_1\right]\right) - K\left(N\left[\hat{d}_2\right] + N\left[-\hat{d}_2\right]\right)\right\} \\
&= e^{-rT}\left(S(0)e^{-\hat{\mu}T} - K\right)
\end{aligned}$$

$$C = P + e^{-rT}\left(S(0)e^{-\hat{\mu}T} - K\right) \qquad (3.1.36)$$

## 3.2 PENENTUAN HARGA OPSI ASIA MENGGUNAKAN RATA-RATA ARITMATIK

### 3.2.1 Karakteristik Rata-Rata Aritmatik

Karakteristik rata-rata aritmatik adalah ketika harga sahamnya berdistribusi lognormal, rata-rata aritmatik dari harga saham tidak berdistribusi lognormal. Hal itu dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Lihat lagi persamaan (3.1.1),

$$\ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_i \,.$$

Karena interval waktu yang digunakan sama, sehingga (3.1.1) dapat juga ditulis sebagai berikut,

$$\ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_i \,.$$

Persamaan di atas adalah pengembalian (imbal hasil) dari harga saham yang berdistribusi normal dan dapat dinotasikan

$$\ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)\sim N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\sigma^2\Delta t\right)$$

$$\ln S(t_i)\sim N\left(\ln S(t_{i-1})+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\sigma^2\Delta t\right).$$

Karena $\ln S(t_i)$ berdistribusi normal, maka distribusi $S(t_i)$ adalah lognormal.

Rata-rata aritmatik merupakan penjumlahan dari variabel-variabel random yang lognormal, yang dapat dinotasikan sebagai berikut,

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) = \frac{1}{n}\left(S(t_1) + S(t_2) + ... + S(t_n)\right).$$

Dari sifat distribusi lognormal, yaitu penjumlahan dari variabel random (dalam kasus ini adalah $S(t_i)$) yang berdistribusi lognormal adalah tidak lognormal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa ketika harga saham berdistribusi lognormal, rata-rata aritmatik harga sahamnya tidak berdistribusi lognormal.

Rata-rata aritmatik harga saham yang tidak berdistribusi lognormal menyebabkan penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik tidak dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Black-Scholes*. Hal ini dikarenakan tidak terpenuhinya salah satu asumsi model *Black-Scholes* yaitu variabel random yang digunakan berdistribusi lognormal [9].

Karena distribusi dari rata-rata aritmatik harga saham tidak diketahui secara pasti, maka perlu dilakukan aproksimasi. Metode aproksimasi yang digunakan pada tugas akhir ini adalah aproksimasi *Curran* yaitu melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik.

### 3.2.2 Opsi *Call* Asia

Penentuan harga opsi *call* Asia menggunakan rata-rata aritmatik, dapat diperoleh dengan mencari nilai *expected value* yang didiskon, yaitu

$$C = e^{-rT} E\left[ Max\left( A - K, 0 \right) \right]. \quad (3.2.1)$$

Namun karena distribusi dari rata-rata aritmatik tidak diketahui, sehingga sulit untuk mencari nilai ekspektasi *payoff*-nya. Dengan menggunakan aproksimasi *Curran,* distribusi rata-rata aritmatik dapat dicari melalui pendekatan terhadap rata-rata geometrik [2]. Oleh karena itu, ekspektasi *payoff* dari opsi *call* Asia pada (3.2.1) dapat diubah menjadi

$$C = e^{-rT} \widetilde{E}\left[ \widetilde{E}\left[ Max\left( A - K, 0 \right) | G \right] \right], \quad (3.2.2)$$

dimana,

$C$ = harga opsi *call* Asia

$\widetilde{E}$ = taksiran ekspektasi

$r$ = *risk-free rate*

$T$ = waktu jatuh tempo

$A$ = rata-rata aritmatik dari harga saham

$G$ = rata-rata geometrik dari harga saham

$K$ = *strike price*

Persamaaan (3.2.2) dapat dituliskan kembali menjadi

$$C = e^{-rT} \left\{ \underbrace{\int_0^K \widetilde{E}\left[ \max\left( a - K, 0 \right) | g \right] p(g) dg}_{C_1} + \underbrace{\int_K^\infty \widetilde{E}\left[ \max\left( a - K, 0 \right) | g \right] p(g) dg}_{C_2} \right\}$$

(3.2.3)

atau

$$C = e^{-rT}\left(C_1 + C_2\right)$$

dengan $p(g)$ adalah *pdf* dari $G$ (3.1.12).

Sesuai dengan pertidaksamaan rata-rata aritmatik dan rata-rata geometrik yang menyatakan bahwa $A \geq G$ untuk semua kemungkinan harga-harga saham (lampiran 3) , membuat $C_2$ dapat menghasilkan solusi yang eksak. Hal itu dikarenakan batas integral $C_2$, dimana nilai $G$ berada pada interval $K \leq G < \infty$. Jika $A \geq G$ dan $G \geq K$, maka $A \geq G \geq K$, dan dapat disimpulkan $A \geq K$. Karena $A \geq K$, maka ekspektasi *payoff* $C_2$ dapat dicari dan menghasilkan solusi yang eksak.

Namun untuk $C_1$, perhitungan akan lebih sulit dari $C_2$. Hal ini dikarenakan, $0 \leq G \leq K$ dan $A \geq G$, sehingga akan menghasilkan 2 kemungkinan yaitu nilai untuk $A$, yaitu $A \geq K$ atau $A \leq K$. Oleh karena itu, opsi akan mungkin berakhir dalam posisi tidak *in the money*, yaitu posisi dimana *holder* mendapat nilai *payoff* yang lebih besar dari 0.

1. Perhitungan $C_2$ .

   Diketahui $A \geq K$, maka bagian $C_2$

   $$C_2 = \int_K^{\infty} \widetilde{E}\left[\max\left(a - K, 0\right) \mid g\right] p(g)dg \,, \qquad (3.2.4)$$

   taksiran ekspektasi *payoff* bersyarat dari persamaan (3.2.4) dapat dibuat menjadi

   $$C_2 = \int_K^{\infty} \widetilde{E}\left[a - K \mid g\right] p(g)dg$$

$$= \int_K^{\infty} \left( \widetilde{E}\left[a \mid g\right] - E\left[K \mid g\right] \right) p(g)dg$$

$$= \int_K^{\infty} \left( \widetilde{E}\left[a \mid g\right] - K \right) p(g)dg \qquad (3.2.5)$$

Sekarang akan difokuskan pada perhitungan ekspektasi bersyarat dari persamaan $C_2$. Misalkan

$$X_i = \ln S(t_i)\,, \qquad (3.2.6)$$

adalah variabel random yang berdistribusi normal dengan meannya adalah $\mu_i$ dan variansinya adalah $\sigma_i^{\,2}$, atau dapat dinotasikan

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^{\,2}\right) \qquad (3.2.7)$$

dengan $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Dan jika didefinisikan

$$X = \ln G\,, \qquad (3.2.8)$$

dimana $G$ adalah rata-rata geometrik harga saham, maka

$$X = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln S(t_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,. \qquad (3.2.9)$$

Kemudian diperoleh bahwa variabel $X$ berdistribusi normal dengan parameter meannya adalah

$$\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \ ,$$

dan variansinya

$$\sigma_X{}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right),$$

dengan $\rho_{ij}$ adalah korelasi antara pengembalian (imbal hasil) harga saham ke-*i* dan ke-*j*. Sehingga dapat dinotasikan kembali menjadi

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X{}^2\right), \qquad (3.2.10)$$

Pembuktian dapat dilihat pada lampiran 5.

Dengan diketahui distribusi $X_i$ dan $X$, maka berdasarkan [12] distribusi dari $X_i$ bersyarat $X$ adalah

$$\left[X_i \mid X = x\right] \sim N\left(\mu_i + \left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\right)[x - \mu_X], \sigma_i{}^2 - \frac{\sigma_{Xi}^2}{\sigma_X{}^2}\right), \qquad (3.2.11)$$

dimana $\sigma_{Xi} = \frac{\sigma_i}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\rho_{ij}$ [2].

Jika $\left[X_i \mid X = x\right] \sim N\left(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2\right)$

$$\left[\ln S(t_i) \mid \ln g\right] \sim N\left(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2\right)$$

dengan $\hat{\mu}_i$ adalah parameter mean dan $\hat{\sigma}_i^2$ adalah parameter variansi, maka distribusi $S(t_i)$ bersyarat $G$ adalah lognormal dengan mean $\exp\left(\hat{\mu}_i + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}\right)$ (Lampiran 4). Jadi dapat ditulis,

$$E\left[S(t_i)\,|\,G\right] = \exp\left(\hat{\mu}_i + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}\right).$$

Dari (3.2.11), ekspektasi bersyarat di atas dapat dituliskan kembali menjadi

$$E\left[S(t_i)\,|\,G\right] = \exp\left(\mu_i + \left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X^{\ 2}}\right)[x - \mu_X] + \left(\sigma_i^{\ 2} - \frac{\sigma_{Xi}^2}{\sigma_X^{\ 2}}\right)/\,2\right). \qquad (3.2.12)$$

Ekspektasi $A$ bersyarat $G$, dapat ditulis $E\left[A\,|\,G = e^x\right]$. Ekspektasi bersyarat tersebut dapat ditulis juga menjadi,

$$\widetilde{E}\left[A\,|\,G = e^x\right] = \widetilde{E}\left[A\,|\,X = x\right]. \qquad (3.2.13)$$

Dengan menggunakan (3.2.13), bagian $C_2$ dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

Untuk mempermudah perhitungan, perlu dilakukan transformasi variabel terlebih dahulu dengan menggunakan pemisalan (3.2.8). Diferensialkan kedua ruas akan menjadi

$$dx = \frac{1}{g}dg$$

$$gdx = dg\ ,$$

Dengan menggunakan pemisalan (3.2.8) dan (3.2.13), $C_2$ dapat ditulis kembali menjadi

$$C_2 = \int_{\ln K}^{\infty} \left(\widetilde{E}\left[a\,|\,X = x\right] - K\right) f(x)dx \qquad (3.2.14)$$

dimana $f(x)$ adalah *pdf* dari variabel random $X$ .

Jika $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$ , maka persamaan (3.2.14) dapat diubah

menjadi,

$$C_2 = \int_{\ln K}^{\infty} \left( E\left[ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) | X = x \right] - K \right) f(x)dx$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} E\left[ S(t_i) \mid X = x \right] - K \right) f(x)dx$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{n} \int_{\ln K}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[ S(t_i) \mid X = x \right] \right) f(x)dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\ln K}^{\infty} K f(x)dx}_{I_2} \qquad (3.2.15)$$

$$= I_1 - I_2$$

a) Langkah pertama adalah hitung bagian $I_1$ .

