ELASTISITAS DARI SUATU SISTEM BONUS-MALUS

RATIH KUSMIARI

0305010483

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

ELASTISITAS DARI SUATU SISTEM BONUS-MALUS

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

RATIH KUSMIARI

0305010483

DEPOK

2009

SKRIPSI : ELASTISITAS DARI SUATU SISTEM BONUS-MALUS

NAMA : RATIH KUSMIARI

NPM : 0305010483

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, JULI 2009

Dra. NETTY SUNANDI M.Si

PEMBIMBING I

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana: 10 Juli 2009
Penguji I: Dra. Netty Sunandi, M.Si
Penguji II: Dra. Ida Fithriani, M.Si
Penguji III: Dra. Nora Hariadi, M.Si

KATA PENGANTAR

Alhamdulillāhirabbil'ālamīn. Segala puji dan syukur hanya pantas dipanjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam tak lupa penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW beserta para sahabat yang telah memberikan contoh teladan bagi seluruh umat manusia.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku pembimbing yang dengan sabar membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini. Penulis juga menyampaikan terima kasih kepada Ibu Dra. Siti Nurrohmah, M.Si selaku pembimbing akademik yang telah memberikan saran dan nasehat selama berkuliah di Departemen Matematika. Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh dosen dan karyawan Departemen Matematika atas segala kemudahan yang telah diberikan selama masa perkuliahan.

Ungkapan terima kasih yang mendalam penulis tujukan kepada teman-teman seperjuangan yang mengambil skripsi, Shinta, Vani, Khuri, Ie, Syarah, Ida, May, Amri, Chupz, Rifkos, Uun, Maul, K'Iif, Edi yang telah banyak membantu dan memberikan informasi. Terima kasih kepada teman-teman 2005 tersayang, Puji, Fika, Inul, Dia, Anggie, Mery, Oneng, Othe, Nisma, Kumel, Jessy, Karlina, Maria, Nurma, Dian, Fia, Mia, Rani, Ranti, Miranti, Wicha, Pute, Atul, Andre, Aini, Gyo, Akmal, Aris, Asep, Daniel, Desti,

Shally, Om-om, Trian, Aya, Rara, Dimas, Yuni, Ferry, Hadi, Nasib, Hairu, Hamdan serta Yanu atas bantuan programnya. Terima kasih kepada teman-teman 2003, 2004, 2006, 2007, 2008 atas dukungannya. Terima kasih untuk sahabat berbagi canda, tawa, suka, duka : Tya, Minie, Karin, Juli, Ambar, Ulfah, aku sayang kalian.

Terima kasih yang tak ada habisnya untuk keluarga tercinta, Mama, Bapak dan ketiga kakakku Anda, Andi, Ipul yang telah memberikan kasih sayang, dukungan dan motivasi yang sangat berharga. Untuk ”kang” Aan, terima kasih atas semua yang telah diberikan selama ini. Terakhir penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini belumlah sempurna. Untuk itu saran dan kritik diperlukan demi kemajuan penelitian berikutnya. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua.

Penulis

2009

ABSTRAK

Pada skripsi akan dibahas elastisitas dari suatu sistem bonus-malus di suatu negara untuk asuransi kendaraan bermotor. Nilai elastisitas akan digunakan untuk mengukur seberapa baik suatu sistem bonus-malus dari sudut pandang pemegang polis. Nilai elastisitas bergantung pada ekspektasi banyaknya klaim dan ekspektasi premi stasioner. Distribusi probabilitas stasioner dari keberadaan kelas pemegang polis menentukan ekspektasi premi stasioner. Jika nilai elastisitas suatu sistem bonus-malus semakin mendekati 1 maka sistem bonus-malus tersebut akan semakin tidak mendekati ideal dari sudut pandang pemegang polis, namun akan semakin mendekati ideal bagi perusahaan asuransi.

Kata kunci : distribusi probabilitas stasioner, ekspektasi banyaknya klaim, ekspektasi premi stasioner, elastisitas.

viii + 85 hlm.; gbr; lamp; tab.

Bibliografi: 9 (1972-2007)

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Makin meningkatnya jumlah masyarakat yang mau mengasuransikan kendaraannya membuat persaingan antar perusahaan asuransi kendaraan semakin meningkat pula. Berbagai sistem ditawarkan oleh perusahaan asuransi untuk menarik minat banyak orang agar menjadi pemegang polis pada perusahaan tersebut. Salah satu sistem yang digunakan pada perusahaan asuransi mobil adalah sistem bonus-malus. Sistem ini memberikan terobosan baru bagi dunia asuransi, terutama dalam hal besarnya premi yang dipengaruhi oleh jumlah klaim yang diajukan pemegang polis tiap tahunnya. Dengan adanya sistem bonus-malus, pemegang polis akan berusaha untuk mengurangi jumlah klaimnya dengan lebih berhati-hati dalam berkendara.

Pada sistem bonus-malus diperkenalkan perpindahan kelas pemegang polis dimana setiap kelas memiliki perbedaan besarnya persentasi premi.

Sistem bonus-malus sudah diterapkan di beberapa negara seperti Asia Timur (Hongkong, Jepang, Korea Selatan, Malaysia-Singapura, Taiwan, Thailand), Eropa (Belgia, Denmark, Finlandia, Perancis, Jerman, Italia, Luxemburg, Belanda, Norwegia, Portugal, Spanyol, Swedia, Swiss, Inggris), Kenya dan Brazil. Tiap negara mengetengahkan jumlah kelas, aturan perpindahan kelas dan besarnya persentasi premi yang berbeda-beda disesuaikan dengan keadaan perekonomian dan kondisi negara tersebut.

Awalnya, konsep elastisitas digunakan dalam analisis ekonomi untuk mengetahui sejauh mana responsifnya permintaan suatu barang terhadap perubahan harga barang tersebut. Pada skripsi ini, konsep elastisitas akan digunakan untuk menunjukkan sampai dimana besarnya pengaruh perubahan rata-rata banyaknya klaim pemegang polis terhadap rata-rata premi yang harus dibayarkan tiap tahunnya.

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana mengukur seberapa baik suatu sistem bonus-malus dari sudut pandang pemegang polis berdasarkan konsep elastisitas.

1.3 Tujuan

Mempelajari sistem bonus-malus di beberapa negara dengan mengukur seberapa baik sistem tersebut berdasarkan konsep elastisitas.

1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, banyak klaim yang diajukan oleh pemegang polis diasumsikan berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Nilai λ, ekspektasi banyak klaim diasumsikan kecil (berada diantara 0 dan 1).

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terbagi dalam lima bab. Dalam Bab II akan dibahas mengenai proses Stokastik, rantai Markov, distribusi probabilitas stasioner, nilai limit dari suatu probabilitas serta vektor dan nilai eigen dari suatu matriks. Bab III akan dibahas mengenai definisi dan aturan transisi pada sistem bonus-malus serta cara mencari nilai elastisitas dari sistem bonus-malus tersebut. Pada Bab IV akan dibahas mengenai aplikasi dari perhitungan elastisitas sistem bonus-malus. Kesimpulan pada skripsi ini akan dibahas pada Bab V.

BAB II

LANDASAN TEORI

Sebelum beralih pada permasalahan mengukur seberapa baik suatu sistem bonus-malus, dalam bab ini akan dibahas mengenai teori dasar yang berhubungan dengan sistem bonus-malus dan teori ini akan digunakan pada BAB III. Selain itu, pada bab ini akan dibahas juga mengenai nilai eigen dan vektor eigen untuk mencari distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus.

2.1 Proses Stokastik

Proses Stokastik adalah himpunan variabel random yang diindeks dengan parameter yang mempunyai urutan, ditulis dengan $\{X_t,\ t \in T\}$. Himpunan indeks, T, merupakan subset dari $(-\infty,\infty)$. Jika T diskrit, maka himpunan indeksnya T = {0, 1, 2, …}, sedangkan jika T kontinu, maka himpunan indeksnya T = [0, ∞). Nilai yang mungkin untuk X_t disebut *state.* Proses berada di *state* i pada waktu t dinotasikan dengan $X_t = i$. Himpunan semua nilai yang mungkin untuk X_t disebut *state space*, *S*.

2.1.1 Rantai Markov

Proses Markov ialah suatu proses stokastik { X_t } dengan sifat bahwa jika diberikan nilai X_t , maka nilai X_s untuk $s > t$ tidak dipengaruhi oleh nilai X_u , $u < t$. Artinya, perilaku di masa mendatang ditentukan secara unik oleh perilaku saat ini. Proses Markov yang *state space*-nya himpunan hingga atau terhitung dan himpunan indeks T diskrit, biasanya waktu, disebut rantai Markov diskrit. Dalam bentuk formal, sifat rantai Markov dapat dinyatakan sebagai

$$\Pr\left\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right\} = \Pr\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\right\} \qquad (2.1.1)$$

untuk semua titik waktu n dan semua *state* $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

State space dari rantai Markov biasanya dinyatakan dengan bilangan bulat non-negatif {0, 1, 2, …}. Probabilitas bahwa X_{n+1} ada di *state* j jika diketahui X_n ada di *state* i disebut dengan probabilitas transisi 1-langkah, dinotasikan dengan $p_{ij}^{n,n+1}$

$$p_{ij}^{n,n+1} = \Pr\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\right\}, \; n \geq 0, \; i, j \geq 0 \qquad (2.1.2)$$

sedangkan probabilitas bahwa X_{n+m} ada di *state* j jika diketahui X_m ada di *state* i disebut dengan probabilitas transisi n -langkah, dinotasikan dengan p_{ij}^n .

$$p_{ij}^n = \Pr\left\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\right\}, \; n \geq 0, \; i, j \geq 0 \qquad (2.1.3)$$

dengan $p_{ij}^n \geq 0$ untuk $i, j = 0,1,2,...$ dan $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^n = 1$ untuk $i = 0,1,2,...$

Probabilitas transisi 1-langkah yang tidak bergantung pada variabel waktu n disebut dengan probabilitas transisi 1-langkah yang stasioner dinotasikan dengan p_{ij}.

$$p_{ij} = p_{ij}^{1,2} = p_{ij}^{2,3} = \ldots = p_{ij}^{n,n+1} \tag{2.1.4}$$

untuk setiap n. Biasanya p_{ij} disusun dalam suatu matriks

$$\mathrm{P} = \left[p_{ij} \right] = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

P = $\left[p_{ij} \right]$ disebut sebagai matriks probabilitas transisi dari suatu proses yang stasioner. Jika banyaknya *state* berhingga, maka matriks probabilitas transisinya berbentuk matriks persegi dan disebut sebagai matriks probabilitas transisi dari rantai Markov yang homogen. Elemen-elemen matriks probabilitas transisi memenuhi :

1. $p_{ij} \geq 0$ untuk $i, j = 0,1,2,\ldots$

2. $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$ untuk $i = 0,1,2,\ldots$

Probabilitas transisi n-langkah, p_{ij}^{n} dapat ditulis sebagai

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{n} &= \Pr\left\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{n+m} = j, X_{m+1} = k \mid X_m = i\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m+1} = k \mid X_m = i\right\} \Pr\left\{X_{n+m} = j \mid X_{m+1} = k, X_m = i\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m+1} = k \mid X_m = i\right\} \Pr\left\{X_{n+m} = j \mid X_{m+1} = k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}\, p_{kj}^{n-1}
\end{aligned}
$$

Jika dimisalkan $\mathrm{P}^{(n)}$ adalah matriks probabilitas transisi n-langkah dengan elemen-elemennya p_{ij}^{n}, maka

$$\mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}\cdot\mathrm{P}^{(n-1)} = \mathrm{P}\cdot\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}^{(n-2)} = \cdots = \mathrm{P}^{n} \qquad (2.1.5)$$

artinya matriks $\mathrm{P}^{(n)}$ merupakan hasil perkalian matriks P dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

2.2 Distribusi Stasioner

Definisi 2.2.1 :

Distribusi probabilitas $\left\{p_j;\ j \geq 0\right\}$ dari rantai Markov dikatakan stasioner jika

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\, p_{ij} \qquad j \geq 0 \qquad (2.2.1)$$

dengan p_j adalah probabilitas proses berada di *state* j, $p_j \geq 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ dan

p_{ij} adalah probabilitas transisi 1-langkah yang stasioner, dimana proses berpindah dari *state* i ke *state* j dalam satu periode.

Pada distribusi stasioner, keberadaan proses di suatu *state* dilihat pada waktu yang sama, yaitu pada waktu n.

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij} \quad \text{untuk } j \geq 0$$

artinya

$$\Pr\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_n = i\} \Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \quad \text{untuk suatu } n \qquad (2.2.2)$$

Teorema 2.2.1

Jika distribusi probabilitas pada awal proses, X_0, merupakan distribusi yang stasioner maka X_n akan memiliki distribusi yang sama untuk setiap n yaitu

$$\begin{aligned} p_j &= \Pr\{X_0 = j\} \\ &= \Pr\{X_n = j\} \text{ untuk setiap } n > 0 \end{aligned}$$

Artinya, distribusi stasioner tidak bergantung terhadap variabel waktu n.

Bukti :

Telah diketahui bahwa probabilitas pada awal proses, X_0, merupakan distribusi yang stasioner, artinya

$$
\begin{aligned}
p_j &= \Pr\left\{X_0 = j\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_0 = i\right\} \Pr\left\{X_1 = j \mid X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, pembuktian akan dilakukan dengan metode induksi.

