# PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI
# (STUDI KASUS: NILAI EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970−2007)

**RIZKI NUGROHO ARYANTO**

**0305010556**

**UNIVERSITAS INDONESIA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**DEPOK**

**2009**

# PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI
# (STUDI KASUS: NILAI EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970−2007)

**Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat**
**untuk memperoleh gelar Sarjana Sains**


**Oleh:**
**RIZKI NUGROHO ARYANTO**
**0305010556**


**DEPOK**
**2009**

SKRIPSI : PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI (STUDI KASUS: NILAI EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970−2007)

NAMA : RIZKI NUGROHO ARYANTO

NPM : 0305010556

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 19 JUNI 2009

| | |
|---|---|
| DRA. IDA FITHRIANI, M. SI | SARINI ABDULLAH, M. STATS |
| PEMBIMBING I | PEMBIMBING II |

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana:

Penguji I :

Penguji II :

Penguji III :

***To Mom and Dad,***

***I can't thank you enough for you both.***

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahi rabbil'aalamiin*. Puji syukur hanya kepada ALLAH SWT, Yang Maha Pengasih dan Penyayang, atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penulisan tugas akhir ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis menghaturkan banyak terima kasih kepada Ibu Ida Fithriani dan Ibu Sarini Abdullah selaku dosen pembimbing yang telah bersedia mengorbankan waktu dan tenaganya untuk memberikan pengarahan, bimbingan, dan doa sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Terima kasih untuk hari-hari bimbingan yang menyenangkan. Penulis juga berterima kasih kepada Mba' Mila Novita yang telah penulis anggap sebagai pembimbing III yang bersedia 'diganggu' untuk ditanyai perihal tugas akhir penulis dan selalu membantu apabila penulis mengalami kesulitan dalam proses pengerjaan tugas akhir ini.

Khususnya, terima kasih kepada kedua orangtua penulis yang selalu mendidik dan mendoakan setulus hati tanpa henti; serta adik penulis yang selalu mendoakan untuk keberhasilan penulis. Terima kasih untuk cinta, kasih sayang, dan perhatian yang begitu luar biasa. Semoga ALLAH SWT selalu memberikan kesehatan serta keselamatan dunia dan akhirat.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada Keluarga Kediri, yaitu Mbah Jono, Mbah Ti, Tante Nien, Om Nuri, Tante Pin, Om Bandi, Pakde Mul, dan Tante Aliq. Terima kasih atas segala-galanya. Untuk sahabat-sahabat tercinta: *Autismstars*, Imay, Yoga, Aya, dan Yuri yang telah memberikan arti sebuah persahabatan sepanjang masa; dan tak lupa untuk Vicky dan Eja atas doa dan bantuannya selama ini.

Terima kasih juga kepada Mas Bayu dan Mba' Nia atas laptopnya; Iif, Edi dan Rizqiyatul atas bantuannya; Britany atas jawaban permasalahan yang berkaitan dengan ilmu ekonomi; Iman dan Ias untuk buku-buku yang sangat penting bagi tugas akhir penulis; serta Akmal, Farid, dan Yanuar atas pertolongannya untuk memperbaiki komputer penulis.

Berikutnya untuk teman berbagi selama di bangku kuliah, *The Abelian*: Rifkos, Uun, Hairu, Maul, Bocil, Ridwan, Trian, Udin, Asep, Aris, dan Dimas. Untuk yang teristimewa teman-teman angkatan 2005; teman pelipur lara, *Ranger*: Lee, Yuri, Syafirah, dan Rita; serta teman-teman angkatan 2003, 2004, 2006, 2007, dan 2008. Untuk Bu Rustina selaku PA, seluruh dosen, dan karyawan Departemen Matematika UI. Terima kasih untuk semuanya.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran senantiasa penulis harapkan. Akhir kata, semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Penulis

2009

## ABSTRAK

Sebagian besar teori ekonometri didasari atas asumsi kestasioneran. Pada kenyataannya, hal ini hampir tidak mungkin terpenuhi pada peubah-peubah ekonomi. Granger dan Newbold (1974) telah menunjukkan bahwa regresi linier yang dibentuk dari peubah-peubah nonstasioner yang tidak berkorelasi akan menciptakan *nonsense* atau *spurious regression* (regresi palsu). Hasil regresi ini “tampak baik” tetapi tidak mempunyai arti dalam ilmu ekonomi. Hingga pada tahun 1987, Engle dan Granger merumuskan suatu ide untuk membuat kombinasi linier yang stasioner dari peubah-peubah nonstasioner yang disebut kointegrasi. Ide ini muncul untuk menghindari *spurious regression*. Dalam ekonometrika, peubah yang saling terkointegrasi dikatakan dalam kondisi keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*). Untuk menguji hubungan kointegrasi antara dua peubah nonstasioner yang memiliki orde integrasi yang sama digunakan uji *Engle-Granger* dan untuk menaksir parameter kointegrasi digunakan *Engle-Granger Two-Step Procedure*. Dalam tugas akhir ini, hubungan kointegrasi diterapkan pada nilai ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007.



Kata kunci: peubah nonstasioner; kointegrasi; uji *Engle-Granger*; *Engle-Granger Two-Step Procedure*.

x + 125 hlm.; gbr.; lamp.; tab.

Bibliografi: 22 (1974−2008)

## DAFTAR ISI


| | | Halaman |
|---|---|---|
| KATA PENGANTAR | ...................................................................... | i |
| ABSTRAK | ...................................................................... | iii |
| DAFTAR ISI | ...................................................................... | iv |
| DAFTAR GAMBAR | ...................................................................... | viii |
| DAFTAR TABEL | ...................................................................... | ix |
| DAFTAR LAMPIRAN | ...................................................................... | x |
| BAB I. | PENDAHULUAN ........................................................... | 1 |
| | 1.1 Latar Belakang ..................................................... | 1 |
| | 1.2 Perumusan Masalah .............................................. | 5 |
| | 1.3 Tujuan Penulisan .................................................... | 5 |
| | 1.4 Pembatasan Masalah ............................................. | 5 |
| | 1.5 Sistematika Penulisan ............................................ | 6 |
| BAB II. | LANDASAN TEORI ..................................................... | 7 |
| | 2.1 Konsep Runtun Waktu ........................................... | 7 |
| | 2.1.1 Definisi Runtun Waktu ...................................... | 7 |
| | 2.1.2 Kestasioneran .................................................... | 8 |
| | 2.1.3 *White Noise* ...................................................... | 10 |

2.1.4 *Random Walk* .......................................................... 11
2.1.5 Model *Moving Average* Orde Satu, MA(1) ............... 12
2.1.6 Model *Moving Average* Orde *q*, MA(*q*) ..................... 14
2.1.7 Model *Autoregressive* Orde Satu, AR(1) .................. 16
2.1.8 Model *Autoregressive* Orde *p*, AR(*p*) ....................... 18
2.1.9 Model *Autoregressive-Moving Average*, ARMA(*p*, *q*) 22
2.1.10 Transformasi Runtun Waktu Nonstasioner ............. 22
2.1.11 Operator *Backshift* .................................................... 24
2.2 Model Regresi Linier ..................................................... 26
2.2.1 Regresi Linier Sederhana ........................................ 26
2.2.2 Taksiran Parameter Model Regresi Linier Sederhana ................................................................ 27
2.2.3 Pengujian Hipotesis Model Regresi Linier Sederhana ................................................................ 29
2.2.4 Koefisien Determinasi ($R^2$) ....................................... 29
2.3 Uji *Durbin-Watson* ......................................................... 30
2.4 *Unit Root Test* ................................................................ 32
2.4.1 *Dickey-Fuller Test* .................................................... 32
2.4.2 *Augmented Dickey-Fuller Test* ................................ 34
2.5 Uji Kausalitas *Granger* ................................................. 40
2.6 *Spurious Regression* .................................................... 43

BAB III. KOINTEGRASI ........ 47
3.1 Konsep Integrasi, Kointegrasi, dan *Error Correction Model* (ECM) ........ 47
3.1.1 Integrasi ........ 47
3.1.2 Kointegrasi ........ 55
3.1.3 *Error Correction Model* (ECM) ........ 63
3.2 Pengujian Kointegrasi Kasus Bivariat ........ 82
3.3 Penaksiran Parameter Kointegrasi Kasus Bivariat ........ 85

BAB IV. PENERAPAN KOINTEGRASI TERHADAP NILAI EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970−2007 ........ 89
4.1 Konsep dan Definisi Peubah Penelitian ........ 89
4.1.1 Ekspor ........ 89
4.1.2 Investasi ........ 90
4.2 Data Penelitian ........ 91
4.3 Analisis Deskriptif ........ 92
4.4 Tujuan Penelitian ........ 94
4.5 Analisis Data ........ 95
4.5.1 *Unit Root Test* ........ 95
4.5.2 Uji *Engle-Granger* ........ 97
4.5.3 Uji Kausalitas *Granger* ........ 101

4.5.4 *Error Correction Model* (ECM) ................................ 103

4.6 Kesimpulan dan Saran Penelitian ................................ 108

4.6.1 Kesimpulan ................................ 108

4.6.2 Saran ................................ 109

BAB V PENUTUP ................................ 110

DAFTAR PUSTAKA ................................ 111

LAMPIRAN ................................ 114

## DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. Ilustrasi hubungan kointegrasi ...................................................... 61

2. *Scatterplot* dari peubah-peubah yang terkointegrasi .................... 63

3. Perkembangan nilai ekspor Indonesia (juta US$) tahun 1970−2007 ......................................................................... 92

4. Perkembangan nilai investasi di Indonesia (juta US$) tahun 1970−2007 ......................................................................... 93

5. *Scatterplot* antara nilai ekspor dan investasi ................................. 100

6. *Scatterplot* dari residual ECM ...................................................... 104

## DAFTAR TABEL


| Tabel | | Halaman |
|---|---|---|
| 1. | Peubah penelitian, sumber, jenis, dan periode data ...................... | 91 |
| 2. | Hasil *Unit Root Test* ........................................................................ | 96 |
| 3. | Taksiran parameter model regresi statis dengan metode OLS ...... | 98 |
| 4. | Hasil *Unit Root Test* residual ........................................................ | 99 |
| 5. | Hasil uji Kausalitas *Engle-Granger* ................................................ | 102 |
| 6. | *Residuals Statistics* ........................................................................ | 104 |
| 7. | Hasil uji *Shapiro-Wilk* ..................................................................... | 106 |

## DAFTAR LAMPIRAN


Lampiran Halaman

1. Tabel Distribusi *Dickey-Fuller* ........................................................ 114
2. Tabel nilai kritis *Engle-Granger Cointegration Test* ...................... 115
3. Taksiran parameter, $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, model regresi linier statis (3.6) dengan metode OLS ....................................................................... 116
4. Data nilai ekspor dan investasi Indonesia .................................... 119
5. Uji orde integrasi dengan *Augmented Dickey-Fuller Test* ............. 120
6. Uji *Engle-Granger* ........................................................................ 124
7. Uji Kausalitas *Granger* ................................................................. 125
8. *Error Correction Model* (ECM) ..................................................... 125

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 LATAR BELAKANG

Bagian terpenting dari teori ekonomi biasanya bertalian dengan hubungan-hubungan pada keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*) yang disebabkan oleh kekuatan pasar (*market forces*) dan pola perilaku manusia (*behavioral rules*). Sejalan dengan hal itu, banyak studi ekonometri yang memerlukan data runtun waktu (*time series*) yang dapat diartikan sebagai usaha untuk mengevaluasi hubungan-hubungan tersebut.

Metode konvensional telah menetapkan suatu prosedur standar, yaitu dibutuhkannya peubah yang stasioner —artinya, mempunyai nilai rata-rata dan variansi yang tidak mengalami perubahan secara sistematik sepanjang waktu atau konstan— dalam sistem. Hal ini disebabkan karena sebagian besar teori ekonometri didasari atas asumsi kestasioneran. Akibatnya, para pelaku ekonometri bertahun-tahun menganggap seolah-olah kestasioneran, yang hampir tidak mungkin terpenuhi pada peubah-peubah dalam dunia ekonomi, dapat dicapai hanya dengan membuang komponen deterministik (*drifts* dan *trends*) dari data (Dolado, Gonzalo, dan Marmol, 1999).

Masalah kenonstasioneran pada peubah-peubah ekonomi agaknya diabaikan oleh para pelaku ekonometri dalam berbagai penerapan kasus. Selama bertahun-tahun para pelaku ekonometri melakukan inferensi statistik yang melibatkan peubah-peubah nonstasioner dengan membentuk regresi linier secara langsung. Granger dan Newbold (1974) telah menunjukkan bahwa regresi linier yang dibentuk dari peubah-peubah nonstasioner yang tidak berkorelasi akan menciptakan *nonsense* atau *spurious regression* (regresi palsu). Metode *Ordinary Least Squares* (OLS) tidak dibenarkan untuk digunakan pada peubah-peubah nonstasioner karena akan menyebabkan terbentuknya *spurious regression*. Contoh dari *spurious regression* adalah regresi antara produksi susu di suatu daerah dengan jumlah penumpang suatu maskapai penerbangan di daerah tersebut —dimana peubah-peubah tersebut adalah peubah nonstasioner yang tidak berkorelasi secara substansi.

*Spurious regression* menghasilkan koefisien determinasi ($R^2$) yang cukup tinggi dan uji $t$ yang signifikan tetapi hasil regresi yang diperoleh tidak mempunyai arti dalam ilmu ekonomi. Hasil regresi yang “tampak baik” ini disebabkan karena taksiran *least squares* tidak konsisten dan uji statistik yang biasanya berlaku untuk regresi linier tidak dapat diterapkan pada *spurious regression* (Enders, 2004). Jika *spurious regression* diinterpretasikan maka dikhawatirkan hasil analisisnya akan salah atau tidak sesuai dengan kondisi yang sebenarnya. Analisis yang salah tentunya akan berdampak pada keputusan yang diambil dan pada gilirannya akan membuat kebijakan yang merugikan banyak pihak.

Untuk pertama kalinya, Engle dan Granger (1987) merumuskan suatu ide untuk mengointegrasikan peubah-peubah nonstasioner tersebut menjadi suatu peubah yang stasioner. Ide ini muncul akibat kekhawatiran akan hasil yang ditimbulkan oleh *spurious regression* pada data runtun waktu.

Jika dua atau lebih peubah nonstasioner, tetapi kombinasi linier dari peubah-peubah tersebut stasioner, maka peubah tersebut dikatakan terkointegrasi. Misalkan, terdapat dua buah *random walk* —proses stokastik nonstasioner— $X_t$ dan $Y_t$. Maka, $Z_t = Y_t - \alpha X_t$ merupakan runtun waktu yang stasioner. Pada kondisi tersebut peubah $X_t$ dan $Y_t$ dikatakan terkointegrasi dengan $\alpha$ adalah parameter kointegrasi dan regresi yang diperoleh tersebut adalah regresi kointegrasi. Konsep kointegrasi dapat diterapkan dalam berbagai model ekonomi, seperti hubungan antara modal dan hasil, upah dan produktivitas buruh, harga saham dan deviden, konsumsi dan *disposable income*, tingkat bunga jangka panjang dan jangka pendek, serta tingkat produksi dan penjualan.

Dalam ekonometrika, peubah yang saling terkointegrasi dikatakan dalam kondisi keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*). Sedangkan untuk jangka pendek perlu diperhitungkan adanya fluktuasi atau lonjakan peubah pada jangka pendek. Realitanya, keseimbangan jangka panjang pada peubah yang terkointegrasi dapat berubah. Hal ini mungkin terjadi karena berbagai alasan, seperti krisis ekonomi, kemajuan teknologi, dan perubahan kebijakan suatu negara. Jika penyimpangan dari kondisi keseimbangan mempengaruhi perubahan sehimpunan peubah maka diperlukan suatu *misspecification error*. Sargan (1964) memperkenalkan pertama kali (selanjutnya dipopulerkan oleh Engle dan Granger) suatu metode yang digunakan untuk mengoreksi ketidakseimbangan (*disequilibrium*) jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang yang disebut *Error Correction Model* (ECM).

Ada beberapa pengujian untuk memeriksa adanya hubungan kointegrasi, antara lain uji *Engle-Granger*, *Phillips-Ouliaris Method*, uji *Cointegrating Regression Durbin Watson* (CRDW), dan *Johansen Procedure*. Sedangkan untuk menaksir parameter kointegrasi dapat digunakan metode berikut: *Engle-Granger Two-Step Procedure* dan *Fully Modified Ordinary Least Squares* (FM-OLS).

Pada tugas akhir ini, metode yang digunakan untuk menguji adanya hubungan kointegrasi adalah uji *Engle-Granger*. Sedangkan metode yang digunakan untuk menaksir parameter kointegrasi adalah *Engle-Granger Two-Step Procedure*.

Peubah penelitian yang digunakan pada tugas akhir ini adalah nilai ekspor dan investasi Indonesia berjangka waktu satu tahun dengan periode pengamatan dari tahun 1970 sampai dengan tahun 2007.

## 1.2 PERMASALAHAN

Bagaimana cara menaksir parameter dari hubungan kointegrasi antara peubah-peubah nonstasioner?

## 1.3 TUJUAN PENULISAN

Tugas akhir ini bertujuan untuk menguji adanya hubungan kointegrasi antara peubah-peubah nonstasioner dan menaksir parameter kointegrasi tersebut.

## 1.4 PEMBATASAN MASALAH

Permasalahan pada tugas akhir ini dibatasi pada hal-hal berikut:

1. Hubungan kointegrasi hanya pada kasus bivariat (dua peubah).
2. Pengujian kointegrasi hanya dilakukan pada peubah yang memiliki orde integrasi satu, $I(1)$.
3. Pengujian kointegrasi menggunakan uji *Engle-Granger*.
4. Taksiran parameter kointegrasi diperoleh dengan *Engle-Granger Two-Step Procedure*.

## 1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan pada tugas akhir ini dibagi menjadi lima bab, yaitu:

Bab I. Pendahuluan

Berisi latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II. Landasan Teori

Berisi pembahasan mengenai konsep runtun waktu, model regresi linier sederhana, uji *Durbin-Watson*, *Unit Root Test*, uji Kausalitas *Granger*, dan *Spurious Regression*.

Bab III. Kointegrasi

Berisi pembahasan mengenai konsep integrasi, kointegrasi, *Error Correction Model* (ECM), pengujian kointegrasi, dan penaksiran parameter kointegrasi kasus bivariat.

Bab IV. Penerapan Kointegrasi terhadap Nilai Ekspor dan Investasi Indonesia Pada Tahun 1970−2007

Berisi pembahasan mengenai konsep dan definisi peubah penelitian, data penelitian, analisis deskriptif, tujuan penelitian, analisis data, serta kesimpulan dan saran penelitian.

Bab V. Penutup

Berisi kesimpulan.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori yang diperlukan untuk pembahasan bab-bab selanjutnya, antara lain konsep runtun waktu, model regresi linier sederhana, uji *Durbin-Watson*, *Unit Root Test*, uji Kausalitas *Granger*, dan *Spurious Regression*.

## 2.1 KONSEP RUNTUN WAKTU

### 2.1.1 Definisi Runtun Waktu

Runtun waktu adalah himpunan barisan pengamatan yang terurut dalam waktu, dengan jarak interval waktu yang sama (Box-Jenkins, 1976). Jika barisan pengamatan tersebut dicatat dalam waktu yang kontinu maka disebut runtun waktu kontinu; dan jika dicatat dalam waktu diskrit maka disebut runtun waktu diskrit. Pada tugas akhir ini, akan dibahas runtun waktu diskrit dengan waktu $t_i$, $i$ = 1, 2, . . ., $n$; dengan $n$ adalah jumlah pengamatan.

Barisan pengamatan tersebut dinyatakan dengan $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$. Jadi, $Y_{t_i}$ menyatakan pengamatan pada waktu $t_i$ dengan $Y$ adalah peubah acak (*random variable*).

Himpunan berindeks dari peubah acak *Y* dengan indeks *t* anggota himpunan *T* disebut proses stokastik. Runtun waktu yang akan dianalisis dapat dianggap sebagai salah satu perwujudan dari proses stokastik.

Contoh data runtun waktu (*time series*) dalam dunia ekonomi, antara lain adalah data harian Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG), data triwulan *Gross Natinoal Product* (GNP) Indonesia, dan data tahunan nilai ekspor migas (minyak bumi dan gas alam) Indonesia.

### 2.1.2 Kestasioneran

Agar dapat melakukan inferensi statistik mengenai struktur proses stokastik pada pengamatan yang berhingga dari suatu proses, terlebih dahulu harus dibuat penyederhanaan tentang struktur tersebut, yang dinyatakan dalam suatu asumsi. Asumsi terpenting yang harus dipenuhi adalah kestasioneran. Kestasioneran terdiri dari dua jenis, yaitu stasioner kuat (*strictly stationary*) dan stasioner lemah (*weakly stationary*).

Misal barisan $\{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}\}$ atau $\{Y_t\}$ adalah proses stokastik. Proses stokastik $\{Y_t\}$ disebut stasioner kuat (*strictly stationary*) jika distribusi bersama dari $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \ldots, Y_{t_n-k}$ untuk semua pilihan waktu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dan jeda waktu (*lag*) *k*.

- Kasus $n$ = 1

  $P(Y_t) = P(Y_{t-k}) = P(Y)$

  Pada kasus ini, *mean*: $\mu_t = E(Y_t) = E(Y_{t-k})$ sehingga *mean* akan konstan sepanjang waktu; dan variansi, $Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) = \sigma_Y^2$, akan konstan sepanjang waktu juga.

- Kasus $n$ = 2

  Karena p.d.f (*probability density function*) bersama dari $P(Y_t, Y_s) = P(Y_{t-k}, Y_{s-k})$, maka kestasioneran juga mengakibatkan kovariansi dan korelasi antara $Y_t$ dan $Y_s$ serta antara $Y_{t-k}$ dan $Y_{s-k}$ akan selalu sama dan konstan sepanjang waktu untuk setiap bilangan bulat $k$. Jadi, kovariansi dan korelasi tidak bergantung pada waktu $t$ dan $s$, tetapi bergantung pada selisih waktu $|t - s|$ atau pada jeda waktu $k$. Kovariansi dan korelasi tersebut dinotasikan sebagai berikut:

  $$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k}),$$

  $$\rho_k = Corr(Y_t, Y_{t-k}).$$

  Otokorelasi pada *lag* $k$ didefinisikan sebagai rasio otokovariansi pada *lag* $k$ dengan otokovariansi *lag* nol, yaitu $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

Menurut Cryer (1986), suatu proses stokastik disebut stasioner lemah (*weakly stationary*) jika

1. Fungsi *mean* konstan sepanjang waktu.
2. $\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k}$ $\forall$ waktu ke-$t$, $t$ = 1, 2, . . ., $n$ dan *lag* ke-$k$, $k$ = 0, 1, 2, . . ..

### 2.1.3 *White Noise*

Suatu proses *white noise* didefinisikan sebagai barisan peubah acak $\{a_t\}$ yang saling bebas dan berdistribusi sama; dengan *mean* nol, $E(a_t) = 0$, dan variansi konstan, $Var(a_t) = \sigma_a^2$. Jika proses *white noise* diasumsikan berdistribusi normal, $a_t \sim N.I.I.D.(0, \sigma_a^2)$, maka proses tersebut dinamakan proses *normal* atau *Gausian white noise*.

Berikut adalah nilai otokovariansi dan otokorelasi dari proses *white noise*:

- Untuk *lag* $k = 0$:

$$\begin{aligned}\text{Otokovariansi}: \gamma_0 &= E[(a_t - E(a_t))(a_t - E(a_t))] \\ &= E[(a_t - E(a_t))^2] \\ &= Var(a_t) = \sigma_a^2.\end{aligned}$$

$$\text{Otokorelasi}: \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1.$$

- Untuk *lag* $k = 1$:

$$\begin{aligned}\text{Otokovariansi}: \gamma_1 &= E[(a_t - E(a_t))(a_{t-1} - E(a_{t-1}))] \\ &= E[(a_t - 0)(a_{t-1} - 0)] \\ &= E(a_t a_{t-1}) \\ &= E(a_t)E(a_{t-1}) = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Otokorelasi}: \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.$$

- Secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\gamma_k = \begin{cases}\sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0\end{cases} \quad \text{dan} \quad \rho_k = \begin{cases}1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0\end{cases}.$$

*White noise* merupakan proses stasioner kuat (*strictly stationary*) karena distribusi bersama dari $a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $a_{t_1-k}, a_{t_2-k}, \ldots, a_{t_n-k}$ untuk semua pilihan waktu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dan *lag* $k$.

Bukti:

$$
\begin{aligned}
P(a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_n}) &= \Pr(a_{t_1} \le x_1, a_{t_2} \le x_2, \ldots, a_{t_n} \le x_n) \\
&= \Pr(a_{t_1} \le x_1)\Pr(a_{t_2} \le x_2)\ldots\Pr(a_{t_n} \le x_n) \\
&\quad \text{(karena saling bebas)} \\
&= \Pr(a_{t_1-k} \le x_1)\Pr(a_{t_2-k} \le x_2)\ldots\Pr(a_{t_n-k} \le x_n) \\
&\quad \text{(karena berdistribusi sama)} \\
&= \Pr(a_{t_1-k} \le x_1, a_{t_2-k} \le x_2, \ldots, a_{t_n-k} \le x_n) \\
&= P(a_{t_1-k}, a_{t_2-k}, \ldots, a_{t_n-k}).
\end{aligned}
$$

### 2.1.4 *Random Walk*

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi sama, masing-masing dengan *mean* nol dan variansi $\sigma_a^2$. Runtun waktu $\{Y_t\}$ yang diamati dapat juga dinyatakan sebagai bentuk berikut:

$$Y_1 = a_1$$

$$Y_2 = a_1 + a_2$$

$$Y_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$Y_t = a_1 + a_2 + \ldots + a_t = \sum_{i=1}^{t} a_i \ .$$

Atau dapat juga ditulis sebagai $Y_t = Y_{t-1} + a_t$.

Proses $\{Y_t\}$ dengan model $Y_t = Y_{t-1} + a_t$ disebut sebagai *random walk*. *Mean* dari runtun waktu $\{Y_t\}$ tersebut adalah

$\mu_t = E(Y_t) = E(a_1 + a_2 + \ldots + a_t) = E(a_1) + E(a_2) + \ldots + E(a_t) = 0.$

Sedangkan variansinya adalah

$Var(Y_t) = Var(a_1 + a_2 + \ldots + a_t) = Var(a_1) + Var(a_2) + \ldots + Var(a_t) = t\sigma_a^2$ .