Bagian $I_1$ adalah

$$I_1 = \frac{1}{n} \int_{\ln K}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[ S(t_i) \mid X = x \right] f(x)dx$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\ln K}^{\infty} E\left[ S(t_i) \mid X = x \right] f(x)dx \, .$$

Dengan menggunakan (3.2.12), diperoleh

$$I_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left( \mu_i + \left( \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X^{\ 2}} \right) [x - \mu_X] + \left( \frac{\sigma_i^{\ 2}}{2} - \frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X^{\ 2}} \right) \right) f(x)dx \, , \qquad (3.2.16)$$

dengan $f(x)$ adalah *pdf* dari variabel random $X$ , yaitu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right). \tag{3.2.17}$$

Masukkan (3.2.17) ke persamaan (3.2.16)

$$I_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\ln K}^{\infty}\exp\left(\mu_i+\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\right)[x-\mu_X]+\left(\frac{\sigma_i{}^2}{2}-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}\right)\right)\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\ln K}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu_i+\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\right)\left[x-\mu_X\right]+\left(\frac{\sigma_i{}^2}{2}-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\ln K}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X+\frac{\sigma_i{}^2}{2}-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\ln K}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i{}^2}{2}+\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\ln K}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i{}^2}{2}\right)\exp\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i{}^2}{2}\right)\int_{\ln K}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\underbrace{\exp\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)}_{Q}dx$$

Misal

$$Q=\exp\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}x-\frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X-\frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{\left(x^2+\mu_X{}^2-2\mu_X x\right)}{2\sigma_X{}^2}\right)$$

$$= \exp\left( \frac{2\sigma_{Xi}}{2\sigma_X{}^2} x - \frac{2\sigma_{Xi}}{2\sigma_X{}^2} \mu_X - \frac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2} - \frac{\left(x^2 + \mu_X{}^2 - 2\mu_X x\right)}{2\sigma_X{}^2} \right)$$

$$= \exp\left( \frac{2\sigma_{Xi} x - 2\sigma_{Xi}\mu_X - \sigma^2{}_{Xi} - x^2 - \mu_X{}^2 + 2\mu_X x}{2\sigma_X{}^2} \right)$$

$$= \exp - \left( \frac{x^2 + \mu_X{}^2 + \sigma^2{}_{Xi} + 2\sigma_{Xi}\mu_X - 2\sigma_{Xi} x - 2\mu_X x}{2\sigma_X{}^2} \right)$$

$$= \exp\left( -\frac{1}{2} \underbrace{\left( \frac{x - \mu_X - \sigma_{Xi}}{\sigma_X} \right)}_{q}{}^2 \right) \tag{3.2.18}$$

Misalkan

$$q = \frac{x - \mu_X - \sigma_{Xi}}{\sigma_X},$$

diferensialkan kedua ruas,

$$dq = \frac{1}{\sigma_X} dx$$

$$\sigma_X dq = dx .$$

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan $q$ dan hasil $Q$ pada (3.2.18), $I_1$ berubah menjadi

$$I_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp\left( \mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2} (q)^2 \right) \sigma_X \, dq$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp\left( \mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \int_{\frac{\ln K - \mu_X - \sigma_{Xi}}{\sigma_X}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2} q^2 \right) dq .$$

Karena sifat kesimetrisan distribusi normal, persamaan $I_1$ dapat dituliskan kembali menjadi

$$I_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^{\,2}}{2}\right)\int_{-\infty}^{\frac{\mu_X - \ln K + \sigma_{Xi}}{\sigma_X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right)dq\ ,$$

maka $I_1$ menjadi

$$I_1 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\exp\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^{\,2}}{2}\right)\times N\left[\frac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X} + \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X}\right]. \qquad (3.2.19)$$

b) Langkah kedua adalah hitung bagian $I_2$.

Dengan menggunakan teknik yang sama dengan perhitungan $I_1$, yaitu jika

$$I_2 = \int_{\ln k}^{\infty} K\,f(x)dx$$

dari (3.2.17), diperoleh

$$I_2 = \int_{\ln k}^{\infty} K\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)}_{R}^{2}\right)dx\,.$$

Misalkan

$$R = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\ ,$$

diferensialkan kedua ruas,

$$dR = \frac{1}{\sigma_X}dx$$

$\sigma_X \, dR = dx$ .

Dengan melakukan transformasi menggunakan pemisalan $R$ , $I_2$ dapat diubah menjadi

$$I_2 = K \int_{\frac{\ln K - \mu_X}{\sigma_X}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) \sigma_X \, dR$$

$$= K \int_{\frac{\ln K - \mu_X}{\sigma_X}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) dR$$

$$= K \int_{-\infty}^{\frac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) dR .$$

Jadi $I_2$ dapat dihitung dengan *formula*,

$$I_2 = KN\left[\frac{(\mu_X - \ln K)}{\sigma_X}\right]. \qquad (3.2.20)$$

Dengan menggunakan $I_1$ dan $I_2$ pada (3.2.19) dan (3.2.20), diperoleh nilai $C_2$ , yaitu

$$C_2 = I_1 - I_2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} \exp\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^2}{2}\right) \times N\left[\frac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X} + \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X}\right]\right) - \left(KN\left[\frac{(\mu_X - \ln K)}{\sigma_X}\right]\right).$$

2. Perhitungan $C_1$

Harga opsi Asia pada persamaan (3.2.3) dibagi menjadi 2 bagian yaitu $C_1$ dan $C_2$. Berdasarkan karakteristik $C_1$ dan $C_2$, diketahui bahwa bagian $C_2$ lebih mudah untuk dihitung dan menghasilkan solusi yang eksak, sedangkan $C_1$ lebih sulit dihitung dan tidak menghasilkan solusi yang eksak, sehingga diperlukan estimasi nilai $C_1$ agar nantinya diperoleh harga $C$.

Untuk memperoleh estimasi $C_1$ akan diperkenalkan beberapa notasi matriks, dimana vektor ditandai dengan huruf yang digarisbawahi sedangkan bentuk matriks ditandai dengan huruf tebal.

Nilai $C_1 = \int_0^K \widetilde{E}\left[\max\left(a-K,0\right) | g\right] p(g)dg$

dapat dihitung jika distribusi dari $\left[A-K | G\right]$ diketahui. Distribusi tersebut diperlukan pada perhitungan ekspektasi dari $\left[A-K | G\right]$. Namun karena distribusi $\left[A-K | G\right]$ tidak diketahui, maka distribusi tersebut perlu diaproksimasi, dan kemudian dicari taksiran parameter-parameternya.

Menurut *Ritchken*, lognormal adalah aproksimasi terbaik untuk jumlah variabel random lognormal [12]. *Curran* mengasumsikan bahwa lognormal adalah aproksimasi terbaik pula untuk jumlah variabel random lognormal bersyarat terhadap rata-rata geometrik [2]. Setelah diketahui aproksimasi distribusi dari $\left[A-K | G\right]$, yang untuk selanjutnya $\left[A-K | G\right]$

dinotasikan dengan $\in$, kemudian akan dicari taksiran parameter-parameternya.

Taksiran mean dan variansi dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

A. Mencari taksiran parameter untuk distribusi $A$ bersyarat $X$.

1) Ambil matriks $\mathbf{D}$ yang berukuran $(n+1)\times n$ yang dituliskan sebagai berikut,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \ldots \\ \underline{n}^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}, \qquad (3.2.21)$$

dengan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas berukuran $n\times n$,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dan $\underline{n}^T$ adalah vektor dengan bentuk,

$$\underline{n}^T = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right). \qquad (3.2.22)$$

2) Ambil vektor $\underline{X}$ yang beranggotakan variabel random $X_i$ seperti pada persamaan (3.2.6), dengan $i = 1, 2, ..., n$,

$$\underline{X}^T = \left( X_1, X_2, ..., X_n \right). \tag{3.2.23}$$

Misalkan,

$$\underline{X}_+ = \mathbf{D}\underline{X} \tag{3.2.24}$$

dengan matriks $\mathbf{D}$ pada (3.2.21) dan vektor $\underline{X}$, maka vektor $\underline{X}_+$

$$\underline{X}_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \end{bmatrix}. \tag{3.2.25}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.9), matriks $\underline{X}_+$ pada (3.2.25) dapat dipartisi menjadi

$$\underline{X}_+ == \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \cdots \\ X \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \cdots\cdots \\ X \end{bmatrix}. \tag{3.2.26}$$

Jika $\underline{X}$ adalah vektor dari variabel random $X_i$ yang berdistribusi normal sesuai dengan (3.2.7), maka vektor $\underline{X}$ berdistribusi normal dan dapat ditulis sebagai berikut

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_{\underline{x}}, \mathbf{C}\right). \tag{3.2.27}$$

Misalkan matriks kovariansi dari $\underline{X}$ dinotasikan dengan $\mathbf{C}$ dan

$$\rho_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

maka $c_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ (3.2.28)

dimana $i = 1, 2, ..., n$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

Dengan menggunakan (3.2.28), matriks kovariansi $\mathbf{C}$ yang elemen-elemennya disimbolkan dengan $c_{ij}$ dapat dituliskan

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \vdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{12} & \sigma_n\sigma_2\rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \tag{3.2.29}$$

3) Cari matriks kovariansi dari $\underline{X}_+$

Berdasarkan lampiran 6, diketahui bahwa

$$\underline{X}_+ \sim N\left(\mathbf{D}\underline{\mu}_X, \mathbf{C}_+\right), \tag{3.2.30}$$

dimana matriks kovariansinya adalah

$$\mathbf{C}_+ = \mathbf{DCD}^T$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2n} & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{nj} \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{1j} & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{2j} & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{nj} & \left\{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c_{j1} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c_{j2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\right\} \end{bmatrix}. \tag{3.2.31}$$

Persamaan (3.2.31) dapat dituliskan kembali dalam bentuk matriks partisi, yaitu

$$\mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}\underline{n} \\ \underline{n}^T\mathbf{C}^T & \underline{n}^T\mathbf{C}\underline{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}\underline{n} \\ \left(\mathbf{C}\underline{n}\right)^T & \underline{n}^T\mathbf{C}\underline{n} \end{bmatrix}. \tag{3.2.32}$$

4) Cari taksiran parameter-parameter dari distribusi $\underline{X}$ bersyarat $X$.

Berdasarkan lampiran 6, diketahui bahwa $\underline{X}$ bersyarat $X$ berdistribusi multivariat normal atau dapat dinotasikan menjadi

$$[\underline{X} \mid X] \sim N\left( \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \frac{\mathbf{C}\underline{n}}{\underline{n}^T\mathbf{C}\underline{n}}\left[ X - \mu_X \right], \widehat{\mathbf{C}} \right), \quad (3.2.33)$$

dimana

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C}\underline{n}\underline{n}^T\mathbf{C}^T}{\underline{n}^T\mathbf{C}n}.$$

Dengan menggunakan (3.2.11), persamaan (3.2.33) dapat ditulis kembali menjadi

$$[\ln S(t_i) \mid \ln g] \sim N\left( \widehat{\mu}_i, \widehat{c}_{ii} \right). \quad (3.2.34)$$

5) Cari taksiran mean dan variansi dari $A$ bersyarat $X$.

Taksiran mean dari $A$ bersyarat $X$, ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_A &= \widetilde{E}[A \mid X] \\ &= \widetilde{E}\left[ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) \mid X \right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{E}\left[ S(t_i) \mid X \right]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (3.2.34), taksiran mean dari $A$ bersyarat $X$, adalah

$$\widehat{\mu}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp\left[ \widehat{\mu}_i + \frac{\widehat{c}_{ii}}{2} \right], \quad (3.2.35)$$

dengan menggunakan pemisalan bahwa rata-rata geometrik sama dengan *strike price* [2]. Untuk taksiran variansi bersyarat $A$, dapat dicari dengan

$$\widehat{\sigma}_A^2 = \widetilde{\mathrm{var}}\left[A \mid X\right]$$

$$= \widetilde{\mathrm{var}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) \mid X\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\widetilde{\mathrm{var}}\left[\sum_{i=1}^{n} S(t_i) \mid \ln K\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\widetilde{\mathrm{var}}\left[\sum_{i=1}^{n} \exp\left(X_i\right) \mid \exp\left(X = \ln(K)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\widetilde{\mathrm{var}}\left[\sum_{i=1}^{n} \exp(X_i \mid X = \ln(K))\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\widetilde{\mathrm{var}}\left[\exp(X_1 \mid X = \ln(K)) + \exp(X_2 \mid X = \ln(K)) + \ldots + \exp(X_n \mid X = \ln(K))\right]. \tag{3.2.36}$$

Persamaan (3.2.36) dapat dituliskan kembali menjadi,

$$\widehat{\sigma}_A^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left(\left(\exp(X_i), \exp(X_j)\right) \mid X\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\widetilde{E}\left[\left(\exp(X_i)\exp(X_j)\right) \mid X\right] - \widetilde{E}\left[\exp(X_i) \mid X\right]\widetilde{E}\left[\exp(X_j) \mid X\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\widetilde{E}\left[\exp(X_i + X_j) \mid X\right] - \widetilde{E}\left[\exp(X_i) \mid X\right]\widetilde{E}\left[\exp(X_j) \mid X\right]\right\}.$$

Karena variabel random $\exp\left(X_i \mid X = \ln K\right)$, $\exp\left(X_j \mid X = \ln K\right)$ dan $\exp\left(X_i + X_j \mid X = \ln K\right)$ adalah berdistribusi lognormal, maka variansi bersyarat dari $X$ adalah

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\exp\left[\hat{\mu}_i + \hat{\mu}_j + \frac{1}{2}(\hat{c}_{ii} + \hat{c}_{jj} + 2\hat{c}_{ij})\right] - \exp\left[\hat{\mu}_i + \frac{1}{2}\hat{c}_{ii}\right]\exp\left[\hat{\mu}_j + \frac{1}{2}\hat{c}_{jj}\right]\right\}$$
(3.2.37)

B. Mencari taksiran mean dan taksiran variansi dari distribusi $\in$.

Taksiran mean dari $\in$ , yaitu :

$$\hat{\mu}_{\in} = \tilde{E}[A - K \mid G]$$

$$= \tilde{E}[A \mid G] - E[K \mid G]$$

$$= \hat{\mu}_A - K \, . \qquad (3.2.38)$$

Taksiran variansinya adalah

$$\hat{\sigma}_{\in}^2 = \widetilde{\mathrm{var}}[A - K \mid G]$$

$$= \widetilde{\mathrm{var}}[A \mid G] - \mathrm{var}[K \mid G]$$

$$= \hat{\sigma}_A^2 . \qquad (3.2.39)$$

Mean bersyarat dari distribusi lognormal dengan parameter $\beta$ dan $\gamma^2$ adalah $\exp\left(\beta + \frac{\gamma^2}{2}\right)$ dan variansi bersyarat adalah $\left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right)\exp\left(2\beta + \gamma^2\right)$.