- Untuk $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{X_1 = j\right\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_1 = j,\ X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_1 = j \mid X_0 = i\right\} \Pr\left\{X_0 = i\right\}
\end{aligned}
$$

karena distribusi pada awal proses merupakan distribusi probabilitas yang stasioner, maka $\Pr\left\{X_0 = i\right\}$ dapat ditulis sebagai p_i sedangkan $\Pr\left\{X_1 = j \mid X_0 = i\right\}$ ditulis sebagai p_{ij}, probabilitas transisi 1-langkah yang stasioner, sehingga akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{X_1 = j\right\} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} p_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij} \\
&= p_j \\
&= \Pr\left\{X_0 = j\right\}
\end{aligned}
$$

- Untuk $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{X_2 = j\right\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_2 = j,\ X_1 = i\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_2 = j \mid X_1 = i\right\} \Pr\left\{X_1 = i\right\}
\end{aligned}
$$

berdasarkan hasil yang diperoleh sebelumnya, $\Pr\left\{X_1 = j\right\} = \Pr\left\{X_0 = j\right\} = p_j$, maka $\Pr\{X_1 = i\}$ dapat ditulis sebagai p_i sedangkan

$\Pr\{X_2 = j \mid X_1 = i\} = \Pr\{X_1 = j \mid X_0 = i\} = p_{ij}$, probabilitas transisi 1-langkah

yang stasioner, sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_2 = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} p_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij} \\
&= p_j \\
&= \Pr\{X_0 = j\}
\end{aligned}$$

- Misalkan untuk $n = k$ berlaku $\Pr\{X_k = j\} = \Pr\{X_0 = j\} = p_j$

Maka,

- Untuk $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_{k+1} = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_{k+1} = j,\ X_k = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_{k+1} = j \mid X_k = i\} \Pr\{X_k = i\}
\end{aligned}$$

berdasarkan hasil yang diperoleh sebelumnya,

$\Pr\{X_k = j\} = \Pr\{X_0 = j\} = p_j$, maka $\Pr\{X_k = i\}$ dapat ditulis sebagai p_i

sedangkan $\Pr\{X_{k+1} = j \mid X_k = i\} = \ldots = \Pr\{X_1 = j \mid X_0 = i\} = p_{ij}$, probabilitas transisi 1-langkah yang stasioner, sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_{k+1} = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} p_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij} \\
&= p_j \\
&= \Pr\{X_0 = j\}
\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan hasil-hasil yang telah diperoleh di atas,

$\Pr\{X_{k+1}=j\}=\Pr\{X_k=j\}=\ldots=\Pr\{X_1=j\}=\Pr\{X_0=j\}=p_j$ untuk setiap k

maka dapat disimpulkan bahwa distribusi stasioner tidak bergantung terhadap variabel waktu.

Jadi terbukti bahwa jika distribusi probabilitas pada awal proses X_0 merupakan distribusi yang stasioner, maka X_n akan memiliki distribusi yang sama untuk setiap n. ■

2.3 Nilai Limit Dari Suatu Probabilitas

Akan dilihat keadaan suatu matriks probabilitas transisi n-langkah ketika n menuju ke suatu nilai yang besar. Misalkan matriks probabilitas transisi 1-langkah dari rantai Markov adalah sebagai berikut

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

Maka berdasarkan persamaan (2.1.5) akan diperoleh

$$\mathrm{P}^{(2)}=\mathrm{P}^2=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.61 & 0.39\\ 0.52 & 0.48\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}^{(4)}=\mathrm{P}^4=\left(\mathrm{P}^2\right)^2=\begin{bmatrix}0.5749 & 0.4251\\ 0.5668 & 0.4332\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}^{(8)}=\mathrm{P}^8=\left(\mathrm{P}^4\right)^2=\begin{bmatrix}0.572 & 0.428\\ 0.570 & 0.430\end{bmatrix}$$

Ternyata matriks $\mathrm{P}^{(8)}$ hampir menyerupai matriks $\mathrm{P}^{(4)}$ dan juga setiap baris pada matriks $\mathrm{P}^{(8)}$ memiliki entri-entri yang hampir identik. Pada kenyataannya terlihat bahwa untuk $n \to \infty$, p_{ij}^{n} konvergen ke suatu nilai yang sama untuk setiap i.

Untuk membuat pernyataan di atas lebih akurat, tinjau definisi-definisi berikut ini.

Definisi 2.3.1

State j dikatakan *accessible* atau terhubung dari state i, notasikan $i \to j$, jika $p_{ij}^{n} > 0$ untuk suatu bilangan bulat $n \geq 0$. Dalam 0 langkah (tidak ada langkah), semua *state* akan terhubung dari *state* itu sendiri

$$p_{ii}^{0} = \Pr\left\{X_0 = i \mid X_0 = i\right\} = 1$$

Definisi 2.3.2

State i dikatakan *communicate* dengan *state* j, notasikan $i \leftrightarrow j$, jika *state* j terhubung dari *state* i dan *state* i terhubung dari *state* j.

Hubungan *communicate* antar *state* memenuhi tiga sifat berikut ini :

(i). *State* i *communicate* dengan *state* i, untuk semua i ≥ 0

(ii). Jika *state* i *communicate* dengan *state* j, maka *state* j *communicate* dengan *state* i.

(iii). Jika *state* i *communicate* dengan *state* j dan *state* j *communicate* dengan *state* k, maka *state* i *communicate* dengan *state* k.

Bukti :

(i). Berdasarkan definisi 2.3.1, dalam 0 langkah semua *state* akan terhubung dari *state* itu sendiri, $i \to i$ dimana $p_{ii}^{0} = \Pr\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1$.

Jadi terbukti bahwa *state* i *communicate* dengan *state* i.

(ii). Karena sudah diketahui bahwa $i \leftrightarrow j$ yang artinya $i \to j$ dan $j \to i$ maka berdasarkan definisi 2.3.2, $j \leftrightarrow i$ juga akan berlaku.

(iii). Diketahui bahwa $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$, artinya terdapat bilangan bulat m_1, m_2 dan n_1, n_2 sedemikian sehingga $p_{ij}^{m_1}$, $p_{ji}^{m_2} > 0$ dan $p_{jk}^{n_1}$, $p_{kj}^{n_2} > 0$. Misalkan terdapat bilangan bulat s_1, s_2 dimana $s_1 = m_1 + n_1$ dan $s_2 = m_2 + n_2$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
p_{ik}^{s_1} &= p_{ik}^{m_1+n_1} \\
&= \Pr\left\{X_{m_1+n_1} = k \mid X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m_1+n_1} = k, X_{m_1} = r \mid X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m_1} = r \mid X_0 = i\right\} \Pr\left\{X_{m_1+n_1} = k \mid X_{m_1} = r, X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m_1} = r \mid X_0 = i\right\} \Pr\left\{X_{m_1+n_1} = k \mid X_{m_1} = r\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{m_1} p_{rk}^{n_1} \\
&\geq p_{ij}^{m_1} p_{jk}^{n_1} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Artinya *state* k terhubung dari *state* i, $i \to k$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
p_{ki}^{s_2} &= p_{ki}^{m_2+n_2} \\
&= \Pr\left\{X_{m_2+n_2} = i \mid X_0 = k\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{m_2+n_2} = i, X_n = r \mid X_0 = k\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{n_2} = r \mid X_0 = k\right\} \Pr\left\{X_{m_2+n_2} = i \mid X_{n_2} = r, X_0 = k\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr\left\{X_{n_2} = r \mid X_0 = k\right\} \Pr\left\{X_{m_2+n_2} = i \mid X_{n_2} = r\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^{n_2} p_{ri}^{m_2} \\
&\geq p_{kj}^{n_2} p_{ji}^{m_2} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Artinya, *state* i terhubung dari *state* k, $k \to i$

Karena $i \to k$ dan $k \to i$, maka dapat disimpulkan bahwa

State i *communicate* dengan *state* k, $i \leftrightarrow k$. ■

Suatu rantai Markov dikatakan *irreducible* jika semua *state*-nya *communicate* satu sama lain.

Contoh 2.3.1:

Suatu rantai Markov memiliki tiga state yaitu 0, 1, 2 dan matriks probabilitas transisinya adalah sebagai berikut

$$
\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
$$

Akan diselidiki apakah rantai Markov tersebut *irreducible* atau tidak.

- *State* 0 terhubung dari *state* 1, ditulis $1 \to 0$, dengan probabilitas $\frac{1}{2}$ dan juga *state* 1 terhubung dari *state* 0, ditulis $0 \to 1$, dengan probabilitas $\frac{1}{2}$. Maka, *state* 0 *communicate* dengan *state* 1, ditulis $0 \leftrightarrow 1$.
- *State* 1 terhubung dari *state* 2, ditulis $2 \to 1$, dengan probabilitas $\frac{1}{3}$ dan juga *state* 2 terhubung dari *state* 1, ditulis $1 \to 2$, dengan probabilitas $\frac{1}{4}$. Maka, *state* 1 *communicate* dengan *state* 2, ditulis $1 \leftrightarrow 2$.
- *State* 0 tidak terhubung dari *state* 2, karena probabilitas dari *state* 2 berpindah ke *state* 0 adalah 0. *State* 2 juga tidak terhubung dari *state* 0 karena probabilitas dari *state* 0 berpindah ke *state* 2 adalah 0. Walaupun demikian, *state* 0 tetap *communicate* dengan *state* 2 karena $0 \leftrightarrow 1$ dan $1 \leftrightarrow 2$, maka $0 \leftrightarrow 2$.

Karena semua *state*-nya *communicate* satu sama lain, maka dapat disimpulkan bahwa rantai Markov ini *irreducible*. □

Definisi 2.3.3

Suatu *state* i memiliki periode d jika untuk kembali ke *state* i sistem memerlukan kelipatan d langkah. Secara formal, periode dari suatu *state* didefinisikan sebagai berikut

$$d = \gcd\left(n : \Pr\{X_n = i \mid X_0 = i\} > 0\right) \qquad (2.3.1)$$

dengan gcd adalah *greatest common divisor* (faktor persekutuan terbesar).

Sebagai catatan bahwa meskipun *state* memiliki periode d, bisa saja terjadi keadaan dimana proses tidak akan kembali ke *state* tersebut dalam d langkah. Sebagai contoh, misalkan proses akan kembali ke suatu *state* dalam {6, 8, 10, 12, ...} langkah. Artinya, proses memiliki periode 2, namun proses tidak kembali ke *state* tersebut dalam 2 langkah. Jika semua *state* dalam *state space* memiliki periode 1, maka rantai Markovnya disebut aperiodik.

Definisi 2.3.4

Untuk suatu *state* i, misalkan f_i adalah probabilitas bahwa mula-mula proses berada di *state* i dan kemudian suatu saat proses akan kembali ke *state* i, atau bisa ditulis $f_i = p_{ii}^n,\ n > 0$. *State* i disebut *recurrent* jika $f_i = 1$ dan *transient* jika $f_i < 1$.

Berdasarkan *The Long Run Behavior of Markov Chain*, jika suatu rantai Markov *irreducible*, *positive recurrent* dan aperiodik maka $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^n$ ada dan independen terhadap i.

🕮 Pada rantai Markov yang *state space*-nya berhingga, paling sedikit satu *state*-nya adalah *recurrent*. Akibatnya, jika *state* i *recurrent* dan i *communicate* dengan j, maka *state* j juga *recurrent*. Hasilnya, semua *state* pada rantai Markov yang *irreducible* dengan *state space* berhingga adalah *recurrent*. Selain itu, semua state yang *recurrent* pada rantai Markov dengan *state space* berhingga adalah *positive recurrent*. (Ross 1997)

Teorema 2.3.1

Untuk rantai Markov yang *irreducible*, *positive recurrent* dan aperiodik ($\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ ada dan independen terhadap i), $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ adalah solusi non-negatif yang unik dari $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dimana $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$.

Bukti :

Pembuktian akan dilakukan melalui dua langkah.

- Langkah pertama, akan dibuktikan bahwa $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ adalah solusi non-negatif dari $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dimana $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$.

  Misalkan $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$, $i, j \geq 0$ atau dapat ditulis sebagai

  $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{kj}^n$, $k, j \geq 0$ dan diuraikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\pi_j &= \lim_{n\to\infty} p_{kj}^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{X_n = j \mid X_0 = k\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_n = j, X_{n-1} = i \mid X_0 = k\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_0 = k\right\} \Pr\left\{X_{n-1} = i \mid X_0 = k\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\right\} \Pr\left\{X_{n-1} = i \mid X_0 = k\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\, p_{ki}^{n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ki}^{n-1} p_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} p_{ki}^{n-1} p_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ adalah solusi non-negatif dari

$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$.

- Langkah kedua, akan dibuktikan bahwa $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dengan

  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ memiliki solusi yang unik.

  Tinjau $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dimana $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$. Misalkan *state space* dari rantai Markov adalah {0, 1, 2, ..., s}. Jika dijalankan untuk suatu nilai j, maka akan diperoleh

- Untuk $j = 0$,

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i0}$$
$$= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \ldots + \pi_s p_{s0}$$
$$= \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} \\ p_{10} \\ p_{20} \\ \vdots \\ p_{s0} \end{bmatrix}$$

- Untuk $j = 1$

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i1}$$
$$= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \ldots + \pi_s p_{s1}$$
$$= \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{s1} \end{bmatrix}$$

- Untuk $j = 2$

$$\pi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i2}$$
$$= \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \ldots + \pi_s p_{s2}$$
$$= \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{02} \\ p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{s2} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

- Untuk $j = s$

$$
\begin{aligned}
\pi_s &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{is} \\
&= \pi_0 p_{0s} + \pi_1 p_{1s} + \pi_2 p_{2s} + \ldots + \pi_s p_{ss} \\
&= \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0s} \\ p_{1s} \\ p_{2s} \\ \vdots \\ p_{ss} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Kemudian, $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ dapat ditulis dalam bentuk vektor baris

$\boldsymbol{\pi} = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_s]$ dengan

$$
\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} \begin{Vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0s} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & & p_{1s} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & & p_{2s} \\ \vdots & & & & \\ p_{s0} & p_{s1} & p_{s2} & & p_{ss} \end{Vmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathrm{P} \tag{2.3.2}
$$

Misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_s \end{bmatrix}$ salah satu solusi dari persamaan (2.3.2).