Karena variansi dari proses *random walk* bergantung pada waktu, maka *random walk* merupakan runtun waktu yang nonstasioner.

Model *random walk* dapat diperluas dengan menambahkan konstanta $a_0$, sehingga modelnya menjadi

$$Y_t = a_0 + Y_{t-1} + a_t.$$

Model ini disebut model *random walk with drift*.

### 2.1.5 Model *Moving Average* Orde Satu, MA(1)

Salah satu model runtun waktu univariat (satu peubah) adalah model *Moving Average* (MA). Runtun waktu $Y_t$ dikatakan mempunyai model *Moving Average* orde satu, dinotasikan dengan MA(1), jika nilai saat ini dari runtun waktu $Y_t$ dapat dinyatakan sebagai fungsi linier dari rata-rata terboboti dari deviasi (*disturbance*) pada satu periode sebelumnya.

Model MA(1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_t = a_t - \theta a_{t-1} \tag{2.1}$$

dengan:

$Y_t$ : pengamatan runtun waktu pada saat $t$

$\theta$ : parameter model MA(1)

$a_{t-j}$ : runtun *white noise* saat $t - j$, $j$ = 0, 1; $a_t \sim N.I.I.D.\ (0,\ \sigma_a^2)$

*Mean* dan variansi dari model MA(1) dengan penggunaan model pada persamaan (2.1) adalah

$$\begin{aligned} Mean:\ E(Y_t) &= E(a_t - \theta a_{t-1}) \\ &= E(a_t) - \theta E(a_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variansi}:\ Var(Y_t) &= Var(a_t - \theta a_{t-1}) \\ &= Var(a_t) + \theta^2 Var(a_{t-1}) \\ &= \sigma_a^2 + \theta^2 \sigma_a^2 \\ &= (1+\theta^2)\sigma_a^2. \end{aligned}$$

Sedangkan nilai otokovariansi dan otokorelasinya adalah sebagai berikut:

- Untuk *lag k* = 0:

$$\gamma_0 = Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = (1+\theta)\sigma_a^2.$$

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1.$$

- Untuk *lag* $k$ = 1:

$$\begin{aligned}\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-1} - \theta a_{t-2})\\ = Cov(a_t, a_{t-1}) - Cov(a_t, \theta a_{t-2}) - Cov(\theta a_{t-1}, a_{t-1})\\ + Cov(\theta a_{t-1}, \theta a_{t-2})\\ = 0 - 0 - \theta Cov(a_{t-1}, a_{t-1}) + 0 = -\theta\sigma_a^2.\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta\sigma_a^2}{(1+\theta^2)\sigma_a^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}.$$

- Untuk *lag* $k$ = 2:

$$\begin{aligned}\gamma_2 = Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-2} - \theta a_{t-3})\\ = Cov(a_t, a_{t-2}) - Cov(a_t, \theta a_{t-3}) - Cov(\theta a_{t-1}, a_{t-2})\\ + Cov(\theta a_{t-1}, \theta a_{t-3})\\ = 0.\end{aligned}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0}{(1+\theta^2)} = 0.$$

- Secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta\sigma_a^2, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}.$$

### 2.1.6 Model *Moving Average* Orde *q*, MA(*q*)

Secara umum, model *Moving Average* orde $q$ atau MA($q$) dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (2.2)$$

dengan:

$Y_t$ : pengamatan runtun waktu pada saat $t$

$\theta_i$ : parameter model *Moving Average* ke-$i$, $i$ = 1, 2, . . ., $q$

$a_{t-j}$ : runtun *white noise* saat $t - j$, $j$ = 0, 1, 2, . . ., $q$; $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

$\mu$ : konstanta

*Mean* dan variansi dari model MA($q$) dengan penggunaan model pada persamaan (2.2) adalah

$$\begin{aligned} \textit{Mean}:\ E(Y_t) &= E(\mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}) \\ &= E(\mu) + E(a_t) - \theta_1 E(a_{t-1}) - \theta_2 E(a_{t-2}) - \ldots - \theta_q E(a_{t-q}) \\ &= \mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variansi}:\ Var(Y_t) &= Var(\mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}) \\ &= Var(\mu) + Var(a_t) + \theta_1^2 Var(a_{t-1}) + \theta_2^2 Var(a_{t-2}) + \ldots + \theta_q^2 Var(a_{t-q}) \\ &= 0 + \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + \theta_2^2 \sigma_a^2 + \ldots + \theta_q^2 \sigma_a^2 \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma_a^2. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa variansi $Y_t$ bergantung pada nilai $\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2$ yang cenderung besar jika tidak dibatasi. Oleh sebab itu, jika $Y_t$ merupakan suatu realisasi dari proses *random* yang stasioner maka nilai $\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2 < \infty$. Untuk model MA($q$) dengan $q$ berhingga, nilai $\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2$ akan berhingga pula; sehingga model MA($q$) stasioner. Sedangkan untuk model MA($q$) dengan orde yang sangat besar ($q \to \infty$), kestasioneran dapat terpenuhi apabila $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i^2$ konvergen ke suatu nilai.

### 2.1.7 Model *Autoregressive* Orde Satu, AR(1)

Model runtun waktu univariat lainnya adalah model *Autoregressive* (AR). Asumsikan $Y_t$ adalah runtun waktu stasioner. Runtun waktu $Y_t$ dikatakan mempunyai model *Autoregressive* orde satu, dinotasikan dengan AR(1), jika nilai saat ini dari runtun waktu $Y_t$ dapat dinyatakan sebagai fungsi linier dari nilai satu periode waktu sebelumnya, $Y_{t-1}$, dan *white noise*, $a_t$.

Model AR(1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t \tag{2.3}$$

dengan:

$Y_t$ : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t$

$Y_{t-1}$ : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t - 1$

$\phi$ : parameter model AR(1)

$a_t$ : runtun *white noise*, $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

Runtun *white noise* $a_t$ diasumsikan saling bebas dengan runtun $Y_{t-k}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$, sehingga $E(a_t Y_{t-k}) = E(a_t)E(Y_{t-k}) = 0$.

*Mean* dari model AR(1) dengan penggunaan model pada persamaan (2.3) adalah

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\phi Y_{t-1} + a_t) \\ &= \phi E(Y_{t-1}) + E(a_t). \end{aligned}$$

Oleh karena asumsi runtun waktu stasioner adalah $E(Y_t) = E(Y_{t-1})$ dan *mean* runtun *white noise* adalah $E(a_t) = 0$, maka *mean* dari model AR(1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1}) + 0$$

$$(1-\phi)E(Y_t) = 0$$

$$E(Y_t) = 0, \quad \phi \neq 1.$$

Variansi dari model AR(1) untuk model pada persamaan (2.3) adalah

$$\begin{aligned}
Var(Y_t) &= E[(Y_t - E(Y_t))^2] \\
&= E[Y_t^2] \\
&= E[(\phi Y_{t-1} + a_t)^2] \\
&= E[(\phi Y_{t-1})^2 + 2\phi Y_{t-1} a_t + (a_t)^2] \\
&= E[(\phi Y_{t-1})^2] + E(2\phi Y_{t-1} a_t) + E(a_t)^2 \\
&= \phi^2 E(Y_{t-1})^2 + 2\phi E(Y_{t-1} a_t) + E(a_t)^2 \\
&= \phi^2 Var(Y_t) + 0 + \sigma_a^2 \\
(1-\phi^2) Var(Y_t) &= \sigma_a^2 \\
Var(Y_t) &= \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}.
\end{aligned}$$

Karena variansi nonnegatif, maka

$$1-\phi^2 > 0,$$

$$\phi^2 < 1 \text{ atau } |\phi| < 1.$$

Pertidaksamaan $|\phi| < 1$ merupakan syarat agar runtun waktu AR(1) stasioner.

Variansi $Y_t$ didefinisikan sebagai otokovariansi $Y_t$ pada *lag* nol, dinotasikan dengan $\gamma_0$. Otokovariansi dari $Y_t$ pada *lag* $k$, dinotasikan dengan $\gamma_k$, adalah kovariansi antara $Y_t$ dan $Y_{t-k}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t-k})\\ &= E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-k} - E(Y_{t-k}))]\\ &= E(Y_t Y_{t-k})\\ &= E((\phi Y_{t-1} + a_t)Y_{t-k})\\ &= E(\phi Y_{t-1}Y_{t-k} + a_t Y_{t-k})\\ &= \phi E(Y_{t-1}Y_{t-k}) + E(a_t Y_{t-k})\\ &= \phi\gamma_{k-1}.\end{aligned}$$

Untuk $k$ = 1, diperoleh $\gamma_1 = \phi\gamma_0 = \phi\sigma_a^2/(1-\phi^2)$. Untuk $k$ = 2, diperoleh $\gamma_2 = \phi\gamma_1 = \phi^2\sigma_a^2/(1-\phi^2)$. Jadi, secara umum nilai otokovariansi pada *lag k* adalah

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)} = \phi^k\gamma_0,\ k \geq 1.$$

Otokorelasi pada *lag k*, dinotasikan dengan $\rho_k$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi^k\gamma_0}{\gamma_0} = \phi^k,\ k \geq 1.$$

### 2.1.8 Model *Autoregressive* Orde *p*, AR(*p*)

Secara umum, model *Autoregressive* orde *p* atau AR(*p*) dinyatakan sebagai berikut:

$$(Y_t - \mu) = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

$$Y_t = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)\mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

dengan:

$Y_{t-i}$ : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t - i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, p$

$\phi_j$ : parameter model *Autoregressive* ke-$j$, $j = 1, 2, \ldots, p$

$a_t$ : runtun *white noise*, $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

$\mu$ : *mean* dari $Y_t$

Model AR($p$) merupakan proses stasioner jika dan hanya jika akar-akar persamaan karakteristik

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \ldots - \phi_p z^p = 0$$

mempunyai modulus lebih besar dari satu. Modulus pada bilangan kompleks $z = z_1 + iz_2$ dinyatakan dengan $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Dengan melihat kondisi kestasioneran dari hal tersebut, pandang model AR(1) sebagai kasus sederhana. Persamaan karakteristik untuk model AR(1) adalah $1 - \phi z = 0$. Solusi dari persamaan karakteristik tersebut adalah $z = 1/\phi$. Agar kondisi kestasioneran model AR($p$) dapat terpenuhi, maka akar persamaan karakteristik $1 - \phi z = 0$ harus mempunyai modulus lebih besar dari satu; sehingga

$$|z| = \left|\frac{1}{\phi}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{|1|}{|\phi|} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\phi|} > 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa model AR(1) stasioner jika dan hanya jika $|\phi| < 1$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Pandang model AR(1) berikut:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t.$$

Karena $Y_t$ stasioner, berarti $E(Y_t)$ konstan, $Var(Y_t)$ konstan, dan $Cov(Y_t, Y_{t-k})$ hanya bergantung pada *lag k*. Dari subbab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $Var(Y_t) = \dfrac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}$. Karena $\sigma_a^2 > 0$, maka $Var(Y_t) > 0$; sehingga

$$1-\phi^2 > 0 \Leftrightarrow \phi^2 < 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1.$$

$\therefore$ terbukti bahwa jika model AR(1) stasioner maka $|\phi| < 1$.

($\Leftarrow$) Pertama-tama akan diperiksa apakah $E(Y_t)$ konstan. Dari subbab sebelumnya, telah ditunjukkan bahwa *mean* dari model AR(1) adalah $E(Y_t) = E(\phi Y_{t-1} + a_t) = 0$ jika $|\phi| < 1$. Kemudian, akan diperiksa apakah variansi dari model AR(1) konstan.

$$\begin{aligned}
Var(Y_t) &= Var(\phi Y_{t-1} + a_t) \\
&\quad \text{(lakukan iterasi ke belakang)} \\
&= Var(\phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 a_{t-3} + \ldots + a_t) \\
&= Var(a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 a_{t-3} + \ldots) \\
&= Var(a_t) + Var(\phi a_{t-1}) + Var(\phi^2 a_{t-2}) + Var(\phi^3 a_{t-3}) + \ldots \\
&= \sigma_a^2 + \phi^2\sigma_a^2 + \phi^4\sigma_a^2 + \phi^6\sigma_a^2 + \ldots \\
&= \sigma_a^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \ldots) \\
&\quad \text{(karena } |\phi| < 1 \text{, maka deret geometrik di atas akan konvergen)} \\
&= \sigma_a^2\left(\frac{1}{1-\phi^2}\right) \\
&= \gamma_0.
\end{aligned}$$

Terakhir, akan diperiksa apakah $Cov(Y_t, Y_{t-k})$ hanya bergantung pada *lag* $k$. Untuk itu, pandang model AR(1) berikut:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t.$$

Untuk *lag* $k$ = 1, kalikan kedua ruas persamaan di atas dengan $Y_{t-1}$; sehingga

$$\begin{aligned}
Y_tY_{t-1} &= \phi Y_{t-1}Y_{t-1} + a_tY_{t-1} \\
E(Y_tY_{t-1}) &= E(\phi Y_{t-1}Y_{t-1} + a_tY_{t-1}) \\
E(Y_tY_{t-1}) &= E(\phi Y_{t-1}Y_{t-1}) + E(a_tY_{t-1}) \\
E(Y_tY_{t-1}) - \underbrace{E(Y_t)}_{0}\underbrace{E(Y_{t-1})}_{0} &= \phi E(Y_{t-1}{}^2) - \underbrace{E(Y_t)}_{0}\underbrace{E(Y_{t-1})}_{0} + E(a_tY_{t-1}) \\
Cov(Y_tY_{t-1}) &= \phi Var(Y_{t-1}) + \underbrace{E(a_t)}_{0}E(Y_{t-1}) \\
Cov(Y_tY_{t-1}) &= \phi \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)} \\
Cov(Y_tY_{t-1}) &= \phi\gamma_0.
\end{aligned}$$

Lakukan hal yang serupa untuk *lag* ke-$k$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
Y_tY_{t-k} &= \phi Y_{t-1}Y_{t-k} + a_tY_{t-k} \\
E(Y_tY_{t-k}) &= E(\phi Y_{t-1}Y_{t-k}) + E(a_tY_{t-k}) \\
E(Y_tY_{t-k}) - \underbrace{E(Y_t)}_{0}\underbrace{E(Y_{t-k})}_{0} &= \phi E(Y_{t-1}Y_{t-k}) - \underbrace{E(Y_t)}_{0}\underbrace{E(Y_{t-k})}_{0} + E(a_tY_{t-k}) \\
Cov(Y_tY_{t-k}) &= \phi\gamma_{k-1} + E(a_tY_{t-k}) \\
Cov(Y_tY_{t-k}) &= \phi^k\gamma_0 + E(a_tY_{t-k}) \\
Cov(Y_tY_{t-k}) &= \phi^k \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)} + \underbrace{E(a_t)}_{0}E(Y_{t-k}) \\
Cov(Y_tY_{t-k}) &= \phi^k \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa otokovariansi pada *lag* ke-$k$ hanya bergantung pada *lag* $k$ jika $|\phi| < 1$.

$\therefore$ terbukti bahwa jika $|\phi| < 1$ maka model AR(1) stasioner.

### 2.1.9 Model *Autoregressive-Moving Average*, ARMA($p$, $q$)

Adakalanya proses *random* yang stasioner tidak dapat dimodelkan melalui AR($p$) atau MA($q$) karena proses tersebut mempunyai karakteristik kedua-duanya. Oleh karena itu, proses semacam ini perlu didekati dengan gabungan antara model *Autoregressive* dan *Moving Average* yang disebut dengan model ARMA($p$, $q$). Adapun bentuk modelnya secara umum sebagai berikut:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

dengan:

$Y_{t-i}$ : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t - i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, p$

$\phi_j$ : parameter model *Autoregressive* ke-$j$, $j = 1, 2, \ldots, p$

$\theta_k$ : parameter model *Moving Average* ke-$k$, $k = 1, 2, \ldots, q$

$a_{t-l}$ : runtun *white noise* saat $t - l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, q$; $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

$\mu$ : *mean* dari $Y_t$; dan $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)$

### 2.1.10 Transformasi Runtun Waktu Nonstasioner

Salah satu teknik transformasi untuk mengubah runtun nonstasioner menjadi runtun stasioner adalah proses pembedaan stasioner atau yang disebut dengan *Difference Stationary Process* (DSP).

Perhatikan model berikut:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + a_t .$$

Jika $\beta_1$ = 0, $\beta_2$ = 0, dan $\beta_3$ =1 maka modelnya menjadi

$$Y_t = Y_{t-1} + a_t .$$

Model tersebut ialah *random walk*, yang merupakan proses stokastik nonstasioner. Bila model tersebut dinyatakan dengan

$$Y_t - Y_{t-1} = a_t \text{ atau } \Delta Y_t = a_t$$

maka model tersebut menjadi stasioner, karena $E(\Delta Y_t) = 0$ dan $Var(\Delta Y_t) = \sigma_a^2$. Proses inilah yang disebut dengan proses pembedaan stasioner (*Difference Stationary Process*) pertama, dengan $\Delta^d$ adalah operator *difference* ke-*d*.

Jika $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2$ = 0, dan $\beta_3$ = 1 maka modelnya menjadi

$$Y_t = \beta_1 + Y_{t-1} + a_t .$$

Model tersebut adalah *random walk with drift*, yang juga merupakan proses stokastik nonstasioner. Bila model tersebut dinyatakan dengan

$$Y_t - Y_{t\text{-}1} = \beta_1 + a_t \text{ atau } \Delta Y_t = \beta_1 + a_t$$

maka model tersebut menjadi stasioner, karena $E(\Delta Y_t) = \beta_1$ dan $Var(\Delta Y_t) = \sigma_a^2$. Runtun $Y_t$ akan menunjukkan tren meningkat bila $\beta_1 > 0$ dan menunjukkan tren menurun bila $\beta_1 < 0$. Tren yang demikian disebut tren stokastik *(stochastic trend*).

Jika $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, dan $\beta_3$ = 0 maka modelnya menjadi

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + a_t \, .$$

Model ini disebut *deterministic trend*, dengan $E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t$ dan $Var(Y_t) = \sigma_a^2$. Jika $Y_t$ dikurangi dengan *mean*-nya maka akan menghasilkan runtun *white noise* (runtun stasioner), $Y_t - E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t + a_t - \beta_1 + \beta_2 t = a_t$ . Proses ini disebut dengan *Trend Stationary Process* (TSP).

### 2.1.11 Operator *Backshift*

Operator *backshift*, dinotasikan dengan $B$, digunakan untuk menyatakan dan memanipulasi bentuk model MA($q$), AR($p$), dan ARMA ($p$, $q$) agar menjadi lebih sederhana. Operator *backshift* dituliskan sebagai berikut:

$$B(Y_t) = Y_{t-1}.$$

Jika diketahui konstanta $a$, $b$, dan $c$ serta runtun $Y_t$ dan $Z_t$, operator *backshift* bersifat linier.

$$B(aY_t + bZ_t + c) = a[B(Y_t)] + b[B(Z_t)] + c.$$

Model MA($q$) dapat dinyatakan dalam operator *backshift*, sebagai berikut:

$$a_{t-1} = B(a_t)$$

$$a_{t-2} = B^2(a_t)$$

$$\vdots$$

$$a_{t-q} = B^q(a_t)$$

maka,

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$= \mu + a_t - \theta_1 B(a_t) - \theta_2 B^2(a_t) - \ldots - \theta_q B^q(a_t)$$

$$= \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)(a_t)$$

atau

$$Y_t = \mu + \theta(B) a_t$$

dengan $\theta(B)$ adalah polinomial karateristik MA yang dievaluasi pada $B$.

Untuk model AR($p$), operator *backshift* dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_{t-1} = B(Y_t)$$

$$Y_{t-2} = B^2(Y_t)$$

$$\vdots$$

$$Y_{t-p} = B^p(Y_t)$$

maka,

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

$$= \delta + \phi_1 B(Y_t) + \phi_2 B^2(Y_t) + \ldots + \phi_p B^p(Y_t) + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) Y_t = \delta + a_t$$

atau

$$\phi(B) Y_t = \delta + a_t$$

dengan $\phi(B)$ adalah polinomial karateristik AR yang dievaluasi pada $B$.

Untuk model ARMA($p$, $q$), operator *backshift* dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) Y_t = \delta + a_t - \theta_1 B(a_t) - \theta_2 B^2(a_t) - \ldots - \theta_q B^q(a_t)$$

$$\phi(B) Y_t = \delta + \theta(B) a_t.$$

Kestasioneran melalui proses *difference* juga dapat dinyatakan dalam bentuk operator *backshift*, sebagai berikut:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - B(Y_t) = (1 - B) Y_t.$$

Untuk proses *difference* ke-$d$, operator *backshift* dinyatakan sebagai berikut:

$$\Delta^d Y_t = (1 - B)^d Y_t.$$

## 2.2 MODEL REGRESI LINIER

Analisis regresi merupakan salah satu metode untuk melihat hubungan antara peubah bebas (*independent*) dengan peubah terikat (*dependent*) yang dinyatakan dalam model regresi.

### 2.2.1 Regresi Linier Sederhana

Regresi linier sederhana merupakan model regresi yang melibatkan satu peubah bebas (*independent*) dengan satu peubah terikat (*dependent*) yang dinyatakan dalam garis lurus.

Bentuk model regresi linier sederhana untuk sampel dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dengan:

$y_i$ : nilai dari peubah terikat untuk pengamatan ke-$i$

$x_i$ : nilai dari peubah bebas untuk pengamatan ke-$i$

$\beta_0, \beta_1$ : parameter-parameter model regresi

$\varepsilon_i$ : komponen random *error*; $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

$n$ : jumlah pengamatan

### 2.2.2 Taksiran Parameter Model Regresi Linier Sederhana

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menaksir paramater model regresi linier sederhana adalah metode kuadrat terkecil atau *Ordinary Least Squares* (OLS). Prinsip dari metode OLS adalah dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error*.

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 .$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 .$$

Dengan menggunakan prinsip turunan, maka diperoleh taksiran parameter model regresi linier sederhana, dinotasikan dengan $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, sebagai berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_0}\bigg|_{\hat{\beta}_0,\,\hat{\beta}_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_1}\bigg|_{\hat{\beta}_0,\,\hat{\beta}_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)x_i = 0\,.$$

Dengan menyederhanakan kedua persamaan di atas, maka diperoleh taksiran $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1\overline{x}\,,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\,,$$

dengan $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ dan $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ .

Asumsi-asumsi yang melandasi taksiran parameter model regresi linier dengan metode OLS adalah sebagai berikut:

1. $E(\varepsilon_i) = 0$.
2. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ untuk setiap $i$ (homoskedastisitas).
3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$ (tidak ada otokorelasi).
4. $\varepsilon_i \sim N.I.D.(0, \sigma^2)$.

### 2.2.3 Pengujian Hipotesis Model Regresi Linier Sederhana

Setelah taksiran parameter model regresi linier diperoleh, selanjutnya akan dilakukan pengujian hipotesis terhadap parameter-parameter tersebut dengan menggunakan uji *t*. Uji *t* digunakan untuk menguji apakah peubah bebas mempunyai pengaruh terhadap peubah terikat atau dengan kata lain apakah peubah bebas signifikan dalam memprediksi peubah terikat.

- Hipotesis: $H_0$: $\beta_j = 0$

  $H_1$: $\beta_j \neq 0$

- Statistik uji: $t_{hitung} = \dfrac{\hat{\beta}_j}{s_{\hat{\beta}_j}}$

  dengan:

  $\hat{\beta}_j$ : taksiran parameter regresi ke-*j*, *j* = 0, 1

  $s_{\hat{\beta}_j}$ : *standard error* taksiran parameter regresi ke-*j*

- Aturan keputusan menyatakan bahwa $H_0$ ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| > t_{\alpha/2;\,n-2}$.

### 2.2.4 Koefisien Determinasi ($R^2$)

Koefisien determinasi ($R^2$) merupakan proporsi variasi dari peubah terikat yang dapat dijelaskan oleh peubah bebas melalui model regresi linier. Nilai koefisien determinasi berada di antara nol dan satu, $0 \leq R^2 \leq 1$. Angka tersebut dapat mengukur seberapa dekat garis regresi yang terestimasi dengan data sesungguhnya. Semakin besar nilai $R^2$, maka semakin baik model regresi linier yang terbentuk.

Koefisien determinasi ($R^2$) didefinisikan sebagai berikut:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{SSR}{SST}$$

dengan:

SSE (*Sum of Squares Error*) = $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

SST (*Sum of Squares Total*) = $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$

SSR (*Sum of Squares Regression*) = SST − SSE = $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$

Secara statistik, interpretasi dari koefisien determinasi ($R^2$) adalah sekitar ($R^2$ x 100%) variasi dari sampel pada peubah terikat dapat dijelaskan oleh peubah-peubah bebas untuk memprediksi peubah terikat dalam model regresi garis linier.

## 2.3 UJI *DURBIN-WATSON*

Uji *Durbin-Watson* digunakan untuk mendeteksi apakah terdapat korelasi antar-residual.

- Hipotesis: $H_0$: Tidak ada korelasi antar-residual

  $H_1$: Terdapat korelasi antar-residual

- Statistik uji DW: $d = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$

  dengan $n$ adalah jumlah pengamatan dan $(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})$ menyatakan selisih antara residual yang berurutan. Dengan menjabarkan persamaan di atas, maka diperoleh

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}.$$

  Jika antar-residual tidak berkorelasi maka $\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx 0$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 2$. Jika antar-residual sangat berkorelasi positif maka $\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx \sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 0$. Jika antar-residual sangat berkorelasi negatif maka $\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx -\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2$, sehingga nilai statistik uji $d \approx 4$.

Tabel *Durbin-Watson* terdiri dari dua nilai, yaitu batas atas ($d_U$) dan batas bawah ($d_L$). Nilai-nilai ini dapat digunakan sebagai pembanding uji *Durbin-Watson* dengan aturan sebagai berikut:

1. Jika $d < d_{L,\,\alpha}$, berarti terdapat korelasi positif.
2. Jika $d_{L,\,\alpha} \le d \le d_{U,\,\alpha}$, berarti tidak dapat diambil kesimpulan apapun.
3. Jika $d_{U,\,\alpha} < d < 4 - d_{U,\,\alpha}$, berarti tidak ada korelasi antar-residual.
4. Jika $4 - d_{U,\,\alpha} \le d \le 4 - d_{L,\,\alpha}$, berarti tidak dapat diambil kesimpulan apapun.
5. Jika $d > 4 - d_{L,\,\alpha}$, berarti terdapat korelasi negatif.