Dari (3.2.38) dan (3.2.39), dapat diperoleh nilai $\beta$ dan $\gamma^2$, dengan cara sebagai berikut:

Berdasarkan mean bersyarat, diperoleh persamaan,

$$\hat{\mu}_{\in} = \exp\left(\beta + \frac{\gamma^2}{2}\right)$$

$$\ln \hat{\mu}_\in = \beta + \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\ln \hat{\mu}_\in = \frac{2\beta + \gamma^2}{2}$$

$$2\ln \hat{\mu}_\in = 2\beta + \gamma^2$$

$$2\beta = 2\ln \hat{\mu}_\in - \gamma^2$$

$$\beta = \frac{2\ln \hat{\mu}_\in - \gamma^2}{2}$$

$$\beta = \ln \hat{\mu}_\in - \frac{\gamma^2}{2}\,. \tag{3.2.40}$$

Berdasarkan variansi bersyarat dari distribusi lognormal, diperoleh persamaan,

$$\hat{\sigma}_\in^2 = \left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right)\exp\left(2\beta + \gamma^2\right).$$

Jika diubah dalam bentuk ln, akan menjadi

$$\ln \hat{\sigma}_\in^2 = \ln\left(\left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right)\exp\left(2\beta + \gamma^2\right)\right)$$

$$\ln \hat{\sigma}_\in^2 = \ln\left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right) + \ln\left(\exp\left(2\beta + \gamma^2\right)\right)$$

$$\ln \hat{\sigma}_\in^2 = \ln\left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right) + 2\beta + \gamma^2$$

$$2\beta + \gamma^2 = \ln \hat{\sigma}_\in^2 - \ln\left(\exp\left(\gamma^2\right) - 1\right). \tag{3.2.41}$$

Persamaan (3.2.41) dapat dituliskan kembali menjadi.

$$\exp\left(\gamma^2\right) - 1 = \frac{\hat{\sigma}_\in^2}{\hat{\mu}_\in^2}$$

$$\exp\left(\gamma^2\right) = \frac{\hat{\sigma}_{\in}^{2}}{\hat{\mu}_{\in}^{2}} + 1$$

$$\ln\left(\exp\left(\gamma^2\right)\right) = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\in}^{2}}{\hat{\mu}_{\in}^{2}} + 1\right)$$

$$\gamma^2 = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\in}^{2}}{\hat{\mu}_{\in}^{2}} + 1\right). \qquad (3.2.42)$$

Dari (3.2.40) dan (3.2.42), dapat disimpulkan nilai dari $\beta$ dan $\gamma^2$, yaitu

$$\gamma^2 = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\in}^{2}}{\hat{\mu}_{\in}^{2}} + 1\right)$$

dan

$$\beta = \ln\left(\hat{\mu}_{\in}\right) - \frac{\gamma^2}{2}.$$

Untuk bagian $C_1 = \int_0^K \widetilde{E}\left[\max\left(a-K,0\right) \mid g\right] p(g)dg$ , telah diketahui aproksimasi distribusi $\in$ beserta taksiran-taksiran parameternya (3.2.38) dan (3.2.39). Namun dalam perhitungan, ternyata sulit untuk mendapatkan solusi dari integral $C_1$ tersebut. Oleh karena itu, $C_1$ akan diubah ke bentuk integrasi numerik [2], yaitu :

$$C_1^e = h\sum_{i=m}^{m} BS^e(ih)\,p(K-ih) \qquad (3.2.43)$$

dimana,

| | | |
|---|---|---|
| *h* | = | lebar interval |
| $p(\bullet)$ | = | *pdf* lognormal dengan parameter $\mu$ dan $\sigma^2$ |
| $BS^e(k)$ | = | modifikasi *Black-Scholes* |
| $k$ | = | $mh$ |
| $m$ | = | banyaknya partisi dalam integrasi numerik. |

$BS^e(k)$ pada (3.2.43) adalah modifikasi *Black-Scholes* dengan bentuk

$$BS^e(k) = \left\{ \exp\left(\frac{\beta+\gamma^2}{2}\right) \times N\left[\frac{(\beta - \ln k)}{\gamma} + \gamma\right] - kN\left[\frac{(\beta - \ln k)}{\gamma}\right]\right\}. \quad (3.2.44)$$

Modifikasi *Black-Scholes* adalah bentuk ekspektasi *payoff* dari opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik

$$\widetilde{E}\left[\max\left(A-K,0\right) | G\right]$$

yang diubah ke dalam perhitungan integrasi numerik [2], dimana nilai $\beta$ dan $\gamma^2$ menggunakan (3.2.40) dan (3.2.42).

Setelah melakukan perhitungan $C_1$ dan $C_2$, harga opsi *call* Asia menggunakan rata-rata aritmatik dapat ditentukan dengan menghitung

$$C = C_1 - C_2 .$$

Bagian $C_2$ dapat dihitung dengan menyelesaikan

$$C_2 = I_1 - I_2$$

dimana

$$I_1 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} \exp\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^{\ 2}}{2}\right) \times N\left[\frac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X} + \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X}\right]$$

$$I_2 = KN\left[\frac{\left(\mu_X - \ln K\right)}{\sigma_X}\right].$$

Sedangkan $C_1$ dapat dihitung dengan menggunakan integrasi numerik

$$C_1^e = h\sum_{i=m}^{m} BS^e(ih)\,p(K - ih)\ ,$$

dengan $BS^e(k)$ adalah modifikasi *Black-Scholes* dengan bentuk sebagai berikut

$$BS^e(k) = \left\{\exp\left(\frac{\beta + \gamma^2}{2}\right) \times N\left[\frac{\left(\beta - \ln k\right)}{\gamma} + \gamma\right] - kN\left[\frac{\left(\beta - \ln k\right)}{\gamma}\right]\right\}.$$

# BAB IV

# APLIKASI PENENTUAN HARGA OPSI ASIA

Berikut ini merupakan aplikasi dari bagaimana menentukan harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dan menggunakan rata-rata geometrik.

## 4.1 TUJUAN APLIKASI

Pada bab ini, yang ingin dilakukan adalah menentukan harga opsi Asia saham Telekomunikasi Indonesia Tbk yang dikenal dengan nama TLKM dan diperdagangkan tanggal 2 juni 2009. Pada hari tersebut, harga pembukaan saham TLKM di Bursa Efek Indonesia adalah Rp. 7,700.00. Waktu jatuh tempo dari opsi tersebut adalah 1 tahun, sehingga tanggal jatuh temponya adalah 2 juni 2010, dimana $n$ yang diambil adalah 240. *Strike price* yang digunakan adalah Rp. 7,800.00, dengan *risk- free rate* yang berlaku adalah 7%

## 4.2 PENENTUAN HARGA OPSI ASIA MENGGUNAKAN RATA-RATA GEOMETRIK

Dari data harga penutupan harian saham Telekomunikasi Indonesia Tbk (TLKM) dan diperdagangkan di Bursa Efek Indonesia, per tanggal 1 juni

2008 sampai 1 juni 2009, diperoleh volatilitas perubahan harga aset per tahun 50.6733% (lampiran 8). Harga pembukaan harian saham TLKM pada tanggal 2 juni 2009 yaitu Rp. 7,700.00 digunakan sebagai harga saham awal atau $\left(S(0)\right)$.

Dengan menggunakan formula *Black-Scholes* pada persamaan (3.1.35) dan (3.1.29) dan *software* MATLAB 7, diperoleh harga

Opsi *call* Asia:

```
c  = 851.831
```

Opsi *put* Asia :

```
p  = 845.6655,
```

algoritma program dapat dilihat pada lampiran 9.

## 4.3 PENENTUAN HARGA OPSI ASIA MENGGUNAKAN RATA-RATA ARITMATIK

Harga opsi *call* Asia menggunakan rata-rata aritmatik dapat diperoleh jika diketahui nilai dari bagian $C_2$ dan taksiran nilai dari

bagian $C_1$.

Dengan diketahui $X \sim N\left(\mu_x, \sigma_x^{\ 2}\right)$ dan $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^{\ 2}\right)$, akan diperoleh nilai dari bagian $C_2$. Selain itu, taksiran parameter tersebut juga berguna untuk memperoleh taksiran parameter $\beta$ dan $\gamma^2$, yang digunakan untuk menghitung modifikasi *Black-Scholes* pada bagian numerik $C_1$.

Dengan menggunakan *software* MATLAB 7, diperoleh taksiran harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik, yaitu :

```
c   = 956.32728,
```

algoritma dapat dilihat pada lampiran 10.

**BAB V**

**PENUTUP**

## 5.1 KESIMPULAN

Dari pembahasan tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa harga opsi Asia menggunakan rata-rata geometrik dapat ditentukan dengan menggunakan formula *Black-Scholes* sebagai berikut:

Opsi *call* Asia:

$$C = e^{-rT}\left(S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[\hat{d}_1\right] - KN\left[\hat{d}_2\right]\right)$$

Opsi *put* Asia:

$$P = e^{-rT}\left(KN\left[-\hat{d}_2\right] - S(0)e^{\hat{\mu}T}N\left[-\hat{d}_1\right]\right)$$

dimana,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$$

Sedangkan untuk menentukan harga opsi *call* Asia menggunakan rata-rata aritmatik tidak didapat solusi yang eksak, sehingga hanya didapat estimasi dari harga opsi Asia tersebut.

Harga opsi *call* Asia, $C$, dapat ditentukan dengan menghitung

$$C = C_1 - C_2$$

dimana,

$$C_2 = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} \exp\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^2}{2}\right) \times N\left[\frac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X} + \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X}\right]$$

$$I_2 = KN\left[\frac{(\mu_X - \ln K)}{\sigma_X}\right].$$

Untuk $C_2$ dapat dihitung dengan menggunakan integrasi numerik

$$C_1^e = h\sum_{i=m}^{m} BS^e(ih)\,p(K - ih).$$

Dengan $BS^e(k)$ adalah modifikasi *Black-Scholes* dengan bentuk sebagai berikut

$$BS^e(k) = \left\{\exp\left(\frac{\beta + \gamma^2}{2}\right) \times N\left[\frac{(\beta - \ln k)}{\gamma} + \gamma\right] - kN\left[\frac{(\beta - \ln k)}{\gamma}\right]\right\},$$

dimana nilai

$$\gamma^2 = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_\in^2}{\hat{\mu}_\in^2} + 1\right) \text{ dan } \beta = \ln\left(\hat{\mu}_\in\right) - \frac{\gamma^2}{2}.$$

## 5.2 SARAN

Beberapa saran yang bermanfaat guna menindaklanjuti tugas akhir ini, yaitu

1. Perlunya dipelajari metode lain dalam penentuan harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik, diantaranya aproksimasi *Turnbull & Wakemann*, aproksimasi *Levy*, Monte Carlo Valuation, dan metode-metode lainnya.
2. Perlunya dipelajari penentuan harga opsi *put* Asia menggunakan rata-rata aritmatik. 3. Perlunya dipelajari pembentukan *put-call parity* untuk opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Craig, Allen T & Hogg, Robert V. 2004. *Introduction to Mathematical Statistics*. Prentice-Hall International, Inc. New Jersey: 74-113.