Artinya, $\pi_j = k\, x_j$, dengan k adalah suatu konstanta. Karena $\sum_{j=0}^{s} \pi_j = 1$,

maka

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{s} \pi_j = \sum_{j=0}^{s} k\, x_j \;&\Leftrightarrow\; 1 = k \sum_{j=0}^{s} x_j \\
&\Leftrightarrow\; k = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s} x_j}
\end{aligned}
$$

sehingga $\pi_j = \dfrac{x_j}{\sum_{j=0}^{s} x_j}$ merupakan solusi yang unik .

Jadi terbukti bahwa $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dengan $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ memiliki solusi yang unik.

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada langkah pertama dan langkah kedua, maka dapat disimpulkan bahwa $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ adalah solusi yang unik dari

$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dimana $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$. ■

Tinjau probabilitas bahwa proses berada di *state* j pada waktu n, $\Pr\{X_n = j\}$, yang jika diuraikan menjadi

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_n = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_n = j, X_0 = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_n = j \mid X_0 = i\} \Pr\{X_0 = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^n \Pr\{X_0 = i\}
\end{aligned}$$

Ketika $n \to \infty$ persamaan di atas menjadi

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = j\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^n \Pr\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n \Pr\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j \Pr\{X_0 = i\}$$

$$= \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X_0 = i\}$$

$$= \pi_j \ . 1$$

$$= \pi_j \tag{2.3.3}$$

Berdasarkan Teorema (2.3.1) dan persamaan (2.3.3), dapat disimpulkan bahwa ketika $n \to \infty$, p_{ij}^n akan konvergen ke suatu nilai yang sama untuk setiap i. Dengan perkataan lain, terdapat suatu nilai limit dari probabilitas bahwa proses akan berada di *state* j setelah sejumlah langkah yang besar dan juga nilai ini independen terhadap *state* mula-mula i.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j = \lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = j\} \tag{2.3.4}$$

Setelah diketahui bahwa berlaku persamaan (2.3.4) dimana $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, $j \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, maka berdasarkan definisi 2.2.1 distribusi probabilitas dari rantai Markov dengan sejumlah langkah yang besar $\{\pi_j;\ j \geq 0\}$ adalah stasioner.

2.4 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka vektor tak-nol $\mathbf{x}$ di R^n disebut suatu vektor eigen dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah suatu penggandaan skalar dari $\mathbf{x}$, yaitu

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{2.4.1}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut sebagai nilai eigen dari matriks A, dan $\mathbf{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen dari suatu matriks A berukuran $n \times n$, $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai

$$A\mathbf{x} = \lambda I \mathbf{x} \tag{2.4.2}$$

atau ekivalen dengan

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \tag{2.4.3}$$

dimana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, harus ada suatu penyelesaian tak-nol dari persamaan (2.4.3). Persamaan (2.4.3) mempunyai penyelesaian tak-nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.4.4}$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik dari A.

🕮 det$(A) \neq 0$ ekivalen dengan pernyataan bahwa vektor vektor kolom dari matriks A adalah bebas linier. Dengan perkataan lain, jika det$(A - \lambda I) = 0$, vektor-vektor kolom dari matriks $A - \lambda I$ tidak bebas linier. (Anton 1994)

Vektor eigen dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut vektor eigen kanan jika berlaku

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{x}$ berupa vektor kolom berukuran $n \times 1$, sedangkan disebut vektor eigen kiri jika berlaku

$$\mathbf{x}A = \lambda \mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{x}$ berupa vektor baris berukuran $1 \times n$.

BAB III

ELASTISITAS DARI SUATU SISTEM BONUS-MALUS

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi dan aturan-aturan pada sistem bonus-malus yang akan digunakan untuk mengukur elastisitas dari sistem tersebut.

3.1 Definisi Sistem Bonus-Malus

Sistem bonus-malus adalah suatu sistem yang digunakan pada perusahaan asuransi kendaraan untuk menentukan tarif premi pemegang polis. Penentuan tarif premi tersebut didasarkan pada banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis. Jika pemegang polis mengajukan satu atau lebih klaim maka pemegang polis akan dikenakan kenaikan premi (malus) untuk periode pembayaran premi berikutnya, sedangkan jika pemegang polis tidak mengajukan klaim maka pemegang polis akan diberikan penghargaan berupa penurunan premi (bonus) untuk periode pembayaran premi berikutnya.

Sistem bonus-malus yang digunakan di beberapa negara akan membagi tarif premi pemegang polis ke dalam sejumlah berhingga kelas, notasikan dengan C_i, i =1, 2, …, s, sehingga besarnya premi yang dibayar oleh pemegang polis tiap tahunnya bergantung pada kelas dimana pemegang polis berada. Selain itu, kelas pemegang polis untuk periode asuransi berikutnya ditentukan secara unik oleh kelas dan banyaknya klaim pada periode saat ini.

Sistem bonus-malus ditentukan oleh tiga elemen penting. Pertama, persentasi premi yang diasumsikan sebagai vektor kolom **b** dengan elemen-elemennya b_i yang menyatakan besarnya persentasi premi pada kelas ke-i . Kedua, kelas mula-mula i_0 dimana pemegang polis membayar premi dasar. Ketiga, suatu aturan yang menentukan kelas di periode berikutnya jika banyak klaim yang diajukan pada periode saat ini diketahui. Aturan tersebut dinamakan aturan transisi.

3.1.1 Aturan Transisi pada Sistem Bonus-Malus

Tinjau suatu sistem bonus-malus Brazil pada Tabel 1 di bawah ini.

Kelas	Premi	Banyaknya Klaim						
C_i	b_i	0	1	2	3	4	5	≥6
		Kelas Untuk Periode Berikutnya						
7	100	6	7	7	7	7	7	7
6	90	5	7	7	7	7	7	7
5	85	4	6	7	7	7	7	7
4	80	3	5	6	7	7	7	7
3	75	2	4	5	6	7	7	7
2	70	1	3	4	5	6	7	7
1	65	1	2	3	4	5	6	7

- Pada sistem ini terdapat 7 kelas premi.
- Bagi pemegang polis yang tidak mengajukan klaim dalam satu periode akan mengalami penurunan kelas premi sebesar satu kelas untuk periode pembayaran premi berikutnya, sedangkan untuk pemegang polis yang mengajukan satu atau lebih klaim akan mengalami kenaikan kelas premi dengan besarnya kenaikan adalah satu kelas untuk tiap-tiap klaim.
- Setiap pemegang polis yang baru mengikuti asuransi, akan memasuki sistem pertama kali di kelas 7 dengan membayar premi dasar (100%), misalkan \$100 untuk periode pertamanya.
- Jika pada periode pertama pemegang polis tersebut mengajukan klaim maka di periode berikutnya ia akan tetap berada di kelas 7. Sedangkan jika ia tidak mengajukan klaim maka di periode berikutnya ia akan berada di kelas 6 dan mendapatkan bonus sebesar 10% dari premi awal yaitu ia hanya membayar premi sebesar \$90.
- Misalkan ada seorang pemegang polis yang tidak mengajukan klaim selama dua periode berturut-turut sedangkan di periode ketiga ia mengajukan dua klaim. Berikut ini adalah riwayat pembayaran premi pemegang polis terebut :
  - Pada awal periode ia membayar premi sebesar \$100.
  - Pada periode pertama, ia tidak mengajukan klaim. Maka, pada awal periode kedua ia akan mengalami penurunan kelas yaitu pindah ke kelas 6 dan mendapatkan bonus premi sebesar 10% dari premi awal.

Artinya, ia hanya membayar premi sebesar $90.

- Pada periode kedua, ia juga tidak mengajukan klaim. Maka, pada awal periode ketiga ia akan mengalami penurunan kelas lagi yaitu pindah ke kelas 5. Artinya, ia hanya membayar premi sebesar $85.
- Pada periode ketiga, ia mengajukan dua klaim. Maka, pada awal periode keempat ia akan mengalami kenaikan kelas yaitu pindah ke kelas 7 dan harus membayar premi sebesar $100.

Pada sistem bonus-malus perpindahan kelas pemegang polis untuk periode berikutnya didasarkan pada informasi mengenai keberadaan kelas dan banyaknya klaim pada periode saat ini. Perpindahan kelas ini diatur oleh suatu aturan transisi.

Aturan transisi pada sistem bonus-malus dapat ditampilkan dalam bentuk matriks transformasi T_k dengan k adalah banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis pada suatu periodenya sedemikian sehingga $T_k(i) = j$ jika terjadi perpindahan pemegang polis dari kelas i ke kelas j ketika sejumlah k klaim diajukan oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi. T_k bisa ditulis sebagai

$$T_k = \left(t_{ij}^{(k)} \right) \qquad (3.1.1)$$

dimana

$$t_{ij}^{(k)} = 1 \text{, jika } T_k\left(i\right) = j$$

$$= 0 \text{, lainnya}$$

dengan

$$\sum_j t_{ij}^{(k)} = 1$$

Contoh 3.1.1:

Pada sistem bonus-malus Brazil pada Tabel 1, aturan transisinya dalam bentuk matriks transformasi adalah sebagai berikut

$$T_0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad T_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$T_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad T_3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$T_4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad T_5 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$T_6 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad T_7 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \ldots$$

□

Banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis pada suatu periodenya diasumsikan berdistribusi Poisson (λ) dengan pdf

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots \text{ dan } \lambda > 0 \tag{3.1.2}$$

dimana λ adalah parameter dari distribusi Poisson yang menyatakan ekspektasi banyaknya klaim. Pada penulisan skripsi ini, diasumsikan λ memiliki nilai yang kecil (diantara 0 dan 1). Hal ini dikarenakan, dengan adanya sistem bonus-malus pemegang polis akan mengurangi jumlah klaimnya sehingga nilai dari rata-rata banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis akan semakin kecil.

Akan diselidiki apakah suatu sistem bonus-malus memenuhi sifat proses Markov. Penyelidikan dilakukan dengan melihat aturan transisi pada sistem tersebut. Ternyata, ada beberapa sistem bonus-malus yang tidak memenuhi sifat proses Markov seperti pada sistem bonus-malus Belgia yang dapat dilihat pada Tabel 2. Pada sistem ini terdapat aturan dimana tidak ada pemegang polis yang akan melebihi kelas 14 jika selama 4 tahun berturut-turut ia tidak mengajukan klaim. Hal ini membuat perusahaan asuransi perlu mengingat sejarah klaim pemegang polis selama 4 tahun.

Contoh 3.1.2:

Pada sistem bonus-malus Belgia, misalkan pada periode ke-2 pemegang polis berada di kelas 22 dan tidak mengajukan klaim selama periode tersebut. Maka, pada awal periode ke-3 pemegang polis akan berada di kelas 21. Selama periode ke-3 pemegang polis tidak mengajukan klaim, maka pada awal periode ke-4 pemegang polis akan berada di kelas 20. Selama periode ke-4 pemegang polis tidak mengajukan klaim, maka pada awal periode ke-5 pemegang polis akan berada di kelas 19. Jika pada periode ke-5 pemegang polis tidak juga mengajukan klaim, maka pada awal periode ke-6 pemegang polis akan berada di kelas 14.

Oleh karena itu, akan diperoleh

$\Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_2 = 22, X_3 = 21, X_4 = 20, X_5 = 19\right\} > 0$, karena keadaan ini memang dapat terjadi berdasarkan aturan yang ada pada sistem bonus-malus ini.

Sedangkan $\Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_5 = 19\right\} = 0$, karena dalam satu periode pemegang polis yang berada di kelas 19 tidak mungkin berpindah ke kelas 14.

Sehingga $\Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_2 = 22, X_3 = 21, X_4 = 20, X_5 = 19\right\} \neq \Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_5 = 19\right\}$ yang tidak sesuai dengan sifat proses Markov pada persamaan (2.1.1). □

Beruntungnya, beberapa sistem tersebut masih dapat dimodifikasi menjadi proses Markov dengan memecah beberapa kelas premi ke dalam subkelas yang sudah diberikan indeks yang menyatakan banyaknya tahun bebas klaim. Kelas premi yang dipecah adalah kelas premi yang nantinya dapat menyebabkan tidak terwujudnya proses Markov.

Contoh 3.1.3:

Pada sistem bonus-malus Belgia, misalkan pada periode ke-2 pemegang polis berada di kelas 22 dan pemegang polis tidak mengajukan klaim selama 4 periode berturut-turut. Modifikasi akan dilakukan pada kelas 21, 20 dan 19 sedemikian sehingga dari periode ke-2 ke periode ke-3 pemegang polis tidak berpindah dari kelas 22 ke 21, melainkan dari kelas 22 ke 21.1, dari periode ke-3 ke periode ke-4 pemegang polis tidak berpindah dari kelas 21 ke 20 melainkan dari kelas 21.1 ke 20.2 , dari periode ke-4 ke periode ke-5 pemegang polis tidak berpindah dari kelas 20 ke 19 melainkan dari kelas 20.2 ke 19.3. Begitu pula dari periode ke-5 ke periode ke-6 pemegang polis tidak berpindah dari kelas 19 ke 14 melainkan dari kelas 19.3 ke 14. Sehingga $\Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_2 = 22, X_3 = 21.1, X_4 = 20.2, X_5 = 19.3\right\} = \Pr\left\{X_6 = 14 \mid X_5 = 19.3\right\}$ yang memenuhi sifat proses Markov. Selain kelas 21, 20 dan 19, modifikasi juga dilakukan pada kelas 18, 17 dan 16 ketika selama 4 periode berturut-turut tidak ada klaim yang diajukan pemegang polis. Hasil modifikasi pada sistem bonus-malus Belgia ditampilkan pada Tabel 3. □

Untuk pembahasan berikutnya, diasumsikan bahwa semua sistem bonus-malus merupakan proses Markov.

Barisan kelas-kelas pemegang polis pada sistem bonus-malus merupakan suatu proses Markov dikarenakan pada sistem tersebut pengetahuan tentang kelas premi untuk periode saat ini dan banyaknya klaim pada periode tersebut cukup untuk menentukan kelas premi untuk periode berikutnya serta tidak diperlukan lagi informasi tambahan mengenai bagaimana pemegang polis bisa sampai di kelas saat ini. Oleh karena itu, kelas premi pemegang polis bisa disebut juga sebagai *state* dari proses Markov. Pemegang polis berada di kelas i pada periode n dinotasikan dengan $X_n = i$.