## 2.4 *UNIT ROOT TEST*

Selain menggunakan metode grafik (plot antara nilai pengamatan dengan waktu) dan korelogram (plot antara nilai otokorelasi sampel dengan *lag*-nya), asumsi kestasioneran dapat juga diperiksa dengan menggunakan uji formal yang disebut *unit root test*. Uji *unit root* yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah *Dickey-Fuller Test* dan *Augmented Dickey-Fuller Test*.

### 2.4.1 *Dickey-Fuller Test*

Dasar pemikiran dari *Dickey-Fuller Test* adalah menguji apakah suatu runtun waktu merupakan proses *random walk* atau bukan.

Misalkan $Y_t$ mengikuti model AR(1) berikut:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.4}$$

Jika $\phi_1$ = 1 maka model di atas menjadi *random walk*. Seperti telah disebutkan pada subbab sebelumnya, *random walk* merupakan proses stokastik yang nonstasioner; sehingga dapat dikatakan bahwa $Y_t$ mempunyai *unit root* —mengandung tren stokastik. Jika pada persamaan (2.4) kedua ruas dikurangi dengan $Y_{t-1}$ maka diperoleh

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Dari persamaan tersebut dapat dibuat hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta < 0 \end{array} \quad \text{atau} \quad \begin{array}{l} H_0 : \phi_1 = 1 \\ H_1 : \phi_1 < 1 \end{array}$$

Dickey dan Fuller (1979) telah menunjukkan bahwa *unit root* dibawah hipotesis nol, statistik uji *t* untuk taksiran parameter $Y_{t-1}$, $\hat{\delta}$, tidak mengikuti distribusi *t* sekalipun untuk sampel yang besar. Namun, Dickey dan Fuller telah membuktikan (dari sejumlah simulasi) bahwa uji *t* terhadap hipotesis di atas mengikuti statistik uji $\tau$ (tau) atau *Dickey-Fuller* (DF).

Teknik pengujian *unit root* adalah dengan membentuk regresi antara $\Delta Y$ dan $Y_{t-1}$. Dickey dan Fuller menetapkan tiga bentuk model regresi berikut:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.6}$$

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.7}$$

Pada model (2.5) tidak mengandung komponen deterministik, model (2.6) mengandung konstanta, dan model (2.7) mengandung konstanta dan *time* *trend*. Pada semua bentuk model di atas, jika parameter $\delta$ = 0 maka runtun $Y_t$ mengandung *unit root*. Lalu, hal yang sangat penting untuk diperhatikan adalah nilai kritis statistik uji $\tau$ untuk menguji hipotesis bahwa $\delta$ = 0 berbeda pada tiap bentuk model dan ukuran sampel. Tabel nilai kritis yang dibuat oleh Dickey-Fuller ini selanjutnya dikembangkan oleh MacKinnon (1991).

Penaksiran parameter $\delta$ pada satu atau lebih dari persamaan regresi di atas dilakukan dengan menggunakan metode OLS dan kemudian hitung nilai *standard error* untuk kasus yang bersesuaian. Statistik uji $\tau$ diperoleh dengan

$$\tau = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{std.\ error\ (\hat{\phi}_1)} \sim Dickey\text{-}Fuller\ .$$

Jika nilai statistik uji $\tau$ lebih kecil dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner, sedangkan jika nilai statistik uji $\tau$ lebih besar dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat nonstasioner.

### 2.4.2 *Augmented Dickey-Fuller Test*

Kekurangan dari *Dickey-Fuller Test* adalah dengan mengasumsikan bahwa komponen *error*, $\varepsilon_t$, tidak berkorelasi pada model (2.5), (2.6), dan (2.7). Untuk mengantisipasi adanya korelasi tersebut, Dickey dan Fuller

(1981) mengembangkan pengujian *Dickey-Fuller Test* menjadi *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) *Test*.

Pengujian *Dickey-Fuller* dapat diperluas untuk model AR dengan order lebih dari satu. Perhatikan model AR(2) berikut:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2.8}$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (2.8) dengan $\phi_2 Y_{t-1}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + (\phi_2 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-1}) + \varepsilon_t \\ Y_t &= \mu + (\phi_1 + \phi_2) Y_{t-1} - \phi_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t . \end{aligned}$$

Kemudian, kurangi kedua ruas dengan $Y_{t-1}$; sehingga

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \mu + (\phi_1 + \phi_2) Y_{t-1} - Y_{t-1} - \phi_2 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta Y &= \mu + (\phi_1 + \phi_2 - 1) Y_{t-1} - \phi_2 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta Y_t &= \mu + \delta Y_{t-1} + \alpha \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

dengan $\delta = \phi_1 + \phi_2 - 1$ dan $\alpha = -\phi_2$.

Kemudian, perhatikan model AR(3) berikut:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t \tag{2.9}$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (2.9) dengan $\phi_3 Y_{t-2}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + (\phi_3 Y_{t-2} - \phi_3 Y_{t-2}) + \varepsilon_t \\ Y_t &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + (\phi_2 + \phi_3) Y_{t-2} - \phi_3 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t . \end{aligned}$$

Kemudian, kurangi kedua ruas dengan $(\phi_2 + \phi_3) Y_{t-1}$; sehingga

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + (\phi_2 + \phi_3) Y_{t-2} - \phi_3 \Delta Y_{t-2} + \{(\phi_2 + \phi_3) Y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) Y_{t-1}\} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) Y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - \phi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) Y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) \Delta Y_{t-1} - \phi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t .$$

Terakhir, lakukan operasi pengurangan pada kedua ruas dengan $Y_{t-1}$; sehingga diperoleh

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) Y_{t-1} - Y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) \Delta Y_{t-1} - \phi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$\Delta Y_t = \mu + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 1) Y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) \Delta Y_{t-1} - \phi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

dengan $\delta = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 1$, $\alpha_1 = -(\phi_2 + \phi_3)$, dan $\alpha_2 = -\phi_3$.

Dengan melihat pola yang ada pada model AR(2) dan AR(3) di atas, pengujian *Dickey-Fuller* dapat diperluas untuk model AR(*p*).

Perhatikan model AR(*p*) berikut:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_{p-1} Y_{t-p+1} + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (2.10)$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (2.10) dengan $\phi_p Y_{t-p+1}$, sehingga diperoleh

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_{p-1} Y_{t-p+1} + \phi_p Y_{t-p} + (\phi_p Y_{t-p+1} - \phi_p Y_{t-p+1}) + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+1} - \phi_p (Y_{t-p+1} - Y_{t-p}) + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+1} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t .$$

Selanjutnya, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan $(\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+2}$; sehingga diperoleh

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+1} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \{(\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+2}\} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p)(Y_{t-p+2} - Y_{t-p+1}) - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) Y_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p) \Delta Y_{t-p+2} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t .$$

Dengan melakukan hal yang serupa, maka akan diperoleh

$$Y_t = \mu + (\phi_1 + \ldots + \phi_p)Y_{t-1} - (\phi_2 + \ldots + \phi_p)\Delta Y_{t-1} - \ldots - (\phi_{p\text{-}1} + \phi_p)\Delta Y_{t-p+2} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t \,.$$

Langkah terakhir adalah dengan melakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan $Y_{t-1}$, sehingga diperoleh

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + (\phi_1 + \ldots + \phi_p)Y_{t-1} - Y_{t-1} - (\phi_2 + \ldots + \phi_p)\Delta Y_{t-1} - \ldots - (\phi_{p\text{-}1} + \phi_p)\Delta Y_{t-p+2} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + (\phi_1 + \ldots + \phi_p - 1)Y_{t-1} - (\phi_2 + \ldots + \phi_p)\Delta Y_{t-1} - \ldots - (\phi_{p\text{-}1} + \phi_p)\Delta Y_{t-p+2} - \phi_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \qquad (2.11)$$

dengan $\delta = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$ dan $\alpha_i = -\sum_{j=i}^{p} \phi_j$ .

Jika model regresi (2.11) ditambahkan dengan komponen *time trend* maka akan terbentuk model regresi berikut:

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (2.12)$$

dengan $\delta = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$, $\alpha_i^* = -\sum_{j=i+1}^{p} \phi_j$ , $\varepsilon_t$ adalah komponen *error*, dan $m = p - 1$ adalah panjang *lag*. Model regresi (2.12) inilah yang akan diuji dengan *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) *Test*. Berdasarkan model regresi (2.12), dapat dipilih tiga bentuk model regresi yang akan digunakan untuk melakukan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF), yaitu:

1. Model dengan konstanta ($\mu$) dan *trend* ($\beta$), sebagaimana model (2.12).
2. Model dengan konstanta ($\mu$), yaitu:

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \,.$$

3. Model tanpa *konstanta* ($\mu$) dan *trend* ($\beta$), yaitu:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \, .$$

Terlalu banyak melibatkan *lag* pada model (2.12) akan mengurangi *power* —probabilitas menolak hipotesis nol yang salah— dari pengujian, sehingga pengujian cenderung untuk tidak menolak hipotesis nol. Hal ini disebabkan karena jumlah *lag* yang meningkat mengharuskan parameter tambahan untuk diestimasi, sehingga derajat bebas (*degree of freedom*) akan berkurang.

Salah satu metode untuk memilih panjang *lag* yang optimal adalah dengan menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC) dan *Schwarz Information Criterion* (SIC) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{AIC} = \ln\left(\frac{SSR}{n}\right) + \left(\frac{2k}{n}\right)$$

$$\text{SIC} = \ln\left(\frac{SSR}{n}\right) + \left(\frac{k \ln n}{n}\right)$$

dengan SSR adalah jumlah kuadrat residual, $n$ adalah ukuran sampel, dan $k$ jumlah parameter (termasuk *intercept*). Panjang *lag* ditentukan oleh nilai AIC atau SIC yang terkecil.

Alternatif lain untuk memilih panjang *lag* adalah dengan menggunakan metode *general-to-specific*. Metode ini diawali dengan pemilihan panjang *lag* terbesar ($m_{max}$). Lalu peubah *lagged*, $\Delta Y_{t-i}$, terakhir yang tidak signifikan dibuang. Kemudian, model diregresikan kembali dengan menggunakan panjang *lag* $m - 1$. Lakukan prosedur ini berulang-ulang hingga diperoleh peubah *lagged* yang signifikan. Jika tidak ada satu pun peubah *lagged* yang signifikan maka pilih $m = 0$, sehingga pengujiannya berubah menjadi *Dickey-Fuller Test*. Setelah menentukan panjang *lag* yang optimal, lakukan prosedur pengujian dengan menggunakan jenis model yang ada.

Dari model (2.12) dapat dibuat hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta < 0 \end{array} \quad \text{atau} \quad \begin{array}{l} H_0 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1 \\ H_1 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1 \end{array}$$

Selanjutnya, lakukan uji signifikansi berdasarkan hipotesis di atas. Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) mengikuti distribusi yang sama dengan uji *Dickey-Fuller* (DF), sehingga nilai kritis statistik uji $\tau$ juga dapat diterapkan pada ADF *Test*. Statistik uji $\tau$ diperoleh dengan

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i - 1}{std.\ error\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i\right)} \sim Dickey\text{-}Fuller\ .$$

Jika nilai statistik uji $\tau$ lebih kecil dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner, sedangkan jika nilai statistik uji $\tau$ lebih besar dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat nonstasioner.

## 2.5 UJI KAUSALITAS *GRANGER*

Dalam analisis ekonomi, sering kali ingin diketahui apakah perubahan satu peubah akan mempengaruhi peubah lain. Untuk mengetahui hal tersebut secara tepat, dapat digunakan suatu uji kausalitas yang diperkenalkan oleh Granger (1969). Uji Kausalitas *Granger* digunakan untuk mengindikasikan apakah suatu peubah mempunyai hubungan dua arah (*bilateral causality*) atau hanya satu arah. Uji ini melihat pengaruh pengamatan pada masa lalu terhadap kondisi sekarang, sehingga data yang digunakan adalah data runtun waktu.

Uji Kausalitas *Granger* meliputi dua model regresi linier berikut:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j X_{t-j} + u_t \tag{2.13}$$

$$X_t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \delta_j Y_{t-j} + v_t \tag{2.14}$$

dengan *m* adalah panjang *lag*.

Hasil regresi kedua model regresi linier tersebut akan menghasilkan empat kemungkinan nilai parameter masing-masing regresi:

1. Jika secara statistik $\sum \beta_j \neq 0$ dan $\sum \delta_j = 0$ maka terdapat kausalitas satu arah dari peubah *X* ke peubah *Y*.
2. Jika secara statistik $\sum \beta_j = 0$ dan $\sum \delta_j \neq 0$ maka terdapat kausalitas satu arah dari peubah *Y* ke peubah *X*.

3. Jika secara statistik $\sum \beta_j = 0$ dan $\sum \delta_j = 0$ maka peubah *X* dan *Y* saling bebas.
4. Jika secara statistik $\sum \beta_j \neq 0$ dan $\sum \delta_j \neq 0$ maka terdapat kausalitas dua arah antara peubah *X* dan *Y*.

Agar dapat memperkuat indikasi adanya berbagai bentuk kausalitas seperti disebutkan di atas, maka dilakukan uji *F* untuk masing-masing model regresi. Untuk mengetahui apakah peubah *X* menyebabkan Y atau tidak pada model regresi (2.13), dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

1. Hipotesis: $H_0$: *X* tidak menyebabkan *Y* ($X \not\to Y$)

   $H_1$: *X* menyebabkan *Y* ($X \to Y$)

   Dalam model regresi linier, hal ini berarti parameter-parameter regresi bernilai nol; sehingga hipotesis nol dapat juga dituliskan sebagai berikut:

   $$H_0: \beta_1 = \beta_2 = . . . = \beta_m = 0.$$

2. Bentuk model regresi *unrestricted* (penuh)

   $$Y_t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j X_{t-j} + u_t$$

   dan hitung *Sum of Squares Error*-nya ($SSE_{penuh}$).

3. Bentuk model regresi *restricted* (terbatas)

   $$Y_t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y_{t-i} + u_t$$

   dan hitung *Sum of Squares Error*-nya ($SSE_{terbatas}$).

4. Lakukan uji *F* berdasarkan *Sum of Squares Error* (SSE) yang diperoleh pada tahap 2 dan 3 dengan formula sebagai berikut:

$$F_{hitung} = \left(\frac{n-k}{q}\right)\left(\frac{SSE_{terbatas} - SSE_{penuh}}{SSE_{penuh}}\right)$$

dengan:

*n* : jumlah pengamatan

*k* : jumlah parameter model regresi *unrestricted* (penuh)

*q* : jumlah parameter model regresi *restricted* (terbatas)

5. Jika $F_{hitung} > F_{\alpha;q,n-k}$ maka $H_0$ ditolak. Artinya, *X* mempengaruhi *Y*. Cara yang serupa juga dapat dilakukan untuk melihat apakah *Y* mempunyai pengaruh terhadap *X*.

Sebelum uji Kausalitas *Granger* ini dilakukan, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan:

1. Peubah *X* dan *Y* diasumsikan stasioner.
2. Jumlah *lag* yang diikutsertakan pada model regresi sangat penting untuk diperhatikan. Nilai AIC atau SIC dapat digunakan untuk pemilihan lag tetapi harus juga diperhatikan bahwa arah kausalitas mungkin bergantung jumlah *lag* yang diikutsertakan.
3. Komponen *error*, $u_t$ dan $v_t$, diasumsikan tidak berkorelasi.
4. Nilai taksiran parameter regresi tidak menjadi perhatian utama pada pengujian ini, hanya nilai uji *F* yang diperhatikan.

Hal lain yang perlu diperhatikan dari formula di atas adalah apabila SSE model regresi penuh sama atau mendekati SSE model regresi terbatas maka dapat dikatakan bahwa penambahan peubah bebas *X* dalam model penuh tidak mempunyai arti untuk memperkecil *error* atau dengan kata lain peubah *X* tidak mempunyai pengaruh terhadap *Y* atau peubah *X* tidak mampu menjelaskan peubah *Y* secara signifikan.

Pemilihan jumlah *lag* yang optimal dapat juga dilakukan dengan cara sebagai berikut: gunakan *lag* dimulai dari yang terkecil, yaitu *m* = 1. Hal ini dianjurkan karena pada umumnya pengaruh *lag* yang berdekatan lebih tinggi dibanding *lag* yang lebih jauh. Bila uji *F* memberikan hasil yang signifikan (menolak $H_0$), dapat diuji kembali dengan menggunakan *lag m* = 2. Proses tersebut dapat terus dilanjutkan hingga uji *F* menghasilkan nilai yang tidak signifikan (tidak menolak $H_0$) dan pastikan hasil yang diperoleh tidak sensitif terhadap pemilihan *lag m* (Nachrowi dan Usman, 2006).

## 2.6 *SPURIOUS REGRESSION*

Perhatikan persamaan regresi linier berikut:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \tag{2.15}$$

Asumsi model regresi linier klasik mengharuskan bahwa runtun $\{Y_t\}$ dan $\{X_t\}$ stasioner serta komponen *error* mempunyai *mean* sama dengan nol dan variansi $\sigma_\varepsilon^2$. Jika model regresi linier ini dibentuk dari peubah-peubah nonstasioner yang tidak berkorelasi maka akan terbentuk apa yang Granger dan Newbold (1974) sebut dengan *nonsense* atau *spurious regression* (regresi palsu). Contoh dari *spurious regression* adalah regresi antara produksi susu di suatu daerah dengan jumlah penumpang suatu maskapai penerbangan di daerah tersebut —dimana peubah-peubah tersebut adalah peubah nonstasioner yang tidak berkorelasi secara substansi.

Granger dan Newbold memperoleh kesimpulan tentang *spurious regression* dari sejumlah simulasi yang dilakukan pada dua proses *random walk* yang saling bebas berikut:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \qquad u_t \sim i.i.d.\,(0, \sigma_u^2)$$
$$X_t = X_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim i.i.d.\,(0, \sigma_v^2)$$

dimana $u_t$ dan $v_t$ diasumsikan tidak berkorelasi. Granger dan Newbold membangkitkan beberapa sampel untuk tiap regresi terestimasi $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$ dan mengamati nilai statistik uji *t* pada taksiran parameter regresi, $\hat{\beta}_1$, yang dihitung di bawah asumsi nilai sebenarnya dari parameter tersebut sama dengan nol, $\beta_1 = 0$. Walaupun pada kenyataannya runtun $Y_t$} dan {$X_t$} saling bebas, Granger dan Newbold menemukan bahwa hipotesis nol, $H_0$: $\beta_1 = 0$, lebih sering ditolak melebihi prediksi dari standar teori. Pada waktu yang bersaman ditemukan juga bahwa residual yang dihasilkan dari persamaan regresi terestimasi menunjukkan otokorelasi positif yang sangat kuat. Hasil dari simulasi ini mengindikasikan bahwa beberapa hubungan yang nampaknya signifikan antara peubah-peubah nonstasioner dalam model ekonometrika dapat menyebabkan *spurious regression*. Perlu diperhatikan bahwa persamaan regresi (2.15) tidak memiliki arti dalam ilmu ekonomi jika runtun residual, $\{\hat{\varepsilon}_t\}$, nonstasioner.

Bila metode OLS diterapkan pada *spurious regression* maka akan menghasilkan nilai koefisien determinasi ($R^2$) yang tinggi dan statistik uji *t* yang signifikan. Nilai $R^2$ yang tinggi, yang diformulasikan dengan

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2}{\sum_{t=1}^{T} (Y_t - \bar{Y})^2},$$

muncul karena peubah terikat adalah peubah nonstasioner (mengandung tren stokastik); sehingga total variasi (SST) yang dihitung dengan $\sum_{t=1}^{T} (Y_t - \bar{Y})^2$ menjadi sangat besar. Hal ini diakibatkan oleh pengamatan-pengamatan ekstrim (terlalu besar atau terlalu kecil) atau *mean* yang tidak konstan (cenderung besar).

Hasil regresi yang "tampak baik" ini disebabkan karena taksiran *least squares* tidak konsisten —artinya, taksiran $\hat{\beta}$ tidak dapat mendekati nilai $\beta$ yang sebenarnya seiring dengan meningkatnya ukuran sampel— dan pengujian inferensi statistik yang biasa dipergunakan tidak berlaku pada *spurious regression* (Enders, 2004).

Namun, hasil regresi yang diperoleh tidak mempunyai arti dalam ilmu ekonomi. Jika *spurious regression* diinterpretasikan maka dikhawatirkan hasil analisisnya akan salah atau tidak sesuai dengan kondisi yang sebenarnya. Analisis yang salah tentunya akan berdampak pada keputusan yang diambil dan pada gilirannya akan membuat kebijakan yang merugikan banyak pihak.

Sebagai *rule of thumb*, Granger dan Newbold (1974) menyarankan bahwa model regresi linier terestimasi dapat dicurigai sebagai *spurious regression* apabila nilai $R^2 > d$ (statistik uji *Durbin-Watson*).

Dari sudut pandang statistik, masalah *spurious regression* dapat dihindari dengan melakukan proses *first difference* pada peubah-peubah nonstasioner dan melakukan prosedur regresi kembali. Adapun model regresi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t + \Delta \varepsilon_t .$$

Model regresi dalam bentuk *first difference* tersebut diperoleh dengan melakukan operasi pengurangan pada model regresi (2.15) dengan model regresi (2.15) satu periode sebelumnya, yaitu $Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$.

Namun, timbul dua masalah baru apabila cara ini digunakan. Pertama, proses *difference* tersebut sangat melemahkan otokorelasi residual positif yang kuat; sehingga dapat terbentuk inferensi parameter regresi yang salah. Kedua, sebagian besar peubah pada teori ekonomi dinyatakan pada tingkat aras (*level*); sehingga hubungan jangka panjang yang ada pada peubah-peubah tersebut akan hilang (Pfaff, 2008).

# BAB III

# KOINTEGRASI

Pada bab ini akan dibahas mengenai konsep integrasi, kointegrasi, *Error Correction Model* (ECM), pengujian kointegrasi, dan penaksiran parameter kointegrasi kasus bivariat.

## 3.1 KONSEP INTEGRASI, KOINTEGRASI, DAN *ERROR CORRECTION MODEL* (ECM)

### 3.1.1 Integrasi

Berbagai studi atas data runtun waktu seringkali menghasilkan data nonstasioner pada tingkat *level* (data awal). Bila hal ini terjadi, kestasioneran pada umumnya dapat dicapai dengan melakukan proses *difference* sebanyak satu kali atau pun lebih. Suatu runtun dikatakan terintegrasi pada orde $d$, dinotasikan dengan $I(d)$, jika runtun tersebut mencapai kestasioneran setelah dilakukan proses *difference* sebanyak $d$ kali. Perlu diperhatikan bahwa model ekonometrika tidak dapat ditentukan apabila orde integrasi dari peubah-peubah tidak diketahui.

Engle dan Granger (1987) mendefinisikan runtun terintegrasi sebagai berikut:

**Definisi 3.1.** Suatu runtun dikatakan terintegrasi pada orde $d$, dinotasikan dengan $X_t \sim I(d)$, jika runtun tersebut stasioner, *invertible*, dan dapat dinyatakan sebagai representasi ARMA setelah di-*difference* sebanyak $d$ kali.

Runtun stasioner, misalkan *white noise*, merupakan runtun yang terintegrasi pada orde nol, $I(0)$; sehingga istilah runtun waktu stasioner sama dengan runtun waktu yang terintegrasi pada orde nol. *Random walk* merupakan contoh dari runtun yang terintegrasi pada orde satu, $I(1)$, karena runtun tersebut harus di-*difference* satu kali agar mencapai kestasioneran. Kebanyakan runtun waktu ekonomi adalah runtun $I(1)$. Jika suatu runtun mencapai kestasioneran setelah di-*difference* sebanyak dua kali, yaitu:

$$\Delta\Delta X_t = \Delta(X_t - X_{t-1}) = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

maka runtun tersebut terintegrasi pada orde dua, $X_t \sim I(2)$.

Misalkan diketahui tiga buah runtun waktu (*time series*), yaitu $X_t$, $Y_t$, dan $Z_t$ serta konstanta $\alpha$ dan $\beta$ yang tidak sama dengan nol. Berikut adalah sifat-sifat dari runtun terintegrasi:

1. Jika $X_t \sim I(0)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = X_t + Y_t \sim I(1)$.
2. Jika $X_t \sim I(d)$ maka $Z_t = \alpha + \beta X_t \sim I(d)$.
3. Jika $X_t \sim I(d_1)$ dan $Y_t \sim I(d_2)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(d_2)$ dimana $d_2 > d_1$.

4. Jika $X_t \sim I(d)$ dan $Y_t \sim I(d)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(d^*)$; *d** biasanya sama dengan *d* tapi untuk beberapa kasus *d** < *d* (untuk kasus yang demikian akan dibahas pada subbab selanjutnya).

Karena ruang lingkup pada tugas akhir ini hanya membahas peubah dengan orde integrasi satu, maka pembuktian hanya dilakukan untuk $d = 1$. Berikut adalah pembuktian sifat-sifat runtun terintegrasi:

1. Jika $X_t \sim I(0)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = X_t + Y_t \sim I(1)$.

   Bukti:

   Runtun $X_t$ adalah suatu runtun stasioner, yang berarti bahwa $E(X_t) = \mu_X$, $Var(X_t) = \sigma_X^2$, dan $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k^{(1)}$. Sedangkan runtun $Y_t$ adalah runtun nonstasioner dengan orde integrasi satu. Namun setelah di-*difference* satu kali ($\Delta Y_t$), runtun tersebut menjadi runtun stasioner; sehingga $E(\Delta Y_t) = \mu_{\Delta Y}$, $Var(\Delta Y_t) = \sigma_{\Delta Y}^2$, dan $Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = \gamma_k^{(2)}$.