[2] Curran, Michael. 1994. *Valuing Asian and Portfolio Options by Conditioning on the Geometric Price, Journal of Management Science*. The Institute of Management Science, New York: 1705-1711.

[3] Ferina, Neni. 2003. *Persamaan Diferensial Black-Scholes*. Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok: viii+93 hlm.

[4] Higham, Desmond J. 2004. *An Introdustion to Financial Option Valuation, Mathematics, Stochastics and Computation.* Cambridge University Press, Cambridge: 45-120.

[5] Hull, John C. 2003. *Option, Future, and Other Derivatives 5th Edition*. Pearson Education, Inc, New Jersey: 216-266.

[6] Kellison, Stephen G. 1991. *The Theory of Interest Second Edition*. Richard D. Irwin, Inc. Australia: 1-57.

[7] Kemna, A.G.Z & A.C.F. Vorst. 1992. *A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values, Journal of Banking and Finance*. Elsevier Science Publishers B.V, North-Holland: 113-129.

[8] Kwok, Yue-Kuen. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer Verlag Finance, Singapore.

[9] McDonald, Robert L. 2006. *Derivative Market 2nd Edition*. Pearson Education, Inc., New Jersey.

[10] Nelken, Israel. 1996. *The Handbook of Exotic Option:Instrument, Analysis, and Aplications*. Irwin, Chicago: 175-197.

[11] Rencher, Alvin C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis second edition*. A john Willey & Sons, Inc. Publication. USA: 82-96.

[12] Ritchken, Peter & L. Sankarasubramanian.1992. *The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average. Management Science.* 1202- 1213

[13] Taylor, Howard M & Karlin Samuel. 1998. *An Introduction To Stochastic Modeling 3rd Edition*. Academic Press, USA

[14] Tyarani, Myra. 2003. *Gerak Brown Modifikasi-Modifikasi serta Aplikasinya pada Penurunan Model Black-Scholes*. Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok: viii+97 hlm.

[15] Yanthy, Dini. 2003. *Perhitungan Premi Option Menggunakan Model Binomial dan Model Black-Scholes dengan Aplikasi pada Saham Telkom Indonesia TBK*. Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok: viii+112 hlm.

# LAMPIRAN

## Lampiran 1:

Persamaan (3.1.4) dapat disederhanakan dengan memisalkan

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n\,, \tag{1.1}$$

dimana $S_n$ adalah deret bilangan asli dari 1 hingga *n*. Deret tersebut dapat ditulis kembali menjadi,

$$S_n = n + (n - 1) + (n-2) + ... + 2 + 1\,. \tag{1.2}$$

Jika deret (1.1) dan (1.2) dijumlahkan, maka menjadi

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$$

$$\underline{S_n = n + (n - 1) + (n-2) + ... + 2 + 1}_{+}$$

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Lampiran 2:**

Persamaan (3.1.6) dapat disederhanakan dengan memisalkan

$$V_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 \qquad (2.1)$$

dimana $V_n$ adalah deret bilangan asli kuadrat dari 1 hingga *n*. Menggunakan persamaan (1.1) pada lampiran 1, yaitu

$$S_n = 1 + 2 + +3 + 4 + ... + n$$

Maka rasio dari persamaan (2.1) dengan persamaan (1.1) adalah

$$\frac{V_n}{S_n} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2}{1 + 2 + +3 + 4 + ... + n}$$

$$\frac{V_n}{S_n} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2}{1 + 2 + 3 + 4 + ... + n}, \qquad (2.2)$$

hasil (2.2) dapat uraikan sesuai indeksnya, yaitu :

$$\frac{V_1}{S_1} = 1$$

$$\frac{V_2}{S_2} = \frac{1+4}{1+2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{V_3}{S_3} = \frac{1+4+9}{1+2+3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{V_4}{S_4} = \frac{1+4+9+16}{1+2+3+4} = 3$$

$$\vdots$$

$$\frac{V_n}{S_n} = \frac{2n+1}{3}$$

Dengan (2.2), didapatkan *formula* untuk $V_n$, yaitu

$$V_n = \frac{(2n+1)}{3} S_n$$

$$V_n = \frac{(2n+1)}{3} \frac{n(n+1)}{2} .$$

**Lampiran 3 : Pertidaksamaan Rata-rata Aritmatik dan Rata-rata Geometrik**

Misalkan $X_i$ adalah variabel random, dimana $i = 1, 2, ..., n$, maka

$A \geq G$

dengan

$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ adalah rata-rata aritmatik

$G = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$ adalah rata-rata geometrik

*Bukti :*

Pembuktian akan dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.

- Tahap awal.

  Untuk $n = 1$, $a = \frac{x_1}{1} = x_1$ dan $g = (x_1)^1 = x_1$

  Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $n = 1$, pernyataan benar.

- Tahap hipotesis.

  Anggap pertidaksamaan rata-rata geometrik dan rata-rata aritmatik benar untuk $k = n$, dimana $n$ adalah bilangan bulat non-negatif.

- Tahap induksi.

Akan dibuktikan apakah pertidaksamaan juga berlaku untuk $k = n+1$.

*Bukti :*

Diketahui bahwa rata-rata aritmatik adalah

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}}{n+1}$$

$$(n+1)a = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} .$$

Ada beberapa kemungkinan kasus yang dapat terjadi,

- Jika nilai semua variabel sama atau $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1}$.

Rata-rata aritmatiknya menjadi

$$a = \frac{(n+1)x_1}{n+1} = x_1 .$$

dan rata-rata geometriknya adalah

$$g = \sqrt[n+1]{x_1^{\,n+1}} = x_1 .$$

Jadi jika nilai semua variabel sama, maka rata-rata aritmatik akan bernilai sama dengan rata-rata geometrik, dan nilai variabelnya akan sama dengan nilai rata-ratanya.

- Jika tidak semua variabel bernilai sama.

  Jika tidak semua variabel bernilai sama, maka nilai variabel bisa lebih besar atau lebih kecil dari nilai rata-ratanya. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $x_n > a$ atau $x_{n+1} < a$, sehingga diperoleh

$$x_n - a > 0 \text{ atau } a - x_{n+1} > 0,$$

$$(x_n - a)(a - x_{n+1}) > 0. \tag{3.1}$$

Rata-rata aritmatik dapat dituliskan

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}}{n+1}$$

$$a(n+1) = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}$$

$$an = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + \underbrace{x_n + x_{n+1} - a}_{x_n'}$$

Sekarang jika jumlah variabel yang dirata-ratakan berjumlah $n$, yaitu $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n'$, rata-rata aritmatiknya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n'}{n}$$

dengan,

$$x_n' = x_n + x_{n+1} - a \geq x_n - a > 0 \tag{3.2}$$

Pada tahap hipotesis, telah dibenarkan pertidaksamaan untuk $k = n$, sehingga didapat

$$a^{n+1} = a^n a \geq x_1 x_2 ... x_n' a. \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.1) yaitu

$$(x_n - a)(a - x_{n+1}) > 0$$

$$(x_n a - x_n x_{n+1} - a^2 + a x_{n+1}) > 0$$

$$(x_n + x_{n+1} - a)a - x_n x_{n+1} > 0$$

$$x_{n'} a - x_n x_{n+1} > 0$$

$$x_n{'} > x_n x_{n+1} . \qquad (3.4)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3) ke persamaan (3.4), diperoleh

$$a^{n+1} = a^n a \geq x_1 x_2 ... x_n{'} a$$

$$> x_1 x_2 ... x_n x_{n+1}$$

atau

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}}{n+1} > \sqrt[n+1]{x_1 x_2 ... x_n x_{n+1}}$$

Terbukti pertidaksamaan rata-rata aritmatik dan rata-rata geometrik berlaku untuk $k = n + 1$.

Jadi terbukti bahwa nilai rata-rata aritmatik selalu lebih besar dari nilai rata-rata geometrik.

**Lampiran 4 : Mean dan Variansi Bersyarat dari Distribusi Normal**

Jika diketahui $\left[X \mid Y\right] \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$\left[\exp\left(X \mid Y\right)\right] \sim LN\left(\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right)\exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\right).$$

*Bukti* :

- Mean bersyarat.

  Misal $W = \left[X \mid Y\right] \sim N(\mu, \sigma^2)$, *pdf* dari distribusi normal dituliskan sebagai berikut,

$$f(w) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (4.1)$$

  Untuk mendapatkan mean dari variabel $e^w$, dapat dicari dengan menggunakan definisi ekspektasi,

$$E(e^w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^w \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^2} dz$$

$$E(e^w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(w-\mu)^2 - 2\sigma^2 w]} dw. \quad (4.2)$$

  Misal $q = (w-\mu)^2 - 2\sigma^2 w$, maka $q$ dapat diubah menjadi

$$q = (w-\mu)^2 - 2\sigma^2 w$$

$$= w^2 + \mu^2 - 2w(\mu + \sigma^2)$$

$$= w^2 + (\mu + \sigma^2)^2 - 2w(\mu + \sigma^2) + \mu^2 - (\mu + \sigma^2)^2$$

$$= \left(w - (\mu + \sigma^2)\right)^2 - \sigma^4 - 2\mu\sigma^2 . \qquad (4.3)$$

Kemudian substitusikan (4.3) ke persamaan (4.2), sehingga diperoleh

$$E(e^w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(w - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)^2 - \sigma^4 - 2\mu\sigma^2\right)\right) dw$$

$$= \exp\left( \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}\left(w - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)^2 \right) dw$$

$$= \exp\left( \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \qquad (4.4)$$

■

- Variansi beryarat.

Misal $W = \left[X \mid Y\right] \sim N(\mu, \sigma^2)$, *pdf* dari distribusi normal dituliskan sebagai berikut,

$$f(w) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^2} .$$

Untuk mendapatkan variansi dari variabel $e^z$, dapat dicari dengan menggunakan definisi variansi,

$$Var\left[e^w\right] = E\left[(e^w)^2\right] - \left(E\left[e^w\right]\right)^2$$

$$= \underbrace{E\left[e^{2w}\right]}_{\text{I}} - \underbrace{\left(E\left[e^w\right]\right)}_{\text{II}}^2 \qquad (4.5)$$

Variansi dari $e^{w}$ akan diperoleh dengan mencari nilai I dan II.