Probabilitas pemegang polis berpindah dari kelas i ke kelas j setelah satu periode dinotasikan dengan $p_{ij}(\lambda)$, λ adalah ekspektasi banyaknya klaim dari pemegang polis, $p_{ij}(\lambda) \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(\lambda) = 1$.

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\, t_{ij}^{(k)} \tag{3.1.3}$$

Contoh 3.1.4:

Pada sistem bonus-malus Brazil dalam Tabel 1, probabilitas perpindahan kelas pemegang polis adalah sebagai berikut

- Untuk *i* = 1

$j = 1$

$$\begin{aligned} p_{11}(\lambda) &= p_0(\lambda) \\ &= p_0(\lambda).1 \\ &= p_0(\lambda) t_{11}^{(0)} \\ &= p_0(\lambda) t_{11}^{(0)} + p_1(\lambda) t_{11}^{(1)} + p_2(\lambda) t_{11}^{(2)} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{11}^{(k)} \end{aligned}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned} p_{12}(\lambda) &= p_1(\lambda) \\ &= p_1(\lambda).1 \\ &= p_1(\lambda) t_{12}^{(1)} \\ &= p_0(\lambda) t_{12}^{(0)} + p_1(\lambda) t_{12}^{(1)} + p_2(\lambda) t_{12}^{(2)} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{12}^{(k)} \end{aligned}$$

$\vdots$

$j = 7$

$$
\begin{aligned}
p_{17}(\lambda) &= p_6(\lambda) + p_7(\lambda) + p_8(\lambda) + \dots \\
&= p_6(\lambda).1 + p_7(\lambda).1 + p_8(\lambda).1 + \dots \\
&= p_6(\lambda)t_{17}{}^{(6)} + p_7(\lambda)t_{17}{}^{(7)} + p_8(\lambda)t_{17}{}^{(8)} + \dots \\
&= p_0(\lambda)t_{17}{}^{(0)} + p_1(\lambda)t_{17}{}^{(1)} + \dots + p_6(\lambda)t_{17}{}^{(6)} + p_7(\lambda)t_{17}{}^{(7)} + p_8(\lambda)t_{17}{}^{(8)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{17}{}^{(k)}
\end{aligned}
$$

- Untuk $i = 2$

$j = 1$,

$$
\begin{aligned}
p_{21}(\lambda) &= p_0(\lambda) \\
&= p_0(\lambda).1 \\
&= p_0(\lambda)t_{21}{}^{(0)} \\
&= p_0(\lambda)t_{21}{}^{(0)} + p_1(\lambda)t_{21}{}^{(1)} + p_2(\lambda)t_{21}{}^{(2)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{21}{}^{(k)}
\end{aligned}
$$

$j = 2$

$$
\begin{aligned}
p_{22}(\lambda) &= 0 \\
&= p_0(\lambda)t_{22}{}^{(0)} + p_1(\lambda)t_{22}{}^{(1)} + p_2(\lambda)t_{22}{}^{(2)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{22}{}^{(k)}
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$j=7$

$$\begin{aligned}
p_{27}(\lambda) &= p_5(\lambda)+p_6(\lambda)+p_7(\lambda)+\ldots \\
&= p_5(\lambda).1+p_6(\lambda).1+p_7(\lambda).1+\ldots \\
&= p_5(\lambda)t_{27}{}^{(5)}+p_6(\lambda)t_{27}{}^{(6)}+p_7(\lambda)t_{27}{}^{(7)}+\ldots \\
&= p_0(\lambda)t_{27}{}^{(0)}+p_1(\lambda)t_{27}{}^{(1)}+\ldots+p_5(\lambda)t_{27}{}^{(5)}+p_6(\lambda)t_{27}{}^{(6)}+p_7(\lambda)t_{27}{}^{(7)}+\ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{27}{}^{(k)}
\end{aligned}$$

$\vdots$

- Untuk i = 7

$j=1$

$$\begin{aligned}
p_{71}(\lambda) &= 0 \\
&= p_0(\lambda)t_{71}{}^{(0)}+p_1(\lambda)t_{71}{}^{(1)}+p_2(\lambda)t_{71}{}^{(2)}+\ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{71}{}^{(k)}
\end{aligned}$$

$j=2$

$$\begin{aligned}
p_{72}(\lambda) &= 0 \\
&= p_0(\lambda)t_{72}{}^{(0)}+p_1(\lambda)t_{72}{}^{(1)}+p_2(\lambda)t_{72}{}^{(2)}+\ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)t_{72}{}^{(k)}
\end{aligned}$$

$\vdots$

$j=7$

$$\begin{aligned}
p_{77}(\lambda) &= p_1(\lambda)+p_2(\lambda)+p_3(\lambda)+\ldots \\
&= p_1(\lambda).1+p_2(\lambda).1+p_3(\lambda).1+\ldots \\
&= p_1(\lambda)t_{77}{}^{(1)}+p_2(\lambda)t_{77}{}^{(2)}+p_3(\lambda)t_{77}{}^{(3)}+\ldots \\
&= p_0(\lambda)t_{77}{}^{(0)}+p_1(\lambda)t_{77}{}^{(1)}+p_2(\lambda)t_{77}{}^{(2)}+p_3(\lambda)t_{77}{}^{(3)}+\ldots
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{77}^{(k)} \qquad \square$$

Ternyata, persamaan (3.1.3) memang benar berlaku. Persamaan tersebut juga akan berlaku pada sistem bonus-malus yang diterapkan di negara-negara lain.

Matriks probabilitas transisi dari sistem bonus-malus dinotasikan dengan $M(\lambda)$. Elemen-elemen pada matriks tersebut merupakan nilai probabilitas perpindahan pemegang polis dari kelas *i* ke kelas *j* setelah satu periode, $p_{ij}(\lambda)$.

$$M(\lambda) = \left(p_{ij}(\lambda)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) & \cdots & p_{1s}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & & p_{2s}(\lambda) \\ \vdots & & & \\ p_{s1}(\lambda) & p_{s2}(\lambda) & & p_{ss}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{11}^{(k)} & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{12}^{(k)} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{1s}^{(k)} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{21}^{(k)} & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{22}^{(k)} & & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{2s}^{(k)} \\ \vdots & & & \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{s1}^{(k)} & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{s2}^{(k)} & & \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\ t_{ss}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_0(\lambda)t_{11}^0 + p_1(\lambda)t_{11}^1 + p_2(\lambda)t_{11}^2 + \dots & p_0(\lambda)t_{12}^0 + p_1(\lambda)t_{12}^1 + p_2(\lambda)t_{12}^2 + \dots & \dots & p_0(\lambda)t_{1s}^0 + p_1(\lambda)t_{1s}^1 + p_2(\lambda)t_{1s}^2 + \dots \\ p_0(\lambda)t_{21}^0 + p_1(\lambda)t_{21}^1 + p_2(\lambda)t_{21}^2 + \dots & p_0(\lambda)t_{22}^0 + p_1(\lambda)t_{22}^1 + p_2(\lambda)t_{22}^2 + \dots & & p_0(\lambda)t_{2s}^0 + p_1(\lambda)t_{2s}^1 + p_2(\lambda)t_{2s}^2 + \dots \\ \vdots & & & \\ p_0(\lambda)t_{s1}^0 + p_1(\lambda)t_{s1}^1 + p_2(\lambda)t_{s1}^2 + \dots & p_0(\lambda)t_{s2}^0 + p_1(\lambda)t_{s2}^1 + p_2(\lambda)t_{s2}^2 + \dots & & p_0(\lambda)t_{ss}^0 + p_1(\lambda)t_{ss}^1 + p_2(\lambda)t_{ss}^2 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_0(\lambda)t_{11}{}^{(0)} & p_0(\lambda)t_{12}{}^{(0)} & \dots & p_0(\lambda)t_{1s}{}^{(0)} \\ p_0(\lambda)t_{21}{}^{(0)} & p_0(\lambda)t_{22}{}^{(0)} & & p_0(\lambda)t_{2s}{}^{(0)} \\ \vdots & & & \\ p_0(\lambda)t_{s1}{}^{(0)} & p_0(\lambda)t_{s2}{}^{(0)} & & p_0(\lambda)t_{ss}{}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(\lambda)t_{11}{}^{(1)} & p_1(\lambda)t_{12}{}^{(1)} & \dots & p_1(\lambda)t_{1s}{}^{(1)} \\ p_1(\lambda)t_{21}{}^{(1)} & p_1(\lambda)t_{22}{}^{(1)} & & p_1(\lambda)t_{2s}{}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ p_1(\lambda)t_{s1}{}^{(1)} & p_1(\lambda)t_{s2}{}^{(1)} & & p_1(\lambda)t_{ss}{}^{(1)} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} p_2(\lambda)t_{11}{}^{(2)} & p_2(\lambda)t_{12}{}^{(2)} & \dots & p_2(\lambda)t_{1s}{}^{(2)} \\ p_2(\lambda)t_{21}{}^{(2)} & p_2(\lambda)t_{22}{}^{(2)} & & p_2(\lambda)t_{2s}{}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ p_2(\lambda)t_{s1}{}^{(2)} & p_2(\lambda)t_{s2}{}^{(2)} & & p_2(\lambda)t_{ss}{}^{(2)} \end{pmatrix} + \dots$$

$$= p_0(\lambda) \begin{pmatrix} t_{11}{}^{(0)} & t_{12}{}^{(0)} & \dots & t_{1s}{}^{(0)} \\ t_{21}{}^{(0)} & t_{22}{}^{(0)} & & t_{2s}{}^{(0)} \\ \vdots & & & \\ t_{s1}{}^{(0)} & t_{s2}{}^{(0)} & & t_{ss}{}^{(0)} \end{pmatrix} + p_1(\lambda) \begin{pmatrix} t_{11}{}^{(1)} & t_{12}{}^{(1)} & \dots & t_{1s}{}^{(1)} \\ t_{21}{}^{(1)} & t_{22}{}^{(1)} & & t_{2s}{}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ t_{s1}{}^{(1)} & t_{s2}{}^{(1)} & & t_{ss}{}^{(1)} \end{pmatrix} +$$

$$p_2(\lambda) \begin{pmatrix} t_{11}{}^{(2)} & t_{12}{}^{(2)} & \dots & t_{1s}{}^{(2)} \\ t_{21}{}^{(2)} & t_{22}{}^{(2)} & & t_{2s}{}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ t_{s1}{}^{(2)} & t_{s2}{}^{(2)} & & t_{ss}{}^{(2)} \end{pmatrix} + \dots$$

$$= p_0(\lambda)T_0 + p_1(\lambda)T_1 + p_2(\lambda)T_2 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k \tag{3.1.4}$$

$M(\lambda)$ bisa disebut juga sebagai matriks probabilitas transisi rantai Markov.

3.2 Distribusi Stasioner pada Sistem Bonus-Malus

Pada sistem bonus-malus, pemegang polis dapat berpindah dari satu kelas ke kelas yang lain. Kestabilan dari sistem dapat dicapai dalam waktu cepat ataupun lambat. Jika kestabilan telah dicapai, probabilitas pemegang polis berada di suatu kelas akan bernilai sama untuk setiap periodenya. Hal ini menandakan bahwa distribusi probabilitas dari kelas-kelas sistem bonus-malus sudah stasioner.

Distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus dapat ditentukan melalui dua cara. Pertama, melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov. Kedua, melalui formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner.

3.2.1 Vektor Eigen dari Matriks Probabilitas Transisi Rantai Markov

Pada subbab 2.2 diketahui bahwa distribusi probabilitas akan stasioner jika

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \, p_{ij} \quad \text{untuk } j \geq 0$$

artinya

$$\Pr\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} \Pr\{X_n = i\} \; \Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \text{ untuk suatu n}$$

Namun pada sistem bonus-malus, probabilitas pemegang polis berada di suatu kelas bergantung pada suatu nilai λ, sehingga distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus di atas dapat ditulis sebagai

$$a_j(\lambda) = \sum_{i \in S} a_i(\lambda) \, p_{ij}(\lambda) \qquad (3.2.1)$$

dengan $a_j(\lambda) = \Pr\{X_n = j\}$ yaitu probabilitas pemegang polis berada di kelas j pada waktu n, $a_j \geq 0$, $\sum_{j \in S} a_j = 1$ dan $p_{ij}(\lambda) = \Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$.

TEOREMA 3.1

Salah satu nilai eigen dari matriks probabilitas transisi $M(\lambda)$ adalah 1 sedemikian sehingga $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \; M(\lambda)$ dengan $\boldsymbol{a} = \left[a_1(\lambda) \quad a_2(\lambda) \quad \ldots \quad a_s(\lambda) \right]$ adalah distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus.

Bukti :

Matriks probabilitas transisi dari sistem bonus-malus, $M(\lambda)$ ditulis sebagai

$$M(\lambda)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & s \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & & p_{2i} & & p_{2s} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & & p_{3i} & & p_{3s} \\ \vdots & & & & & & \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & & p_{ii} & & p_{is} \\ \vdots & & & & & & \\ p_{s1} & p_{s2} & p_{s3} & \dots & p_{si} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $\sum_{j=1}^{s} p_{ij}=1$, untuk $i=1,2,\dots,s$. Walaupun demikian, ada beberapa sistem bonus-malus dengan kelas premi terendah 0.