   Lakukan operasi pengurangan antara runtun $Z_t = X_t + Y_t$ dengan $Z_{t-1} = X_{t-1} + Y_{t-1}$, sehingga menghasilkan

   $$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= X_t - X_{t-1} + Y_t - Y_{t-1}, \\ \Delta Z_t &= \Delta X_t + \Delta Y_t. \end{aligned}$$

   Kemudian akan ditunjukkan bahwa runtun $Z_t$ yang telah di-*difference* satu kali ($\Delta Z_t$) adalah runtun stasioner dengan melihat fungsi *mean*, variansi, dan kovariansinya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\textit{Mean}: E(\Delta Z_t) &= E(\Delta X_t + \Delta Y_t) \\
&= E(\Delta X_t) + E(\Delta Y_t) \\
&= E(X_t - X_{t-1}) + \mu_{\Delta Y} \\
&= E(X_t) - E(X_{t-1}) + \mu_{\Delta Y} \\
&= \mu_X - \mu_X + \mu_{\Delta Y} \\
&= \mu_{\Delta Y} \quad \text{(konstan sepanjang waktu),}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Variansi}: Var(\Delta Z_t) &= Var(\Delta X_t + \Delta Y_t) \\
&= Var(\Delta X_t) + Var(\Delta Y_t) + 2Cov(\Delta X_t, \Delta Y_t) \\
&= Var(X_t - X_{t-1}) + \sigma^2_{\Delta Y} + 2\gamma_{\Delta X, \Delta Y} \\
&= Var(X_t) + Var(X_{t-1}) - 2Cov(X_t, X_{t-1}) + \sigma^2_{\Delta Y} + 2\gamma_{\Delta X, \Delta Y} \\
&= \sigma^2_X + \sigma^2_X - 2\gamma_1^{(1)} + \sigma^2_{\Delta Y} + 2\gamma_{\Delta X, \Delta Y} \quad \text{(konstan sepanjang waktu),}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Kovariansi}: Cov(\Delta Z_t, \Delta Z_{t-k}) &= Cov(\Delta X_t + \Delta Y_t, \Delta X_{t-k} + \Delta Y_{t-k}) \\
&= Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) + Cov(\Delta X_t, \Delta Y_{t-k}) + Cov(\Delta Y_t, \Delta X_{t-k}) \\
&\quad + Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) \\
&= Cov(X_t - X_{t-1}, X_{t-k} - X_{t-k-1}) + Cov(X_t - X_{t-1}, \Delta Y_{t-k}) \\
&\quad + Cov(\Delta Y_t, X_{t-k} - X_{t-k-1}) + \gamma_k^{(2)} \\
&= Cov(X_t, X_{t-k}) - Cov(X_t, X_{t-k-1}) - Cov(X_{t-1}, X_{t-k}) \\
&\quad + Cov(X_{t-1}, X_{t-k-1}) + Cov(X_t, \Delta Y_{t-k}) - Cov(X_{t-1}, \Delta Y_{t-k}) \\
&\quad + Cov(\Delta Y_t, X_{t-k}) - Cov(\Delta Y_t, X_{t-k-1}) + \gamma_k^{(2)} \\
&= \gamma_k^{(1)} - \gamma_{k-1}^{(1)} - \gamma_{k-1}^{(1)} + \gamma_{k-2}^{(1)} + \gamma_k^{(3)} - \gamma_{k-1}^{(3)} + \gamma_k^{(4)} - \gamma_{k-1}^{(4)} + \gamma_k^{(2)}
\end{aligned}
$$

(hanya bergantung pada *lag* k).

Runtun $Z_t$ telah memenuhi sifat-sifat runtun stasioner setelah di-*difference* satu kali, sehingga terbukti bahwa jika $X_t \sim I(0)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka

$Z_t = X_t + Y_t \sim I(1)$. (*Q.E.D.*)

2. Jika $X_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha + \beta X_t \sim I(1)$.

   Bukti:

   Runtun $X_t$ adalah suatu runtun nonstasioner dengan orde integrasi satu.

Namun setelah di-*difference* satu kali ($\Delta X_t$), runtun tersebut menjadi runtun stasioner; sehingga $E(\Delta X_t) = \mu_{\Delta Y}$ , $Var(\Delta X_t) = \sigma^2_{\Delta X}$ , dan $Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) = \gamma_k$ .

Lakukan operasi pengurangan antara runtun $Z_t = \alpha + \beta X_t$ dengan $Z_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1}$, sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \alpha - \alpha + \beta X_t - \beta X_{t-1}, \\ \Delta Z_t &= \beta(X_t - X_{t-1}), \\ \Delta Z_t &= \beta \Delta X_t. \end{aligned}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa runtun $Z_t$ yang telah di-*difference* satu kali ($\Delta Z_t$) adalah runtun stasioner dengan melihat fungsi *mean*, variansi, dan kovariansinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \textit{Mean}:\ E(\Delta Z_t) &= E(\beta \Delta X_t) \\ &= \beta E(\Delta X_t) \\ &= \beta \mu_{\Delta X} \quad \text{(konstan sepanjang waktu),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variansi}:\ Var(\Delta Z_t) &= Var(\beta \Delta X_t) \\ &= \beta^2 Var(\Delta X_t) \\ &= \beta^2 \sigma^2_{\Delta X} \quad \text{(konstan sepanjang waktu),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kovariansi}:\ Cov(\Delta Z_t, \Delta Z_{t-k}) &= Cov(\beta \Delta X_t, \beta \Delta X_{t-k}) \\ &= \beta^2 Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) \\ &= \beta^2 \gamma_k \quad \text{(hanya bergantung pada } \textit{lag} \text{ k).} \end{aligned}$$

Runtun $Z_t$ telah memenuhi sifat-sifat runtun stasioner setelah di-*difference* satu kali, sehingga terbukti bahwa jika $X_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha + \beta X_t \sim I(1)$.

(*Q.E.D.*)

3. Jika $X_t \sim I(0)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(1)$.

   Bukti:

   Runtun $X_t$ adalah suatu runtun stasioner, yang berarti bahwa $E(X_t) = \mu_X$, $Var(X_t) = \sigma_X^2$, dan $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k^{(1)}$. Sedangkan runtun $Y_t$ adalah runtun nonstasioner dengan orde integrasi satu. Namun setelah di-*difference* satu kali ($\Delta Y_t$), runtun tersebut menjadi runtun stasioner; sehingga $E(\Delta Y_t) = \mu_{\Delta Y}$, $Var(\Delta Y_t) = \sigma_{\Delta Y}^2$, dan $Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = \gamma_k^{(2)}$.

   Lakukan operasi pengurangan antara runtun $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t$ dengan $Z_{t-1} = \alpha X_{t-1} + \beta Y_{t-1}$, sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \alpha X_t - \alpha X_{t-1} + \beta Y_t - \beta Y_{t-1}, \\ \Delta Z_t &= \alpha(X_t - X_{t-1}) + \beta(Y_t - Y_{t-1}), \\ \Delta Z_t &= \alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t. \end{aligned}$$

   Kemudian akan ditunjukkan bahwa runtun $Z_t$ yang telah di-*difference* satu kali ($\Delta Z_t$) adalah runtun stasioner dengan melihat fungsi *mean*, variansi, dan kovariansinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \textit{Mean}:\ E(\Delta Z_t) &= E(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t) \\ &= \alpha E(\Delta X_t) + \beta E(\Delta Y_t) \\ &= \alpha [E(X_t - X_{t-1})] + \beta \mu_{\Delta Y} \\ &= \alpha E(X_t) - \alpha E(X_{t-1}) + \beta \mu_{\Delta Y} \\ &= \alpha \mu_X - \alpha \mu_X + \beta \mu_{\Delta Y} \\ &= \beta \mu_{\Delta Y} \quad \text{(konstan sepanjang waktu)}, \end{aligned}$$

Variansi: $Var(\Delta Z_t) = Var(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t)$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 Var(\Delta X_t) + \beta^2 Var(\Delta Y_t) + 2\alpha\beta Cov(\Delta X_t, \Delta Y_t) \\
&= \alpha^2 [Var(X_t - X_{t-1})] + \beta^2 \sigma^2_{\Delta Y} + 2\alpha\beta\gamma_{\Delta X, \Delta Y} \\
&= \alpha^2 [Var(X_t) + Var(X_{t-1}) - 2Cov(X_t, X_{t-1})] \\
&\quad + \beta^2 \sigma^2_{\Delta Y} + 2\alpha\beta\gamma_{\Delta X, \Delta Y} \\
&= \alpha^2 (\sigma^2_X + \sigma^2_X - 2\gamma^{(1)}_1) + \beta^2 \sigma^2_{\Delta Y} + 2\alpha\beta\gamma_{\Delta X, \Delta Y}
\end{aligned}$$

(konstan sepanjang waktu),

Kovariansi: $Cov(\Delta Z_t, \Delta Z_{t-k}) = Cov(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t, \alpha \Delta X_{t-k} + \beta \Delta Y_{t-k})$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) + \alpha\beta Cov(\Delta X_t, \Delta Y_{t-k}) \\
&\quad + \alpha\beta Cov(\Delta Y_t, \Delta X_{t-k}) + \beta^2 Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) \\
&= \alpha^2 Cov(X_t - X_{t-1}, X_{t-k} - X_{t-k-1}) \\
&\quad + \alpha\beta Cov(X_t - X_{t-1}, \Delta Y_{t-k}) \\
&\quad + \alpha\beta Cov(\Delta Y_t, X_{t-k} - X_{t-k-1}) + \beta^2 \gamma^{(2)}_k \\
&= \alpha^2 [Cov(X_t, X_{t-k}) - Cov(X_t, X_{t-k-1}) \\
&\quad - Cov(X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(X_{t-1}, X_{t-k-1})] \\
&\quad + \alpha\beta [Cov(X_t, \Delta Y_{t-k}) - Cov(X_{t-1}, \Delta Y_{t-k})] \\
&\quad + \alpha\beta [Cov(\Delta Y_t, X_{t-k}) - Cov(\Delta Y_t, X_{t-k-1})] + \beta^2 \gamma^{(2)}_k \\
&= \alpha^2 (\gamma^{(1)}_k - \gamma^{(1)}_{k-1} - \gamma^{(1)}_{k-1} + \gamma^{(1)}_{k-2}) \\
&\quad + \alpha\beta (\gamma^{(3)}_k - \gamma^{(3)}_{k-1} + \gamma^{(4)}_k - \gamma^{(4)}_{k-1}) + \beta^2 \gamma^{(2)}_k
\end{aligned}$$

(hanya bergantung pada *lag* k).

Runtun $Z_t$ telah memenuhi sifat-sifat runtun stasioner setelah di-*difference* satu kali, sehingga terbukti bahwa jika $X_t \sim I(0)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(1)$. (*Q.E.D.*)

4. Jika $X_t \sim I(1)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(1)$.

   Bukti:

   Runtun $X_t$ dan $Y_t$ adalah suatu runtun stasioner setelah di-*difference* satu kali, yang berarti bahwa runtun $\Delta X_t$ memenuhi sifat-sifat: $E(\Delta X_t) = \mu_{\Delta X}$,

$Var(\Delta X_t) = \sigma^2_{\Delta X}$, dan $Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) = \gamma_k^{(1)}$; serta runtun $\Delta Y_t$ memenuhi sifat-sifat: $E(\Delta Y_t) = \mu_{\Delta Y}$, $Var(\Delta Y_t) = \sigma^2_{\Delta Y}$, dan $Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) = \gamma_k^{(2)}$.

Lakukan operasi pengurangan antara runtun $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t$ dengan $Z_{t-1} = \alpha X_{t-1} + \beta Y_{t-1}$, sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \alpha X_t - \alpha X_{t-1} + \beta Y_t - \beta Y_{t-1}, \\ \Delta Z_t &= \alpha (X_t - X_{t-1}) + \beta (Y_t - Y_{t-1}), \\ \Delta Z_t &= \alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t. \end{aligned}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa runtun $Z_t$ yang telah di-*difference* satu kali ($\Delta Z_t$) adalah runtun stasioner dengan melihat fungsi *mean*, variansi, dan kovariansinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \textit{Mean}:\ E(\Delta Z_t) &= E(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t) \\ &= \alpha E(\Delta X_t) + \beta E(\Delta Y_t) \\ &= \alpha \mu_{\Delta X} + \beta \mu_{\Delta Y} \quad \text{(konstan sepanjang waktu)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variansi}:\ Var(\Delta Z_t) &= Var(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t) \\ &= \alpha^2 Var(\Delta X_t) + \beta^2 Var(\Delta Y_t) + 2\alpha\beta Cov(\Delta X_t, \Delta Y_t) \\ &= \alpha^2 \sigma^2_{\Delta X} + \beta^2 \sigma^2_{\Delta Y} + 2\alpha\beta \gamma_{\Delta X, \Delta Y} \quad \text{(konstan sepanjang waktu)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kovariansi}:\ Cov(\Delta Z_t, \Delta Z_{t-k}) &= Cov(\alpha \Delta X_t + \beta \Delta Y_t, \alpha \Delta X_{t-k} + \beta \Delta Y_{t-k}) \\ &= \alpha^2 Cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) + \alpha\beta Cov(\Delta X_t, \Delta Y_{t-k}) \\ &\quad + \alpha\beta Cov(\Delta Y_t, \Delta X_{t-k}) + \beta^2 Cov(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) \\ &= \alpha^2 \gamma_k^{(1)} + \alpha\beta \gamma_k^{(5)} + \alpha\beta \gamma_k^{(6)} + \beta^2 \gamma_k^{(2)} \\ &\quad \text{(hanya bergantung pada } \textit{lag} \text{ k)}. \end{aligned}$$

Runtun $Z_t$ telah memenuhi sifat-sifat runtun stasioner setelah di-*difference* satu kali, sehingga terbukti bahwa jika $X_t \sim I(1)$ dan $Y_t \sim I(1)$ maka $Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t \sim I(1)$. (*Q.E.D.*)

Perhatikan persamaan regresi linier berikut:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad (3.1)$$

Pada prinsipnya, terdapat empat kasus yang berlaku umum dalam melakukan inferensi statisik pada persamaan (3.1), yaitu:

1. Jika peubah $X_t$ dan $Y_t$ stasioner, $I(0)$, maka teknik regresi standar seperti, OLS dapat diterapkan pada persamaan (3.1).
2. Jika peubah nonstasioner $X_t$ dan $Y_t$ terintegrasi pada orde yang sama, misalkan $I(1)$, dan residual yang dihasilkan mengandung tren stokastik atau nonstasioner maka hasil regresi dari kedua peubah tersebut akan menghasilkan *spurious regression*.
3. Jika peubah nonstasioner $X_t$ dan $Y_t$ terintegrasi pada orde yang sama, misalkan $I(1)$, dan residual yang dihasilkan adalah stasioner, $I(0)$, maka kedua peubah tersebut terkointegrasi. Hal ini akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.
4. Jika peubah $X_t$ dan $Y_t$ terintegrasi pada orde yang berbeda maka peubah tersebut tidak mempunyai hubungan sama sekali (*drifting apart*) dan persamaan regresi (3.1) tidak mempunyai arti apapun.

### 3.1.2 Kointegrasi

Pada tahun 1981 Granger memperkenalkan konsep kointegrasi dan kemudian dipublikasikan oleh Engle dan Granger (1987) pada makalah ilmiahnya. Ide dibalik kointegrasi adalah mencari kombinasi linier di antara dua peubah *I*(*d*) yang menghasilkan sebuah peubah dengan orde integrasi yang lebih rendah. Jika dua atau lebih peubah nonstasioner, tetapi kombinasi linier dari peubah-peubah tersebut stasioner, maka peubah-peubah tersebut dikatakan terkointegrasi. Hal ini dimungkinkan karena kombinasi linier tersebut saling menghilangkan tren stokastik yang ada pada peubah nonstasioner. Granger (1986) menyatakan bahwa pengujian kointegrasi dapat dianggap sebagai pengujian awal untuk menghindari keadaan *spurious regression* (Gujarati, 2003).

Analisis kointegrasi secara formal diawali dengan menganggap suatu himpunan peubah ekonomi berada pada keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*) ketika pembatas (*constraint*) linier berikut:

$$\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_n x_{nt} = 0$$

berlaku (Enders, 2004). Persamaan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk vektor $\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{x_t} = 0$, dimana $\boldsymbol{\beta}'$ dan $\boldsymbol{x}_t$ menotasikan vektor $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dan $(x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})'$.

Pada sebagian besar periode waktu, peubah-peubah ekonomi yang dinyatakan dengan vektor $\boldsymbol{x}_t$ tidak berada pada kondisi keseimbangan. Penyimpangan dari keseimbangan jangka panjang tersebut dinamakan kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) yang dinotasikan dengan $e_t$, sehingga

$$e_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_n x_{nt}$$

atau dapat dinyatakan dengan $e_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x_t}$. Jika keseimbangan tersebut mempunyai arti dalam ilmu ekonomi maka kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) pasti stasioner.

Untuk lebih formal, Engle dan Granger (1987) mendefinisikan kointegrasi sebagai berikut:

**Definisi 3.2.** Komponen-komponen vektor $\boldsymbol{x_t}' = (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})$ dikatakan terkointegrasi pada orde *d*, *b*, dinotasikan dengan $\boldsymbol{x_t} \sim CI(d, b)$, jika

(a) Semua komponen vektor $\boldsymbol{x_t}$ adalah peubah $I(d)$ dan

(b) Terdapat sebuah vektor $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sedemikian sehingga $e_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x_t} \sim I(d-b)$, dimana $d \geq b > 0$. Vektor $\boldsymbol{\beta}$ disebut vektor kointegrasi.

Ada lima hal penting yang perlu diperhatikan dari definisi kointegrasi di atas, yaitu:

1. Secara teoritis dimungkinkan untuk terbentuknya kointegrasi dari hubungan nonlinier di antara peubah-peubah nonstasioner. Namun, hal ini baru mulai dikembangkan lebih lanjut oleh para pelaku ekonometri.
2. Perhatikan bahwa vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ tidak unik. Jika $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)'$ adalah vektor kointegrasi maka $(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\beta_n)'$ juga merupakan vektor kointegrasi untuk sebarang nilai $\lambda$ yang bukan nol. Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi kointegrasi di atas.

Bukti:

Misalkan terdapat vektor $\boldsymbol{\alpha}$ yang merupakan perkalian antara konstanta $\lambda$ yang bukan nol dengan vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$, ditulis dengan $\boldsymbol{\alpha}' = (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\beta_n)' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)'$. Jika semua komponen vektor $\boldsymbol{x}_t$ adalah peubah *I*(*d*) dan terdapat suatu vektor $\boldsymbol{\alpha}'$ sedemikian sehinggga dari kombinasi linier berikut:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \ldots + \alpha_n x_{nt} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_t &= \lambda\beta_1 x_{1t} + \lambda\beta_2 x_{2t} + \ldots + \lambda\beta_n x_{nt} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_t &= \lambda(\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_n x_{nt}) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_t &= \lambda e_t \end{aligned}$$

dapat ditunjukkan bahwa kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $\varepsilon_t$ stasioner maka vektor $\boldsymbol{\alpha}$ adalah vektor kointegrasi.

Definisi kointegrasi menyatakan bahwa kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $e_t$ stasioner, sehingga $E(e_t) = \mu_e$, $Var(e_t) = \sigma_e^2$, dan $Cov(e_t, e_{t-k}) = \gamma_k$. Dengan demikian, untuk suatu kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $\varepsilon_t$, fungsi *mean*, variansi, dan kovariansinya dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Mean:\ E(\varepsilon_t) &= E(\lambda e_t) \\ &= \lambda E(e_t) \\ &= \lambda\mu_e \quad \text{(konstan sepanjang waktu),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variansi}: Var(\varepsilon_t) &= Var(\lambda e_t) \\ &= \lambda^2 Var(e_t) \\ &= \lambda^2\sigma_e^2 \quad \text{(konstan sepanjang waktu),} \end{aligned}$$

$$\text{Kovariansi}: Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = Cov(\lambda e_t, \lambda e_{t-k})$$
$$= \lambda^2 Cov(e_t, e_{t-k})$$
$$= \lambda^2 \gamma_k \qquad \text{(hanya bergantung pada } lag \text{ k).}$$

Karena kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $\varepsilon_t$ memenuhi sifat-sifat runtun stasioner, maka terbukti bahwa vektor $\boldsymbol{\alpha}$ adalah vektor kointegrasi. (*Q.E.D.*)

Agar vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ menjadi unik, dilakukan proses normalisasi vektor kointegrasi pada salah satu peubah $\boldsymbol{x}_t$. Untuk menormalisasi vektor kointegrasi yang berkenaan dengan peubah $x_{1t}$, pilih $\beta_1 = 1$; sehingga, untuk kasus bivariat (dua peubah) misalnya, vektor kointegrasi tersebut menjadi $\boldsymbol{\beta}' = (1, \beta_2)$ dengan $\beta_2$ adalah paramater kointegrasi. Keunikan vektor kointegrasi tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Bukti:

Misalkan terdapat dua hubungan kointegrasi antara peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ yang keduanya adalah peubah nonstasioner, $I(1)$.

$$x_{1t} = \beta_1 x_{2t} + e_{1t}$$
$$x_{1t} = \beta_2 x_{2t} + e_{2t}$$

dimana $\beta_1 \neq \beta_2$ serta $e_{1t}$ dan $e_{2t}$ adalah peubah $I(0)$. Dengan melakukan operasi pengurangan pada kedua persamaan di atas diperoleh

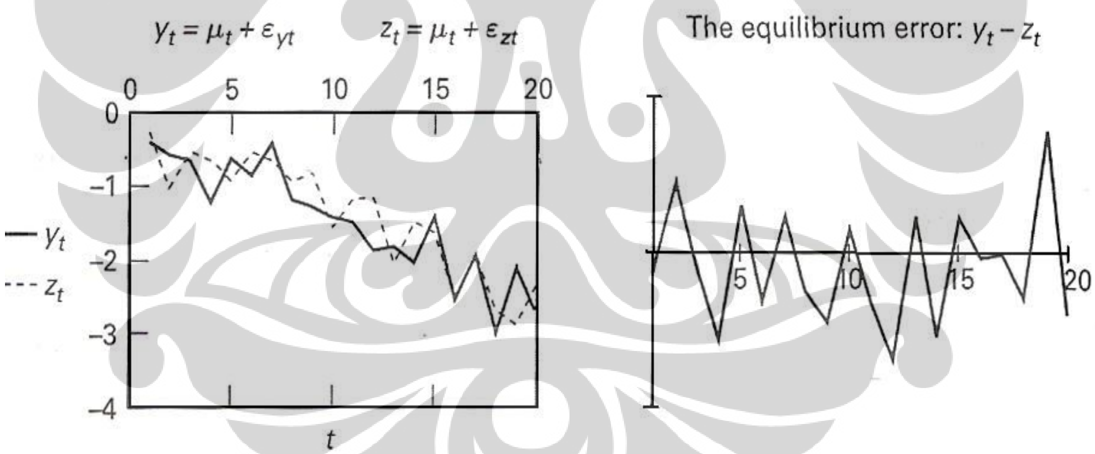
$$0 = \beta_1 x_{2t} - \beta_2 x_{2t} + e_{1t} - e_{2t}$$
$$0 = (\beta_1 - \beta_2) x_{2t} + e_{1t} - e_{2t}$$
$$(\beta_2 - \beta_1) x_{2t} = e_{1t} - e_{2t}.$$

Ruas kiri pada persamaan tersebut adalah peubah *I*(1) sedangkan ruas kanan adalah peubah *I*(0), karena selisih dari dua peubah *I*(0) adalah peubah *I*(0). Hal ini merupakan suatu kontradiksi, kecuali jika $\beta_1 = \beta_2$ pada kasus dimana $e_{1t} = e_{2t}$. (*Q.E.D.*)

3. Untuk membentuk hubungan kointegrasi, semua peubah harus memiliki orde integrasi yang sama; tetapi semua peubah yang memiliki orde integrasi sama tidak harus terkointegrasi. Meskipun demikian, hal tersebut bukan merupakan suatu masalah karena konsep kointegrasi telah diperluas dengan melibatkan jumlah peubah yang lebih dari dua buah dan dimungkinkannya peubah tersebut memiliki orde integrasi yang berbeda. Konsep ini disebut multikointegrasi.
4. Jika vektor $\mathbf{x}_t$ mempunyai $n$ komponen maka terdapat $n - 1$ vektor kointegrasi yang bebas secara linier. Oleh karena itu, jika vektor $\mathbf{x}_t$ hanya terdiri dari dua peubah maka paling banyak terdapat satu vektor kointegrasi. Jumlah dari vektor kointegrasi disebut peringkat kointegrasi (*cointegrating rank*) dari $\mathbf{x}_t$ yang dinotasikan dengan $r$.
5. Hubungan kointegrasi kebanyakan difokuskan pada kasus dimana peubah memiliki *unit root* tunggal atau dengan kata lain peubah tersebut terintegrasi pada orde satu, *I*(1).

Dalam ekonometrika, keseimbangan mengacu pada adanya hubungan jangka panjang di antara peubah-peubah nonstasioner. Keseimbangan jangka panjang ini dinyatakan secara implisit oleh kombinasi linier pada hubungan kointegrasi. Kointegrasi tidak mengharuskan hubungan jangka panjang disebabkan oleh kekuatan pasar (*market forces*) atau tingkah laku individu (*behavioral rule of individual*). Dalam konteks Engle dan Granger, hubungan keseimbangan dapat berupa sebab akibat, tingkah laku, atau hubungan *reduced-form* di antara peubah yang memiliki tren serupa (Enders, 2004).

Berikut adalah gambar yang mengilustrasikan hubungan kointegrasi:




Gambar 1. Ilustrasi hubungan kointegrasi [Sumber: Walter Enders 2004: 324]

Gambar di atas mengilustrasikan suatu hubungan kointegrasi yang dibentuk dari runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$. Runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$ tersebut dibangun dari proses *random walk plus noise* berikut:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = \mu_t + \varepsilon_{zt}$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

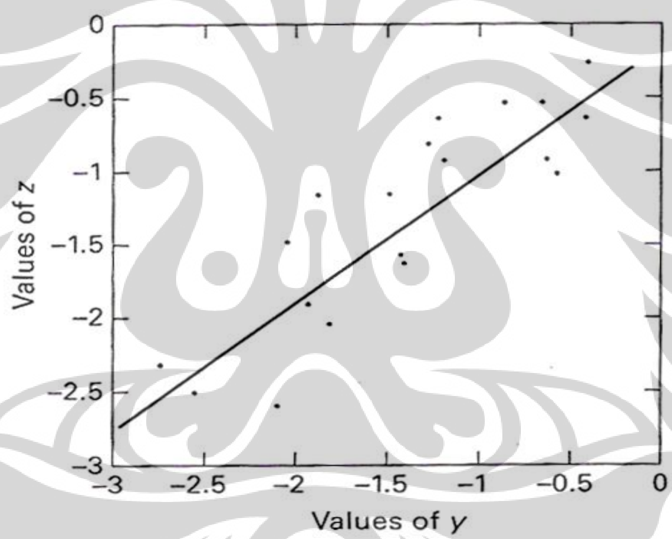
dimana runtun $\{\mu_t\}$ adalah proses *random walk* serta runtun $\{\varepsilon_{yt}\}$, $\{\varepsilon_{zt}\}$, dan $\{\varepsilon_t\}$ adalah *white noise* yang saling bebas. Dari pembentukan kedua runtun tersebut, runtun $\{\mu_t\}$ yang merupakan proses *random walk* inilah yang membuat runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$ memilki tren stokastik yang sama.

