

**MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR DALAM MENGAPROKSIMASI
HARGA *ZERO-COUPON BOND***

REZA HENGANING AYODYA

030401048X



**UNIVERSITAS INDONESIA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
2009**

**MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR DALAM MENGAPROKSIMASI
HARGA *ZERO-COUPON BOND***

**Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains**

Oleh:

REZA HENGANING AYODYA

030401048X



DEPOK

2009

SKRIPSI : MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR DALAM
MENGAPROKSIMASI HARGA *ZERO-COUPON BOND*

NAMA : REZA HENGANING AYODYA

NPM : 030401048X

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 13 JULI 2009

Dra. BEVINA DESJWIANDRA H., M.Sc., PhD.
PEMBIMBING I

MILA NOVITA S.Si,M.Si.
PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana : 13 Juli 2009

Penguji I : Dra. Bevina Desjwiandra H., M.Sc., PhD.

Penguji II : Rahmi Rusin S.Si., Msc. Tech.

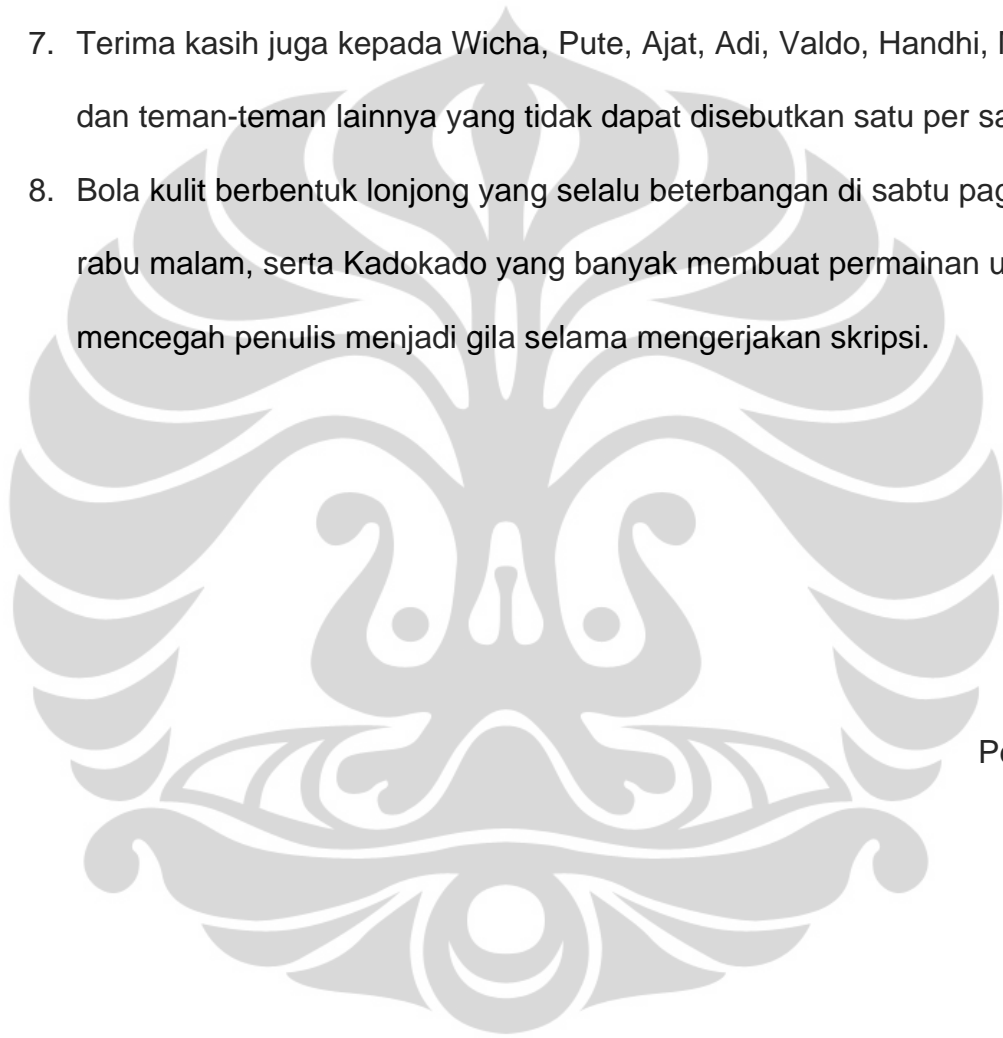
Penguji III : Alhaji Akbar B., S.Si., M.Sc.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulisan tugas akhir ini selesai. Shalawat serta salam penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Penulis menyadari selesainya skripsi ini tak lepas dari bantuan dan doa berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, khususnya kepada:

1. Orang tua tercinta yang selalu membantu dan mendukung penulis setiap saat. Kakak dan adik-adik tercinta yang telah menciptakan suasana kondusif di rumah untuk mengerjakan skripsi.
2. Dra. Bevina Desjwiandra H. M.Sc., PhD. selaku pembimbing 1 dan Mila Novita S.Si., M.Si. selaku pembimbing 2.. Terima kasih atas bimbingan, arahan, dan nasihatnya selama penulis mengerjakan skripsi ini.
3. Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing akademik penulis selama menyelesaikan masa studi.
4. Seluruh staf pengajar Departemen Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
5. Seluruh staf karyawan Departemen Matematika yang telah membantu penulis selama masa kuliah.

6. Teman-teman lingkaran setan, Wanto, Bembi, Gele, Gunung, Ilham, dan Yanu, serta Mita, Eny, dan Diki. Terima kasih pula kepada Ranchan yang telah memasok *manga scan* Naruto dan Bleach selama mengerjakan skripsi.
7. Terima kasih juga kepada Wicha, Pute, Ajat, Adi, Valdo, Handhi, Murni dan teman-teman lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
8. Bola kulit berbentuk lonjong yang selalu beterbangan di sabtu pagi dan rabu malam, serta Kadokado yang banyak membuat permainan untuk mencegah penulis menjadi gila selama mengerjakan skripsi.



Penulis
2009

ABSTRAK

Nilai aset finansial dipengaruhi antara lain oleh tingkat bunga, risiko dan lain-lain. Tugas akhir ini membahas pengaruh tingkat bunga pada aset finansial, khususnya tingkat bunga yang diasumsikan memenuhi model tingkat bunga Hull-White Dua Faktor dengan aset finansial berupa *zero-coupon bond*. Model Hull-White Dua Faktor adalah model tingkat bunga yang memiliki *mean-reversion level* dengan komponen stokastik. Untuk melihat pengaruh tingkat bunga pada aset finansial akan dibandingkan tingkat bunga hasil aproksimasi dengan tingkat bunga pada pasar. Begitu pula dengan *zero-coupon bond*, harga hasil aproksimasi akan dibandingkan dengan harga pada pasar. Aproksimasi parameter model tingkat bunga akan dilakukan dengan metode Newton-Raphson dan skema Euler-Maruyama. Sementara aproksimasi tingkat bunga menggunakan skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo. Data yang digunakan adalah data tingkat bunga di www.bankofengland.co.uk. Simulasi hasil implementasi menunjukkan bahwa aproksimasi tingkat bunga model Hull-White Dua Faktor memiliki pola yang sama dengan tingkat bunga pada pasar. Sedangkan aproksimasi harga *zero-coupon bond* dapat memberikan informasi bagi pemegang *bond* untuk mempertahankan atau melepas investasinya.

Kata kunci : *zero-coupon bond, model Hull-White Dua Faktor, Euler-Maruyama, Monte Carlo;*

viii + 134 hlm.; lamp;

Bibliografi: 13 (1991-2008)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR LAMPIRAN	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Permasalahan	1
1.2. Permasalahan	5
1.3. Tujuan Penulisan	5
1.4. Pembatasan Masalah	6
1.5. Sistematika Penulisan	6
BAB II LANDASAN TEORI	8
2.1. Persamaan Diferensial Stokastik	8
2.2. Solusi Persamaan Diferensial Stokastik Linier	11
2.3. Lemma Ito	13
2.4. Tingkat Bunga	16
2.5. Persamaan Harga <i>Bond</i>	20
2.6. Taksiran Maksimum Likelihood	25
2.7. Metode Newton-Raphson	27
2.8. Simulasi Model Tingkat Bunga	29
BAB III MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR DALAM MENGAPROKSIMASI HARGA <i>ZERO-COUPON BOND</i>	32
3.1. Model Hull-White Dua Faktor	32