Jika dilakukan pengurangan terhadap matriks $M(\lambda)$ oleh matriks identitas berukuran $s\times s$, maka akan dihasilkan

$$M(\lambda)-I_{s\times s}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & s \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22}-1 & p_{23} & & p_{2i} & & p_{2s} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-1 & & p_{3i} & & p_{3s} \\ \vdots & & & & & & \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & & p_{ii}-1 & & p_{is} \\ \vdots & & & & & & \\ p_{s1} & p_{s2} & p_{s3} & \dots & p_{si} & \dots & p_{ss}-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vektor-vektor kolom dari matriks $M\ (\lambda) - I_{s \times s}$ adalah

$$\begin{bmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ p_{31} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{s1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ p_{32} \\ \vdots \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{s2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33}-1 \\ \vdots \\ p_{i3} \\ \vdots \\ p_{s3} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ii}-1 \\ \vdots \\ p_{si} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} p_{1s} \\ p_{2s} \\ p_{3s} \\ \\ p_{is} \\ \\ p_{ss}-1 \end{bmatrix}$$

Ternyata, vektor-vektor kolom tersebut tidak bebas linier karena

$$k_1 \begin{bmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ p_{31} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{s1} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ p_{32} \\ \vdots \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{s2} \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33}-1 \\ \vdots \\ p_{i3} \\ \vdots \\ p_{s3} \end{bmatrix} + \dots + k_i \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ii}-1 \\ \vdots \\ p_{si} \end{bmatrix} + \dots + k_s \begin{bmatrix} p_{1s} \\ p_{2s} \\ p_{3s} \\ \\ p_{is} \\ \\ p_{ss}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tidak hanya berlaku untuk $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_i = \dots = k_s = 0$, melainkan juga berlaku untuk $\boxed{k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_i = \dots = k_s = 1}$, yaitu

$$1 \begin{bmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ p_{31} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{s1} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ p_{32} \\ \vdots \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{s2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33}-1 \\ \vdots \\ p_{i3} \\ \vdots \\ p_{s3} \end{bmatrix} + \dots + 1 \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ii}-1 \\ \vdots \\ p_{si} \end{bmatrix} + \dots + 1 \begin{bmatrix} p_{1s} \\ p_{2s} \\ p_{3s} \\ \vdots \\ p_{is} \\ \vdots \\ p_{ss}-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} - 1 + p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{1i} + \ldots + p_{1s} \\ p_{21} + p_{22} - 1 + p_{23} + \ldots + p_{2i} + \ldots + p_{2s} \\ p_{31} + p_{32} + p_{33} - 1 + \ldots + p_{3i} + \ldots + p_{3s} \\ \vdots \\ p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \ldots + p_{ii} - 1 + \ldots + p_{is} \\ \vdots \\ p_{s1} + p_{s2} + p_{s3} + \ldots + p_{si} + \ldots + p_{ss} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s} p_{1j} - 1 \\ \sum_{j=1}^{s} p_{2j} - 1 \\ \sum_{j=1}^{s} p_{3j} - 1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} p_{ij} - 1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} p_{sj} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penjelasan pada subbab 2.4, pernyataan bahwa vektor-vektor kolom $M(\lambda) - I_{s\times s}$ tidak bebas linier ekivalen dengan $\det\left(M(\lambda) - I_{s\times s}\right) = 0$ yang juga ekivalen dengan pernyataan $\boldsymbol{a}\left(M(\lambda) - I_{s\times s}\right) = 0$ atau

$\left(M(\lambda)-I_{s\times s}\right)\boldsymbol{a}=0$ memiliki penyelesaian tak-nol. Artinya, 1 adalah nilai eigen dari matriks $M(\lambda)$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\left(M(\lambda)-I_{s\times s}\right)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\ M(\lambda)-\boldsymbol{a}\ I_{s\times s} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}\ M(\lambda)-\boldsymbol{a} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}\ M(\lambda) &= \boldsymbol{a}\\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}\ M(\lambda)\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

atau

$$\begin{aligned}\left(M(\lambda)-I_{s\times s}\right)\boldsymbol{a}=0 \Leftrightarrow \quad M(\lambda)\boldsymbol{a}-I_{s\times s}\boldsymbol{a} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad M(\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad M(\lambda)\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}\\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} &= M(\lambda)\boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Kemudian, tinjau persamaan (3.2.1) dimana distribusi probabilitas dari kelas-kelas sistem bonus-malus sudah stasioner.

Jika persamaan tersebut dijalankan untuk suatu nilai *j*, maka akan diperoleh

- Untuk $j=1$,

$$\begin{aligned}a_1(\lambda) &= \sum_{i\in S} a_i(\lambda)\,p_{i1}(\lambda)\\ &= a_1(\lambda)\,p_{11}(\lambda)+a_2(\lambda)\,p_{21}(\lambda)+\ldots+a_s(\lambda)\,p_{s1}(\lambda)\\ &= \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(\lambda)\\ p_{21}(\lambda)\\ \vdots\\ p_{s1}(\lambda)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Untuk $j = 2$,

$$a_2(\lambda) = \sum_{i \in S} a_i(\lambda)\, p_{i2}(\lambda)$$
$$= a_1(\lambda)\, p_{12}(\lambda) + a_2(\lambda)\, p_{22}(\lambda) + \ldots + a_s(\lambda)\, p_{s2}(\lambda)$$
$$= \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12}(\lambda) \\ p_{22}(\lambda) \\ \vdots \\ p_{s2}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$\vdots$

- Untuk $j = s$,

$$a_s(\lambda) = \sum_{i \in S} a_i(\lambda)\, p_{is}(\lambda)$$
$$= a_1(\lambda)\, p_{1s}(\lambda) + a_2(\lambda)\, p_{2s}(\lambda) + \ldots + a_s(\lambda)\, p_{ss}(\lambda)$$
$$= \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1s}(\lambda) \\ p_{2s}(\lambda) \\ \vdots \\ p_{ss}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penurunan rumus di atas, dapat disimpulkan bahwa

$a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_s(\lambda)$ dapat ditulis ke dalam bentuk vektor baris

$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix}$ dengan

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2s} \\ \vdots & & & \\ p_{s1} & p_{s2} & & p_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \ldots & a_s(\lambda) \end{bmatrix} M(\lambda) \qquad (3.2.4\ )$$

Selanjutnya, karena sudah terbukti bahwa salah satu nilai eigen dari matriks $M(\lambda)$ adalah 1 dan terjadi persamaan (3.2.4), maka dapat disimpulkan bahwa $\left[a_1(\lambda) \quad a_2(\lambda) \quad \dots \quad a_s(\lambda)\right]$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut.

Jadi, terbukti bahwa 1 adalah nilai eigen dari matriks probabilitas transisi $M(\lambda)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan (3.2.2) dengan $\boldsymbol{a} = \left[a_1(\lambda) \quad a_2(\lambda) \quad \dots \quad a_s(\lambda)\right]$ adalah distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus.

■

3.2.2 Formula Rekursif

Kestabilan dari sistem dapat diperoleh dalam jangka waktu yang lama. Maka, pencarian distribusi probabilitas stasioner dari sistem bonus-malus dapat ditentukan melalui formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner. .

Misalkan :

X_t adalah keberadaan kelas pemegang polis selama periode t, t = 0, 1, 2,... dengan $X_0 = x_0$ adalah kelas mula-mula.

Y_{t+1} adalah besarnya perpindahan kelas pemegang polis dari periode t ke periode $t+1$.

Diasumsikan X_t dan Y_{t+1} saling bebas, $Y_1, Y_2, \ldots$ juga saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi peluang

$$P[Y_t = y] = q(y), \qquad y = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.5}$$

Pada waktu $t+1$, kelas yang baru untuk pemegang polis didefinisikan sebagai :

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + Y_{t+1} & \text{jika } 1 \le X_t + Y_{t+1} \le s \\ 1 & \text{jika } X_t + Y_{t+1} = 0 \\ s & \text{jika } X_t + Y_{t+1} > s \end{cases}$$

untuk sistem dengan kelas terendah 1 dan kelas tertinggi s dan

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + Y_{t+1} & \text{jika } 0 \le X_t + Y_{t+1} \le s \\ 0 & \text{jika } X_t + Y_{t+1} = -1 \\ s & \text{jika } X_t + Y_{t+1} > s \end{cases}$$

untuk sistem dengan kelas terendah 0 dan kelas tertinggi s.

Metode ini dapat diaplikasikan hanya untuk sistem bonus-malus yang memiliki aturan transisi dimana kelas-kelasnya independen. Jika pemegang polis tidak mengajukan klaim, pemegang polis akan mengalami penurunan kelas sebanyak satu kelas dengan probabilitas $q(-1)$. Jika pemegang polis mengajukan satu atau lebih klaim, pemegang polis akan mengalami kenaikan kelas sebanyak y kelas dengan probabilitas $q(y)$.

Untuk sistem bonus-malus dengan kelas terendah 1 dan kelas tertinggi s, fungsi distribusi untuk X_{t+1} memenuhi hubungan

$$F(x,\ t+1) = P[X_{t+1} \le x], \quad x = 1, 2, \ldots, s-1$$
$$t = 0, 1, 2, \ldots$$

dengan menggunakan *Law of Total Probability* akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
F(x,t+1) &= \Pr\{X_{t+1} \le x\} \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_{t+1} \le x,\ Y_{t+1} = y\} \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_{t+1} \le x \mid Y_{t+1} = y\} \Pr\{Y_{t+1} = y\} \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_t + Y_{t+1} \le x \mid Y_{t+1} = y\} q(y) \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_t + y \le x \mid Y_{t+1} = y\} q(y) \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_t \le x - y \mid Y_{t+1} = y\} q(y) \\
&= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \Pr\{X_t \le x - y\} q(y)
\end{aligned}
$$

Didefinisikan $y = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Tetapi, untuk $y = x, x+1, x+2, \ldots$ nilai dari $\Pr\{X_t \le x - y\}$ adalah 0 karena kelas terendah dari sistem adalah 1. Oleh karena itu, nilai y akan dibatasi hanya untuk $-1,\ 0,\ 1, \ldots,\ x-1$. Sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
F(x,t+1) &= \sum_{y=-1}^{x-1} \Pr\{X_t \le x - y\}\, q(y) \\
&= \sum_{y=-1}^{x-1} F(x-y,t)\, q(y) \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

📖 Kestabilan dari sistem dapat dicapai dalam waktu cepat ataupun lambat. Untuk sistem yang sederhana, kestabilan dapat diperoleh dalam waktu cepat. Sedangkan untuk beberapa sistem bonus-malus yang lebih rumit, kestabilan baru akan diperoleh setelah jangka waktu yang lama sampai lebih dari 30 tahun. (Lemaire 1995)

Distribusi probabilitas dari kelas-kelas sistem bonus-malus akan stasioner dalam jangka waktu yang lama jika sistem bonus-malus tersebut *irreducible*, *positive recurrent* dan aperiodik. Akan ditinjau apakah sistem bonus-malus memiliki ketiga sifat tersebut. Berdasarkan definisi, sistem bonus-malus memiliki kelas-kelas yang berhingga. Oleh karena itu, sistem bonus-malus merupakan rantai Markov dengan *state* berhingga. Pada sistem bonus-malus, pemegang polis dapat berpindah dari satu kelas ke kelas yang lain. Artinya, kelas yang satu terhubung (*accessible*) dari kelas yang lain. Akibatnya, kelas-kelas dari sistem bonus-malus saling *communicate* sehingga sistem bonus-malus merupakan rantai Markov yang *irreducible*. Selain itu, kelas-kelas pada sistem bonus-malus memiliki periode 1 karena pemegang polis dapat kembali ke suatu kelas dengan sejumlah langkah yang berbeda dan 1 merupakan faktor persekutuan terbesar dari langkah-langkah itu sehingga sistem bonus-malus disebut aperiodik. Pada subbab 2.3 dinyatakan bahwa untuk rantai Markov dengan jumlah *state* berhingga dan *irreducible*, semua *state*-nya *positive recurrent*. Oleh karena itu, pada sistem bonus-malus semua kelasnya adalah *positive recurrent*. Karena sistem bonus-malus sudah merupakan rantai Markov dengan jumlah *state* berhingga, *irreducible*, *positive recurrent* dan aperiodik maka $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n}$

ada dan independent terhadap i dimana $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j = \lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = j\}$ dan $\{\pi_j\}$ merupakan distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus.

Misalkan fungsi distribusi dari kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner dinyatakan dengan $F(x)$ (sudah tidak memakai indeks t).

Maka, $F(x) = \sum_{i=1}^{x} \pi_i$

Dalam jangka waktu yang lama, fungsi distribusi pada persamaan (3.2.6) akan menjadi stasioner dimana

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{t\to\infty} F(x,\ t+1) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\sum_{y=-1}^{x-1} F(x-y,\ t)\ q(y)\right] \\ &= \sum_{y=-1}^{x-1} \lim_{t\to\infty} F(x-y,\ t)\ q(y) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Sebelum melanjutkannya, $\lim_{t\to\infty} F(x-y,t)$ akan diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} F(x-y,t) &= \lim_{t\to\infty} \Pr\{X_t \le x-y\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{x} \Pr\{X_t = i-y\} \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\Pr\{X_t = 1-y\} + \Pr\{X_t = 2-y\} + \ldots + \Pr\{X_t = x-y\}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \Pr\{X_t = 1-y\} + \lim_{t\to\infty} \Pr\{X_t = 2-y\} + \ldots + \lim_{t\to\infty} \Pr\{X_t = x-y\} \\ &= \pi_{1-y} + \pi_{2-y} + \ldots + \pi_{x-y} \\ &= \sum_{i=1}^{x} \pi_{i-y} \\ &= F(x-y) \end{aligned}$$

Persamaan (3.2.7) menjadi

$$F(x)=\sum_{y=-1}^{x-1} F(x-y)\, q(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x)=F(x+1)\, q(-1) + \sum_{y=0}^{x-1} F(x-y)\, q(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x+1)\, q(-1)=F(x)-\sum_{y=0}^{x-1} F(x-y)\, q(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x+1)=\frac{1}{q(-1)}\left[F(x)-\sum_{y=0}^{x-1} F(x-y)\, q(y)\right] \qquad (3.2.8)$$

Persamaan (3.2.8) merupakan rumus rekursif, tetapi karena nilai awal $F(1)$ tidak diketahui, maka nilai $F(x)$ dengan rumusan di atas tidak dapat langsung dicari.