Walaupun runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$ nonstasioner, kedua runtun tersebut memiliki tren stokastik yang sama; karena itu, kedua runtun tersebut terkointegrasi sedemikian sehingga terdapat kombinasi linier yang stasioner:

$$y_t - z_t = (\mu_t + \varepsilon_{yt}) - (\mu_t + \varepsilon_{zt}) = \varepsilon_{yt} - \varepsilon_{zt}.$$

Kombinasi linier tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan definisi kointegrasi, yaitu dengan melakukan operasi perkalian pada vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ = (1, –1) dengan vektor $\mathbf{x}_t = (y_t, z_t)'$ sehingga menghasilkan runtun $e_t = (y_t - z_t) = (\varepsilon_{yt} - \varepsilon_{zt})$ yang stasioner. Komponen kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $e_t$ yang stasioner ditunjukkan pada grafik kedua dari gambar 1. Pada grafik tersebut terlihat bahwa komponen kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $e_t$ memiliki *mean* dan variansi yang konstan.

Gambar di bawah ini menampilkan informasi mengenai hubungan kointegrasi yang dibentuk dari runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$ pada suatu *Scatterplot* antara nilai-nilai runtun $\{y_t\}$ yang bersesuaian dengan runtun $\{z_t\}$. Karena kedua runtun tersebut memiliki tren yang sama, maka terdapat suatu hubungan positif di antara kedua runtun tersebut. Garis *least squares* atau garis regresi terestimasi pada *Scatterplot* inilah yang menyatakan hubungan positif yang kuat antara runtun $\{y_t\}$ dan $\{z_t\}$. Garis ini merupakan hubungan keseimbangan "jangka panjang" antara kedua runtun tersebut dan pengamatan-pengamatan yang menyimpang dari garis regresi terestimasi adalah penyimpangan dari keseimbangan jangka panjang —*equilibrium error*— yang stasioner.




Gambar 2. *Scatterplot* dari peubah-peubah yang terkointegrasi
[Sumber: Walter Enders 2004: 325]

### 3.1.3 *Error Correction Model* (ECM)

Ciri utama dari peubah-peubah yang terkointegrasi adalah jalur waktu (*time path*) dari peubah-peubah tersebut dipengaruhi oleh seberapa besar penyimpangan peubah-peubah tersebut dari keseimbangan jangka panjang. Jika suatu peubah menyimpang dari peubah lainnya maka harus ada suatu cara untuk membuat peubah-peubah tersebut kembali kepada keseimbangan jangka panjang. Hal tersebut menyatakan konsep dari koreksi kesalahan (*error correction*).

Dalam ekonometrika, peubah yang saling terkointegrasi dikatakan dalam kondisi keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*). Sedangkan untuk jangka pendek perlu diperhitungkan adanya fluktuasi atau lonjakan peubah, karena pada jangka pendek bisa saja terjadi ketidakseimbangan (*disequilibrium*). Kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) dapat digunakan untuk mengikat tingkah laku jangka pendek (*short-run*) dari suatu peubah terhadap nilai jangka panjangnya (*long-run*).

Sargan (1964) memperkenalkan pertama kali (selanjutnya dipopulerkan oleh Engle dan Granger) suatu metode yang digunakan untuk mengoreksi ketidakseimbangan jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang yang disebut *Error Correction Model* (ECM).

Berikut adalah teorema yang menyatakan bahwa peubah-peubah yang terkointegrasi dapat direpresentasikan dengan *Error Correction Model* (ECM):

***Granger Representation Theorem.*** Jika vektor $\boldsymbol{x}_t$ berukuran ($n$ x 1) yang dinyatakan oleh representasi *Wold* dalam bentuk multivariat berikut:

$$(1 - B)\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{C}(B)\,\varepsilon_t \qquad (3.2)$$

terkointegrasi dengan $d = b = 1$ atau dengan kata lain terkointegrasi pada orde (1, 1) dan memiliki peringkat kointegrasi (*cointegrating rank*) $r$, maka

1. *rank* ($\boldsymbol{C}(1)$) = $n - r$.
2. Terdapat vektor representasi ARMA:

$$\boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{d}(B)\,\varepsilon_t$$

   dimana matriks $\boldsymbol{A}(B)$ dan $\boldsymbol{d}(B)$ yang berukuran ($n$ x $n$) mempunyai sifat-sifat berikut: $\boldsymbol{A}(1)$ memiliki *rank* $r$, $\boldsymbol{d}(B)$ adalah suatu perkalian matriks identitas dengan polinomial skalar, dan $\boldsymbol{A}(0) = \boldsymbol{I}_n$. Jika $\boldsymbol{d}(B) = 1$ maka representasi di atas dinyatakan sebagai *Vector Autoregression* (VAR).

3. Terdapat matriks $\boldsymbol{\beta}$ dan $\gamma$ yang berukuran ($n$ x $r$) yang memiliki *rank* $r$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1) = 0,$$

$$\boldsymbol{A}(1) = \gamma\boldsymbol{\beta}'.$$

4. Terdapat suatu representasi koreksi kesalahan (*error correction*) dengan $\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_t$ adalah sebuah vektor dari peubah-peubah acak stasioner yang berukuran ($r$ x 1):

$$\boldsymbol{A}^*(B)(1 - B)\boldsymbol{x}_t = -\gamma\boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{d}(B)\varepsilon_t$$

   dengan $\boldsymbol{A}^*(0) = \boldsymbol{I}_n$.

5. Vektor $\boldsymbol{e}_t$ yang dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{K}(B)\,\varepsilon_t,$$

$$(1 - B)\boldsymbol{e}_t = -\boldsymbol{\alpha}'\gamma\boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{J}(B)\varepsilon_t,$$

dimana $\boldsymbol{K}(B)$ adalah matriks polinomial *lag* yang berukuran ($r$ x $n$) yang diberikan oleh $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{C}^*(B)$ dengan semua elemen berhingga dari matriks $\boldsymbol{K}(1)$ yang memiliki *rank k*, dan det($\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\gamma}$) > 0.

6. Jika suatu representasi *Vector Autoregression* (VAR) dengan orde berhingga dimungkinkan maka VAR akan mempunyai bentuk

$$\boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

dan ECM akan mempunyai bentuk

$$\boldsymbol{A}^*(B)(1 - B)\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

dengan matriks $\boldsymbol{A}(B)$ dan $\boldsymbol{A}^*(B)$ adalah matriks polinomial berhingga.

Untuk membuktikan teorema tersebut, diperlukan lemma berikut (Engle dan Granger, 1987):

**Lemma.** Misalkan $\boldsymbol{G}(\lambda)$ adalah suatu matriks polinomial yang berukuran ($n$ x $n$) pada $\lambda \in [0, 1]$ dan definisikan $\boldsymbol{G}^*(\lambda)$ dari persamaan berikut:

$$\boldsymbol{G}(\lambda) = \boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda).$$

Jika *rank* ($\boldsymbol{G}(0)$) = $n - r$ untuk $1 \leq r \leq n$ dan jika $\boldsymbol{G}^*(0) \neq 0$ maka

(a) $det(\boldsymbol{G}(\lambda)) = \lambda^r g(\lambda)$, dimana $g(\lambda)$ adalah suatu polinomial,

(b) $Adj(\boldsymbol{G}(\lambda)) = \lambda^{r-1}\boldsymbol{H}(\lambda)$, dimana $1 \leq rank\ (\boldsymbol{H}(0)) \leq r$.

Karena pada tugas akhir ini pembahasan hanya mencakup representasi bentuk ECM yang diperoleh dengan memanipulasi bentuk VAR, maka hanya pernyataan (6) dari teorema tersebut yang digunakan. Oleh sebab itu, pembahasan selanjutnya akan dibuktikan pernyataan (6) dari teorema tersebut.

Bukti *Granger Representation Theorem*:

Pembuktian pernyataan (6) akan dilakukan dengan membuktikan pernyataan (1) hingga (4) dengan menetapkan $\boldsymbol{d}(B) = 1$.

Semua pernyataan pada *Granger Representation Theorem* mengharuskan adanya representasi *Wold* yang dinyatakan pada persamaan (3.2), dimana $\boldsymbol{C}(B) = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 B + \boldsymbol{C}_2 B^2 + \boldsymbol{C}_3 B^3 + \ldots$ adalah matriks polinomial *lag* berukuran ($n$ x $n$); $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ adalah vektor *white noise* dengan $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = \mathbf{0}$ dan $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s{}'] = \begin{cases} \mathbf{0}, t \neq s \\ \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, t = s \end{cases}$, atau dapat juga dinyatakan dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i.i.d.(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$; serta $\boldsymbol{x}_t$ adalah vektor peubah acak yang mempunyai $n$ buah komponen yang terintegrasi pada orde satu. Perhatikan bahwa matriks polinomial *lag* $\boldsymbol{C}(B)$ dapat dibentuk menjadi matriks polinomial berikut:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}(B) &= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 B + \boldsymbol{C}_2 B^2 + \boldsymbol{C}_3 B^3 + \ldots \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3 + \ldots - \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3 - \ldots - \boldsymbol{C}_2 B - \boldsymbol{C}_3 B - \ldots - \boldsymbol{C}_3 B^2 - \boldsymbol{C}_4 B^2 - \ldots \\
&\quad - \boldsymbol{C}_4 B^3 - \ldots + \boldsymbol{C}_1 B + \boldsymbol{C}_2 B + \boldsymbol{C}_3 B + \ldots + \boldsymbol{C}_2 B^2 + \boldsymbol{C}_3 B^2 + \boldsymbol{C}_4 B^2 + \ldots + \boldsymbol{C}_3 B^3 + \boldsymbol{C}_4 B^3 + \ldots \\
&= \boldsymbol{I}_n + (\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3 + \ldots) + (-\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3 - \ldots) + (-\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3 - \ldots)B + (-\boldsymbol{C}_3 - \boldsymbol{C}_4 - \ldots)B^2 \\
&\quad + \ldots - (-\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3 - \ldots)B - (-\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3 - \boldsymbol{C}_4 - \ldots)B^2 - (-\boldsymbol{C}_3 - \boldsymbol{C}_4 - \ldots)B^3 - \ldots \\
&= (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3 + \ldots) + \boldsymbol{C}_0^* + \boldsymbol{C}_1^* B + \boldsymbol{C}_2^* B^2 + \ldots - \boldsymbol{C}_0^* B - \boldsymbol{C}_1^* B^2 - \boldsymbol{C}_2^* B^3 - \ldots \\
&= (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3 + \ldots) + (1 - B)(\boldsymbol{C}_0^* + \boldsymbol{C}_1^* B + \boldsymbol{C}_2^* B^2 + \ldots) \\
&= \boldsymbol{C}(1) + (1 - B)\boldsymbol{C}^*(B)
\end{aligned}
$$

dimana $\boldsymbol{C}(1) = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3 + \ldots$, $\boldsymbol{C}^*(B) = \boldsymbol{C}_0^* + \boldsymbol{C}_1^* B + \boldsymbol{C}_2^* B^2 + \ldots$ dengan

$\boldsymbol{C}_i^* = -\sum_{j=i+1}^{\infty} \boldsymbol{C}_j$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Misalkan vektor $\boldsymbol{\beta}'$ adalah vektor kointegrasi sedemikian sehingga $\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{x}_t$ adalah proses stokastik yang stasioner (artinya, $\boldsymbol{e}_t$ terintegrasi pada orde nol). Dimensi dari ruang vektor kointegrasi disebut peringkat kointegrasi (*cointegrating rank*) dari $\boldsymbol{x}_t$.

Pernyataan (1) dibuktikan dengan melakukan operasi perkalian pada kedua ruas persamaan (3.2) dengan vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}'$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
(1-B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{C}(B)\varepsilon_t \\
(1-B)\boldsymbol{x}_t &= [\boldsymbol{C}(1) + (1-B)\boldsymbol{C}^*(B)]\varepsilon_t \\
\boldsymbol{\beta}'(1-B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\beta}'[\boldsymbol{C}(1) + (1-B)\boldsymbol{C}^*(B)]\varepsilon_t \\
(1-B)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_t &= [\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1) + (1-B)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}^*(B)]\varepsilon_t \\
(1-B)\boldsymbol{e}_t &= [\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1) + (1-B)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}^*(B)]\varepsilon_t .
\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{e}_t$ merupakan proses stasioner, *I*(0); maka kompenen pertama pada ruas kanan dari persamaan di atas harus memenuhi $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1) = 0$. Sebarang vektor $\boldsymbol{\beta}$ dengan sifat ini merupakan vektor kointegrasi. Dari persamaan $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1) = 0$ diketahui bahwa terdapat *r* buah vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ yang bebas secara linier, sehingga dim *null* dari matriks $\boldsymbol{C}(1)$ adalah *r*.

**Teorema Dimensi** (Anton, 2000) menyatakan bahwa jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks dengan *n* kolom maka

$$\text{rank}\ (\boldsymbol{A}) + \dim \text{null}\ (\boldsymbol{A}) = n.$$

Oleh karena itu, *rank* ($\boldsymbol{C}(1)$) = $n - \dim$ *null* ($\boldsymbol{C}(1)$) = $n - r$.

Pernyataan (2) dibuktikan dengan langkah berikut: pertama, ambil $\lambda$ = 1 − *B* dan $\boldsymbol{G}(\lambda) = \boldsymbol{C}(B)$, sehingga pada persamaan (3.2) menjadi

$$\begin{aligned}(1-B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{C}(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \lambda\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t.\end{aligned}$$

Selanjutnya, lakukan operasi perkalian pada kedua ruas persamaan di atas dengan $Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ [Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\lambda\boldsymbol{x}_t &= [Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \lambda[Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{x}_t &= [Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t,\end{aligned}$$

Rumus untuk invers suatu matriks adalah

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}Adj(\boldsymbol{A}) \\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}Adj(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} \\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{I}_n &= \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}Adj(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} \\ \Leftrightarrow det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n &= Adj(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\lambda[Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{x}_t &= det(\boldsymbol{G}(\lambda))\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \lambda[Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{x}_t &= det(\boldsymbol{G}(\lambda))\boldsymbol{\varepsilon}_t.\end{aligned}$$

Lalu, terapkan lemma pada persamaan di atas; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda[\lambda^{r-1}\boldsymbol{H}(\lambda)]\boldsymbol{x}_t &= [\lambda^r g(\lambda)]\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \lambda^r\boldsymbol{H}(\lambda)\boldsymbol{x}_t &= \lambda^r g(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{H}(\lambda)\boldsymbol{x}_t &= g(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

dimana $\boldsymbol{H}(0)$ memilki *rank* antara 1 dan *r*.

Langkah terakhir adalah dengan mendefinisikan matriks $\boldsymbol{H}(\lambda) = \boldsymbol{A}(B)$ dan $g(\lambda) = \boldsymbol{d}(B) = 1$, sehingga diperoleh representasi VAR berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\lambda)\boldsymbol{x}_t &= g(\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{d}(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

dimana $\boldsymbol{A}(B) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_1B - \boldsymbol{A}_2B^2 - \boldsymbol{A}_3B^3 - \ldots - \boldsymbol{A}_pB^p$, sehingga $\boldsymbol{A}(0) = \boldsymbol{I}_n$. Karena $1 \le$ *rank* $(\boldsymbol{H}(0)) \le r$, maka hal berikut juga berlaku: $1 \le$ *rank* $(\boldsymbol{A}(1)) \le r$ ($\lambda = 1 - B \Leftrightarrow B = 1 - \lambda = 1 - 0 = 1$); sehingga matriks $\boldsymbol{A}(1)$ memiliki *rank* $r$.

Pernyataan (3) dibuktikan sebagai berikut: dari definisi yang dinyatakan pada pembuktian pernyataan (2) diketahui bahwa $\boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{H}(0)$. Selanjutnya, dari lemma diperoleh definisi berikut:

$$\boldsymbol{G}(\lambda) = \boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda).$$

Lalu, kalikan kedua ruas dengan $Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))$; sehingga

$$\begin{aligned}[Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))]\boldsymbol{G}(\lambda) &= Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))[\boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda)]\\ \boldsymbol{I}_n det(\boldsymbol{G}(\lambda)) &= Adj(\boldsymbol{G}(\lambda))[\boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda)]\\ \boldsymbol{I}_n\lambda^r g(\lambda) &= \lambda^{r-1}\boldsymbol{H}(\lambda)[\boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda)]\\ \boldsymbol{I}_n\lambda^r g(\lambda) &= \lambda^r(\frac{1}{\lambda})\boldsymbol{H}(\lambda)[\boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda)]\\ \boldsymbol{I}_n\lambda g(\lambda) &= \boldsymbol{H}(\lambda)[\boldsymbol{G}(0) + \lambda\boldsymbol{G}^*(\lambda)]\end{aligned}$$

Untuk $\lambda = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_n 0g(0) &= \boldsymbol{H}(0)[\boldsymbol{G}(0) + 0\boldsymbol{G}^*(0)]\\ 0 &= \boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{G}(0).\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{G}(0) = 0$, maka dengan kata lain menyatakan bahwa $\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{C}(1) = 0$. Dari pembuktian pernyataan (1), vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ yang memenuhi $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}(1)=0$ akan membangun ruang nol (*null space*) dari matriks $\boldsymbol{C}(1)$. Karena $\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{C}(1)=0$, maka mengakibatkan matriks $\boldsymbol{A}(1)$ berada pada ruang nol (*null space*) dari matriks $\boldsymbol{C}(1)$; sehingga matriks $\boldsymbol{A}(1)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor kointegrasinya:

$$\boldsymbol{A}(1)=\boldsymbol{\gamma\beta}'.$$

Adapun representasi dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}(1)=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \cdots & \gamma_{rn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nr}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_{11}\beta_{11}+\gamma_{12}\beta_{21}+\ldots+\gamma_{1n}\beta_{n1} & \gamma_{11}\beta_{12}+\gamma_{12}\beta_{22}+\ldots+\gamma_{1n}\beta_{n2} & \cdots & \gamma_{11}\beta_{1r}+\gamma_{12}\beta_{2r}+\ldots+\gamma_{1n}\beta_{nr}\\ \gamma_{21}\beta_{11}+\gamma_{22}\beta_{21}+\ldots+\gamma_{2n}\beta_{n1} & \gamma_{21}\beta_{12}+\gamma_{22}\beta_{22}+\ldots+\gamma_{2n}\beta_{n2} & \cdots & \gamma_{21}\beta_{1r}+\gamma_{22}\beta_{2r}+\ldots+\gamma_{2n}\beta_{nr}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{r1}\beta_{11}+\gamma_{r2}\beta_{21}+\ldots+\gamma_{rn}\beta_{n1} & \gamma_{r1}\beta_{12}+\gamma_{r2}\beta_{22}+\ldots+\gamma_{rn}\beta_{n2} & \cdots & \gamma_{r1}\beta_{1r}+\gamma_{r2}\beta_{2r}+\ldots+\gamma_{rn}\beta_{nr}\end{bmatrix}$$

Pertama-tama pernyataan (4) dibuktikan dengan menjabarkan representasi *Vector Autoregression* (VAR), yang ada pada pernyataan (2), berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t\\ (\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}_1B-\boldsymbol{A}_2B^2-\ldots-\boldsymbol{A}_pB^p)\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{A}_1B\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{A}_2B^2\boldsymbol{x}_t-\ldots-\boldsymbol{A}_pB^p\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

Analog dengan kasus univariat (satu peubah), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2}-\ldots-\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p} &= \boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2}+\ldots+\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p}+\boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

Kemudian, lakukan pembentukan representasi koreksi kesalahan (*error correction*) dengan cara memanipulasi representasi VAR. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut: pertama, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan VAR dengan $\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1}$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p} + (\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p(\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{x}_{t-p}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}$$

Lalu, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan $(\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2}$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \{(\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)(\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{x}_{t-p+1}) - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}$$

Kemudian, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan $(\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3}$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} \\
&\quad + \{(\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-3} + \boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)(\boldsymbol{x}_{t-p+3} - \boldsymbol{x}_{t-p+2}) \\
&\quad - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-3} + \boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+3} \\
&\quad - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}$$

Dengan melakukan hal yang serupa, maka akan diperoleh

$$\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Selanjutnya, lakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan $\boldsymbol{x}_{t-1}$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1} = (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} \\
&\qquad\qquad - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\Delta\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} \\
&\qquad - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\Delta\boldsymbol{x}_t = -(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_1 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} \\
&\qquad - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\Delta\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{A}_1^*\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{A}_2^*\Delta\boldsymbol{x}_{t-2} - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-2}^*\Delta\boldsymbol{x}_{t-(p-2)} - \boldsymbol{A}_{p-1}^*\Delta\boldsymbol{x}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\Delta\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{A}_1^*B\Delta\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{A}_2^*B^2\Delta\boldsymbol{x}_t - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-2}^*B^{p-2}\Delta\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{A}_{p-1}^*B^{p-1}\Delta\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\Delta\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{A}_1^*B\Delta\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{A}_2^*B^2\Delta\boldsymbol{x}_t + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-2}^*B^{p-2}\Delta\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{A}_{p-1}^*B^{p-1}\Delta\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}_1^*B + \boldsymbol{A}_2^*B^2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-2}^*B^{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1}^*B^{p-1})\Delta\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\boldsymbol{A}^*(B)\Delta\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\boldsymbol{A}^*(B)(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1}) = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\boldsymbol{A}^*(B)(\boldsymbol{x}_t - B\boldsymbol{x}_t) = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\boldsymbol{A}^*(B)(1-B)\boldsymbol{x}_t = -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}$$

dengan $\boldsymbol{A}^*(B) = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}_1^*B + \boldsymbol{A}_2^*B^2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-1}^*B^{p-1}$; $\boldsymbol{A}_i^* = \sum_{j=i+1}^{p}\boldsymbol{A}_j$,

$i = 1, 2, \ldots, p-1$; dan $\boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_p$.

Langkah terakhir adalah dengan menerapkan pernyataan 3, yaitu $\boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{\gamma\beta}'$; sehingga diperoleh representasi koreksi kesalahan (*error correction*) berikut:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^*(B)(1-B)\boldsymbol{x}_t &= -\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{A}^*(B)(1-B)\boldsymbol{x}_t &= -\boldsymbol{\gamma\beta}'\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\boldsymbol{A}^*(B)(1-B)\boldsymbol{x}_t &= -\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}$$

dengan $\boldsymbol{A}^*(0) = \boldsymbol{I}_n$. (*Q.E.D.*)

Pembahasan selanjutnya adalah pembentukan representasi secara umum dari *Vector Error Correction Model* (VECM) yang diperoleh dengan memanipulasi representasi umum VAR orde $p$, VAR($p$).

Secara umum, bentuk VAR($p$) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (3.3)$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \vdots \\ \alpha_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(1) & \alpha_{12}(1) & \cdots & \alpha_{1n}(1) \\ \alpha_{21}(1) & \alpha_{22}(1) & \cdots & \alpha_{2n}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(1) & \alpha_{n2}(1) & \cdots & \alpha_{nn}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \vdots \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(2) & \alpha_{12}(2) & \cdots & \alpha_{1n}(2) \\ \alpha_{21}(2) & \alpha_{22}(2) & \cdots & \alpha_{2n}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(2) & \alpha_{n2}(2) & \cdots & \alpha_{nn}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-2} \\ x_{2t-2} \\ \vdots \\ x_{nt-2} \end{bmatrix}$$
$$+ \ldots + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(p) & \alpha_{12}(p) & \cdots & \alpha_{1n}(p) \\ \alpha_{21}(p) & \alpha_{22}(p) & \cdots & \alpha_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(p) & \alpha_{n2}(p) & \cdots & \alpha_{nn}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-p} \\ x_{2t-p} \\ \vdots \\ x_{nt-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha_{jk}(i)$, $j$, $k$ = 1, 2, . . ., $n$, adalah elemen-elemen dari matriks $\boldsymbol{A}_i$ ($i$ = 1, 2, . . . , $n$); dan vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ adalah vektor *white noise* dimana $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i.i.d.(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$.

Berdasarkan *Granger Representation Theorem*, terdapat suatu *Error Correction Model* (ECM) untuk peubah-peubah yang terkointegrasi pada orde (1, 1). Dengan menggunakan cara yang serupa seperti sebelumnya, berikut adalah proses pembentukan *Vector Error Correction Model* (VECM):

Pertama, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (3.3) dengan $\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1}$; sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p} + (\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_{t-p+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p(\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{x}_{t-p}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$
$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Lalu, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan $(\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2}$; sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \{(\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$
$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)(\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{x}_{t-p+1}) - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$
$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Selanjutnya, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan $(\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3}$; sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+2} - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1}\\ &\quad + \{(\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-3} + \boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)(\boldsymbol{x}_{t-p+3} - \boldsymbol{x}_{t-p+2})\\ &\quad - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \ldots + (\boldsymbol{A}_{p-3} + \boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-p+3} - (\boldsymbol{A}_{p-2} + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+3}\\ &\quad - (\boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

Dengan melakukan hal yang serupa, maka akan diperoleh

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p\text{-}1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Kemudian, langkah terakhir adalah dengan melakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan $\boldsymbol{x}_{t-1}$; sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{A}_0 + (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p\text{-}1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$
$$\Delta\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_0 + (\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}_{t-1} - (\boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \ldots - (\boldsymbol{A}_{p\text{-}1} + \boldsymbol{A}_p)\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+2} - \boldsymbol{A}_p\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\boldsymbol{\Pi}_i\Delta\boldsymbol{x}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (3.4)$$

dengan $\boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{\Pi} = -\left(\boldsymbol{I}_n - \sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{A}_i\right)$, dan $\boldsymbol{\Pi}_i = -\sum_{j=i+1}^{p}\boldsymbol{A}_j$ .

Uraikan kembali persamaan (3.4), sehingga diperoleh

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_1\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2\Delta\boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Pi}_{p-1}\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (3.5)$$

dengan $\boldsymbol{\Pi}_0$ adalah vektor konstanta yang berukuran ($n$ x 1), $\boldsymbol{\Pi}$ adalah matriks parameter yang berukuran ($n$ x $n$), $\boldsymbol{\Pi}_i$ adalah matriks koefisien yang berukuran ($n$ x $n$), dan $\varepsilon_t$ adalah vektor *white noise* $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{nt})'$ yang berukuran ($n$ x 1). Persamaan (3.5) disebut *Vector Error Correction Model* orde ($p$ − 1), dinotasikan dengan VECM($p$ − 1).