3.2. Persamaan Harga <i>Zero-Coupon Bond</i> Untuk Model Hull-White Dua Faktor	38
3.3 Solusi Eksplisit Model Hull-White Dua Faktor	59
3.4 Simulasi Tingkat Bunga untuk Model Hull-White Dua Faktor	64
3.5 Estimasi Model Hull-White Dua Faktor.....	66
BAB IV IMPLEMENTASI MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR	72
4.1. Implementasi Model Hull-White Dua Faktor untuk Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian	74
4.2. Implementasi Model Hull-White Dua Faktor untuk Mengaproksimasi Harga <i>Zero-Coupon Bond</i>	85
BAB V PENUTUP	91
5.1 Kesimpulan.....	91
5.2 Saran.....	92
DAFTAR PUSTAKA.....	93

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Hubungan antar tingkat bunga.....	18
Gambar 2. <i>Mean-reversion level</i>	20
Gambar 3. Skema implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi harga <i>zero-coupon bond</i>	72
Gambar 4. Hasil estimasi parameter untuk 1 tahun.....	78
Gambar 5. Aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun.....	79
Gambar 6. Hasil estimasi parameter untuk 5 tahun.....	82
Gambar 7. Aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 5 tahun.....	83
Gambar 8. Kurva harga <i>zero-coupon bond</i> yang salah.....	87
Gambar 9. Kurva harga <i>zero-coupon bond</i>	89

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Contoh <i>output</i> hasil implementasi sepanjang 1 tahun	80
Tabel 2. Contoh <i>output</i> hasil implementasi sepanjang 5 tahun	84
Tabel 3. Data <i>Yield Curve</i> UK Government Bonds 1 Juni 2009	107
Tabel 4. Data <i>Spot Rate</i> dan <i>Instantaneous Forward Rate</i> Harian UK Government Bonds dengan Masa Jatuh Tempo 5 Tahun	110

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran

1. Elemen vektor w dan matriks Hessian.....94
2. Tabel-tabel Data.....107
3. Contoh Program Model Hull-White Dua Faktor.....112

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Tingkat bunga dan prediksi pergerakan nilainya di masa depan merupakan salah satu kunci terpenting dalam pengambilan keputusan suatu investasi. Sebagai contoh, seorang investor dalam berinvestasi akan mengharapkan suatu imbal hasil yang tinggi, yang tentunya dipengaruhi oleh tingkat bunga yang berlaku.

Salah satu instrumen investasi yang dipengaruhi oleh tingkat bunga adalah *bond*. *Bond* dapat dikatakan sebagai surat hutang dalam bentuk sekuritas, dengan penerbit *bond* adalah pihak yang berhutang dan pemegang *bond* adalah pemberi pinjaman. *Bond* memiliki fitur-fitur berupa, nilai nominal atau nilai hutang pokok, yaitu nilai yang harus dibayar penerbit pada saat jatuh tempo. Harga pembelian, yaitu nilai yang ditawarkan kepada investor dan tertera pada *bond*. Kemudian tanggal jatuh tempo, kupon (*coupon*), tanggal pemberian kupon, dan dokumen resmi yang menjelaskan hak-hak dari pemegang *bond*.

Pada umumnya, *bond* diterbitkan untuk jangka waktu tetap di atas 10 tahun. Di Amerika Serikat, *US Treasury Securities* atau *bond* pemerintah Amerika diterbitkan dengan jangka waktu 10 tahun. Untuk jangka waktu 1 sampai 10 tahun biasa disebut dengan surat hutang, sementara untuk jangka waktu di bawah 1 tahun disebut surat perbendaharaan. Di Indonesia, *bond* yang diterbitkan oleh pemerintah dengan jangka waktu 1 sampai 10 tahun disebut Surat Utang Negara, sedangkan untuk jangka waktu di bawah 1 tahun disebut Surat Utang Perbendaharaan Negara.

Secara umum, *bond* dapat diklasifikasikan berdasarkan pembayaran *coupon*, yaitu *bond* yang memberikan pembayaran *coupon* dan *bond* tanpa pembayaran *coupon*. *Bond* yang tidak memberikan pembayaran *coupon* disebut dengan *zero-coupon bond*.