Pertama adalah menghitung ekspektasi bagian I, yaitu sebagai berikut:

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2w} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^2 \right) dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( 2w - \frac{1}{2\sigma^2}\left((w-\mu)^2\right) \right) dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{4w\sigma^2 - (w-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}\left((w-\mu)^2 - 4w\sigma^2\right) \right) dw \tag{4.6}$$

Misal $p = (w-\mu)^2 - 4w\sigma^2$, maka $p$ dapat diubah menjadi

$$p = (w-\mu)^2 - 4w\sigma^2$$

$$= w^2 + \mu^2 - 2\mu w - 4w\sigma^2$$

$$= w^2 + \mu^2 - 2w(\mu + 2\sigma^2)$$

$$= w^2 + \left(\mu + 2\sigma^2\right)^2 - 2w\left(\mu + 2\sigma^2\right) + \mu^2 - \left(\mu + 2\sigma^2\right)^2$$

$$= \left(w - \left(\mu + 2\sigma^2\right)\right)^2 - 4\sigma^4 - 4\mu\sigma^2. \tag{4.7}$$

Kemudian substitusikan (4.7) ke persamaan (4.6), sehingga diperoleh

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(w - \left(\mu + 2\sigma^2\right)\right)^2 - 4\sigma^4 - 4\mu\sigma^2\right) \right) dw$$

$$= \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}\left(w - \left(\mu + 2\sigma^2\right)\right)^2 \right) dw$$

$$= \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right). \tag{4.8}$$

Selanjutnya akan dihitung nilai ekspekstasi bagian II. Diketahui

$$\mathrm{II} = \left(E\left[e^{w}\right]\right)^2,$$

berdasarkan hasil yang didapat pada (4.4), diperoleh

$$\mathrm{II} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2$$

$$= \exp\left(2\mu + \sigma^2\right). \tag{4.9}$$

Dari hasil I pada (4.8) dan hasil II pada (4.9), diperoleh variansi dari $e^{w}$ adalah

$$\begin{aligned} Var\left[e^{w}\right] = E\left[e^{2w}\right] - \left(E\left[e^{w}\right]\right)^2 \\ = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\ = \exp\left(2\mu + \sigma^2 + \sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\ = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\exp\left(\sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\ = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

■

**Lampiran 5 : Mean dan Variansi dari Variabel Random $X = \ln g$**

Jika diketahui $X_i = \ln S(t_i)$ seperti persamaan (3.2.6), dimana $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^{\,2})$ (3.2.7), maka $X = \ln g$ (3.2.8) adalah berdistribusi normal dengan parameter meannya adalah $\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$, variansinya adalah $\sigma_X^{\,2} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right]$

*Bukti:*

- Meannya adalah $\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$

  *Bukti* :

$$\mu_X = E[X] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] + \ldots + E\left[X_n\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \qquad \blacksquare$$

- Variansinya adalah $\sigma_X{}^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right]$

*Bukti* :

$$Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}Var\left[X_i\right] + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{i\neq j}Cov\left[X_i, X_j\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right] \qquad \blacksquare$$

## Lampiran 6 : Distribusi-Distribusi Penting

Pada lampiran ini akan diberikan penjelasan singkat tentang distribusi-distribusi yang banyak digunakan dalam tugas akhir ini. Diantaranya adalah distribusi normal, distribusi bivariate normal, distribusi multivariate normal dan distribusi lognormal.

1. Distribusi Normal

   Jika suatu variabel random $X$ adalah berdistribusi normal dengan parameter meannya adalah $\mu$ dan parameter variansinya adalah $\sigma^2$, maka $X$ dapat dinotasikan

   $$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

   *Probability density function (pdf)* dari $X$, adalah

   $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ dengan } -\infty < x < \infty .$$

   Jika $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, maka variabel random

   $$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$$

   *Cumulative distribution function (cdf)* normal standar dari variabel $X$, adalah

   $$N(x) == \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}u\right)^2} du$$

2. Distribusi Bivariate Normal

Jika ada 2 variabel random $X$ dan $Y$ yang masing-masing berdistribusi normal yaitu

$$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \text{ dan } Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

dengan $\rho$ adalah korelasi antara variabel $X$ dan $Y$, maka *pdf* dari distribusi bivariate normal adalah

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{q}{2}}$$

dengan

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right],$$

dimana

$-\infty < x < \infty$ ,

$-\infty < y < \infty$ ,

$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ .

3. Distribusi Multivariate Normal.

Sebuah vektor $\underline{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)^T$ dikatakan berdistribusi multivariat normal, dengan *pdf* sbb:

$$f\left(\underline{X} \mid \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}, \Sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mid \Sigma \mid}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}\right)^T \Sigma^{-1} \left(\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}\right)\right)$$

Ada beberapa teorema yang berlaku pada distribusi multivariat normal, diantaranya

- **Teorema 1**

Jika $\underline{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}, \Sigma_{\underline{X}})$ dan $\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X}$, dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $k \times n$. Maka vektor $\underline{Y} = \left(Y_1, Y_2, ..., Y_k\right)^T$ akan berdistribusi multivariat normal dengan mean $\boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}$ dan matriks kovariansinya adalah $\Sigma_{\underline{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\underline{X}}\mathbf{A}^T$.

*Bukti:*

Misal

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}, \Sigma_{\underline{X}}\right)$$

dan

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix},$$

maka *mgf* untuk $\underline{X}$ adalah

$$M_x(\underline{t}) = M_x\left(t_1, t_2, ..., t_n\right)$$

$$= E\left[\exp\left(\underline{t}^T \underline{X}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(t_1 X_1 + t_2 X_2 + ... + t_n X_n\right)\right]$$

$$= \exp\left(\underline{t}^T \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \frac{1}{2}\underline{t}^T \Sigma_{\underline{X}} \underline{t}\right)$$

Jika $\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X}$ , maka

$$M_Y(\underline{t}) = E\left[\exp\left(\underline{t}^T \underline{Y}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\underline{t}^T \mathbf{A}\underline{X}\right)\right],$$

misalkan $\underline{s} = \mathbf{A}^T \underline{t} \rightarrow \underline{s}^T = \underline{t}^T \mathbf{A}$ ,

$$M_Y(\underline{t}) = E\left[\exp\left(\underline{s}^T \underline{X}\right)\right]$$

$$= \exp\left(\underline{s}^T \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \frac{1}{2}\underline{s}^T \Sigma_{\underline{X}} \underline{s}\right)$$

$$= \exp\left(\underline{t}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \frac{1}{2}\underline{t}^T \mathbf{A}\Sigma_{\underline{X}} \mathbf{A}^T \underline{t}\right).$$

Karena $M_Y(\underline{t})$ adalah *mgf* dari $\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X}$ , sehingga dapat disimpulkan,

$$\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X} \sim N\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}, \mathbf{A}\Sigma_{\underline{X}}\mathbf{A}^T\right). \qquad \blacksquare$$

- **Teorema 2**

1. Jika $X$ dan $Y$ adalah variabel random yang independen, maka

$Cov(X,Y) = 0$.

*Bukti :*

Diketahui

$$Cov(X,Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y .$$

Jika $X$ dan $Y$ adalah variabel random yang independen, maka

$E[XY] = E[X]E[Y]$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY] - \mu_X \mu_Y \\ &= E[X]E[Y] - \mu_X \mu_Y \\ &= \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y \\ &= 0 \end{aligned}$$ ■

2. Jika $\begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix} \sim N\left( \begin{bmatrix} \mu_{\underline{X}} \\ \mu_{\underline{Y}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$, maka $\underline{X}$ dan $\underline{Y}$ independen $\Leftrightarrow \Sigma_{12} = 0$.

*Bukti :*

- Matriks kovariansi adalah $\Sigma_{12}$, berdasarkan teorema 2 no.1 maka $\Sigma_{12} = 0$.
- Jika $\Sigma_{12} = 0$, maka $\underline{X}$ dan $\underline{Y}$ independen. *mgf* dari distribusi bivariate normal adalah

$$M\left(\underline{t}_1,\underline{t}_2\right)=\exp\left(\underline{t}_1^{\,T}\mu_{\underline{X}}+\underline{t}_2^{\,T}\mu_{\underline{Y}}+\frac{\underline{t}_1^{\,T}\Sigma_{11}\underline{t}_1+2\underline{t}_1^{\,T}\Sigma_{12}\underline{t}_2+\underline{t}_2^{\,T}\Sigma_{22}\underline{t}_2}{2}\right)$$

karena $\Sigma_{12}=0$ , maka mgf-nya akan berubah menjadi

$$M\left(\underline{t}_1,\underline{t}_2\right)=\exp\left(\underline{t}_1^{\,T}\mu_{\underline{X}}+\underline{t}_2^{\,T}\mu_{\underline{Y}}+\frac{\underline{t}_1^{\,T}\Sigma_{11}\underline{t}_1+\underline{t}_2^{\,T}\Sigma_{22}\underline{t}_2}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}(\underline{t}_1,\underline{t}_2)=\mathrm{M}(\underline{t}_1,0)\mathrm{M}(0,\underline{t}_2).$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika $\Sigma_{12}=0$ , maka $\underline{X}$ dan $\underline{Y}$ independen. ■

3. Berdasarkan no.2, jika $\underline{X}$ dan $\underline{Y}$ independen dengan distribusi masing-masing adalah $N\left(\mu_{\underline{X}},\Sigma_{11}\right)$ dan $N\left(\mu_{\underline{Y}},\Sigma_{22}\right)$, maka

$$\begin{bmatrix}\underline{X}\\ \underline{Y}\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}\mu_{\underline{X}}\\ \mu_{\underline{Y}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\right).$$

- **<u>Teorema 3</u>**

Jika $Z=\begin{pmatrix}\underline{X}\\ \underline{Y}\end{pmatrix}\sim N\left(\boldsymbol{\mu},\Sigma\right)$, dimana

$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}}\\ \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\end{pmatrix}$ dan $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{XX} & \Sigma_{XY}\\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY}\end{bmatrix}$,

maka distribusi bersyarat dari $\underline{X}$ diberikan $\underline{Y}$ adalah normal dengan meannya adalah

$$E\left[\underline{X} \mid \underline{Y}\right] = \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right)$$

dan matriks kovariansinya adalah

$$\sum_{XX} - \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} \sum_{YX} .$$

*Bukti:*

Misalkan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

maka $\mathbf{A}\begin{pmatrix} \underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} \\ \underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} \\ \underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} \end{pmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right) \\ \underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan teorema 1, maka diperoleh

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} \\ \underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right) \\ \underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}} \end{bmatrix} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{A}\sum \mathbf{A}^T\right) \qquad *)$$

dimana,

$$\mathbf{A}\sum \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{XX} & \sum_{XY} \\ \sum_{YX} & \sum_{YY} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{XX} - \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1} \sum_{YX} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \sum_{YY} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan teorema 2, dapat dikatakan bahwa

$\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \sum_{XY} {\sum_{YY}}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right)$ dan $\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}$ independen karena mempunyai kovariansi 0. Oleh karena itu, distribusi $\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right)$

bersyarat $\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}$ adalah sama dengan distribusi

$\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right)$.

Berdasarkan persamaan *), diketahui bahwa

$$\left[\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right)\right] \sim N\left(\mathbf{0}, \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\,\Sigma_{YX}\right),$$

$$\underline{X} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} + \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right), \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\,\Sigma_{YX}\right).$$

Sehingga diperoleh distribusi $\underline{X}$ bersyarat $\underline{Y}$,

$$\left[\underline{X} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{X}} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{\underline{Y}}\right) | \,\underline{Y}\right] \sim N\left(\mathbf{0}, \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\,\Sigma_{YX}\right)$$

$$\left[\underline{X} \,|\, \underline{Y}\right] \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_{X} + \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\left(\underline{Y} - \boldsymbol{\mu}_{Y}\right), \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\,\Sigma_{YY}^{-1}\,\Sigma_{YX}\right) \quad \blacksquare$$

4. Distribusi Lognormal.

Jika $X$ dari suatu variabel random yang berdistribusi Normal, dengan parameter meannya adalah $\mu$ dan parameter variansinya adalah $\sigma^2$, maka $Y = e^x$ didefinisikan sebagai suatu variabel random yang berdistribusi lognormal.