Misalkan semua peubah yang ada pada vektor $\boldsymbol{x}_t$ adalah peubah $I$(1). Jika terdapat representasi koreksi kesalahan (*error correction*) dari peubah-peubah pada persamaan (3.5) maka diperlukannya suatu kombinasi linier dari peubah-peubah $I$(1) yang stasioner. Dengan memindahkan komponen matriks $\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1}$ ke ruas kiri, maka diperoleh

$$\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1} = \Delta\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\Pi}_0 - \boldsymbol{\Pi}_1\Delta\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{\Pi}_2\Delta\boldsymbol{x}_{t-2} - \ldots - \boldsymbol{\Pi}_{p-1}\Delta\boldsymbol{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t\,.$$

Karena tiap pernyataan pada ruas kanan stasioner, maka komponen $\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1}$ harus stasioner juga; dan oleh karena matriks $\boldsymbol{\Pi}$ hanya mengandung konstanta, maka tiap baris dari matriks $\boldsymbol{\Pi}$ adalah vektor kointegrasi untuk $\boldsymbol{x}_t$. Contoh, baris pertama dari matriks $\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_{t-1}$ dapat ditulis sebagai $(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \ldots + \pi_{1n}x_{nt-1})$. Karena tiap peubah $\boldsymbol{x}_t$ adalah peubah $I$(1), maka vektor $(\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1n})'$ pasti menjadi vektor kointegrasi untuk $\boldsymbol{x}_t$.

Uraian di atas dapat menjelaskan hubungan antara ECM dan kointegrasi, yaitu bahwa ECM mengharuskan peubah-peubah $I$(1)

terkointegrasi pada orde (1, 1).

Ada dua hal penting yang patut diperhatikan. Pertama, jika semua elemen matriks $\mathbf{\Pi}$ sama dengan nol maka tidak ada representasi koreksi kesalahan (*error correction*), karena $\Delta \boldsymbol{x}_t$ tidak merespons terhadap penyimpangan dari keseimbangan jangka panjang periode sebelumnya, $(t-1)$. Kedua, jika satu atau lebih elemen matriks $\mathbf{\Pi}$ tidak sama dengan nol maka $\Delta \boldsymbol{x}_t$ merespons terhadap penyimpangan dari keseimbangan jangka panjang periode sebelumnya, $(t-1)$.

Berikut akan diuraikan elemen-elemen dari matriks yang ada pada persamaan (3.4):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \vdots \\ \Delta x_{nt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \vdots \\ \alpha_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(1)+\alpha_{11}(2)+\ldots+\alpha_{11}(p)-1 & \alpha_{12}(1)+\alpha_{12}(2)+\ldots+\alpha_{12}(p) & \cdots & \alpha_{1n}(1)+\alpha_{1n}(2)+\ldots+\alpha_{1n}(p) \\ \alpha_{21}(1)+\alpha_{21}(2)+\ldots+\alpha_{21}(p) & \alpha_{22}(1)+\alpha_{22}(2)+\ldots+\alpha_{22}(p)-1 & \cdots & \alpha_{2n}(1)+\alpha_{2n}(2)+\ldots+\alpha_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(1)+\alpha_{n1}(2)+\ldots+\alpha_{n1}(p) & \alpha_{n2}(1)+\alpha_{n2}(2)+\ldots+\alpha_{n2}(p) & \cdots & \alpha_{nn}(1)+\alpha_{nn}(2)+\ldots+\alpha_{nn}(p)-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \vdots \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\alpha_{11}(2)-\alpha_{11}(3)-\ldots-\alpha_{11}(p) & -\alpha_{12}(2)-\alpha_{12}(3)-\ldots-\alpha_{12}(p) & \cdots & -\alpha_{1n}(2)-\alpha_{1n}(3)-\ldots-\alpha_{1n}(p) \\ -\alpha_{21}(2)-\alpha_{21}(3)-\ldots-\alpha_{21}(p) & -\alpha_{22}(2)-\alpha_{22}(3)-\ldots-\alpha_{22}(p) & \cdots & -\alpha_{2n}(2)-\alpha_{2n}(3)-\ldots-\alpha_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1}(2)-\alpha_{n1}(3)-\ldots-\alpha_{n1}(p) & -\alpha_{n2}(2)-\alpha_{n2}(3)-\ldots-\alpha_{n2}(p) & \cdots & -\alpha_{nn}(2)-\alpha_{nn}(3)-\ldots-\alpha_{nn}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1t-1} \\ \Delta x_{2t-1} \\ \vdots \\ \Delta x_{nt-1} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\alpha_{11}(3)-\ldots-\alpha_{11}(p) & -\alpha_{12}(3)-\ldots-\alpha_{12}(p) & \cdots & -\alpha_{1n}(3)-\ldots-\alpha_{1n}(p) \\ -\alpha_{21}(3)-\ldots-\alpha_{21}(p) & -\alpha_{22}(3)-\ldots-\alpha_{22}(p) & \cdots & -\alpha_{2n}(3)-\ldots-\alpha_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1}(3)-\ldots-\alpha_{n1}(p) & -\alpha_{n2}(3)-\ldots-\alpha_{n2}(p) & \cdots & -\alpha_{nn}(3)-\ldots-\alpha_{nn}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1t-2} \\ \Delta x_{2t-2} \\ \vdots \\ \Delta x_{nt-2} \end{bmatrix} \\
&+ \ldots + \begin{bmatrix} -\alpha_{11}(p) & -\alpha_{12}(p) & \cdots & -\alpha_{1n}(p) \\ -\alpha_{21}(p) & -\alpha_{22}(p) & \cdots & -\alpha_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1}(p) & -\alpha_{n2}(p) & \cdots & -\alpha_{nn}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1t-p+1} \\ \Delta x_{2t-p+1} \\ \vdots \\ \Delta x_{nt-p+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Elemen-elemen pada tiap matriks di atas dapat disederhanakan notasinya menjadi

$$\begin{bmatrix}\Delta x_{1t}\\ \Delta x_{2t}\\ \vdots\\ \Delta x_{nt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi_{10}\\ \pi_{20}\\ \vdots\\ \pi_{n0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1n}\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \cdots & \pi_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1t-1}\\ x_{2t-1}\\ \vdots\\ x_{nt-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_{11}(1) & \pi_{12}(1) & \cdots & \pi_{1n}(1)\\ \pi_{21}(1) & \pi_{22}(1) & \cdots & \pi_{2n}(1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{n1}(1) & \pi_{n2}(1) & \cdots & \pi_{nn}(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-1}\\ \Delta x_{2t-1}\\ \vdots\\ \Delta x_{nt-1}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\pi_{11}(2) & \pi_{12}(2) & \cdots & \pi_{1n}(2)\\ \pi_{21}(2) & \pi_{22}(2) & \cdots & \pi_{2n}(2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{n1}(2) & \pi_{n2}(2) & \cdots & \pi_{nn}(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-2}\\ \Delta x_{2t-2}\\ \vdots\\ \Delta x_{nt-2}\end{bmatrix}$$

$$+\ldots+\begin{bmatrix}\pi_{11}(p-1) & \pi_{12}(p-1) & \cdots & \pi_{1n}(p-1)\\ \pi_{21}(p-1) & \pi_{22}(p-1) & \cdots & \pi_{2n}(p-1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{n1}(p-1) & \pi_{n2}(p-1) & \cdots & \pi_{nn}(p-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-p+1}\\ \Delta x_{2t-p+1}\\ \vdots\\ \Delta x_{nt-p+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\\ \vdots\\ \varepsilon_{nt}\end{bmatrix}$$

Karena itu, untuk ECM kasus bivariat diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\Delta x_{1t}\\ \Delta x_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi_{10}\\ \pi_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12}\\ \pi_{21} & \pi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1t-1}\\ x_{2t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_{11}(1) & \pi_{12}(1)\\ \pi_{21}(1) & \pi_{22}(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-1}\\ \Delta x_{2t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_{11}(2) & \pi_{12}(2)\\ \pi_{21}(2) & \pi_{22}(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-2}\\ \Delta x_{2t-2}\end{bmatrix}$$

$$+\ldots+\begin{bmatrix}\pi_{11}(p-1) & \pi_{12}(p-1)\\ \pi_{21}(p-1) & \pi_{22}(p-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{1t-p+1}\\ \Delta x_{2t-p+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix}$$

Lalu, uraikan bentuk matriks di atas ke dalam bentuk persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\Delta x_{1t} &= \pi_{10}+\pi_{11}x_{1t-1}+\pi_{12}x_{2t-1}+\pi_{11}(1)\Delta x_{1t-1}+\pi_{12}(1)\Delta x_{2t-1}+\pi_{11}(2)\Delta x_{1t-2}+\pi_{12}(2)\Delta x_{2t-2}\\ &\quad +\ldots+\pi_{11}(p-1)\Delta x_{1t-p+1}+\pi_{12}(p-1)\Delta x_{2t-p+1}+\varepsilon_{1t}\\ &= \pi_{10}+(\pi_{11}x_{1t-1}+\pi_{12}x_{2t-1})+\pi_{11}(1)\Delta x_{1t-1}+\pi_{11}(2)\Delta x_{1t-2}+\ldots+\pi_{11}(p-1)\Delta x_{1t-p+1}\\ &\quad +\pi_{12}(1)\Delta x_{2t-1}+\pi_{12}(2)\Delta x_{2t-2}+\ldots+\pi_{12}(p-1)\Delta x_{2t-p+1}+\varepsilon_{1t}\end{aligned}$$

Kemudian, lakukan proses normalisasi terhadap peubah $x_{1t-1}$ dengan menetapkan $\gamma_1=\pi_{11}$ dan $\beta_2=\pi_{12}/\pi_{11}$; sehingga diperoleh

$$\Delta x_{1t} = \pi_{10} + \pi_{11}(x_{1t-1} + \frac{\pi_{12}}{\pi_{11}} x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t}$$
$$= \pi_{10} + \gamma_1(x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t}$$

Untuk peubah $\Delta x_{2t}$, bentuk persamaannya menjadi

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \pi_{21}x_{1t-2} + \pi_{22}x_{2t-2} + \pi_{21}(1)\Delta x_{1t-1} + \pi_{22}(1)\Delta x_{2t-1} + \pi_{21}(2)\Delta x_{1t-2} + \pi_{22}(2)\Delta x_{2t-2}$$
$$+ \ldots + \pi_{21}(p-1)\Delta x_{1t-p+1} + \pi_{22}(p-1)\Delta x_{2t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$
$$= \pi_{20} + (\pi_{21}x_{1t-2} + \pi_{22}x_{2t-2}) + \pi_{21}(1)\Delta x_{1t-1} + \pi_{21}(2)\Delta x_{1t-2} + \ldots + \pi_{21}(p-1)\Delta x_{1t-p+1}$$
$$+ \pi_{22}(1)\Delta x_{2t-1} + \pi_{22}(2)\Delta x_{2t-2} + \ldots + \pi_{22}(p-1)\Delta x_{2t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

Kemudian, lakukan proses normalisasi terhadap peubah $x_{1t-1}$ dengan menetapkan $\gamma_2 = \pi_{21}$ dan $\beta_2 = \pi_{22} / \pi_{21}$; sehingga diperoleh

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \pi_{21}(x_{1t-1} + \frac{\pi_{22}}{\pi_{21}} x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t}$$
$$= \pi_{20} + \gamma_2(x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t}$$

Jadi, bentuk ECM kasus bivariat dinyatakan dengan

$$\Delta x_{1t} = \pi_{10} + \gamma_1(x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t},$$

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \gamma_2(x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t}.$$

atau

$$\Delta x_{1t} = \pi_{10} + \gamma_1 e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t},$$

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \gamma_2 e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t}.$$

dimana $\varepsilon_{1t}$ dan $\varepsilon_{2t}$ adalah *white noise*.

Bentuk ECM tersebut dapat menjelaskan bahwa perubahan salah satu peubah baik peubah $x_{1t}$ atau $x_{2t}$ pada saat ini dipengaruhi oleh perubahan peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ pada masa lalu dan kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) pada periode ($t - 1$). Karena hanya melibatkan dua peubah, maka paling banyak terdapat satu peringkat kointegrasi (*cointegrating rank*). Jika $r = 1$ maka hanya ada satu vektor kointegrasi yang diberikan oleh sebarang baris pada matriks $\mathbf{\Pi}$; sehingga untuk kedua persamaan ECM di atas memiliki vektor kointegrasi yang sama, yaitu $(1, \beta_2)$.

Parameter $\pi_{11}(i)$, $\pi_{12}(i)$, $\pi_{21}(i)$, dan $\pi_{22}(i)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, p - 1$, menyatakan parameter jangka pendek (*short-run*); parameter $\beta_2$ menyatakan parameter jangka panjang (*long-run*); serta parameter $\gamma_1$ dan $\gamma_2$ menyatakan parameter kecepatan penyesuaian (*speed of adjustment*) yang dalam bentuk nilai absolut dapat menjelaskan seberapa cepat waktu yang diperlukan untuk mencapai kondisi keseimbangan.

Jika $\gamma_1$ dan/atau $\gamma_2$ signifikan tidak sama dengan nol maka parameter tersebut akan menjadi penyesuaian apabila terjadi fluktuasi peubah-peubah yang diamati menyimpang dari keseimbangan jangka panjang. Jika $\gamma_1$ dan $\gamma_2$ tidak signifikan maka tidak ada hubungan keseimbangan jangka panjang dan model di atas bukan ECM maupun kointegrasi.

Jika $\gamma_1 = 0$ maka perubahan pada peubah $x_{1t}$ tidak merespons terhadap penyimpangan dari keseimbangan jangka panjang pada periode

($t - 1$). Jika $\gamma_1 = 0$ dan jika semua parameter $\pi_{12}(i) = 0$ maka dapat dikatakan bahwa $\{\Delta x_{2t}\}$ tidak menyebabkan $\{\Delta x_{1t}\}$. Hal yang serupa juga berlaku untuk kasus $\gamma_2 = 0$. Jika $\gamma_2 = 0$ dan jika semua parameter $\pi_{21}(i) = 0$ maka dapat dikatakan bahwa $\{\Delta x_{1t}\}$ tidak menyebabkan $\{\Delta x_{2t}\}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika dua peubah nonstasioner terkointegrasi maka sedikitnya terdapat Kausalitas *Granger* satu arah antara kedua peubah tersebut.

Jika $\gamma_1 < 0$ dan $\gamma_2 = 0$ maka terjadi penyesuaian pada peubah $x_{1t}$ dan sebaliknya, jika $\gamma_1 = 0$ dan $\gamma_2 > 0$ maka terjadi penyesuaian pada peubah $x_{2t}$ (Dolado, Gonzalo, dan Marmol, 1999).

Selain *Granger Representation Theorem*, dua lemma berikut juga berlaku (Kirchgässner dan Wolters, 2007):

**Lemma 1.** Jika $x_t$ dan $y_t$ adalah peubah $I(1)$ yang terkointegrasi maka peubah $x_t$ dan $y_{t+\tau}$ juga terkointegrasi untuk sebarang nilai $\tau \neq 0$.

**Lemma 2.** Jika $x_t$ dan $y_t$ adalah peubah $I(1)$ yang terkointegrasi maka terdapat Kausalitas *Granger*, yaitu $x_t$ menyebabkan $y_t$ dan atau $y_t$ menyebabkan $x_t$ (hubungan kausalitas satu arah atau dua arah).

Dua lemma tersebut dapat dijelasan secara intuitif. Lemma 1 berlaku karena $y_{t+\tau}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{t+\tau} &= y_{t+\tau} - y_{t+\tau-1} + \ldots + y_{t+3} - y_{t+2} + y_{t+2} - y_{t+1} + y_{t+1} - y_t + y_t \\ &= y_t + y_{t+1} - y_t + y_{t+2} - y_{t+1} + y_{t+3} - y_{t+2} + \ldots + y_{t+\tau} - y_{t+\tau-1} \\ &= y_t + \Delta y_{t+1} + \Delta y_{t+2} + \Delta y_{t+3} + \ldots + \Delta y_{t+\tau}. \end{aligned}$$

Hal tersebut menyatakan bahwa $y_{t+\tau}$ berbeda dari $y_t$ hanya pada komponen stasioner, yang mana tidak mengubah hubungan kointegrasi. Lemma 2 berlaku karena suatu ECM ada untuk sedikitnya satu dari dua peubah nonstasioner yang terkointegrasi dan ECM selalu menyatakan hubungan kausalitas. Namun, Kausalitas *Granger* di antara peubah-peubah yang terintegrasi dengan orde integrasi yang sama tidak menyatakan peubah-peubah tersebut terkointegrasi.

## 3.2 PENGUJIAN KOINTEGRASI KASUS BIVARIAT

Engle dan Granger (1987) mengusulkan suatu pengujian yang secara langsung dapat menentukan apakah dua peubah $I(1)$ terikontegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan $CI(1, 1)$. Hal tersebut serupa dengan menguji apakah terdapat keseimbangan jangka panjang antara dua peubah nonstasioner, misalkan $x_{1t}$ dan $x_{2t}$. Pengujian kointegrasi ini dinamakan uji *Engle-Granger*. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Lakukan uji orde integrasi pada peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ dengan menggunakan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Berdasarkan definisi, kointegrasi mengharuskan dua peubah terintegrasi pada orde yang sama. Dalam konteks ini peubah harus terintegrasi pada orde satu, $I(1)$. Namun, jika dua peubah tersebut stasioner maka proses tidak perlu dilanjutkan karena

metode *time series* standar dapat diterapkan pada peubah-peubah stasioner.

2. Jika hasil uji *unit root* pada langkah pertama menyatakan bahwa peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ adalah peubah $I(1)$ maka langkah berikutnya adalah menaksir hubungan keseimbangan jangka panjang dalam bentuk model regresi linier statis berikut:

$$x_{1t} = \beta_0 + \beta_1 x_{2t} + e_t \tag{3.6}$$

dengan $e_t$ adalah komponen *error*. Jika peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ terkointegrasi maka $\beta_0$ dan $\beta_1$ adalah paramater kointegrasi dan model regresi linier statis (3.6) adalah model regresi kointegrasi. Penaksiran paramater kointegrasi dilakukan dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS).

3. Agar dapat menentukan apakah peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ terkointegrasi, bentuk runtun residual yang diperoleh dari model regresi (3.6) dengan $\{\hat{e}_t\}$. Runtun $\{\hat{e}_t\}$ merupakan nilai taksiran dari kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*). Jika runtun residual $\{\hat{e}_t\}$ stasioner maka peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ terkointegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan $\boldsymbol{x}_t' = (x_{1t}, x_{2t}) \sim CI(1,1)$. Uji *Dickey-Fuller* (DF) dapat digunakan untuk menguji kestasioneran pada runtun residual. Berikut adalah model regresi yang digunakan untuk uji *Dickey-Fuller* (DF):

$$\Delta\hat{e}_t = \delta\hat{e}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.7}$$

Karena runtun $\{\hat{e}_t\}$ adalah runtun residual yang diperoleh dari persamaan regresi yang melibatkan konstanta, maka pada model regresi (3.7) tidak perlu melibatkan konstanta.

Adapun hipotesis pengujian *Dickey-Fuller* (DF) adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \delta = 0$$
$$H_1 : \delta < 0$$

Jika hipotesis nol ditolak pada tingkat signifikansi tertentu maka dapat dinyatakan bahwa runtun residual $\{\hat{e}_t\}$ tidak mengandung *unit root* yang berarti bahwa runtun tersebut stasioner, $I(0)$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ terkointegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan $\boldsymbol{x}_t' = (x_{1t}, x_{2t}) \sim CI(1,1)$.

Tabel nilai kritis *Dickey-Fuller* tidak dapat digunakan untuk menguji adanya hubungan kointegrasi. Hal ini disebabkan karena runtun residual $\{\hat{e}_t\}$ dihasilkan dari suatu persamaan regresi. Komponen *error*, $e_t$, tidak diketahui nilai sebenarnya, yang dapat diamati hanyalah nilai taksirannya. Jika parameter $\beta_0$ dan $\beta_1$ telah diketahui lebih dahulu (seperti pada beberapa teori ekonomi) maka tabel nilai kritis *Dickey-Fuller* dapat digunakan. Jadi, untuk menguji adanya hubungan kointegrasi dapat menggunakan tabel nilai kritis *Engle-Granger Cointegration Test* yang dibuat oleh MacKinnon (1991). Tabel nilai kritis ini bergantung pada ukuran sampel dan jumlah peubah yang diikutsertakan dalam model.

Secara umum, jika runtun residual $\{\hat{e}_t\}$ menunjukkan adanya otokorelasi maka uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) dapat digunakan. Berikut adalah model regresi yang digunakan untuk uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF):

$$\Delta\hat{e}_t = \delta\hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta\hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.8}$$

Adapun hipotesis pengujian *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{H}_0 : \delta = 0$$
$$\mathrm{H}_1 : \delta < 0$$

Jika hipotesis nol ditolak pada tingkat signifikansi tertentu maka dapat dinyatakan bahwa runtun residual $\{\hat{e}_t\}$ tidak mengandung *unit root* yang berarti bahwa runtun tersebut stasioner, $I(0)$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ terkointegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan $\boldsymbol{x}_t' = (x_{1t}, x_{2t}) \sim CI(1,1)$.

## 3.3 PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI KASUS BIVARIAT

Engle dan Granger (1987) mengusulkan suatu metode penaksiran parameter kointegrasi, yang dilakukan dalam dua tahap, yang disebut *Engle-Granger Two-Step Procedure*. Tahap pertama pada prosedur ini adalah menaksir parameter model regresi linier statis (3.6) dengan menggunakan metode *Ordinary Least Squares* (OLS). Penaksiran parameter dengan metode OLS ini terintegrasi pada uji *Engle-Granger*. Berikut adalah taksiran parameter model regresi linier statis (3.6), $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, yang diperoleh dengan metode OLS:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{x}_{1t} - \hat{\beta}_1 \overline{x}_{2t} \,,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \overline{x}_{1t})(x_{2t} - \overline{x}_{2t})}{\sum_{t=1}^{T} (x_{2t} - \overline{x}_{2t})^2} \,,$$

dengan $\overline{x}_{1t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{1t}$ dan $\overline{x}_{2t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{2t}$ .

Stock (1987) membuktikan bahwa taksiran parameter $\hat{\beta}$ yang dihasilkan oleh metode OLS adalah taksiran yang konsisten dan konvergen dalam probabilitas ke nilai $\beta$ sebenarnya pada tingkat $T^{-1}$ ($T$ adalah jumlah pengamatan), lebih cepat dibandingkan model regresi yang dibentuk dari peubah-peubah stasioner dimana konvergen dalam probabilitasnya pada tingkat $T^{-1/2}$. Oleh karena itu, taksiran parameter $\hat{\beta}$ disebut taksiran superkonsisten.

Tahap kedua pada *Engle-Granger Two-Step Procedure* adalah menaksir *Error Correction Model* (ECM). Jika peubah $x_{1t}$ dan $x_{2t}$ pada model regresi linier statis (3.6) terkointegrasi pada orde (1, 1) maka peubah-peubah tersebut memiliki bentuk ECM sebagai berikut:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{10} + \gamma_1 e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t} \qquad (3.9)$$

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \gamma_2 e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t} \qquad (3.10)$$

Karena kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) $e_{t-1}$ tidak dapat diketahui nilainya, maka *Error Correction Model* (ECM) ditaksir dengan menggunakan residual $\hat{e}_{t-1}$ yang dihasilkan pada langkah kedua dari uji *Engle-Granger*; sehingga bentuk ECM yang akan ditaksir adalah sebagai berikut:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{10} + \gamma_1 \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{1t} \qquad (3.11)$$

$$\Delta x_{2t} = \pi_{20} + \gamma_2 \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{21}(i)\Delta x_{1t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{22}(i)\Delta x_{2t-i} + \varepsilon_{2t} \qquad (3.12)$$

Penaksiran *Error Correction Model* (ECM) di atas dilakukan dengan menggunakan metode OLS. Hal ini dikarenakan semua peubah yang ada pada persamaan di atas ialah peubah stasioner, *I*(0). Pengujian hipotesis untuk menguji apakah parameter kecepatan penyesuaian $\gamma_1$ atau $\gamma_2$ siginifikan atau tidak dilakukan dengan menggunakan uji *t*. Sedangkan untuk menguji apakah parameter $\pi_{jk}(i) = 0$ dilakukan dengan menggunakan uji *F* yang sama halnya dengan melakukan uji Kausalitas *Granger*.

Salah satu metode untuk memilih panjang *lag* yang optimal adalah dengan menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC) dan *Schwarz*

*Information Criterion* (SIC) dalam bentuk multivariat yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{AIC} = \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}}\right| + \frac{2}{T}\left[n + n^2(p-1)\right]$$
$$\text{SIC} = \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}}\right| + \frac{\ln T}{T}\left[n + n^2(p-1)\right]$$

dimana $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}}$ adalah matriks varians kovarians residual, $n$ adalah jumlah peubah, $T$ adalah jumlah pengamatan, dan $p$ adalah jumlah *lag*. Panjang *lag* yang optimal ditentukan oleh nilai AIC atau SIC yang terkecil (Bhar dan Hamori, 2005).

# BAB IV

# PENERAPAN KOINTEGRASI TERHADAP NILAI EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970−2007

Pada bab ini akan dibahas mengenai hubungan kointegrasi yang diterapkan pada data nilai ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007. Pembahasan terdiri dari konsep dan definisi peubah penelitian, data penelitian, analisis deskriptif, tujuan penelitian, analisis data, serta kesimpulan dan saran penelitian.

## 4.1 KONSEP DAN DEFINSI PEUBAH PENELITIAN

### 4.1.1 Ekspor

Menurut definisinya, ekspor adalah transaksi ekonomi yang terjadi antara penduduk suatu negara atau wilayah dengan penduduk negara atau wilayah lainnya. Transaksi tersebut meliputi transaksi barang dagangan (*merchandise*), jasa pengangkutan, jasa pariwisata, jasa asuransi, jasa komunikasi, dan berbagai jenis transaksi ekonomi lainnya. Sedangkan penduduk yang dimaksudkan mencakup perorangan, perusahaan, badan pemerintah, dan lembaga lainnya di suatu negara atau wilayah.

Peubah ekspor yang dibahas pada tugas akhir ini ialah nilai ekspor migas (minyak bumi dan gas alam) dan ekspor nonmigas. Ekspor nonmigas meliputi sektor pertanian, industri, pertambangan, dan lain-lain (seperti barang-barang seni dan antik serta bahan mentah yang berasal dari hewan).