Zero-coupon bond tidak diperdagangkan secara aktif. Biasanya seorang pemegang *zero-coupon bond* akan menahan asetnya tersebut hingga masa jatuh tempo. Akan tetapi, ada kalanya seorang pemegang *zero-coupon bond* ingin menjual *zero-coupon bond* miliknya sebelum masa jatuh tempo. Tentunya si pemegang *zero-coupon bond* ingin mendapatkan keuntungan dari penjualan *zero-coupon bond* miliknya tersebut. Apabila hal ini terjadi, diperlukan pengetahuan mengenai penentuan harga *zero-coupon bond*. Dari pengetahuan ini, diharapkan pemegang *zero-coupon bond* memiliki informasi yang cukup kapan dia akan menjual asetnya tersebut dan kapan dia akan menahannya.

Harga dari *zero-coupon bond* hanya bergantung kepada nilai dari tingkat bunga. Untuk tingkat bunga yang konstan atau deterministik, tidaklah sulit untuk menentukan harga *zero-coupon bond*. Akan tetapi pada kenyataannya tidaklah demikian, seringkali pergerakan tingkat bunga berubah-ubah secara tidak pasti dan merupakan proses stokastik sehingga untuk mengamatinya diperlukan suatu model tingkat bunga stokastik.

Saat ini terdapat banyak model tingkat bunga yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*. Model-model tersebut dapat dibedakan berdasarkan jumlah faktor stokastiknya, yaitu model dengan faktor stokastik tunggal dan model dengan faktor stokastik lebih dari satu.

Salah satu contoh model dengan faktor stokastik tunggal adalah model yang dikembangkan oleh Vasicek (1977). Model ini merupakan model pertama yang mengadopsi teori *mean-reversion level* yang menyatakan tingkat bunga akan bergerak menuju suatu level rata-rata. Akan tetapi, model ini memiliki suatu kekurangan, yaitu tingkat bunga dapat bernilai negatif. Kekurangan ini diperbaiki pada model Cox-Ingersol-Ross (1985). Contoh lainnya adalah model yang dikembangkan oleh Ho-Lee dan Hull-White. Ho-Lee mengusulkan model *no-arbitrage* pertama pada 1986. Model ini tidak memungkinkan tingkat bunga memiliki lebih dari satu nilai pada saat yang sama. Model Hull-White (1990) merupakan pengembangan dari model Vasicek. Model ini disebut juga sebagai model Hull-White Satu Faktor karena

Hull-White juga mengembangkan model tingkat bunga dengan faktor stokastik lebih dari satu.

Model dengan faktor stokastik yang lebih dari satu memiliki beberapa kelebihan dibandingkan model dengan faktor stokastik tunggal. Salah satunya adalah jangkauannya terhadap kemungkinan pergerakan tingkat bunga. Pada dasarnya, pergerakan tingkat bunga dipengaruhi oleh banyak faktor, dengan semakin banyak faktor yang dipertimbangkan diharapkan hasil aproksimasinya akan lebih baik. Akan tetapi, semakin banyak faktor yang dipertimbangkan akan menyebabkan perhitungan numerik yang semakin tidak efisien. Contoh model dengan faktor stokastik lebih dari satu yang cukup populer adalah model *two-additive-factor Gaussian*, biasa ditulis G2++ dan model Hull-White Dua Faktor. Model Hull-White Dua Faktor merupakan pengembangan dari Model Hull-White Satu Faktor. Bedanya ialah, pada Model Hull-White Satu Faktor, *mean-reversion level* merupakan suatu fungsi deterministik terhadap waktu, sementara pada Model Hull-White Dua Faktor, *mean-reversion level* memiliki suatu komponen stokastik.

Pada skripsi ini Model Hull-White Dua Faktor akan digunakan untuk mengamati pergerakan tingkat bunga dan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*. Kemudian dari hasil aproksimasi harga *zero-coupon bond*, akan dilihat apakah hasil aproksimasi tersebut dapat membantu investor dalam menentukan keputusan bertransaksi *zero-coupon bond*.

1.2 PERMASALAHAN

Bagaimana perilaku model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian, harga *zero-coupon bond*, dan apakah hasil aproksimasi tersebut dapat membantu investor dalam pengambilan keputusan bertransaksi *zero-coupon bond*.