*Pdf* dari $Y$ dinyatakan sebagai berikut,

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \; y \geq 0.$$

**Lampiran 7 :**

Harga penutupan harian saham Telekomunikasi Indonesia Tbk (TLKM) di Bursa Efek Indonesia per tanggal 1 juni 2008 sampai 1 juni 2009.

| Hari | $S(t_i)$ | $\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$ | $y = \ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ | $y^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,100.00 | | | |
| 2 | 7,950.00 | 0.981481481 | -0.018692133 | 0.000349396 |
| 3 | 7,950.00 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 7,850.00 | 0.987421384 | -0.012658397 | 0.000160235 |
| 5 | 8,150.00 | 1.038216561 | 0.037504395 | 0.00140658 |
| 6 | 7,950.00 | 0.975460123 | -0.024845999 | 0.000617324 |
| 7 | 7,950.00 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 7,750.00 | 0.974842767 | -0.025479085 | 0.000649184 |
| 9 | 7,550.00 | 0.974193548 | -0.02614528 | 0.000683576 |
| 10 | 7,550.00 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 7,500.00 | 0.993377483 | -0.006644543 | 4.41499E-05 |
| 12 | 7,350.00 | 0.98 | -0.020202707 | 0.000408149 |
| 13 | 7,500.00 | 1.020408163 | 0.020202707 | 0.000408149 |
| 14 | 7,550.00 | 1.006666667 | 0.006644543 | 4.41499E-05 |
| 15 | 7,750.00 | 1.026490066 | 0.02614528 | 0.000683576 |
| 16 | 7,750.00 | 1 | 0 | 0 |
| 17 | 7,700.00 | 0.993548387 | -0.006472515 | 4.18934E-05 |
| 18 | 7,500.00 | 0.974025974 | -0.026317308 | 0.000692601 |
| 19 | 7,400.00 | 0.986666667 | -0.01342302 | 0.000180177 |
| 20 | 7,300.00 | 0.986486486 | -0.013605652 | 0.000185114 |
| 21 | 7,300.00 | 1 | 0 | 0 |
| 22 | 7,550.00 | 1.034246575 | 0.033673215 | 0.001133885 |
| 23 | 7,650.00 | 1.013245033 | 0.013158085 | 0.000173135 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 7,350.00 | 0.960784314 | -0.040005335 | 0.001600427 |
| 25 | 7,350.00 | 1 | 0 | 0 |
| 26 | 7,400.00 | 1.006802721 | 0.006779687 | 4.59642E-05 |
| 27 | 7,300.00 | 0.986486486 | -0.013605652 | 0.000185114 |
| 28 | 7,400.00 | 1.01369863 | 0.013605652 | 0.000185114 |
| 29 | 7,500.00 | 1.013513514 | 0.01342302 | 0.000180177 |
| 30 | 7,700.00 | 1.026666667 | 0.026317308 | 0.000692601 |
| 31 | 7,350.00 | 0.954545455 | -0.046520016 | 0.002164112 |
| 32 | 6,900.00 | 0.93877551 | -0.063178902 | 0.003991574 |
| 33 | 6,950.00 | 1.007246377 | 0.007220248 | 5.2132E-05 |
| 34 | 6,700.00 | 0.964028777 | -0.036634133 | 0.00134206 |
| 35 | 6,750.00 | 1.007462687 | 0.007434978 | 5.52789E-05 |
| 36 | 7,100.00 | 1.051851852 | 0.050552279 | 0.002555533 |
| 37 | 7,650.00 | 1.077464789 | 0.074610864 | 0.005566781 |
| 38 | 7,700.00 | 1.006535948 | 0.006514681 | 4.24411E-05 |
| 39 | 7,850.00 | 1.019480519 | 0.019293203 | 0.000372228 |
| 40 | 7,750.00 | 0.987261146 | -0.012820688 | 0.00016437 |
| 41 | 8,000.00 | 1.032258065 | 0.031748698 | 0.00100798 |
| 42 | 7,900.00 | 0.9875 | -0.012578782 | 0.000158226 |
| 43 | 7,700.00 | 0.974683544 | -0.025642431 | 0.000657534 |
| 44 | 7,650.00 | 0.993506494 | -0.006514681 | 4.24411E-05 |
| 45 | 7,950.00 | 1.039215686 | 0.038466281 | 0.001479655 |
| 46 | 7,850.00 | 0.987421384 | -0.012658397 | 0.000160235 |
| 47 | 7,850.00 | 1 | 0 | 0 |
| 48 | 7,850.00 | 1 | 0 | 0 |
| 49 | 7,750.00 | 0.987261146 | -0.012820688 | 0.00016437 |
| 50 | 7,750.00 | 1 | 0 | 0 |
| 51 | 7,500.00 | 0.967741935 | -0.032789823 | 0.001075172 |
| 52 | 7,400.00 | 0.986666667 | -0.01342302 | 0.000180177 |
| 53 | 7,450.00 | 1.006756757 | 0.006734032 | 4.53472E-05 |
| 54 | 7,450.00 | 1 | 0 | 0 |
| 55 | 7,350.00 | 0.986577181 | -0.013513719 | 0.000182621 |
| 56 | 7,300.00 | 0.993197279 | -0.006825965 | 4.65938E-05 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 57 | 7,400.00 | 1.01369863 | 0.013605652 | 0.000185114 |
| 58 | 7,850.00 | 1.060810811 | 0.059033532 | 0.003484958 |
| 59 | 7,950.00 | 1.012738854 | 0.012658397 | 0.000160235 |
| 60 | 7,750.00 | 0.974842767 | -0.025479085 | 0.000649184 |
| 61 | 7,800.00 | 1.006451613 | 0.00643089 | 4.13564E-05 |
| 62 | 7,850.00 | 1.006410256 | 0.006389798 | 4.08295E-05 |
| 63 | 8,000.00 | 1.01910828 | 0.01892801 | 0.00035827 |
| 64 | 7,850.00 | 0.98125 | -0.01892801 | 0.00035827 |
| 65 | 7,900.00 | 1.006369427 | 0.006349228 | 4.03127E-05 |
| 66 | 7,800.00 | 0.987341772 | -0.012739026 | 0.000162283 |
| 67 | 7,550.00 | 0.967948718 | -0.03257617 | 0.001061207 |
| 68 | 7,600.00 | 1.006622517 | 0.006600684 | 4.3569E-05 |
| 69 | 7,650.00 | 1.006578947 | 0.006557401 | 4.29995E-05 |
| 70 | 7,500.00 | 0.980392157 | -0.019802627 | 0.000392144 |
| 71 | 7,350.00 | 0.98 | -0.020202707 | 0.000408149 |
| 72 | 7,200.00 | 0.979591837 | -0.020619287 | 0.000425155 |
| 73 | 6,850.00 | 0.951388889 | -0.049832374 | 0.002483265 |
| 74 | 6,250.00 | 0.912408759 | -0.091667189 | 0.008402873 |
| 75 | 6,600.00 | 1.056 | 0.054488185 | 0.002968962 |
| 76 | 6,700.00 | 1.015151515 | 0.015037877 | 0.000226138 |
| 77 | 6,700.00 | 1 | 0 | 0 |
| 78 | 6,900.00 | 1.029850746 | 0.029413885 | 0.000865177 |
| 79 | 6,900.00 | 1 | 0 | 0 |
| 80 | 6,750.00 | 0.97826087 | -0.021978907 | 0.000483072 |
| 81 | 6,900.00 | 1.022222222 | 0.021978907 | 0.000483072 |
| 82 | 7,000.00 | 1.014492754 | 0.014388737 | 0.000207036 |
| 83 | 7,100.00 | 1.014285714 | 0.014184635 | 0.000201204 |
| 84 | 7,150.00 | 1.007042254 | 0.007017573 | 4.92463E-05 |
| 85 | 7,100.00 | 0.993006993 | -0.007017573 | 4.92463E-05 |
| 86 | 7,150.00 | 1.007042254 | 0.007017573 | 4.92463E-05 |
| 87 | 6,450.00 | 0.902097902 | -0.103032226 | 0.01061564 |
| 88 | 7,250.00 | 1.124031008 | 0.116921338 | 0.013670599 |
| 89 | 7,150.00 | 0.986206897 | -0.013889112 | 0.000192907 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 6,700.00 | 0.937062937 | -0.06500483 | 0.004225628 |
| 91 | 6,200.00 | 0.925373134 | -0.077558234 | 0.00601528 |
| 92 | 6,800.00 | 1.096774194 | 0.09237332 | 0.00853283 |
| 93 | 7,100.00 | 1.044117647 | 0.043172172 | 0.001863836 |
| 94 | 6,600.00 | 0.929577465 | -0.073025135 | 0.00533267 |
| 95 | 6,550.00 | 0.992424242 | -0.007604599 | 5.78299E-05 |
| 96 | 5,900.00 | 0.900763359 | -0.104512699 | 0.010922904 |
| 97 | 5,350.00 | 0.906779661 | -0.09785579 | 0.009575756 |
| 98 | 5,000.00 | 0.934579439 | -0.067658648 | 0.004577693 |
| 99 | 5,100.00 | 1.02 | 0.019802627 | 0.000392144 |
| 100 | 5,400.00 | 1.058823529 | 0.057158414 | 0.003267084 |
| 101 | 5,400.00 | 1 | 0 | 0 |
| 102 | 5,300.00 | 0.981481481 | -0.018692133 | 0.000349396 |
| 103 | 5,400.00 | 1.018867925 | 0.018692133 | 0.000349396 |
| 104 | 5,650.00 | 1.046296296 | 0.045256592 | 0.002048159 |
| 105 | 5,700.00 | 1.008849558 | 0.00881063 | 7.76272E-05 |
| 106 | 6,100.00 | 1.070175439 | 0.067822596 | 0.004599905 |
| 107 | 6,150.00 | 1.008196721 | 0.008163311 | 6.66396E-05 |
| 108 | 6,100.00 | 0.991869919 | -0.008163311 | 6.66396E-05 |
| 109 | 6,000.00 | 0.983606557 | -0.016529302 | 0.000273218 |
| 110 | 5,700.00 | 0.95 | -0.051293294 | 0.002631002 |
| 111 | 5,800.00 | 1.01754386 | 0.017391743 | 0.000302473 |
| 112 | 5,900.00 | 1.017241379 | 0.017094433 | 0.00029222 |
| 113 | 5,550.00 | 0.940677966 | -0.061154423 | 0.003739863 |
| 114 | 5,600.00 | 1.009009009 | 0.00896867 | 8.0437E-05 |
| 115 | 5,750.00 | 1.026785714 | 0.026433257 | 0.000698717 |
| 116 | 5,500.00 | 0.956521739 | -0.044451763 | 0.001975959 |
| 117 | 5,600.00 | 1.018181818 | 0.018018506 | 0.000324667 |
| 118 | 5,450.00 | 0.973214286 | -0.027150989 | 0.000737176 |
| 119 | 5,750.00 | 1.055045872 | 0.053584246 | 0.002871271 |
| 120 | 5,700.00 | 0.991304348 | -0.00873368 | 7.62772E-05 |
| 121 | 5,850.00 | 1.026315789 | 0.025975486 | 0.000674726 |
| 122 | 6,000.00 | 1.025641026 | 0.025317808 | 0.000640991 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 123 | 5,750.00 | 0.958333333 | -0.042559614 | 0.001811321 |
| 124 | 5,800.00 | 1.008695652 | 0.008658063 | 7.49621E-05 |
| 125 | 5,800.00 | 1 | 0 | 0 |
| 126 | 6,000.00 | 1.034482759 | 0.033901552 | 0.001149315 |
| 127 | 6,600.00 | 1.1 | 0.09531018 | 0.00908403 |
| 128 | 6,900.00 | 1.045454545 | 0.044451763 | 0.001975959 |
| 129 | 6,600.00 | 0.956521739 | -0.044451763 | 0.001975959 |
| 130 | 6,600.00 | 1 | 0 | 0 |
| 131 | 7,250.00 | 1.098484848 | 0.09393182 | 0.008823187 |
| 132 | 6,950.00 | 0.95862069 | -0.042259809 | 0.001785891 |
| 133 | 7,150.00 | 1.028776978 | 0.028370697 | 0.000804896 |
| 134 | 6,750.00 | 0.944055944 | -0.057569852 | 0.003314288 |
| 135 | 6,800.00 | 1.007407407 | 0.007380107 | 5.4466E-05 |
| 136 | 7,050.00 | 1.036764706 | 0.036105005 | 0.001303571 |
| 137 | 6,950.00 | 0.985815603 | -0.014285957 | 0.000204089 |
| 138 | 6,850.00 | 0.985611511 | -0.014493007 | 0.000210047 |
| 139 | 6,800.00 | 0.99270073 | -0.00732604 | 5.36709E-05 |
| 140 | 6,900.00 | 1.014705882 | 0.014598799 | 0.000213125 |
| 141 | 7,300.00 | 1.057971014 | 0.056352937 | 0.003175653 |
| 142 | 7,200.00 | 0.98630137 | -0.013793322 | 0.000190256 |
| 143 | 6,900.00 | 0.958333333 | -0.042559614 | 0.001811321 |
| 144 | 7,000.00 | 1.014492754 | 0.014388737 | 0.000207036 |
| 145 | 7,100.00 | 1.014285714 | 0.014184635 | 0.000201204 |
| 146 | 6,950.00 | 0.978873239 | -0.021353124 | 0.000455956 |
| 147 | 6,750.00 | 0.971223022 | -0.029199155 | 0.000852591 |
| 148 | 6,900.00 | 1.022222222 | 0.021978907 | 0.000483072 |
| 149 | 6,450.00 | 0.934782609 | -0.067441281 | 0.004548326 |
| 150 | 6,550.00 | 1.015503876 | 0.015384919 | 0.000236696 |
| 151 | 6,400.00 | 0.977099237 | -0.023167059 | 0.000536713 |
| 152 | 6,450.00 | 1.0078125 | 0.00778214 | 6.05617E-05 |
| 153 | 6,300.00 | 0.976744186 | -0.023530497 | 0.000553684 |
| 154 | 6,450.00 | 1.023809524 | 0.023530497 | 0.000553684 |
| 155 | 6,450.00 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 156 | 6,500.00 | 1.007751938 | 0.007722046 | 5.963E-05 |
| 157 | 6,350.00 | 0.976923077 | -0.023347364 | 0.000545099 |
| 158 | 6,300.00 | 0.992125984 | -0.00790518 | 6.24919E-05 |
| 159 | 6,300.00 | 1 | 0 | 0 |
| 160 | 6,000.00 | 0.952380952 | -0.048790164 | 0.00238048 |
| 161 | 5,850.00 | 0.975 | -0.025317808 | 0.000640991 |
| 162 | 6,150.00 | 1.051282051 | 0.050010421 | 0.002501042 |
| 163 | 6,300.00 | 1.024390244 | 0.024097552 | 0.000580692 |
| 164 | 6,400.00 | 1.015873016 | 0.015748357 | 0.000248011 |
| 165 | 6,350.00 | 0.9921875 | -0.007843177 | 6.15154E-05 |
| 166 | 6,450.00 | 1.015748031 | 0.015625318 | 0.000244151 |
| 167 | 6,450.00 | 1 | 0 | 0 |
| 168 | 6,500.00 | 1.007751938 | 0.007722046 | 5.963E-05 |
| 169 | 6,500.00 | 1 | 0 | 0 |
| 170 | 6,500.00 | 1 | 0 | 0 |
| 171 | 6,350.00 | 0.976923077 | -0.023347364 | 0.000545099 |
| 172 | 6,400.00 | 1.007874016 | 0.007843177 | 6.15154E-05 |
| 173 | 6,400.00 | 1 | 0 | 0 |
| 174 | 6,250.00 | 0.9765625 | -0.023716527 | 0.000562474 |
| 175 | 6,500.00 | 1.04 | 0.039220713 | 0.001538264 |
| 176 | 6,500.00 | 1 | 0 | 0 |
| 177 | 6,500.00 | 1 | 0 | 0 |
| 178 | 6,400.00 | 0.984615385 | -0.015504187 | 0.00024038 |
| 179 | 6,300.00 | 0.984375 | -0.015748357 | 0.000248011 |
| 180 | 6,250.00 | 0.992063492 | -0.00796817 | 6.34917E-05 |
| 181 | 6,250.00 | 1 | 0 | 0 |
| 182 | 6,300.00 | 1.008 | 0.00796817 | 6.34917E-05 |
| 183 | 6,400.00 | 1.015873016 | 0.015748357 | 0.000248011 |
| 184 | 6,400.00 | 1 | 0 | 0 |
| 185 | 6,350.00 | 0.9921875 | -0.007843177 | 6.15154E-05 |
| 186 | 6,450.00 | 1.015748031 | 0.015625318 | 0.000244151 |
| 187 | 6,500.00 | 1.007751938 | 0.007722046 | 5.963E-05 |
| 188 | 6,600.00 | 1.015384615 | 0.015267472 | 0.000233096 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 189 | 6,600.00 | 1 | 0 | 0 |
| 190 | 6,450.00 | 0.977272727 | -0.022989518 | 0.000528518 |
| 191 | 6,500.00 | 1.007751938 | 0.007722046 | 5.963E-05 |
| 192 | 6,700.00 | 1.030769231 | 0.030305349 | 0.000918414 |
| 193 | 7,100.00 | 1.059701493 | 0.057987258 | 0.003362522 |
| 194 | 7,350.00 | 1.035211268 | 0.034605529 | 0.001197543 |
| 195 | 7,400.00 | 1.006802721 | 0.006779687 | 4.59642E-05 |
| 196 | 7,100.00 | 0.959459459 | -0.041385216 | 0.001712736 |
| 197 | 7,600.00 | 1.070422535 | 0.068053463 | 0.004631274 |
| 198 | 7,450.00 | 0.980263158 | -0.019934215 | 0.000397373 |
| 199 | 7,550.00 | 1.013422819 | 0.013333531 | 0.000177783 |
| 200 | 7,300.00 | 0.966887417 | -0.033673215 | 0.001133885 |
| 201 | 7,300.00 | 1 | 0 | 0 |
| 202 | 7,150.00 | 0.979452055 | -0.020761991 | 0.00043106 |
| 203 | 7,300.00 | 1.020979021 | 0.020761991 | 0.00043106 |
| 204 | 7,050.00 | 0.965753425 | -0.034846731 | 0.001214295 |
| 205 | 6,900.00 | 0.978723404 | -0.021506205 | 0.000462517 |
| 206 | 7,400.00 | 1.072463768 | 0.069958589 | 0.004894204 |
| 207 | 7,450.00 | 1.006756757 | 0.006734032 | 4.53472E-05 |
| 208 | 7,600.00 | 1.020134228 | 0.019934215 | 0.000397373 |
| 209 | 7,850.00 | 1.032894737 | 0.032365285 | 0.001047512 |
| 210 | 7,750.00 | 0.987261146 | -0.012820688 | 0.00016437 |
| 211 | 7,900.00 | 1.019354839 | 0.019169916 | 0.000367486 |
| 212 | 7,500.00 | 0.949367089 | -0.051959739 | 0.002699814 |
| 213 | 7,450.00 | 0.993333333 | -0.006688988 | 4.47426E-05 |
| 214 | 7,350.00 | 0.986577181 | -0.013513719 | 0.000182621 |
| 215 | 7,200.00 | 0.979591837 | -0.020619287 | 0.000425155 |
| 216 | 7,100.00 | 0.986111111 | -0.013986242 | 0.000195615 |
| 217 | 7,450.00 | 1.049295775 | 0.048119248 | 0.002315462 |
| 218 | 7,650.00 | 1.026845638 | 0.026491615 | 0.000701806 |
| 219 | 7,850.00 | 1.026143791 | 0.025807884 | 0.000666047 |
| 220 | 7,750.00 | 0.987261146 | -0.012820688 | 0.00016437 |
| 221 | 7,950.00 | 1.025806452 | 0.025479085 | 0.000649184 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 222 | 7,700.00 | 0.968553459 | -0.0319516 | 0.001020905 |
| 223 | 7,850.00 | 1.019480519 | 0.019293203 | 0.000372228 |
| 224 | 7,750.00 | 0.987261146 | -0.012820688 | 0.00016437 |
| 225 | 7,600.00 | 0.980645161 | -0.019544596 | 0.000381991 |
| 226 | 7,400.00 | 0.973684211 | -0.026668247 | 0.000711195 |
| 227 | 7,500.00 | 1.013513514 | 0.01342302 | 0.000180177 |
| 228 | 7,250.00 | 0.966666667 | -0.033901552 | 0.001149315 |
| 229 | 7,100.00 | 0.979310345 | -0.020906685 | 0.000437089 |
| 230 | 7,050.00 | 0.992957746 | -0.007067167 | 4.99449E-05 |
| 231 | 7,200.00 | 1.021276596 | 0.021053409 | 0.000443246 |
| 232 | 7,400.00 | 1.027777778 | 0.027398974 | 0.000750704 |
| 233 | 7,300.00 | 0.986486486 | -0.013605652 | 0.000185114 |
| 234 | 7,400.00 | 1.01369863 | 0.013605652 | 0.000185114 |
| 235 | 7,350.00 | 0.993243243 | -0.006779687 | 4.59642E-05 |
| 236 | 7,400.00 | 1.006802721 | 0.006779687 | 4.59642E-05 |
| 237 | 7,550.00 | 1.02027027 | 0.020067563 | 0.000402707 |
| 238 | 7,450.00 | 0.986754967 | -0.013333531 | 0.000177783 |
| 239 | 7,450.00 | 1 | 0 | 0 |
| 240 | 7,600.00 | 1.020134228 | 0.019934215 | 0.000397373 |