### 4.1.2 Investasi

Banyak pakar yang telah merumuskan definisi investasi. Sharpe *et all* (1993) merumuskan investasi dengan pengertian berikut: mengorbankan aset yang dimiliki sekarang guna mendapatkan aset pada masa mendatang yang tentu saja dengan jumlah yang lebih besar. Sedangkan Jones (2004) mendefinisikan investasi sebagai komitmen menanamkan sejumlah dana pada satu atau lebih aset selama beberapa periode pada masa mendatang. Definisi yang lebih lengkap diberikan oleh Reilly dan Brown, yang mengatakan bahwa investasi adalah komitmen mengikatkan aset saat ini untuk beberapa periode waktu ke masa depan guna mendapatkan penghasilan yang mampu mengompensasi pengorbanan investor berupa keterikatan aset pada waktu tertentu, tingkat inflasi, dan ketidaktentuan penghasilan pada masa mendatang (www.indoonlineshop.com).

Peubah investasi yang dibahas pada tugas akhir ini ialah Penanaman Modal Asing (PMA) yang disetujui pemerintah menurut sektor yang meliputi sektor pertanian, kehutanan dan perikanan, pertambangan, industri, bangunan, perhotelan, pengangkutan, perumahan dan perkantoran, serta listrik, perdagangan dan jasa-jasa lainnya. Berdasarkan Undang-Undang No.1 Tahun 1967 tentang PMA, penanaman modal asing meliputi penanaman modal asing secara langsung yang digunakan untuk menjalankan perusahaan di Indonesia. Dalam hal ini, pemilik modal secara langsung menanggung risiko atas penanaman modal tesebut.

## 4.2 DATA PENELITIAN

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah

1. Data nilai ekspor yang merupakan penjumlahan dari nilai ekspor migas dan nonmigas Indonesia dalam satuan juta dolar AS.
2. Data nilai investasi yang merupakan nilai Penanaman Modal Asing (PMA) yang disetujui pemerintah Indonesia menurut sektor dalam satuan juta dolar AS.

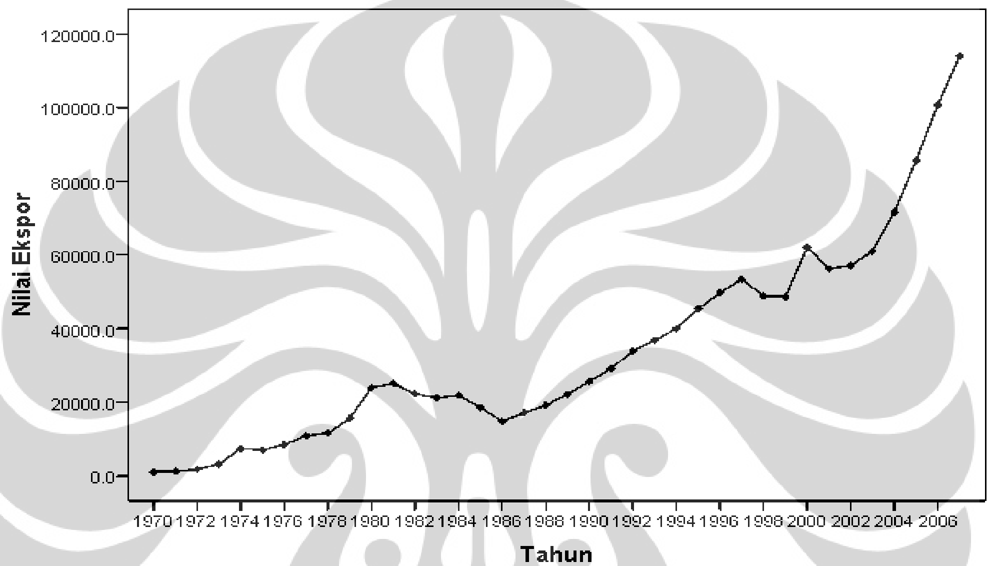
Data untuk penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari sumber yang disajikan pada tabel berikut:

Tabel 1
Peubah penelitian, sumber, jenis, dan periode data

| Peubah Penelitian | Sumber | Jenis | Periode |
|---|---|---|---|
| Ekspor | Badan Pusat Statistik (BPS) | Tahunan | 1970−2007 |
| Investasi | Bank Indonesia (BI) | Tahunan | 1970−2007 |

## 4.3 ANALISIS DESKRIPTIF

Berikut adalah grafik perkembangan nilai ekspor Indonesia pada tahun 1970−2007:

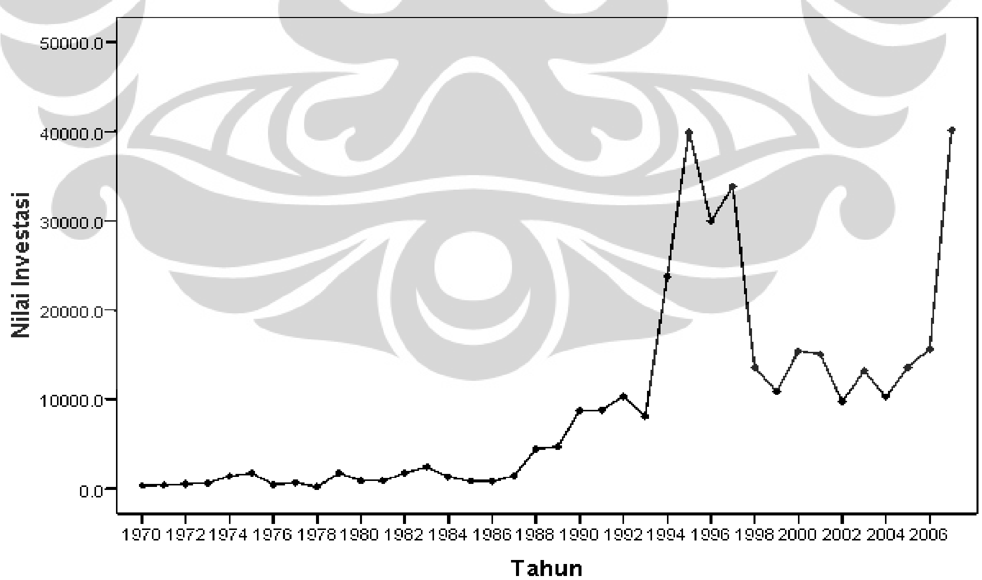



Gambar 3. Perkembangan nilai ekspor Indonesia (juta US$) tahun 1970−2007

Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai ekspor Indonesia pada tahun 1970−2007 cenderung meningkat. Di tahun 2003 ekspor mengalami peningkatan menjadi US$ 61.058,2 juta atau naik 6,82 persen dibanding ekspor tahun 2002 yang sebesar US$ 57.158,8 juta. Hal yang sama terjadi pada ekspor nonmigas yang naik 5,24 persen menjadi US$ 47.406,8 juta. Kondisi yang serupa terjadi hingga tahun 2006 dengan nilai ekspor menembus angka US$ 100 juta menjadi US$ 100.798,6 juta atau naik sebesar 17,67 persen. Begitu juga dengan ekspor nonmigas yang naik sebesar 19,81 persen dibandingkan tahun 2005 menjadi US$ 79.598,1 juta. Pada tahun 2007 terjadi peningkatan nilai ekspor sebesar 13,20 persen menjadi US$114.100, 9 juta yang terdiri dari ekspor migas sebesar US$ 22.088,6 juta dan ekspor nonmigas sebesar US$ 92.012,3 juta (Badan Pusat Statistik, 2008).

Fluktuasi yang terjadi pada nilai ekspor Indonesia tentunya mengindikasikan adanya tren stokastik. Berdasarkan grafik di atas, dapat disimpulkan bahwa nilai ekspor Indonesia menunjukkan gejala nonstasioner. Hal ini disebabkan oleh karena semakin meningkatnya waktu, nilai ekspor semakin tinggi.

Berikut adalah grafik perkembangan nilai investasi (PMA yang disetujui pemerintah menurut sektor) di Indonesia pada tahun 1970−2007:




Gambar 4. Perkembangan nilai investasi di Indonesia (juta US$) tahun 1970−2007

Dari grafik di atas terlihat bahwa sejak tahun 1970 hingga 2007 nilai investasi asing yang disetujui oleh pemerintah Indonesia menurut sektor mengalami pasang surut. Peningkatan yang sangat tajam terjadi pada tahun 1994. Pada tahun tersebut nilai investasi asing tercatat sebesar US$ 23.724,3 juta atau naik sekitar 191,39 persen dari tahun 1993. Namun, saat krisis melanda Indonesia, nilai investasi asing mengalami penurunan yang cukup signifikan. Di tahun 1998 investasi tercatat sebesar US$ 13.563,1 juta atau turun hampir sebesar seratus lima puluh persen dari tahun sebelumnya.

Untuk tahun-tahun berikutnya, nilai investasi asing di Indonesia kembali mengalami fluktuasi. Hingga pada tahun 2007, peningkatan yang sangat signifikan terjadi lagi dimana nilai investasi asing tercatat sebesar US$ 40.145,8 juta. Berdasarkan gambar 4, dapat disimpulkan bahwa investasi asing di Indonesia menunjukkan gejala nonstasioner. Hal ini disebabkan oleh karena semakin meningkatnya waktu, nilai investasi semakin tinggi.

## 4.4 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan diadakannya penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah terdapat hubungan kointegrasi antara peubah ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007. Setelah mengetahui adanya hubungan kointegrasi di antara kedua peubah tersebut, selanjutnya akan dicari taksiran parameter kointegrasi.

## 4.5 ANALISIS DATA

Data nilai ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007 yang diolah dengan menggunakan perangkat lunak EViews 4.1 dan SPSS 16 akan dianalisis dengan tahapan pengujian sebagai berikut:

### 4.5.1 *Unit Root Test*

Pada subbab ini akan dilakukan pengujian orde integrasi terhadap peubah ekspor dan investasi dengan menggunakan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Berikut adalah model yang digunakan pada uji ADF:

$$\Delta Ekspor_t = \alpha_0 + \delta Ekspor_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Ekspor_{t-i} + u_t,$$

$$\Delta Investasi_t = \beta_0 + \gamma Investasi_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^* \Delta Investasi_{t-i} + v_t,$$

dengan $\delta = \gamma = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$.

Setelah model dibentuk, lakukan pengujian hipotesis sebagai berikut:

- Hipotesis: $H_0 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$ (mengandung *unit root* atau nonstasioner),

  $H_1 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$ (tidak mengandung *unit root* atau stasioner).

- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,05.

- Statistik uji: $\tau = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i - 1}{std.\,error\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i\right)}$.

- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika nilai statistik uji $\tau$ lebih kecil dari nilai kritis *Dickey-Fuller* (DF) atau *MacKinnon*.

Berikut adalah tabel hasil uji *unit root* untuk peubah ekspor dan investasi pada tingkat aras (*level*) dan *first difference*:

Tabel 2

Hasil *Unit Root Test*

| **Peubah Penelitian** | **Statistik Uji ADF** | |
|---|---|---|
| | ***Level*** | ***First Difference*** |
| Ekspor | 3,487910 (lag 0) | -3,259613** (lag 0) |
| Investasi | -0,985979 (lag 0) | -4,861862*** (lag 0) |

Keterangan: *** signifikan pada tingkat signifikansi 1%
** signifikan pada tingkat signifikansi 5%
* signifikan pada tingkat signifikansi 10%
Pemilihan *lag* ditentukan dengan menggunakan nilai AIC yang terkecil

Pada tingkat aras (*level*), nilai statistik uji $\tau$ kedua peubah lebih besar dari nilai kritis *MacKinnon* (lampiran 5), sehingga diputuskan untuk tidak menolak $H_0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa peubah ekspor dan investasi pada tingkat aras (*level*) belum ada yang mampu mencapai kestasioneran atau masih mengandung *unit root* pada tingkat signifikansi lima persen.

Untuk mencapai kestasioneran, kedua peubah tersebut di-*difference* satu kali. Pada pengujian dalam bentuk *first difference*, nilai stastitik uji $\tau$ kedua peubah lebih kecil dari nilai kritis *MacKinnon* (lampiran 5), sehingga diputuskan untuk menolak $H_0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa peubah ekspor tidak mengandung *unit root* atau telah mencapai stasioner pada tingkat signifikansi lima persen dan peubah investasi tidak mengandung *unit root* atau telah mencapai stasioner pada tingkat signifikansi satu persen. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa peubah ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007 telah stasioner setelah dilakukan proses *difference* satu kali atau dengan kata lain kedua peubah tersebut terintegrasi pada orde satu, dinotasikan dengan *I*(1).

### 4.5.2 Uji *Engle-Granger*

Pada subab ini akan dilakukan uji *Engle-Granger* untuk melihat apakah terdapat hubungan kointegrasi di antara peubah ekspor dan investasi. Adapun bentuk model regresi linier statisnya adalah sebagai berikut:

$$Ekspor_t = \beta_0 + \beta_1 Investasi_t + e_t \,.$$

Dari pengujian orde integrasi yang telah dilakukan dengan menggunakan uji ADF, diperoleh bahwa peubah ekspor dan investasi adalah peubah *I*(1). Pengujian orde integrasi dari kedua peubah tersebut merupakan langkah awal untuk dilakukannya uji *Engle-Granger*.

Kemudian, parameter model regresi statis $\beta_0$ dan $\beta_1$ ditaksir dengan menggunakan metode *Ordinary Least Squares* (OLS). Berikut adalah tabel taksiran parameter model regresi statis dengan menggunakan metode OLS:

Tabel 3

Taksiran parameter model regresi statis dengan metode OLS

| ***Intercept*** | **Parameter Investasi** | $R^2$ | ***d*** |
|---|---|---|---|
| 17642,47<br>(4,286636) | 1,792345<br>(6,228623) | 0,518689 | 0,332951 |

Keterangan: nilai dalam kurung adalah nilai statistik uji *t*

Pada tabel 3 terlihat bahwa nilai koefisien determinasi ($R^2$) lebih besar dari nilai statistik *Durbin-Watson*, sehingga dapat dicurigai bahwa regresi yang terbentuk merupakan *spurious regression* (regresi palsu). Apabila dapat ditunjukkan bahwa kedua peubah tersebut terkointegrasi maka model regresi yang terbentuk tersebut bukanlah *spurious regression* melainkan regresi terkointegrasi.

Setelah menaksir parameter model regresi statis, langkah selanjutnya adalah menguji kestasioneran residual $\{\hat{e}_t\}$ yang dihasilkan dari model regresi tersebut dengan menggunakan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Model yang digunakan pada uji ADF adalah

$$\Delta\hat{e}_t = \delta\hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta\hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t ,$$

dengan $\delta = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$.

Setelah model dibentuk, lakukan pengujian hipotesis sebagai berikut:

- Hipotesis: $H_0 : \delta = 0$ (mengandung *unit root*),

  $H_1 : \delta < 0$ (tidak mengandung *unit root*).

- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,10.

- Statistik uji: $\tau = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i - 1}{std.\,error\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i\right)}$.

- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika nilai statistik uji $\tau$ lebih kecil dari nilai kritis *Dickey-Fuller* (DF) atau *MacKinnon*.

Berikut adalah tabel hasil uji *unit root* residual:

Tabel 4

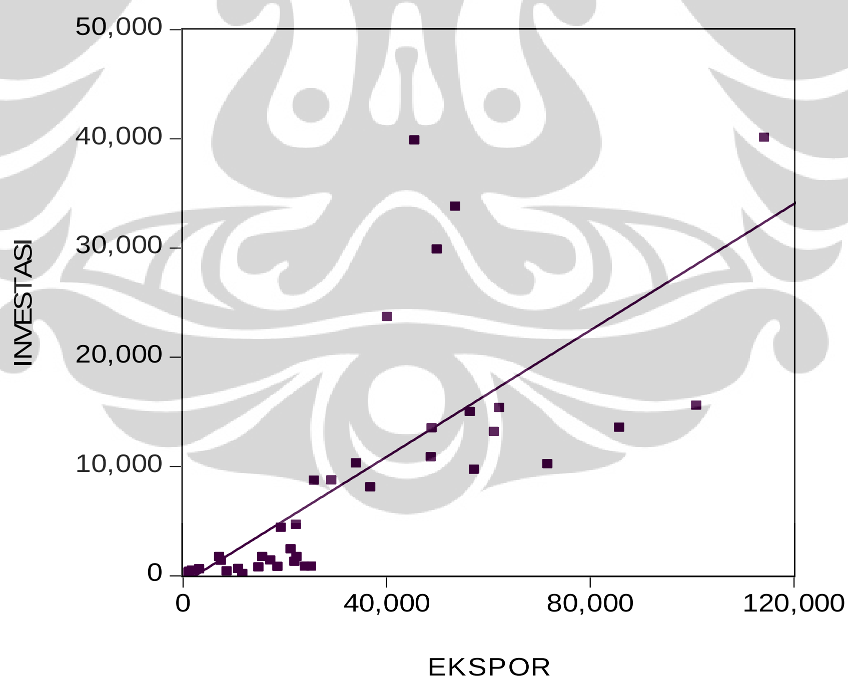
Hasil *Unit Root Test* residual

| **Peubah** | **Statistik Uji ADF** |
|---|---|
| Residual | -1,717542*<br>(lag 0) |

Keterangan: *** signifikan pada tingkat signifikansi 1%
** signifikan pada tingkat signifikansi 5%
* signifikan pada tingkat signifikansi 10%
Pemilihan *lag* ditentukan dengan menggunakan nilai AIC yang terkecil

Pada tabel 4 terlihat bahwa nilai statistik uji $\tau$ pada residual lebih kecil dari nilai kritis *MacKinnon* (lampiran 6), sehingga diputuskan untuk menolak $H_0$ pada *lag* ke-0 (dengan kata lain tidak melibatkan peubah *lagged*). Jadi, dapat disimpulkan bahwa residual tidak mengandung *unit root* atau telah mencapai kestasioneran pada tingkat signifikansi sepuluh persen. Dengan kata lain, hal ini menunjukkan bahwa terdapat hubungan kointegrasi antara peubah ekspor dan investasi, yang berarti juga bahwa kedua peubah tersebut mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*). Dari kesimpulan di atas, dapat dinyatakan bahwa kedua peubah tersebut terkointegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan *CI*(1, 1). Dengan demikian, taksiran parameter model regresi statis $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ adalah taksiran parameter kointegrasi yang superkonsisten untuk hubungan keseimbangan jangka panjang.

Berikut adalah *Scatterplot* yang menggambarkan hubungan kointegrasi antara nilai ekspor dan investasi Indonesia:




Gambar 5. *Scatterplot* antara nilai ekspor dan investasi

### 4.5.3 Uji Kausalitas *Granger*

Karena pada pengujian sebelumnya telah ditunjukkan bahwa peubah ekspor dan investasi terkointegrasi pada orde (1, 1), maka akan dilihat hubungan sebab akibat antara kedua peubah nonstasioner tersebut dengan menggunakan uji Kausalitas *Granger*. Dari hasil uji kausalitas ini nantinya dapat dilihat apakah peubah investasi mempengaruhi peubah ekspor atau sebaliknya; atau bahkan mempunyai hubungan dua arah (*bilateral causality*).

Peubah ekspor dan investasi adalah peubah yang nonstasioner pada tingkat aras (*level*). Karena syarat peubah dalam uji Kausalitas *Granger* harus stasioner, maka kedua peubah yang diikutsertakan pada pengujian ini harus dalam bentuk *first difference*; sehingga model regresi linier yang digunakan pada pengujian ini adalah

$$\Delta Ekspor_t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta Ekspor_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \Delta Investasi_{t-j} + u_t,$$

$$\Delta Investasi_t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Delta Investasi_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \delta_j \Delta Ekspor_{t-j} + v_t.$$

Setelah model dibentuk, lakukan pengujian hipotesis sebagai berikut:

- Hipotesis:

  - Investasi: $H_0$ : DInvestasi tidak menyebabkan DEkspor,
    $H_1$ : DInvestasi menyebabkan DEkspor.
  - Ekspor: $H_0$ : DEkspor tidak menyebabkan DInvestasi,
    $H_1$ : DEkspor menyebabkan DInvestasi.

- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,05.
- Statistik uji: $F_{hitung} = \left(\frac{n-k}{q}\right)\left(\frac{SSE_{terbatas} - SSE_{penuh}}{SSE_{penuh}}\right)$.
- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika nilai statistik uji $F_{hitung} > F_{\alpha;q,n-k}$.

Berikut adalah tabel hasil uji Kausalitas *Granger* untuk kedua hipotesis tersebut:

Tabel 5

Hasil uji Kausalitas *Granger*

| **Hipotesis Nol** | **Obs** | **Statistik Uji-*F*** |
|---|---|---|
| DINVESTASI *does not Granger Cause* DEKSPOR | 31 | 7,83127 |
| DEKSPOR *does not Granger Cause* DINVESTASI | 31 | 1,59999 |

Keterangan: DEkspor adalah peubah ekspor pada *first difference*
DInvestasi adalah peubah investasi pada *first difference*

Dari tabel di atas diperoleh informasi sebagai berikut: untuk hipotesis mengenai peubah investasi, nilai $F_{hitung} = 7,83127 > F_{0,05;6,31} = 2,42$ sehingga $H_0$ ditolak pada *lag* ke-6 (lampiran 7). Sedangkan untuk hipotesis mengenai peubah ekspor, nilai $F_{hitung} = 1,59999 < F_{0,05;6,31} = 2,42$ sehingga $H_0$ tidak ditolak pada *lag* ke-6 (lampiran 7). Jadi dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan satu arah antara peubah ekspor dan investasi, yaitu peubah investasi mempengaruhi peubah ekspor pada tingkat signifikansi lima persen.

### 4.5.4 *Error Correction Model* (ECM)

Pada uji *Engle-Granger* telah ditunjukkan bahwa model pengaruh investasi terhadap ekspor memenuhi hubungan keseimbangan jangka panjang. Untuk melihat apakah model tersebut juga memenuhi dinamika hubungan jangka pendek digunakan *Error Correction Model* (ECM). Berikut adalah bentuk ECM yang digunakan:

$$\Delta Ekspor_t = \pi_{10} + \gamma \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{11}(i)\Delta Investasi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_{12}(i)\Delta Ekspor_{t-i} + \varepsilon_t$$

dengan $\hat{e}_{t-1} = Ekspor_{t-1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 Investasi_{t-1}$.

Hasil taksiran ECM dengan metode OLS adalah sebagai berikut (nilai di dalam kurung adalah nilai statistik uji *t*):

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta Ekspor}_t = {} & \underset{(1,632539)}{1725,711} + \underset{(1,611216)}{0,127602}\hat{e}_{t-1} + \underset{(3,263783)}{0,828325}\Delta Ekspor_{t-1} - \underset{(-3,602974)}{0,677170}\Delta Ekspor_{t-2} \\
& + \underset{(2,418882)}{0,501614}\Delta Ekspor_{t-3} - \underset{(-0,400972)}{0,069994}\Delta Ekspor_{t-4} - \underset{(-1,234252)}{0,208597}\Delta Ekspor_{t-5} \\
& - \underset{(-0,254515)}{0,044716}\Delta Ekspor_{t-6} + \underset{(1,173868)}{0,192441}\Delta Investasi_{t-1} + \underset{(0,828768)}{0,135738}\Delta Investasi_{t-2} \\
& + \underset{(0,899645)}{0,136546}\Delta Investasi_{t-3} - \underset{(-2,032354)}{0,275732}\Delta Investasi_{t-4} \\
& + \underset{(5,179724)}{0,663497}\Delta Investasi_{t-5} - \underset{(-2,116564)}{0,386252}\Delta Investasi_{t-6}
\end{aligned}$$

dengan $R^2$ = 0,820403; *Adjusted* $R^2$ = 0,683064; statistik uji $F$ = 5,973555 ($\hat{\alpha} = 0,000447$); dan statistik uji *Durbin-Watson d* = 2,085214. Pemilihan panjang *lag* dilakukan dengan menggunakan nilai AIC dan SIC yang terkecil.

Selanjutnya akan dilakukan pemeriksaan terhadap asumsi-asumsi yang melandasi metode OLS. Pertama, akan diperiksa apakah $E(\varepsilon_i) = 0$. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 6

*Residuals Statistics*

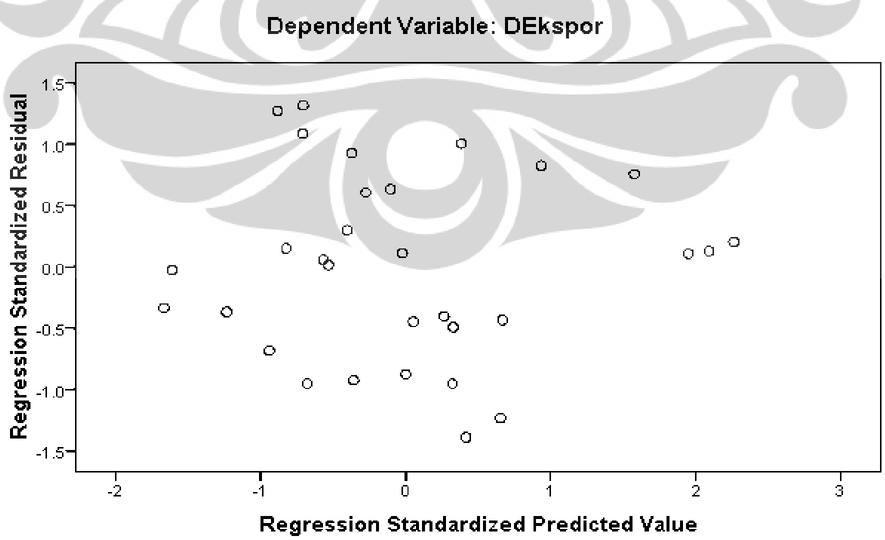
**Residuals Statistics**[a]

| | Minimum | Maximum | Mean | Std. Deviation | N |
|---|---|---|---|---|---|
| Predicted Value | -4.7817E3 | 1.4516E4 | 3.4050E3 | 4909.92574 | 31 |
| Residual | -4.23702E3 | 4.01846E3 | .00000 | 2297.26678 | 31 |

a. Dependent Variable: DEkspor

Pada tabel di atas terlihat bahwa *mean residual*-nya sama dengan nol, yang dengan kata lain menunjukkan bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$.

Kedua, akan dilihat apakah variansi *error* konstan (homoskedastisitas) dengan menggunakan *Scatterplot* berikut:




Gambar 6. *Scatterplot* dari residual ECM

Karena pola yang terbentuk pada *Scatterplot* tersebut acak, maka asumsi variansi konstan (homoskedastisitas) dianggap terpenuhi.

Ketiga, akan diuji apakah terdapat korelasi antar-residual dengan menggunakan uji *Durbin-Watson*. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

- Hipotesis: $H_0$ : Tidak ada korelasi antar-residual,

  $H_1$ : Terdapat korelasi antar-residual.
- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,05.
- Statistik uji: $d = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$.
- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika nilai statistik uji $d \approx 2$.