Untuk mencari nilai $F(x)$, dapat dibangkitkan suatu fungsi pembantu $A(x)$, $x=1,2,\ldots,s-1$ yang sebanding dengan nilai $F(x)$. Kemudian pilih sembarang $A(1)$ > 0, dimana

$$A(x+1)=\frac{1}{q(-1)}\left[A(x)-\sum_{y=0}^{x-1} A(x-y)\, q(y)\right] \qquad (3.2.9)$$

Karena $F(x)$ sebanding dengan $A(x)$ yang artinya terdapat suatu konstanta c sedemikian sehingga $F(x)$ = c $A(x)$ dan diketahui bahwa $F(s)=1$, maka

$$F(s) = c.A(s)$$
$$1 = c.A(s)$$
$$c = \frac{1}{A(s)}$$

Sehingga diperoleh

$$F(x) = \frac{A(x)}{A(s)}, \text{ untuk } x = 1, 2, \ldots, s \tag{3.2.10}$$

Sedangkan untuk sistem bonus-malus dengan kelas terendah 0 dan kelas tertinggi s, penurunannya sama hanya saja berbeda pada nilai x yang berlaku untuk x = 0, 1, 2, ..., s.

$$F(x) = \frac{A(x)}{A(s)}, \text{ untuk } x = 0, 2, \ldots, s \tag{3.2.11}$$

3.3 Ekspektasi Premi Stasioner

Misalkan b_i adalah besar persentasi premi pada kelas ke-i, kemudian dapat dibentuk vetor **b** yang elemen-elemennya adalah b_i. Rata-rata besarnya premi yang harus dibayar oleh pemegang polis pada tiap periodenya disebut ekspektasi premi stasioner. Ekspektasi premi stasioner dinyatakan dengan $P(\lambda)$.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \text{probabilitas stasioner pemegang polis berada di kelas } i \times \text{besarnya premi di kelas } i$$
$$= \sum_{i=1}^{s} a_i(\lambda)\ b_i$$
$$= \boldsymbol{a}\ \mathbf{b} \tag{3.3.1}$$

3.4 Elastisitas Sistem Bonus-Malus

Sistem bonus-malus yang sudah diterapkan di beberapa negara akan ditinjau nilai elastisitasnya untuk dipelajari manakah dari sistem bonus-malus tersebut yang lebih ideal dari sudut pandang pemegang polis. Nilai elastisitas dari sistem bonus-malus merupakan rasio dari tingkat kenaikan ekspektasi premi stasioner terhadap tingkat kenaikan ekspektasi banyaknya klaim. Elastisitas dari sistem bonus-malus dinyatakan sebagai :

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} \tag{3.4.1}$$

Untuk suatu tingkat kenaikan ekspektasi banyaknya klaim $d\lambda/\lambda$ akan menghasilkan tingkat kenaikan pada ekspektasi premi stasioner $dP(\lambda)/P(\lambda)$. Jika besarnya tingkat kenaikan itu sama, yakni $\frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)} = \frac{d\lambda}{\lambda}$, maka sistem bonus-malus yang seperti ini dikatakan elastis sempurna, yaitu jika $\frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = 1$. Namun, umumnya tingkat perubahan ekspektasi premi stasioner lebih kecil dibandingkan dengan tingkat perubahan ekspektasi banyaknya klaim.

Elastisitas dari sistem bonus-malus bernilai non-negatif, $\eta(\lambda) \geq 0$. Umumnya nilai elastisitas berada diantara 0 dan 1. Walaupun secara teori nilai elastisitas dapat bernilai lebih besar dari 1, namun pada kenyataannya keadaan ini jarang terjadi.

Persamaan (3.4.1) dapat ditulis sebagai

$$\eta(\lambda) = \frac{\lambda}{P(\lambda)} \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} \tag{3.4.2}$$

dengan $\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$ adalah besarnya perubahan ekspektasi premi stasioner terhadap perubahan ekspektasi banyaknya klaim. Untuk menghitung nilai elastisitas, dibutuhkan informasi mengenai $\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$. Oleh karena itu, $\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$ akan diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d\left[\sum_{i=1}^{s} a_i(\lambda)\ b_i\right]}{d\lambda} \\
&= \frac{d\left[a_1(\lambda)\ b_1 + a_2(\lambda)\ b_2 + \ldots + a_s(\lambda)\ b_s\right]}{d\lambda} \\
&= \frac{da_1(\lambda) b_1}{d\lambda} + \frac{da_2(\lambda) b_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{da_s(\lambda) b_s}{d\lambda} \\
&= \frac{da_1(\lambda)}{d\lambda} b_1 + \frac{da_1(\lambda)}{d\lambda} b_2 + \ldots + \frac{da_1(\lambda)}{d\lambda} b_s \\
&= \sum_{i=1}^{s} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

maka persamaan (3.4.2) akan menjadi

$$\eta(\lambda) = \frac{\lambda}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^{s} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda}\ b_i \tag{3.4.4}$$

BAB IV

APLIKASI PERHITUNGAN ELASTISITAS SISTEM BONUS-MALUS

Pada bab ini akan dilakukan perhitungan nilai elastisitas dari suatu sistem bonus-malus yang sudah diterapkan di beberapa negara. Sistem bonus-malus yang akan dipelajari adalah sistem bonus-malus yang ada di negara Brazil, Spanyol dan Taiwan. Tabel dari sistem tersebut dapat dilihat pada halaman tabel. Penilaian elastisitas dari suatu sistem bonus-malus ditinjau dari sudut pandang pemegang polis dan perusahaan asuransi.

4.1 Sistem Bonus-Malus Brazil

Sistem bonus-malus Brazil ditampilkan dalam Tabel 1. Pada sistem ini terdapat 7 kelas premi yaitu kelas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dengan besarnya persentasi premi dari masing-masing kelas adalah 65, 70, 75, 80, 85, 90 dan 100. Bagi setiap pemegang polis yang baru mengikuti asuransi, akan memasuki sistem pertama kali di kelas 7 dengan membayar premi dasar (100%) untuk periode pertamanya. Pada sistem ini, pemegang polis yang tidak mengajukan klaim dalam satu periode akan mengalami penurunan kelas premi sebesar satu kelas untuk periode pembayaran premi berikutnya, sedangkan untuk pemegang polis yang mengajukan satu atau lebih klaim akan mengalami kenaikan kelas premi dengan besarnya kenaikan adalah satu kelas untuk tiap-tiap klaim.

Misalkan pemegang polis berada di kelas i pada waktu t dinyatakan dengan $X_t = i$ dan keberadaan pemegang polis untuk periode berikutnya dinyatakan dengan $X_{t+1} = j$, dimana

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t - 1, && \text{jika pemegang polis tidak mengajukan klaim} \\ &= X_t + k, && \text{jika pemegang polis mengajukan sejumlah } k \text{ klaim} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} j &= i - 1, && \text{jika pemegang polis tidak mengajukan klaim} \\ &= i + k, && \text{jika pemegang polis mengajukan sejumlah } k \text{ klaim} \end{aligned}$$

Pada sistem ini, pemegang polis tidak dapat berada di kelas yang lebih kecil dari 1 dan tidak dapat berada di kelas yang lebih besar dari 7. Artinya, apabila pada awal suatu periode pemegang polis berada di kelas 1 dan tidak mengajukan klaim sepanjang periode tersebut, maka pemegang polis akan tetap berada di kelas 1 untuk periode pembayaran premi berikutnya. Demikian pula, apabila pada awal suatu periode pemegang polis berada di kelas i dan mengajukan sejumlah k klaim sedemikian sehingga $i + k \geq 7$, maka pemegang polis akan tetap berada di kelas 7 untuk periode pembayaran premi berikutnya.

Berdasarkan aturan yang ada pada sistem bonus-malus ini, dapat dibentuk matriks probabilitas transisi rantai Markov dari sistem bonus-malus Brazil yang elemen-elemennya merupakan nilai probabilitas perpindahan pemegang polis dari kelas i ke kelas j yaitu $M(\lambda) = (P_{ij}(\lambda))$. Persamaan (3.1.4) menyatakan bahwa

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k$$

dimana $p_k(\lambda)$ adalah probabilitas pemegang polis mengajukan k klaim dan T_k adalah matriks transformasi dari aturan perpindahan kelas pemegang polis ketika sejumlah k klaim diajukan pemegang polis. Banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis diasumsikan berdistribusi Poisson dengan parameter λ dan parameter ini merupakan ekspektasi banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis. Maka,

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k$$

$$= p_0(\lambda) \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} + p_1(\lambda) \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} +$$

$$p_2(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} + p_3(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} +$$

$$p_4(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} + p_5(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} +$$

$$p_6(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} + p_7(\lambda)\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array} + \ldots$$

$$
= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
p_0(\lambda) & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & p_5(\lambda) & p_6(\lambda)+p_7(\lambda)+\dots \\
p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & p_5(\lambda)+p_6(\lambda)+\dots \\
0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda)+p_5(\lambda)+\dots \\
0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda)+p_4(\lambda)+\dots \\
0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda)+p_3(\lambda)+\dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda)+p_2(\lambda)+\dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & p_1(\lambda)+p_2(\lambda)+\dots
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
p_0(\lambda) & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & p_5(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{5} p_i(\lambda) \\
p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{4} p_i(\lambda) \\
0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{3} p_i(\lambda) \\
0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{2} p_i(\lambda) \\
0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{1} p_i(\lambda) \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & 1-p_0(\lambda) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 1-p_0(\lambda)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setelah mengetahui matriks probabilitas transisi rantai Markov, langkah berikutnya adalah mencari distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus. Distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus dapat diperoleh melalui dua cara. Pertama, berdasarkan elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov.

Kedua, berdasarkan formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner.

Pencarian distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov didasarkan pada persamaan (3.2.2)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\ M(\lambda)$$

dimana $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & a_7(\lambda) \end{bmatrix}$ dengan $a_i(\lambda)$ adalah probabilitas pemegang polis berada di kelas i. Maka akan diperoleh

$$\left[a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_7(\lambda)\right] = \left[a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_7(\lambda)\right] \begin{bmatrix} p_0(\lambda) & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & p_5(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{5} p_i(\lambda) \\ p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & p_4(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{4} p_i(\lambda) \\ 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & p_3(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{3} p_i(\lambda) \\ 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{2} p_i(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & p_1(\lambda) & 1-\sum_{i=0}^{1} p_i(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 & 1-p_0(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 1-p_0(\lambda) \end{bmatrix}$$

…(4.1)

dengan $p_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Persamaan (4.1) akan sulit diselesaikan bila dilakukan secara manual. Akibatnya, distribusi probabilitas stasioner kelas-kelas sistem bonus-malus dan nilai elastisitas dari sistem tersebut juga sulit diperoleh. Oleh karena itu, penyelesaian akan dilakukan dengan bantuan program Matlab 7 yang terdapat pada Lampiran 1. Bagi pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim λ=0.1, diperoleh

$a_1(0.1) = 0.8894840190$
$a_2(0.1) = 0.09354785090$
$a_3(0.1) = 0.01443796240$
$a_4(0.1) = 0.002154211149$
$a_5(0.1) = 0.0003209886796$
$a_6(0.1) = 0.00004783887926$
$a_7(0.1) = 0.000007130199938$

atau bisa ditulis

$$\boldsymbol{a} = [0.8894840190 \quad 0.09354785090 \quad 0.01443796240 \quad 0.002154211149 \quad 0.0003209886796 \quad 0.00004783887926 \quad 0.000007130199938]$$

Sedangkan nilai elastisitas sistem bonus-malus Brazil dari sudut pandang pemegang polis tersebut adalah 0.01275883792.

Selain itu, pencarian distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus dapat melalui formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner. Bentuk formula rekursif sudah diperoleh pada subbab 3.2.2 yaitu pada persamaan (3.2.10).

$$F(x) = \frac{A(x)}{A(s)}, \text{ untuk } x = 1, 2, \ldots, 7$$

dimana $A(x+1) = \frac{1}{q(-1)}\left[A(x) - \sum_{y=0}^{x-1} A(x-y)\, q(y)\right]$ untuk $x = 1, 2, \ldots, 6$. Dengan mengambil sembarang $A(1) > 0$ dan diketahui bahwa

$q(-1) = p_0(\lambda)$
$q(0) = 0$
$q(1) = p_1(\lambda)$
$q(2) = p_2(\lambda)$
$q(3) = p_3(\lambda)$
$q(4) = p_4(\lambda)$
$q(5) = p_5(\lambda)$

maka penyelesaian secara manual akan cukup menyita waktu sehingga formula rekursif ini dan nilai elastisitaspun akan sulit diperoleh. Oleh karena itu akan digunakan program Matlab 7 untuk membantu menyelesaikannya yang ditampilkan pada Lampiran 2. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Lampiran 2, diketahui bahwa

$$\boldsymbol{a} = [0.889484018906235 \quad 0.093547850881985 \quad 0.014437962352624 \quad 0.002154210925662 \quad 0.000320988440285 \quad 0.000047838693020 \quad 0.000007129800189]$$

dan nilai elastisitasnya adalah 0.012758837917346.

Berdasarkan hasil yang diperoleh baik melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov dan formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner, maka dapat disimpulkan bahwa untuk pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1 :

- probabilitas stasioner berada di kelas 1 sekitar 89 % .
- probabilitas stasioner berada di kelas 2 sekitar 9.4 %
- probabilitas stasioner berada di kelas 3 sekitar 1.4 % .
- probabilitas stasioner berada di kelas 4 sekitar 0.2 %

- probabilitas stasioner berada di kelas 5 sekitar 0.03 %
- probabilitas stasioner berada di kelas 6 sekitar 0.005% .
- probabilitas stasioner berada di kelas 7 sekitar 0.0007%.
- nilai elastisitas sistem bonus-malus Brazil sekitar 0.0128.

Artinya, persentasi perubahan rata-rata premi adalah 0.0128 kali persentasi perubahan rata-rata banyaknya klaim.