Dengan $n = 240$, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -0.063715814$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0.255724929$$

Volatilitas per hari $= \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}$

$$= 0.032709448$$

Volatilitas per tahun = volatilitas per hari $\times \sqrt{n}$

$$= 0.032709448 \times \sqrt{240}$$

$$= 0.506732593$$

$$= 50.6733\%$$

**Lampiran 8 : Algoritma Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-rata Geometrik dengan *Software* MATLAB 7**

### 8.1 Algoritma Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-rata Geometrik.

```
clc;
clear;

% pricing asian option menggunakan rata-rata geometrik %
%%% pricing dengan menggunakan Black-Scholes formula %%%

% inisialisasi fungsi
function (C P)= blackscholesgeo(s0, K, r, sigma, n, T)

       % kalkulasi varcap
       varcap = (sigma^2*(n+1)*(2*n+1))/(6*n^2);

       % kalkulasi miucap
       miucap = 0.5*varcap+(r-0.5*sigma^2)*((n+1)/(2*n));

       % kalkulasi d1cap
       d1cap = (log(s0/K)+(miucap+0.5*varcap)*T)
       /(sqrt(varcap)*sqrt(T));

       % kalkulasi d2cap
       d2cap = d1cap - sqrt(varcap)*sqrt(T);

       % kalkulasi harga asian call option
```

```
        C = exp(-
        r*T)*(s0*exp(miucap*T)*cdf('normal',d1cap,0,1)-
        K*cdf('normal',d2cap,0,1));

        % kalkulasi harga asian put option
        P = exp(-r*T)*(K*cdf('normal',-d2cap,0,1)-
        s0*exp(miucap*T)*cdf('normal',-d1cap,0,1));

end
```