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan model Hull-White Dua Faktor dan kaitannya dengan persamaan harga *zero-coupon bond*.
2. Mengimplementasikan model Hull-White Dua Faktor untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian.
3. Mengimplementasikan model Hull-White Dua Faktor untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*.
4. Menganalisa hasil aproksimasi harga *zero-coupon bond* terkait dengan pengambilan keputusan bertransaksi *zero-coupon bond*.

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Asumsi-asumsi yang akan digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Tidak ada pajak, biaya transaksi, dan biaya-biaya lainnya untuk setiap *bond* dengan masing-masing jatuh tempo.
2. Tidak ada kesempatan untuk *arbitrage*, yaitu tingkat bunga memiliki lebih dari satu nilai pada saat yang sama.
3. Pembeli *bond* adalah *risk neutral*, yaitu pembeli *bond* hanya memandang imbal hasil dari *bond* yang dibelinya tanpa mempertimbangkan risiko.
4. Untuk setiap t , harga *bond* $P(t, T)$ memiliki turunan terhadap T .

1.5 SISTEMATIKA PENELITIAN

Bab I : Pendahuluan

Berisi latar belakang, permasalahan, tujuan penelitian, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Berisi persamaan diferensial stokastik, solusi persamaan diferensial linier, tingkat bunga, persamaan harga *bond*, taksiran maksimum likelihood, metode Newton-Raphson, skema Euler-

Maruyama, dan simulasi Monte Carlo.

Bab III : Model Hull-White Dua Faktor dalam Mengaproksimasi Harga *Zero-Coupon Bond*

Berisi Model Hull-White Dua Faktor, persamaan harga *zero-coupon bond* untuk model Hull-White Dua Faktor, solusi eksplisit model Hull-White Dua Faktor, simulasi model Hull-White Dua Faktor, dan estimasi parameter Model Hull-White Dua Faktor.

Bab IV : Implementasi model Hull-White Dua Faktor

Berisi implementasi model Hull-White Dua Faktor untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian dan implementasi model Hull-White Dua Faktor untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*.

Bab V : Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini akan membahas teori-teori yang mendukung isi skripsi ini. Adapun teori-teori yang akan dibahas adalah teori-teori dalam persamaan diferensial stokastik, tingkat bunga, persamaan harga *zero-coupon bond*, taksiran Maximum Likelihood, metode Newton-Raphson, dan simulasi dengan skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo.

2.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK

Pada subbab ini akan dibahas mengenai teori-teori yang berkenaan dengan persamaan diferensial stokastik. Teori-teori ini akan menjadi dasar dari model tingkat bunga yang menjadi topik skripsi ini.

Pada tahun 1826-1827, Robert Brown meneliti gerak partikel pada air. Dia menemukan bahwa gerak partikel tersebut sangat tidak beraturan dan gerak dari dua partikel yang berbeda terlihat saling bebas. Gerak yang tidak beraturan tersebut kemudian disebut gerak Brown. Pada tahun 1900, Louis

Bachelier menggunakan konsep gerak Brown sebagai model pergerakan harga saham pada teori spekulasi matematikanya. Norbert Wiener memberikan konsep dasar matematika untuk gerak Brown pada 1931 sehingga gerak ini disebut juga sebagai proses Wiener.

Gerak Brown, atau dikenal juga sebagai proses Wiener pada interval $[0, T]$ adalah proses stokastik $Z(t)$ yang memenuhi tiga kondisi sebagai berikut:

1. $Z(0) = 0$ dengan probabilitas 1.
2. $Z(t) - Z(s)$ berdistribusi $N(0, t - s)$ untuk $0 \leq s < t \leq T$.
3. Untuk $0 \leq s < t < u < v \leq T$, $Z(t) - Z(s)$ dan $Z(u) - Z(v)$ saling bebas.

Setelah mendefinisikan proses Wiener, selanjutnya akan diberikan pengertian mengenai salah satu teori penting dalam persamaan differensial stokastik, yaitu integral stokastik.

Misalkan diberikan suatu fungsi x , integral $\int_0^T x(t)dt$ dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(t_j)(t_{j+1} - t_j), \quad (2.1.1)$$

dengan $t_j = j\Delta t$ merupakan titik-titik diskritisasi. Nilai dari $\int_0^T x(t)dt$ dapat didefinisikan sebagai limit $\Delta t \rightarrow 0$ pada persamaan (2.1.1). Dengan cara yang

sama, suatu integral stokastik $\int_0^T x(t)dZ(t)$ dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) (Z(t_{j+1}) - Z(t_j)). \quad (2.1.2)$$

Pada kasus ini, $x(t)$ diintegrasikan terhadap suatu proses Wiener $Z(t)$. Disebut integral stokastik karena fungsi $x(t)$ diintegrasikan terhadap suatu proses Wiener.