4.2 Sistem Bonus-Malus Spanyol

Sistem bonus-malus Spanyol ditampilkan dalam Tabel 4. Pada sistem ini terdapat 5 kelas premi yaitu kelas 1, 2, 3, 4 dan 5. Bagi setiap pemegang polis yang baru mengikuti asuransi, akan memasuki sistem pertama kali di kelas 5 dengan membayar premi dasar (100%) untuk periode pertamanya. Pada sistem ini, pemegang polis yang tidak mengajukan klaim dalam satu periode akan mengalami penurunan kelas premi sebesar satu kelas untuk periode pembayaran premi berikutnya, sedangkan untuk pemegang polis yang mengajukan satu atau lebih klaim akan mengalami kenaikan kelas premi yaitu akan pindah ke kelas 5.

Penilaian elastisitas dari sistem bonus-malus Spanyol dilakukan sama halnya seperti pada subbab 4.1. Dengan menggunakan bantuan program Matlab 7 pada Lampiran 3, akan diperoleh distribusi probabilitas dari kelas-

kelas sistem bonus-malus untuk pemegang pemegang polis yang memiliki ekspektasi banyaknya klaim 0.1 dengan perincian sebagai berikut :

$$a_1(0.1) = 0.6703200459$$
$$a_2(0.1) = 0.07049817466$$
$$a_3(0.1) = 0.07791253242$$
$$a_4(0.1) = 0.0861066650$$
$$a_5(0.1) = 0.0951625820$$

Artinya :

- probabilitas stasioner berada di kelas 1 sekitar 67.032% .
- probabilitas stasioner berada di kelas 2 sekitar 7.05%
- probabilitas stasioner berada di kelas 3 sekitar 7.791% .
- probabilitas stasioner berada di kelas 4 sekitar 8.611%
- probabilitas stasioner berada di kelas 5 sekitar 9.516%

Sedangkan nilai elastisitas sistem bonus-malus Spanyol dari sudut pandang pemegang polis tersebut adalah 0.08418386212 atau sekitar 0.0842. Artinya, persentasi perubahan rata-rata premi adalah 0.0842 kali persentasi perubahan rata-rata banyaknya klaim.

4.2 Sistem Bonus-Malus Taiwan

Sistem bonus-malus Taiwan ditampilkan dalam Tabel 5. Pada sistem ini terdapat 9 kelas premi yaitu kelas 1, 2, 3,..., 9. Bagi setiap pemegang polis yang baru mengikuti asuransi, akan memasuki sistem pertama kali di kelas 4 dengan membayar premi dasar (100%) untuk periode pertamanya. Pada sistem ini, pemegang polis yang tidak mengajukan klaim dalam satu periode akan mengalami penurunan kelas premi untuk periode pembayaran premi berikutnya yaitu akan pindah ke kelas 1 atau 2 atau 3 bergantung pada keberadaan kelas pemegang polis saat ini, sedangkan untuk pemegang polis yang mengajukan satu atau lebih klaim akan mengalami perpindahan kelas premi yaitu jika mengajukan satu klaim akan pindah ke kelas 5, jika mengajukan dua klaim akan pindah ke kelas 6, jika mengajukan tiga klaim akan pindah ke kelas 7, jika mengajukan empat klaim akan pindah ke kelas 8 dan jika mengajukan lima klaim atau lebih akan pindah ke kelas 9.

Penilaian elastisitas dari sistem bonus-malus Taiwan dilakukan sama halnya seperti pada subbab 4.1. Dengan menggunakan bantuan program Matlab 7 pada Lampiran 4, akan diperoleh distribusi probabilitas dari kelas-kelas sistem bonus-malus untuk pemegang pemegang polis yang memiliki ekspektasi banyaknya klaim 0.1 dengan perincian sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
a_1(0.1) = 0.7408182208 & a_6(0.1) = 0.004524187090 \\
a_2(0.1) = 0.07791253237 & a_7(0.1) = 0.0001508062364 \\
a_3(0.1) = 0.08610666491 & a_8(0.1) = 0.000003770155909 \\
a_4(0.1) = 0 & a_9(0.1) = 0.00000007653416496 \\
a_5(0.1) = 0.09048374181 &
\end{array}
$$

Artinya :

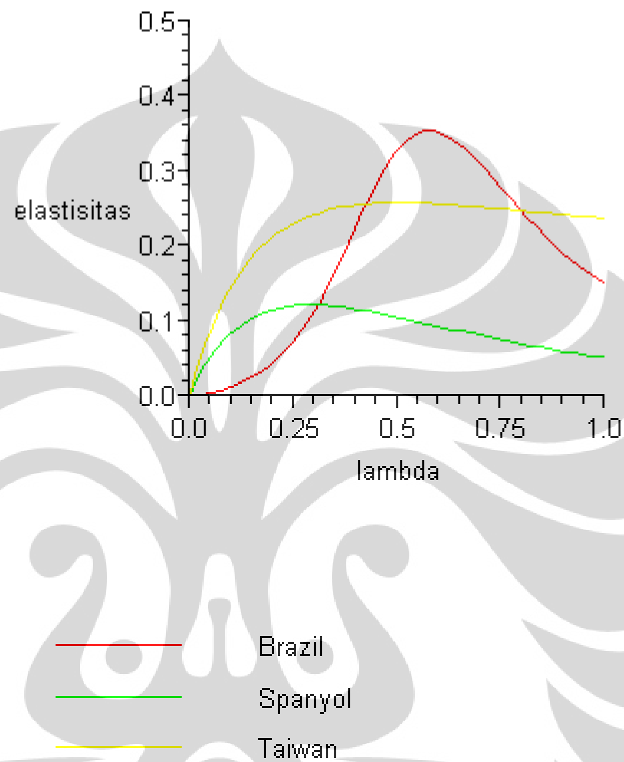
- probabilitas stasioner berada di kelas 1 sekitar 74.082%
- probabilitas stasioner berada di kelas 2 sekitar 7.791%

- probabilitas stasioner berada di kelas 3 sekitar 8.611%
- probabilitas stasioner berada di kelas 4 adalah 0
- probabilitas stasioner berada di kelas 5 sekitar 9.048%
- probabilitas stasioner berada di kelas 6 sekitar 0.452%
- probabilitas stasioner berada di kelas 7 sekitar 0.015%
- probabilitas stasioner berada di kelas 8 sekitar 0.000377%
- probabilitas stasioner berada di kelas 9 sekitar 0.00000765%

Sedangkan nilai elastisitas sistem bonus-malus Taiwan dari sudut pandang pemegang polis tersebut adalah 0.1445059076 atau sekitar 0.1445. Artinya, persentasi perubahan rata-rata premi adalah 0.1445 kali persentasi perubahan rata-rata banyaknya klaim.

Berdasarkan perhitungan nilai elastisitas dari ketiga sistem bonus-malus di atas, dapat disimpulkan bahwa dari sudut pandang pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1, sistem bonus-malus yang paling baik (ideal) bagi pemegang polis tersebut adalah sistem bonus-malus Brazil yang memiliki nilai elastisitas sekitar 0.0128 sedangkan sistem bonus-malus yang paling ideal bagi perusahaan asuransi adalah sistem bonus-malus Taiwan yang memiliki nilai elastisitas sekitar 0.1445. Hal ini dikarenakan perusahaan asuransi menginginkan kenaikan premi yang besar jika terjadi kenaikan jumlah klaim, sedangkan pemegang polis menginginkan sistem yang memberikan kenaikan premi yang kecil jika terjadi kenaikan jumlah klaim.

Jika nilai elastisitas dari ketiga sistem bonus-malus tersebut di-*plot* untuk nilai λ yang berada diantara 0 dan 1, maka akan diperoleh kurva elastisitas sebagai berikut



Gambar 1. Kurva nilai elastisitas sistem bonus-malus Brazil, Spanyol dan Taiwan

Kurva tersebut mengindikasikan bahwa nilai elastisitas dari suatu sistem bonus-malus bergantung pada nilai ekspektasi banyaknya klaim. Artinya, nilai elastisitas dari suatu sistem akan berbeda dari sudut pandang pemegang polis yang satu dengan yang lain.

BAB V

KESIMPULAN

Elastisitas dari suatu sistem bonus-malus dinyatakan dengan

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda}$$

dimana λ adalah ekspektasi banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis dan $P(\lambda)$ adalah ekspektasi premi stasioner yang dibayarkan pemegang polis tiap periodenya. Ekspektasi premi stasioner diperoleh berdasarkan distribusi probabilitas kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner dan persentasi premi dari kelas-kelas pada sistem tersebut. Distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus dapat ditentukan melalui dua cara :

1. Melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov.
2. Melalui formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner.

Nilai elastisitas suatu sistem bonus-malus dapat digunakan untuk mengukur seberapa baik sistem tersebut dari sudut pandang pemegang polis. Suatu sistem bonus-malus dikatakan elastisitas sempurna jika nilai elastisitasnya adalah 1. Namun, umumnya nilai elastisitas dari sistem bonus-malus berada diantara 0 dan 1. Jadi, jika nilai elastisitas suatu sistem bonus-malus semakin mendekati 1 maka sistem bonus-malus tersebut akan semakin tidak mendekati ideal dari sudut pandang pemegang polis, namun akan semakin mendekati ideal bagi perusahaan asuransi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1994. *Elementary Linear Algebra 7th ed*. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.

Ayuningtyas, Vidya. 2007. *Penentuan Premi pada Sistem Bonus-Malus yang Optimal*. Skripsi Sarjana Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok. Indonesia.

Ballangan, Cherry Galatia. 2002. *Sebaran Stasioner Pada Sistem Bonus-Malus Swiss serta Modifikasinya.* Jurusan Informatika, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Kristen Petra.113-120.

Hogg. R. V. dan Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics 5th ed*. Prentice Hall Inc. New Jersey.

Lemaire, J. 1995. *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer Academic Publishers. United States of America. xxvi + 283 hlm.

Loimaranta, K. 1972. *Some Asymptotic Properties of Bonus Systems*. ASTIN Bulletin, 6. 233-245.

Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Inc. United States of America. xv +510 hlm.

Ross, Sheldon M. 1997. *Introduction to Probability Models 6th*. Academic Press. United States of America. xiv + 669 hlm

Taylor, Howard M. dan Samuel Karlin. 1998. *An Introduction To Stochastic Modeling*. Academic Press. United States of America.

Tabel 2

Tabel sistem bonus-malus Belgia (1992)

Kelas C_i	Premi b_i	Banyaknya Klaim					
		0	1	2	3	4	≥5
		Kelas Untuk Periode Berikutnya					
22	200	21	22	22	22	22	22
21	160	20	22	22	22	22	22
20	140	19	22	22	22	22	22
19	130	18	22	22	22	22	22
18	123	17	22	22	22	22	22
17	117	16	21	22	22	22	22
16	111	15	20	22	22	22	22
15	105	14	19	22	22	22	22
14	100	13	18	22	22	22	22
13	95	12	17	22	22	22	22
12	90	11	16	21	22	22	22
11	85	10	15	20	22	22	22
10	81	9	14	19	22	22	22
9	77	8	13	18	22	22	22
8	73	7	12	17	22	22	22
7	69	6	11	16	21	22	22
6	66	5	10	15	20	22	22
5	63	4	9	14	19	22	22
4	60	3	8	13	18	22	22
3	57	2	7	12	17	22	22
2	54	1	6	11	16	21	22
1	54	0	5	10	15	20	22
0	54	0	4	9	14	19	22

Keterangan :
Kelas mula-mula : 11 untuk pekerja atau 14 untuk pebisnis.
Pemegang polis yang tidak mengajukan klaim selama 4 tahun berturut-turut tidak akan berada di kelas yang melebihi 14.
.

Tabel 3

Tabel sistem bonus-malus Belgia yang sudah dimodifikasi

Kelas C_i	Premi b_i	Banyaknya Klaim					
		0	1	2	3	4	≥5
		Kelas Untuk Periode Berikutnya					
22	200	21.1	22	22	22	22	22
21.0	160	20.1	22	22	22	22	22
21.1	160	20.2	22	22	22	22	22
20.0	140	19.1	22	22	22	22	22
20.1	140	19.2	22	22	22	22	22
20.2	140	19.3	22	22	22	22	22
19.0	130	18.1	22	22	22	22	22
19.1	130	18.2	22	22	22	22	22
19.2	130	18.3	22	22	22	22	22
19.3	130	14	22	22	22	22	22
18.0	123	17	22	22	22	22	22
18.1	123	17.2	22	22	22	22	22
18.2	123	17.3	22	22	22	22	22
18.3	123	14	22	22	22	22	22
17	117	16	21.0	22	22	22	22
17.2	117	16.3	21.0	22	22	22	22
17.3	117	14	21.0	22	22	22	22
16	111	15	20.0	22	22	22	22
16.3	111	14	20.0	22	22	22	22
15	105	14	19.0	22	22	22	22
14	100	13	18.0	22	22	22	22
13	95	12	17	22	22	22	22
12	90	11	16	21.0	22	22	22
11	85	10	15	20.0	22	22	22
10	81	9	14	19.0	22	22	22
9	77	8	13	18.0	22	22	22
8	73	7	12	17	22	22	22
7	69	6	11	16	21.0	22	22
6	66	5	10	15	20.	22	22
5	63	4	9	14	19.0	22	22
4	60	3	8	13	18.0	22	22
3	57	2	7	12	17	22	22
2	54	1	6	11	16	21.0	22
1	54	0	5	10	15	20.0	22
0	54	0	4	9	14	19.0	22

Tabel 4

Tabel sistem bonus-malus Spanyol

Kelas C_i	Premi b_i	Banyaknya Klaim	
		0	≥ 1
		Kelas Untuk Periode Berikutnya	
5	100	4	5
4	100	3	5
3	90	2	5
2	80	1	5
1	70	1	5

Kelas mula-mula : 5

Tabel 5

Tabel sistem bonus-malus Taiwan

Kelas C_i	Premi b_i	Banyaknya Klaim					
		0	1	2	3	4	≥5
		Kelas Untuk Periode Berikutnya					
9	150	3	5	6	7	8	9
8	140	3	5	6	7	8	9
7	130	3	5	6	7	8	9
6	120	3	5	6	7	8	9
5	110	3	5	6	7	8	9
4	100	3	5	6	7	8	9
3	80	2	5	6	7	8	9
2	65	1	5	6	7	8	9
1	50	1	5	6	7	8	9

Kelas mula-mula : 4

Lampiran 1

Program perhitungan elastisitas sistem bonus malus Brazil melalui vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov

Tujuan:

Untuk mengetahui nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Brazil dimana distribusi probabilitas stasioner diperoleh melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov.