## 8.2 Algoritma Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-rata Aritmatik.

```
clc;close all;clear;
%inisialisasi fungsi
s0=7700; k=7800; r=0.07; T=1; n=100; sigma=0.5; m=100;
h=k/m;
% kalkulasi MiuCap & SigmaCap
sigmacap=sqrt(sigma^2*(n+1)*(2*n+1)/(6*n^2));
miucap=sigmacap^2/2+(r-0.5*sigma^2)*(n+1)/2*n;
% generate x~N(miux,sigmax^2)
% s(1)=s0 & s(n)=s(n+1)
s=zeros(1,n+1);dt=T/n;s(1)=s0;
   for i=1:n
       s(i+1)=s(i)*exp((r-
       0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*randn);
    end
% kalkulasi g, inisialisasi product arithmatic
```

```
g=1;
   for i=2:n+1
       g=g*s(i);
   end
g=g^(1/n);
% Menghitung xi=x
x=zeros(1,n);
    for i=2:n+1
       x(i-1)=log(s(i));
    end
% Menghitung miu_i & sigmaxi
     for i=1:n
       miu_i(i)=log(s(i))+(r-0.5*sigma^2)*dt;
       sigma_i(i)=sqrt(sigma^2*dt);
     end
% kalkulasi rhoij, dengan pertama-tama mengenerate
Si,j i,j=1,...,n
SS=zeros(n+1,n);SS(1,:)=s0;SS(:,1)=s';
% Ukuran SS bukan n+1*n+1 krn S n+1, tapi digenerate n x
   for i=1:n
       for j=2:n
           SS(i+1,j)=SS(i)*exp((r-
           0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*randn);
       end
   end
% kalkulasi rhoij
rho=corr(ss);
% kalkulasi return ln(Si+1/Si)
ss=zeros(n,n);
    for i=1:n
```

```
        for j=1:n
           ss(i,j)=SS(j+1,i)./SS(j,i);
           ss(i,j)=log(ss(i,j));
         end
    end
% kalkulasi miux
miux=mean(miu_i);
% kalkulasi sigmax
sum=0;
    for i=1:n
        for j=1:n
           sum=sum+sigma_i(i)*sigma_i(j)*rho(i,j);
       end
 end
sigmax=sqrt(sum/n^2);
% kalkulasi sigmaxi
for i=1:n
     sumproduct=0;
    for j=1:n
          sumproduct=sumproduct+sigma_i(j)*rho(i,j);
    end
sigmaxi(i)=sigma_i(i)/n*sumproduct;
end
% C matrix
c_matrix=zeros(n,n);
    for i=1:n
        for j=1:n
           c_matrix(i,j)=sigma_i(i)*sigma_i(j)*rho(i,j);
         end
    end
```

```
nvec=ones(n,1)*(1/n);
ccap=c_matrix-
(c_matrix*nvec*nvec'*c_matrix')/(nvec'*c_matrix*nvec);
for i=1:n
   miu_icap(i)=miu_i(i)+(sigmaxi(i)/sigmax^2)*(X-
  miux);%X=log(k)
end
%kalkulasi sigmacap_a
sum=0;
  for i=1:n
      for j=1:n
sum=sum+exp(miu_icap(i)+miu_icap(j)+0.5*(c_matrix(i,i)+c_
matrix(j,j)+2*c_matrix(i,j)))-
exp(miu_icap(i)+0.5*c_matrix(i,i))*exp(miu_i(j)+0.5*c_mat
rix(j,j));
      end
  end
sum=sqrt(sum/n^2);sigmacap_a=sum;
%kalkulasi miucap_a
sum=0;
for i=1:n
    sum=sum+exp(miu_icap(i)+c_matrix(i,i)*0.5);
end
miucap_a=sum/n;
sigmacap_e=sigmacap_a; miucap_e=miucap_a-k;
gamma=sqrt(log(sigmacap_e^2/miucap_e^2+1));
beta=log(miucap_e)-gamma^2*0.5;
%kalkulasi c1
c1=0;
  for i=1:m
```

```
    c1=c1+bse(i*h,beta,gamma)*lognpdf(k-i*h,0,1);
    cc(i)=c1;
  end
c1=c1*h;
I2=k*normcdf((miux-log(k))/sigmax,0,1);
%kalkulasi I1
sum=0;
  for i=1:n
   sum=sum+exp(miu_i(i)+sigma_i(i)^2*0.5)*normcdf(((miux-
   log(k))/sigmax)+sigmaxi(i)/sigmax,0,1);
end
I1=sum/n;
c2=I1+I2;
C=c1+c2
```

**Lampiran 9 : Tabel Notasi, Tabel Persamaan dan Tabel distribusi**

## 9.1 Tabel Notasi

| No | Notasi | Arti Notasi |
|---|---|---|
| 1. | $C$ | harga opsi *call* |
| 2. | $P$ | harga opsi *put* |
| 3. | $S(t)$ | harga saham pada waktu $t$ |
| 4. | $S(T)$ | harga saham pada waktu $t = T$ |
| 5. | $S(t_i)$ | harga saham pada waktu $t_i$ |
| 6. | $S(0)$ | harga saham pada waktu $t = 0$ |
| 7. | $K$ | *strike price* |
| 8. | $n$ | banyaknya harga aset yang dirata-ratakan |
| 9. | $t_i$ | waktu ke-$i$, dimana $i = 0,1,2,...n$ |
| 10 | $T$ | waktu jatuh tempo |
| 11 | $\Delta t$ | Periode waktu |
| 12 | $G$ | rata-rata geometrik harga saham |
| 13 | $A$ | rata-rata aritmatik harga saham |
| 14 | $W(t)$ | gerak *Brown* |
| 15 | $B(t)$ | gerak *Brown* standar |
| 16 | $Z(t)$ | gerak *Brown* geometrik |

| | | |
|---|---|---|
| 17 | $\mu$ | Tingkat pengembalian harga saham |
| 18 | $\sigma$ | Volatilitas dari harga saham |
| 19 | $r$ | Tingkat suku bunga bebas resiko atau *risk-free rate* |
| 20 | $N(0,1)$ | notasi untuk distribusi normal standar |
| 21 | $N[x]$ | *cdf* normal standar untuk variabel $x$ |
| 22 | $f(x)$ | *pdf* dari variabel $x$ |
| 23 | $p(g)$ | *pdf* dari variabel $G$ |
| 24 | $\rho_{ij}$ | korelasi antara (pengembalian) imbal hasil dari harga saham ke-$i$ dan ke-$j$ |
| 25 | $\widetilde{E}$ | Taksiran ekspektasi |
| 26*) | $h$ | lebar interval |
| 27*) | $BS^{e}(k)$ | Modifikasi *Black-Scholes* |
| 28*) | $m$ | banyaknya partisi dalam integrasi numerik<br>*) digunakan pada perhitungan integrasi numerik dalam penentuan harga opsi *call* Asia menggunakan rata-rata aritmatik |
| 29 | $\underline{X}$ | vektor $X$ |
| 30 | $\underline{X}^{T}$ | vektor *transpose* $X$ |
| 31 | $\mathbf{D}$ | matriks $\mathbf{D}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 32 | $\mathbf{D}^T$ | matriks *transpose* $\mathbf{D}$ |
| 33 | $\mathbf{C}$ | matriks kovariansi dari distribusi vektor $\underline{X}$ |
| 34 | $\mathbf{C}_+$ | matriks kovariansi dari distribusi $\underline{X}_+$ |
| 35 | $\widehat{\mathbf{C}}$ | matriks kovariansi dari distribusi vektor $\underline{X}$ bersyarat $X$ |
| 36 | $X \sim N\left(\mu_x, {\sigma_x}^2\right)$ | Notasi untuk variabel $X$ berdistribusi normal dengan parameter $\mu_x$ dan ${\sigma_x}^2$ |
| 37 | $Y \sim LN\left(\mu_y, {\sigma_y}^2\right)$ | Notasi untuk variabel $Y$ berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu_y$ dan ${\sigma_y}^2$ |

| | |
|---|---|
| 1 | $X_i = \ln S\left(t_i\right)$ |
| 2 | $X = \ln g$ |
| 3 | $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ |
| 4 | $d_2 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ |
| 5 | $\hat{d}_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S(0)}{K}\right) + \left(\hat{\mu} + \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ |
| 6 | $\hat{\mu} = \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\dfrac{n+1}{2n}$ |
| 7 | $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ |
| 8 | $H = b - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2$ |
| 9 | $v = \dfrac{b - \left(\ln S(0) + \left(\hat{\mu} + \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ |
| 10 | $u = \dfrac{\ln g - \ln S(0) - \left(\hat{\mu} - \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ |

| | |
|---|---|
| 11 | $Q = \exp\left(\dfrac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\ln K - \dfrac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X{}^2}\mu_X - \dfrac{\sigma_{Xi}^2}{2\sigma_X{}^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln K - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)$ |
| 12 | $G = \dfrac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X} + \dfrac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X}\right)^2\right)$ |
| 13 | $q = \dfrac{x - \mu_X - \sigma_{Xi}}{\sigma_X}$ |
| 14 | $R = \dfrac{\mu_X - \ln K}{\sigma_X}$ |
| 15 | $\in = \left[a - K \mid g\right]$ |
| 16 | $\hat{\mu}_a = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left[\hat{\mu}_i + \dfrac{\hat{c}_{ii}}{2}\right]$ |
| 17 | $\hat{\sigma}_a^2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\exp\left[\hat{\mu}_i + \hat{\mu}_j + \dfrac{1}{2}(\hat{c}_{ii} + \hat{c}_{jj} + 2\hat{c}_{ij})\right] - \exp\left[\hat{\mu}_i + \dfrac{1}{2}\hat{c}_{ii}\right]\exp\left[\hat{\mu}_j + \dfrac{1}{2}\hat{c}_{jj}\right]\right\}$ |
| 18 | $\hat{\mu}_{\in} = \hat{\mu}_a - K$ |
| 19 | $\hat{\sigma}_{\in}^2 = \hat{\sigma}_a^2$ |
| 20 | $\beta = \ln\left(\hat{\mu}_{\in}\right) - \dfrac{\gamma^2}{2}$ |
| 21 | $\gamma^2 = \ln\left(\dfrac{\hat{\sigma}_{\in}^2}{\hat{\mu}_{\in}^2} + 1\right)$ |

| | |
|---|---|
| 22 | $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ |
| 23 | $\underline{n}^T = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ |
| 24 | $\underline{X}_+ = \mathbf{D}\underline{X}$ |
| 25 | $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \ldots \\ \underline{n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ |
| 26 | $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ |
| 27 | $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{\ 2} & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^{\ 2} & \vdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{12} & \sigma_n\sigma_2\rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^{\ 2} \end{bmatrix}$ |
| 28 | $\mathbf{C}_+ = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^T$ |
| 29 | $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C}\underline{n}\underline{n}^T\mathbf{C}^T}{\underline{n}^T\mathbf{C}n}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Distribusi normal standar | $Z \sim NIID(0,1)$.<br>$Z_i \sim NIID(0,1)$ |
| 2 | Distribusi logaritma harga saham | $\ln S(t) \sim N\left( \ln S(0) + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right)$ |
| 3 | Distribusi $X_i = \ln S(t_i)$ | $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$<br>$X_i \sim N\left( \ln S\left(t_{i-1}\right) + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t, \sigma^2 \Delta t \right)$ |
| 4 | Distribusi $X = \ln g$ | $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^{\ 2}\right)$<br>$X \sim N\left( \ln S(0) + \left( \hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \right) T, \hat{\sigma}^2 T \right)$ |
| 5 | Distribusi $X_i$ bersyarat $X$ | $\left[X_i \mid X\right] \sim N\left(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^{\ 2}\right)$<br>$\left[X_i \mid X = x\right] \sim N\left( \mu_i + \left( \frac{\sigma_{Xi}}{\sigma_X^{\ 2}} \right) [x - \mu_X], \sigma_i^2 - \frac{\sigma_{Xi}^2}{\sigma_X^{\ 2}} \right)$ |
| 6 | Distribusi vektor $\underline{X}$ | $\underline{X} \sim N\left(\underline{\mu}_X, \mathbf{C}\right)$ |
| 7 | Distribusi vektor $\underline{X}_+$ | $\underline{X}_+ \sim N\left(\mathbf{D}\underline{\mu}_X, \mathbf{DCD}^T\right)$ |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | Distribusi vektor $\underline{X}$ bersyarat $X$ | $[\underline{X} \mid X] \sim N\left(\widehat{\mu}_i, \widehat{\mathbf{C}}\right)$ <br> $[\underline{X} \mid X] \sim N\left(\underline{\mu}_X + \frac{\mathbf{C}\underline{n}}{\underline{n}^T\mathbf{C}\underline{n}}\left[x - \underline{\mu}_X\right], \widehat{\mathbf{C}}\right)$ |
| 9 | Distribusi $\in$ | $\in \sim LN\left(\widehat{\mu}_{\in}, \widehat{\sigma}_{\in}^2\right)$ <br> $\in \sim LN\left(\widehat{\mu}_a - K, \widehat{\sigma}_a^2\right)$ |