Karena nilai statistik uji *Durbin-Watson* *d* = 2,085214 sangat mendekati nilai 2, maka diputuskan untuk menolak $H_0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa pada tingkat signifikansi lima persen residual yang dihasilkan dari ECM tidak saling berkorelasi atau dengan kata lain tidak terjadi otokorelasi.

Terakhir, akan diuji apakah *error* berdistribusi normal dengan menggunakan uji *Shapiro-Wilk*. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

- Hipotesis: $H_0$ : $\varepsilon_t$ berdistribusi Normal,

  $H_1$ : tidak demikan.
- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,05.

- Statistik uji: $W = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\hat{\varepsilon}})}\left[\sum_{t=1}^{T/2} a_t(\hat{\varepsilon}^{(T-t+1)} - \hat{\varepsilon}^{(t)})\right]^2$.

- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika nilai statistik uji *W* lebih kecil dari nilai kritis *Shapiro-Wilk*.

Berikut adalah tabel hasil uji *Shapiro-Wilk*:

Tabel 7

Hasil uji *Shapiro-Wilk*

**Tests of Normality**

| | Kolmogorov-Smirnov[a] | | | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| Residual ECM | .091 | 31 | .200* | .968 | 31 | .476 |

a. Lilliefors Significance Correction

Pada tabel 7 diketahui bahwa nilai $W = 0,968 > W_{0,05;\,31} = 0,929$ sehingga diputuskan untuk tidak menolak $H_0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa *error* berdistribusi normal pada tingkat signifikansi lima persen.

Dari sejumlah pemeriksaan terhadap asumsi-asumsi yang melandasi metode OLS, dapat disimpulkan bahwa *Error Correction Model* (ECM) yang terbentuk telah memenuhi semua asumsi tersebut.

Setelah dilakukan pemeriksaan asumsi, langkah selanjutnya adalah menguji signifikansi dari parameter kecepatan penyesuaian (*speed of adjustment*) dengan menggunakan uji *t*. Berikut adalah pengujiannya:

- Hipotesis: $H_0$: $\gamma = 0$,

  $H_1$: $\gamma \neq 0$.

- Tingkat signifikansi: $\alpha$ = 0,05.

- Statistik uji: $t_{hitung} = \dfrac{\hat{\gamma}}{s_{\hat{\gamma}}}$.

- Aturan keputusan: $H_0$ ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| > t_{\alpha/2;\, n-14}$.

Dari hasil taksiran *Error Correction Model* (ECM) dengan metode OLS, diketahui bahwa parameter kecepatan penyesuaian (*speed of adjustment*), $\gamma$, tidak signifikan pada tingkat signifikansi lima persen; karena nilai statistik uji $t$ = 1,611216 < $t_{0,05;\,17}$ = 1,740. Parameter kecepatan penyesuaian tersebut juga tidak menunjukkan tanda arah yang seharusnya, yaitu tanda negatif. Oleh sebab itu, *Error Correction Model* (ECM) yang terbentuk tidak dapat menunjukkan adanya mekanisme untuk mengoreksi ketidakseimbangan (*disequilibrium*) jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*). Berarti, kesalahan keseimbangan (*equilibrium error*) dapat dikatakan tidak mempengaruhi ekspor. Hal ini dapat diartikan bahwa ekspor menyesuaikan perubahan investasi pada periode yang sama. Atau dengan kata lain, penyesuaian satu periode berikutnya untuk menuju keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*) tidak begitu berarti.

## 4.6 KESIMPULAN DAN SARAN PENELITIAN

### 4.6.1 Kesimpulan

Berikut adalah kesimpulan yang diperoleh dari sejumlah pengujian yang telah dilakukan pada peubah ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007:

1. Peubah ekspor dan investasi adalah peubah yang nonstasioner pada tingkat aras (*level*), tetapi setelah dilakukan proses *difference* satu kali menghasilkan peubah yang stasioner. Kedua peubah tersebut terintegrasi pada orde satu, dinotasikan dengan *I*(1).
2. Hasil uji *Engle-Granger* menyatakan bahwa peubah ekspor dan investasi terkointegrasi pada orde (1, 1), dinotasikan dengan *CI*(1, 1), yang berarti juga bahwa kedua peubah tersebut mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*).
3. Hasil dari uji Kausalitas *Granger* diperoleh bahwa terdapat hubungan satu arah antara peubah ekspor dan investasi, yaitu peubah investasi mempengaruhi peubah ekspor.
4. *Error Correction Model* (ECM) yang terbentuk tidak dapat menunjukkan adanya mekanisme untuk mengoreksi ketidakseimbangan (*disequilibrium*) jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*).

### 4.6.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya adalah dengan menggunakan data kuartal (tiga bulanan) dan membagi waktu pengamatan penelitian sebelum dan sesudah terjadinya krisis moneter 1997. Hal ini dilakukan agar diperoleh hasil penelitian yang lebih akurat pada peubah ekspor dan investasi Indonesia.

# BAB V

# PENUTUP

Kesimpulan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Kointegrasi adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menganalisis masalah kenonstasioneran yang terjadi pada peubah runtun waktu (*time series*).
2. Untuk mengetahui adanya suatu hubungan kointegrasi antara dua peubah nonstasioner yang memiliki orde integrasi satu, $I(1)$, dilakukan pengujian kointegrasi dengan menggunakan uji *Engle-Granger* yang memanfaatkan uji *Dickey-Fuller* (DF) atau uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF).
3. Taksiran parameter kointegrasi diperoleh setelah diketahui adanya suatu hubungan kointegrasi. Metode penaksiran parameter kointegrasi meliputi metode *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Error Correction Model* (ECM). Dari metode OLS, diperoleh hasil taksiran parameter kointegrasi yang superkonsisten untuk hubungan jangka panjang. Sedangkan dari metode ECM, diperoleh hasil taksiran parameter yang digunakan untuk mengoreksi ketidakseimbangan jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang.
4. *Granger Representation Theorem* menyatakan bahwa jika dua peubah nonstasioner terkointegrasi pada orde (1, 1) maka hubungan antara kedua peubah tersebut dapat dijelaskan dengan *Error Correction Model* (ECM).

## DAFTAR PUSTAKA


Badan Pusat Statistik. 2008. *Statistik Indonesia* 2008. Biro Pusat Statistik, Jakarta: 297−310.

Bhar, R. & S. Hamori. 2005. *Empirical Techniques in Finance*. Springer-Verlag, Berlin: 41−57.

Cryer, Jonathan D. 1986. *Time Series Analysis*. PSW Publisher, Boston: 9−102.

Dolado, J.J., J. Gonzalo & F. Marmol. 1999. Cointegration. *Dalam*: Baltagi, B.H. (ed.). 2001. *A Companion to Theoretical Econometrics*. Blackwell Publishing Ltd, Oxford: 634−654.

Enders, Walter. 2004. *Applied Econometric Time Series*, 2nd *edition*. John Willey & Sons, Inc., New York: 319−386.

Engle, R.F. & C.W.J. Granger. 1987. Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*. **55** (2): 251−276.

Escudero, Walter S. 2000. A Primer on Unit-Roots and Cointegration. *Econometría*. **3**: 1−16.

Granger, C.W.J. & P. Newbold. 1974. Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics*. **2**: 111−120.

Gujarati, D.N. 2003. *Basic Econometrics*, 4th *edition*. McGraw-Hill, Inc., New York: 792−830.

Hylleberg, S & G.E. Mizon. 1989. Cointegration and Error Correction Mechanisms. *The Economic Journal*. **99** (395): 113−125.

Josua. 2007. *Analisis Vector Autoregression* (VAR) *terhadap Interrelationship antara Pertumbuhan PDB dan Pertumbuhan Kesempatan Kerja* (*Studi Kasus*: *Indonesia Tahun* 1977−2006), Skripsi. Universitas Indonesia, Depok: vii+75 hlm.

Kirchgässner, G. & J. Wolters. 2007. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Berlin: 199−239.

Lütkepohl, Helmut. 2004. Vector Autoregressive and Vector Error Correction Models. *Dalam*: Lütkepohl, H. & M. Krätzig. (ed.). 2004. *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press, Cambridge: 86−90.

Mendenhall, W. & T. Sinsisch. 1990. *A Second Course in Statistics*: *Regression Analysis*, 4th *edition*. Prentice Hall International, New York: 430−436.

Montgomery, D.C. & E.A. Peck. 1992. *Introduction to Linear Regression Analysis*, 2nd *edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York: 7−18.

Nachrowi, D.N. & H. Usman. 2006. *Pedoman Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Lembaga Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta: 183−373.

Oiconita, Naomi. 2006. *Analisis Ekspor dan Output Nasional di Indonesia*: *Periode* 1980−2004 *Kajian tentang Kausalitas dan Kointegrasi*, Tesis. Universitas Indonesia, Depok: xi+116 hlm.

Pfaff, Bernhard. 2008. *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*, 2nd *edition*. Springer Science, New York: 73−126.

Pindyck, R.S. & D.L. Rubinfeld. 1998. *Econometric Models and Economic Forecasts*, 4th *edition*. Mc Grow-Hill, New York: 3−84.

Stock, J.H. 1987. Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors. *Econometrica*. **55** (5): 1035−1056.

Wooldrige, J.M. 2000. *Introductory Econometrics*. South-Western College Publishing, New York: 578−593.

http://indoonlineshop.com/index.php/tutorials/forex-/Definisi-Investasi.html, 4 April 2009, pk. 16.27.

# LAMPIRAN

Lampiran 1: Tabel Distribusi *Dickey-Fuller*

| Ukuran Sampel ($T$) | Tingkat Signifikansi | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **0.01** | **0.025** | **0.05** | **0.10** |
| | Model tanpa konstanta dan *trend* | | | |
| 25 | −2.66 | −2.26 | −1.95 | −1.60 |
| 50 | −2.62 | −2.25 | −1.95 | −1.61 |
| 100 | −2.60 | −2.24 | −1.95 | −1.61 |
| 250 | −2.58 | −2.23 | −1.95 | −1.62 |
| 500 | −2.58 | −2.23 | −1.95 | −1.62 |
| ∞ | −2.58 | −2.23 | −1.95 | −1.62 |
| | Model dengan konstanta | | | |
| 25 | −3.75 | −3.33 | −3.00 | −2.62 |
| 50 | −3.58 | −3.22 | −2.93 | −2.60 |
| 100 | −3.51 | −3.17 | −2.89 | −2.58 |
| 250 | −3.46 | −3.14 | −2.88 | −2.57 |
| 500 | −3.44 | −3.13 | −2.87 | −2.57 |
| ∞ | −3.43 | −3.12 | −2.86 | −2.57 |
| | Model dengan konstanta dan *trend* | | | |
| 25 | −4.38 | −3.95 | −3.60 | −3.24 |
| 50 | −4.15 | −3.80 | −3.50 | −3.18 |
| 100 | −4.04 | −3.73 | −3.45 | −3.15 |
| 250 | −3.99 | −3.69 | −3.43 | −3.15 |
| 500 | −3.98 | −3.68 | −3.42 | −3.13 |
| ∞ | −3.96 | −3.66 | −3.41 | −3.12 |

Lampiran 2: Tabel nilai kritis *Engle-Granger Cointegration Test*

| **Ukuran Sampel (*T*)** | **Tingkat Siginifikansi** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0.01** | **0.05** | **0.1** | **0.01** | **0.05** | **0.1** |
| | | **Dua Peubah** | | | **Empat Peubah** | |
| 50 | −4.123 | −3.461 | −3.130 | −4.592 | −3.915 | −3.578 |
| 100 | −4.008 | −3.368 | −3.087 | −4.441 | −3.828 | −3.514 |
| 200 | −3.954 | −3.368 | −3.067 | −4.368 | −3.785 | −3.483 |
| 500 | −3.921 | −3.350 | −3.054 | −4.326 | −3.760 | −3.464 |
| | | **Tiga Peubah** | | | **Lima Peubah** | |
| 50 | −5.017 | −4.324 | −3.979 | −5.416 | −4.700 | −4.348 |
| 100 | −4.827 | −4.210 | −3.895 | −5.184 | −4.557 | −4.240 |
| 200 | −4.737 | −4.154 | −3.853 | −5.070 | −4.487 | −4.186 |
| 500 | −4.684 | −4.122 | −3.828 | −5.003 | −4.446 | −4.154 |

Lampiran 3: Taksiran parameter, $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, model regresi linier statis (3.6) dengan metode OLS

- Bentuk fungsi yang meminimumkan SSE (*Sum of Squares Error*):

$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \beta_0 - \beta_1 x_{2t})^2$ .

- Gunakan prinsip turunan untuk memperoleh taksiran parameter regresi $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_0}\Big|_{\hat{\beta}_0,\, \hat{\beta}_1} = -2\sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{2t}) = 0 \,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_1}\Big|_{\hat{\beta}_0,\, \hat{\beta}_1} = -2\sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{2t}) x_{2t} = 0 \,.$$

- Sederhanakan persamaan pertama untuk memperoleh taksiran parameter regresi $\hat{\beta}_0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& -2\sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{2t}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} (x_{1t} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{2t}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} x_{1t} - T\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{T} x_{2t} = 0 \\
& \Leftrightarrow T\hat{\beta}_0 = \sum_{t=1}^{T} x_{1t} - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\
& \Leftrightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} - \hat{\beta}_1 \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\
& \Leftrightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{x}_{1t} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_{2t}
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{\beta}_0 = \bar{x}_{1t} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_{2t}$ .

- Sederhanakan persamaan kedua untuk memperoleh taksiran parameter regresi $\hat{\beta}_1$, sehingga diperoleh:

$$-2\sum_{t=1}^{T}(x_{1t}-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_{2t})x_{2t}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T}(x_{1t}-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_{2t})x_{2t}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\hat{\beta}_0\sum_{t=1}^{T}x_{2t}-\hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2=0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\hat{\beta}_0\sum_{t=1}^{T}x_{2t}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-(\bar{x}_{1t}-\hat{\beta}_1\bar{x}_{2t})\sum_{t=1}^{T}x_{2t}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\bar{x}_{1t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}+\hat{\beta}_1\bar{x}_{2t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}+\frac{1}{T}\hat{\beta}_1\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2-\frac{1}{T}\hat{\beta}_1\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2-\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2\right)=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}}{\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2-\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}-T\left(\frac{\sum_{t=1}^{T}x_{1t}}{T}\right)\left(\frac{\sum_{t=1}^{T}x_{2t}}{T}\right)}{\sum_{t=1}^{T}x_{2t}{}^2-2\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2}{T}+\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)^2}{T}}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} - T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t}}{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}^{\ 2} - 2\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}\sum_{t=1}^{T} x_{2t}}{T} + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}\sum_{t=1}^{T} x_{2t}}{T}}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} - T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t}}{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}^{\ 2} - 2\bar{x}_{2t}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} + T\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}}{T}\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}}{T}}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} - T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t} - T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t} + T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t}}{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}^{\ 2} - 2\bar{x}_{2t}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} + T(\bar{x}_{2t})^2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} - T\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}}{T}\bar{x}_{2t} - T\bar{x}_{1t}\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{2t}}{T} + T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t}}{\sum_{t=1}^{T}(x_{2t}^{\ 2} - 2\bar{x}_{2t}x_{2t} + (\bar{x}_{2t})^2)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} - \bar{x}_{2t}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} - \bar{x}_{1t}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} + T\bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t}}{\sum_{t=1}^{T}(x_{2t}^{\ 2} - 2\bar{x}_{2t}x_{2t} + (\bar{x}_{2t})^2)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{1t}x_{2t} - x_{1t}\bar{x}_{2t} - \bar{x}_{1t}x_{2t} + \bar{x}_{1t}\bar{x}_{2t})}{\sum_{t=1}^{T}(x_{2t}^{\ 2} - 2\bar{x}_{2t}x_{2t} + (\bar{x}_{2t})^2)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{1t} - \bar{x}_{1t})(x_{2t} - \bar{x}_{2t})}{\sum_{t=1}^{T}(x_{2t} - \bar{x}_{2t})^2}$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{1t} - \bar{x}_{1t})(x_{2t} - \bar{x}_{2t})}{\sum_{t=1}^{T}(x_{2t} - \bar{x}_{2t})^2}.$$

Lampiran 4: Data nilai ekspor dan investasi Indonesia

| Tahun | Nilai Ekspor (Juta US$) | Nilai Investasi (Juta US$) |
|---|---|---|
| 1970 | 1.108,1 | 352,8 |
| 1971 | 1.233,6 | 426,1 |
| 1972 | 1.777,7 | 522,3 |
| 1973 | 3.210,8 | 655,4 |
| 1974 | 7.426,3 | 1.414,2 |
| 1975 | 7.102,5 | 1.761,1 |
| 1976 | 8.546,5 | 454,4 |
| 1977 | 10.852,6 | 661,2 |
| 1978 | 11.643,2 | 203,5 |
| 1979 | 15.590,1 | 1.753,9 |
| 1980 | 23.950,4 | 900,9 |
| 1981 | 25.164,5 | 900,4 |
| 1982 | 22.328,3 | 1.755,9 |
| 1983 | 21.145,9 | 2.460,5 |
| 1984 | 21.887,8 | 1.332,3 |
| 1985 | 18.586,7 | 859,0 |
| 1986 | 14.805,0 | 826,2 |
| 1987 | 17.135,6 | 1.457,1 |
| 1988 | 19.218,5 | 4.434,5 |
| 1989 | 22.158,9 | 4.718,8 |
| 1990 | 25.675,3 | 8.750,1 |
| 1991 | 29.142,4 | 8.778,2 |
| 1992 | 33.967,0 | 10.340,0 |
| 1993 | 36.823,0 | 8.141,8 |
| 1994 | 40.053,4 | 23.724,3 |
| 1995 | 45.418,0 | 39.914,7 |
| 1996 | 49.814,8 | 29.931,4 |
| 1997 | 53.443,6 | 33.832,5 |
| 1998 | 48.847,6 | 13.563,1 |
| 1999 | 48.665,4 | 10.890,6 |
| 2000 | 62.124,0 | 15.413,1 |
| 2001 | 56.320,9 | 15.043,9 |
| 2002 | 57.158,8 | 9.744,1 |
| 2003 | 61.058,2 | 13.207,2 |
| 2004 | 71.584,6 | 10.277,3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2005 | 85.660,0 | 13.597,3 |
| 2006 | 100.798,6 | 15.623,9 |
| 2007 | 114.100,9 | 40.145,8 |

Lampiran 5: Uji orde integrasi dengan *Augmented Dickey-Fuller Test*

- Ekspor pada *Level*

Null Hypothesis: EKSPOR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=8)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|---|---|---|---|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | 3.487910 | 1.0000 |
| Test critical values: | 1% level | -3.621023 | |
| | 5% level | -2.943427 | |
| | 10% level | -2.610263 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(EKSPOR)
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 10:53
Sample(adjusted): 1971 2007
Included observations: 37 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| EKSPOR(-1) | 0.104364 | 0.029922 | 3.487910 | 0.0013 |
| C | -278.5470 | 1199.576 | -0.232205 | 0.8177 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.257932 | Mean dependent var | 3053.859 |
| Adjusted R-squared | 0.236730 | S.D. dependent var | 5050.348 |
| S.E. of regression | 4412.252 | Akaike info criterion | 19.67470 |
| Sum squared resid | 6.81E+08 | Schwarz criterion | 19.76177 |
| Log likelihood | -361.9819 | F-statistic | 12.16551 |
| Durbin-Watson stat | 1.553571 | Prob(F-statistic) | 0.001333 |

- Investasi pada *Level*

Null Hypothesis: INVESTASI has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=8)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|---|---|---|---|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -0.985979 | 0.7482 |
| Test critical values: | 1% level | -3.621023 | |
| | 5% level | -2.943427 | |
| | 10% level | -2.610263 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(INVESTASI)
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 10:56
Sample(adjusted): 1971 2007
Included observations: 37 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| INVESTASI(-1) | -0.113901 | 0.115521 | -0.985979 | 0.3309 |
| C | 2025.559 | 1490.769 | 1.358734 | 0.1829 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.027025 | Mean dependent var | 1075.486 |
| Adjusted R-squared | -0.000774 | S.D. dependent var | 6916.452 |
| S.E. of regression | 6919.128 | Akaike info criterion | 20.57451 |
| Sum squared resid | 1.68E+09 | Schwarz criterion | 20.66158 |
| Log likelihood | -378.6283 | F-statistic | 0.972155 |
| Durbin-Watson stat | 1.601308 | Prob(F-statistic) | 0.330911 |

- Ekspor pada *first difference*

Null Hypothesis: D(EKSPOR) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=8)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|---|---|---|---|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -3.259613 | 0.0245 |
| Test critical values: | 1% level | -3.626784 | |
| | 5% level | -2.945842 | |
| | 10% level | -2.611531 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(EKSPOR,2)
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 11:04
Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| D(EKSPOR(-1)) | -0.531048 | 0.162917 | -3.259613 | 0.0025 |
| C | 1836.590 | 894.9470 | 2.052177 | 0.0479 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.238097 | Mean dependent var | 366.0222 |
| Adjusted R-squared | 0.215688 | S.D. dependent var | 5236.459 |
| S.E. of regression | 4637.482 | Akaike info criterion | 19.77568 |
| Sum squared resid | 7.31E+08 | Schwarz criterion | 19.86366 |
| Log likelihood | -353.9623 | F-statistic | 10.62508 |
| Durbin-Watson stat | 2.022328 | Prob(F-statistic) | 0.002537 |

- Investasi pada *first difference*

Null Hypothesis: D(INVESTASI) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=8)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|---|---|---|---|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -4.861862 | 0.0003 |
| Test critical values: | 1% level | -3.626784 | |
| | 5% level | -2.945842 | |
| | 10% level | -2.611531 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(INVESTASI,2)
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 10:58
Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| D(INVESTASI(-1)) | -1.016796 | 0.209137 | -4.861862 | 0.0000 |
| C | 1110.450 | 1189.008 | 0.933930 | 0.3569 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.410108 | Mean dependent var | 679.1278 |
| Adjusted R-squared | 0.392759 | S.D. dependent var | 9129.417 |
| S.E. of regression | 7114.162 | Akaike info criterion | 20.63152 |
| Sum squared resid | 1.72E+09 | Schwarz criterion | 20.71949 |
| Log likelihood | -369.3673 | F-statistic | 23.63770 |
| Durbin-Watson stat | 1.679703 | Prob(F-statistic) | 0.000026 |

Lampiran 6: Uji *Engle-Granger*

- Taksiran parameter kointegrasi dengan metode OLS

Dependent Variable: EKSPOR
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 11:05
Sample: 1970 2007
Included observations: 38

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| INVESTASI | 1.792345 | 0.287759 | 6.228623 | 0.0000 |
| C | 17642.47 | 4115.691 | 4.286636 | 0.0001 |
| R-squared | 0.518689 | Mean dependent var | | 34092.88 |
| Adjusted R-squared | 0.505319 | S.D. dependent var | | 27665.30 |
| S.E. of regression | 19457.98 | Akaike info criterion | | 22.64110 |
| Sum squared resid | 1.36E+10 | Schwarz criterion | | 22.72729 |
| Log likelihood | -428.1809 | F-statistic | | 38.79574 |
| Durbin-Watson stat | 0.332951 | Prob(F-statistic) | | 0.000000 |

- Uji kestasioneran residual dengan *Augmented Dickey-Fuller Test*

Null Hypothesis: RESIDUAL has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=8)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|---|---|---|---|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -1.717542 | 0.0812 |
| Test critical values: | 1% level | -2.628961 | |
| | 5% level | -1.950117 | |
| | 10% level | -1.611339 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(RESIDUAL)
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 11:07
Sample(adjusted): 1971 2007
Included observations: 37 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| RESIDUAL(-1) | -0.162415 | 0.094563 | -1.717542 | 0.0945 |
| R-squared | 0.066079 | Mean dependent var | | 1126.217 |
| Adjusted R-squared | 0.066079 | S.D. dependent var | | 11169.42 |
| S.E. of regression | 10794.08 | Akaike info criterion | | 21.43804 |
| Sum squared resid | 4.19E+09 | Schwarz criterion | | 21.48158 |
| Log likelihood | -395.6037 | Durbin-Watson stat | | 1.834207 |

## Lampiran 7: Uji Kausalitas *Granger*

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 05/12/09 Time: 11:39
Sample: 1970 2007
Lags: 6

| Null Hypothesis: | Obs | F-Statistic | Probability |
|---|---|---|---|
| DINVESTASI does not Granger Cause DEKSPOR | 31 | 7.83127 | 0.00030 |
| DEKSPOR does not Granger Cause DINVESTASI | | 1.59999 | 0.20436 |

## Lampiran 8: *Error Correction Model* (ECM)

Dependent Variable: DEKSPOR
Method: Least Squares
Date: 05/12/09 Time: 12:03
Sample(adjusted): 1977 2007
Included observations: 31 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| RESIDUAL(-1) | 0.127602 | 0.079196 | 1.611216 | 0.1255 |
| DEKSPOR(-1) | 0.828325 | 0.253793 | 3.263783 | 0.0046 |
| DEKSPOR(-2) | -0.677170 | 0.187948 | -3.602974 | 0.0022 |
| DEKSPOR(-3) | 0.501614 | 0.207374 | 2.418882 | 0.0271 |
| DEKSPOR(-4) | -0.069994 | 0.174560 | -0.400972 | 0.6934 |
| DEKSPOR(-5) | -0.208597 | 0.169007 | -1.234252 | 0.2339 |
| DEKSPOR(-6) | -0.044716 | 0.175691 | -0.254515 | 0.8022 |
| DINVESTASI(-1) | 0.192441 | 0.163937 | 1.173868 | 0.2566 |
| DINVESTASI(-2) | 0.135738 | 0.163783 | 0.828768 | 0.4187 |
| DINVESTASI(-3) | 0.136546 | 0.151778 | 0.899645 | 0.3809 |
| DINVESTASI(-4) | -0.275732 | 0.135671 | -2.032354 | 0.0580 |
| DINVESTASI(-5) | 0.663497 | 0.128095 | 5.179724 | 0.0001 |
| DINVESTASI(-6) | -0.386252 | 0.182490 | -2.116564 | 0.0493 |
| C | 1725.711 | 1057.072 | 1.632539 | 0.1209 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.820403 | Mean dependent var | 3404.981 |
| Adjusted R-squared | 0.683064 | S.D. dependent var | 5420.775 |
| S.E. of regression | 3051.740 | Akaike info criterion | 19.18726 |
| Sum squared resid | 1.58E+08 | Schwarz criterion | 19.83487 |
| Log likelihood | -283.4026 | F-statistic | 5.973555 |
| Durbin-Watson stat | 2.085214 | Prob(F-statistic) | 0.000447 |