Nilai elastisitas dari sistem bonus-malus dinyatakan dengan

$$\eta(\lambda)=\frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda}$$

dengan λ adalah ekspektasi banyaknya klaim yang diajukan pemegang polis dan $P(\lambda)$ adalah ekspektasi premi stasioner yang dibayarkan pemegang polis tiap periodenya. Ekspektasi premi stasioner diperoleh berdasarkan distribusi probabilitas kelas-kelas sistem bonus-malus yang sudah stasioner dan persentasi premi dari kelas-kelas pada sistem tersebut. Pada pembahasan ini, distribusi probabilitas stasioner dari kelas-kelas sistem bonus-malus diperoleh berdasarkan elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov. Pencarian nilai elastisitas akan dibantu dengan program Matlab 7.

Berikut ini adalah algoritma dari program Matlab 7.

```
function [M A eksp_premi D elastis n_A n_eksp_premi n_D n_elastis]
     = evaluasi(S, B, l, n, beda)

clc;
S0 = ['syms ' S ' lambda k;'];
eval(S0);

P = inline('(lambda^k*exp(-lambda))/factorial(k)');
S1 = ['A = [' S '];'];
eval(S1);

M = sym(zeros(n));

for i=2:n
    M(i,i-1) = P(0,lambda);
end
M(1,1) = P(0,lambda);

for i=1:n-1
    for j=i+beda:beda:(n-1)
        M(i,j) = P((j-i)/beda,lambda);
    end
end

M(:,n) = ones(n,1)-sum(M(:,1:n-1),2);

C = A*M;
E = A - C;

S2 = ['[' S '] = solve('];
for i=1:n
    S2 = [S2 'E(' int2str(i) '),'];
end
S2 = [S2 '''a1+'];
for i=2:n-1
    S2 = [S2 'a' int2str(i) '+'];
end
S2 = [S2 'a' int2str(i+1) '=1'',''');
for i=1:n-1
    S2 = [S2 'a' int2str(i) ','];
end
S2 = [S2 'a' int2str(i+1) ''');'];
eval(S2);
S3 = ['A = [' S '];'];
eval(S3)

n_A = subs(A,'lambda',l);
A1 = diff(A,'lambda');
eksp_premi = A*B;
n_eksp_premi = subs(eksp_premi,'lambda',l);
D = A1*B;
n_D = subs(D,'lambda',l);
elastis = lambda*D/eksp_premi;
n_elastis = subs(elastis,'lambda',l);
```

Interpretasi :

- M adalah matriks probabilitas transisi rantai Markov dari sistem bonus-malus yang berukuran n x n, dimana n adalah banyaknya kelas pada sistem bonus-malus. Elemen-elemen pada matriks M adalah nilai probabilitas perpindahan pemegang polis dari kelas i ke kelas j yang merupakan fungsi dalam lambda.

$$\text{M}= M(\lambda) = \left(p_{ij}(\lambda)\right)$$

- A adalah matriks berukuran 1 x n. Elemen-elemen dari A adalah nilai probabilitas stasioner dari keberadaan pemegang polis.

$$\text{A}= \boldsymbol{a} = \left[a_1(\lambda) \quad a_2(\lambda) \quad \dots \quad a_n(\lambda)\right]$$

- B adalah matriks berukuran n x 1. Elemen-elemen dari matriks B merupakan besarnya persentasi premi pada suatu kelas dari sistem bonus-malus.

$$\text{B} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- eksp_premi adalah ekspektasi premi stasioner yang dibayarkan pemegang polis pada tiap periodenya. Eksp_premi merupakan hasil perkalian dari matriks A dan matriks B.

$$\text{eksp\_premi} = P(\lambda) = \boldsymbol{a}\ \mathbf{b}$$

- A1 adalah matriks berukuran 1 x n. Elemen-elemen pada matriks A1 merupakan turunan dari elemen-elemen pada matriks A terhadap lambda .

$$\text{A} = \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda}$$

- D adalah matriks berukuran 1 x 1. D merupakan hasil perkalian dari matriks A1 dengan B.

$$\text{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$$

- elastis adalah matriks yang berukuran 1 x 1. elastis merupakan hasil dari lambda x D/eksp_premi.

$$\text{elastis} = \eta(\lambda) = \frac{\lambda}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$$

- n_A , n_eksp_premi, n_D dan n_elastis merupakan nilai dari A, eksp_premi, D dan elastis ketika nilai lambda sudah disubsitusikan.

Untuk sistem bonus malus Brazil dengan banyaknya kelas premi adalah 7, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 65 \\ 70 \\ 75 \\ 80 \\ 85 \\ 90 \\ 100 \end{bmatrix}$ dan juga lambda = 0.1, berikut adalah output yang dihasilkan

```
>> S='a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7';
>> B=[65 70 75 80 85 90 100]';
>> [M A eksp_premi D elastis n_A n_eksp_premi n_D n_elastis] =
evaluasi(S, B, 0.1, 7, 1)

>> n_A =

  Columns 1 through 3

   0.8894840190    0.09354785090    0.01443796240


  Columns 4 through 6

   0.002154211149    0.0003209886796    0.00004783887926

  Column 7

   0.000007130199938

>> n_eksp_premi =

   65.65229743

>> n_D =

    8.376470223

>> n_elastis =

    0.01275883792
```

Berdasarkan output di atas, diperoleh

$$\boldsymbol{a} = [0.8894840190 \;\; 0.09354785090 \;\; 0.01443796240 \;\; 0.002154211149$$
$$0.0003209886796 \;\; 0.00004783887926 \;\; 0.000007130199938]$$

$P(0.1)$=65.65229743, $\sum_{i=1}^{7} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$ =8.376470223 dan juga nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Brazil yang ditinjau oleh pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1 yaitu 0.01275883792.

Lampiran 2

Program perhitungan elastisitas sistem bonus malus Brazil melalui formula rekursif

Tujuan :

Untuk mengetahui nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Brazil dimana distribusi probabilitas stasioner diperoleh melalui formula rekursif.

Dalam menghitung nilai elastisitas dari suatu sistem bonus-malus, distribusi probabilitas stasioner kelas-kelas sistem bonus-malus dapat diperoleh melalui formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang stasioner. Formula rekursif ditulis dalam persamaan (3.2.10). Dengan bantuan program Matlab 7, formula rekursif dari fungsi distribusi kelas-kelas sistem bonus-malus yang stasioner beserta nilai elastisnya dapat diperoleh. Berikut adalah algoritma yang digunakan pada program Matlab 7

```
function [ mF mA D eksp_premi elastis A1 n_F n_A n_D n_eksp_premi
n_elastis ] = baru( B, s, beda, l )

syms lambda;

mF = sym(zeros(s,1));
for i=1:s
    mF(i) = F(i, s, beda, l);
end

mA = mF' - [0;mF(1:s-1)]';

A1 = diff(mA, lambda);
eksp_premi = mA*B;
D = A1*B;
elastis = lambda*D/eksp_premi;
```

```
n_F = double(subs(mF, l))';
n_A = double(subs(mA, l));
n_D = double(subs(D, l));
n_eksp_premi = double(subs(eksp_premi, l));
n_elastis = double(subs(elastis, l));
```

Interpretasi :

- mF adalah matriks berukuran 1 x s yang elemen-elemennya merupakan fungsi distribusi dari kelas-kelas sistem bonus-malus yang stasioner. Elemen pertama adalah F(1), elemen kedua adalah F(2) dan seterusnya yang masih dalam fungsi lambda.
- mA adalah matriks berukuran 1 x s yang elemen-elemennya merupakan nilai probabilitas stasioner dari keberadaan pemegang polis. Elemen-elemen pada matriks mA merupakan fungsi dalam lambda.

$$\text{mA}=\boldsymbol{a}=\left[a_1(\lambda) \quad a_2(\lambda) \quad \ldots \quad a_s(\lambda)\right]$$

- A1 adalah matriks berukuran 1 x s. Elemen-elemen pada matriks A1 merupakan turunan dari elemen-elemen pada matriks mA terhadap lambda.
- B adalah matriks berukuran s x 1. Elemen-elemen dari matriks B merupakan besarnya persentasi premi pada suatu kelas dari sistem bonus-malus.

$$\text{B} = \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}$$

- eksp_premi adalah ekspektasi premi stasioner yang dibayarkan pemegang polis pada tiap periodenya. Eksp_premi merupakan hasil perkalian dari matriks mA dan matriks B.

$$\text{eksp\_premi} = P(\lambda) = \boldsymbol{a}\ \mathbf{b}$$

- D adalah matriks berukuran 1 x 1. D merupakan hasil perkalian dari matriks A1 dengan B.

$$\text{D} = \sum_{i=1}^{s} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$$

- elastis adalah matriks yang berukuran 1 x 1. elastis merupakan hasil dari lambda x D/eksp_premi.

$$\text{elastis} = \eta(\lambda) = \frac{\lambda}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^{s} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$$

- n_F, n_A , n_eksp_premi, n_D dan n_elastis merupakan nilai dari mF, mA, eksp_premi, D dan elastis ketika nilai lambda sudah disubsitusikan.

Output yang dihasilkan adalah

```
 >> n_F

n_F =

   Columns 1 through 5

    0.889484018906235   0.983031869788221   0.997469832140845
0.999624043066506   0.999945031506791

   Columns 6 through 7

    0.999992870199811   1.000000000000000
```

```
>> n_A

n_A =

   Columns 1 through 5

    0.889484018906235   0.093547850881985   0.014437962352624
0.002154210925662   0.000320988440285

   Columns 6 through 7

    0.000047838693020   0.000007129800189

 >> n_D

 n_D =

   8.376470222954176

 >> n_eksp_premi

 n_eksp_premi =

   65.652297467985917

 >> n_elastis

 n_elastis =

   0.012758837917346
```

Berdasarkan output yang dihasilkan, diketahui bahwa untuk pemegang polis yang memiliki ekspektasi banyaknya klaim $\lambda = 0.1$ diperoleh

$$\boldsymbol{a} = [0.889484018906235 \quad 0.093547850881985 \quad 0.014437962352624 \quad 0.002154210925662$$

$$0.000320988440285 \quad 0.000047838693020 \quad 0.000007129800189]$$

dan memiliki nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Brazil yang ditinjau oleh pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1 adalah 0.012758837917346.

Lampiran 3

Program perhitungan elastisitas sistem bonus-malus Spanyol melalui vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov

Tujuan :

Untuk mengetahui nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Spanyol dimana distribusi probabilitas stasioner diperoleh melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov.

Nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Spanyol akan dihitung dengan bantuan program Matlab 7. Sistem bonus-malus Spanyol memiliki 5 kelas premi dengan besarnya persentasi premi 70, 80, 90, 100 dan 100. Untuk pemegang polis yang memiliki ekspektasi banyaknya klaim 0.1, berikut adalah output yang dihasilkan

```
>> n_A
n_A =
  Columns 1 through 3
   0.6703200459   0.07049817466   0.07791253242
  Columns 4 through 5
   0.0861066650   0.0951625820
>> n_eksp_premi
n_eksp_premi =
  77.70130980
```

```
>> n_D
n_D =
    65.41196351
>> n_elastis
n_elastis =
   0.08418386212
```

Berdasarkan output di atas, diperoleh

$\boldsymbol{a} = [0.6703200459 \quad 0.07049817466 \quad 0.07791253242 \quad 0.0861066650 \quad 0.0951625820]$

$P(0.1)$ = 77.70130980, $\sum_{i=1}^{5} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$ = 65.41196351 dan juga nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Spanyol yang ditinjau oleh pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1 yaitu 0.08418386212.

Lampiran 4

Program perhitungan elastisitas sistem bonus-malus Taiwan melalui vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov

Tujuan :

Untuk mengetahui nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Taiwan dimana distribusi probabilitas stasioner diperoleh melalui elemen-elemen vektor eigen dari matriks probabilitas transisi rantai Markov.

Nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Taiwan akan dihitung dengan bantuan program Matlab 7. Sistem bonus-malus Taiwan memiliki 9 kelas premi dengan besarnya persentasi premi 50, 65, 80, 110, 110, 120, 130, 140 dan 150. Untuk pemegang polis yang memiliki ekspektasi banyaknya klaim 0.1, berikut adalah output yang dihasilkan

```
>> n_A =
  Columns 1 through 3
   0.7408182208   0.07791253237   0.08610666491
  Columns 4 through 6
   0   0.099048374181   0.004524187090
  Columns 7 through 9
   0.0001508062364   0.000003770155909   0.00000007653416496
```

```
>> n_eksp_premi =

  59.51001699

>> n_D =

  85.99549018

>> n_elastis =

   0.1445059076
```

Berdasarkan output di atas, diperoleh informasi mengenai

$\boldsymbol{a} = [0.7408182208 \quad 0.07791253237 \quad 0.08610666491 \quad 0 \quad 0.09048374181$

$0.004524187090 \quad 0.0001508062364 \quad 0.00000377155909 \quad 0.00000007653416496]$

$P(0.1)$ = 59.51001699, $\sum_{i=1}^{9} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} b_i$ = 85.99549018 dan juga nilai elastisitas dari sistem bonus-malus Taiwan yang ditinjau oleh pemegang polis dengan ekspektasi banyaknya klaim 0.1 yaitu 0.1445059076.