Selanjutnya akan diberikan pengertian mengenai persamaan diferensial stokastik. Misalkan $Z(t)$ adalah suatu proses Wiener dengan $0 < t < T$. Suatu persamaan dengan bentuk

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dZ(t), \quad (2.1.3)$$

dengan fungsi $\mu(X(t), t)$ dan $\sigma(X(t), t)$ diberikan, disebut persamaan diferensial stokastik (PDS). Fungsi $\mu(X(t), t)$ merupakan suku deterministik dari PDS (2.1.3) dan biasa disebut sebagai *drift* dari PDS (2.1.3), sementara fungsi $\sigma(X(t), t)$ menggambarkan fluktuasi dari kurva $X(t)$ dan disebut sebagai *diffusion* dari PDS (2.1.3). PDS (2.1.3) disebut juga sebagai proses Ito apabila $\int_0^T \sigma(X(t), t)dZ(t)$ diaproksimasi dengan jumlah Riemann seperti pada persamaan (2.1.2).

PDS (2.1.3) merupakan PDS 1-dimensi. Yang dimaksud dengan dimensi di sini adalah jumlah proses Wiener yang dimiliki oleh PDS tersebut. PDS dengan bentuk

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(X(t), t)dZ_i(t) \quad (2.1.4)$$

disebut PDS m-dimensi dengan $Z_i, i = 1, 2, \dots, m$ merupakan proses Wiener.

2.2 SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK LINIER

Model tingkat bunga yang menjadi topik dalam skripsi ini merupakan suatu PDS linier dan kasus khusus yang mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck. PDS linier yang mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck terkadang disebut sebagai PDS tipe Langevin [9]. Subbab ini akan membahas cara mencari solusi eksplisit dari PDS tipe Langevin.

Perhatikan PDS

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dZ(t), \quad (2.2.1)$$

dengan α dan σ merupakan konstanta non-negatif. PDS yang memiliki bentuk (2.2.1) dikatakan mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck atau merupakan PDS tipe Langevin.

Pada kasus dimana $\sigma = 0$, PDS (2.2.1) berubah menjadi $dX(t) = -\alpha X(t)dt$ yang merupakan suatu persamaan diferensial biasa dan memiliki solusi $x_0 e^{-\alpha t}$. Untuk mencari solusi dari PDS (2.2.1), pandang proses $Y(t) = X(t)e^{\alpha t}$. Dengan menurunkan $Y(t)$, diperoleh

$$dY(t) = e^{\alpha t} dX(t) + \alpha e^{\alpha t} X(t) dt. \quad (2.2.2)$$

Substitusikan $dX(t)$ pada persamaan (2.2.1) ke dalam persamaan (2.2.2), maka diperoleh

$$dY(t) = \sigma e^{\alpha t} dZ(t). \quad (2.2.3)$$

Solusi untuk persamaan (2.2.3) adalah

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dZ(s),$$

sehingga solusi untuk $X(t)$ menjadi

$$X(t) = e^{-\alpha t} \left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dZ(s) \right).$$

Dengan cara yang sama, dapat dicari solusi untuk persamaan yang lebih umum

$$dX(t) = (\beta - \alpha X(t))dt + \sigma dZ(t). \quad (2.2.4)$$

PDS (2.2.4) merupakan bentuk umum dari PDS tipe Langevin dan memiliki solusi [9]

$$X(t) = \frac{\beta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(X(0) - \frac{\beta}{\alpha} + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dZ(s) \right).$$

2.3 LEMMA ITO

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai Lemma Ito. Lemma Ito nantinya akan digunakan untuk membentuk persamaan harga *zero-coupon bond* berdasarkan model tingkat bunga yang digunakan.

Sebelum membahas Lemma Ito, akan diperkenalkan suatu aturan yang nantinya akan berguna dalam penerapan Lemma Ito. Aturan yang akan diperkenalkan biasa disebut dengan *multiplication rules*, akan tetapi mengenai pembahasannya tidak akan diberikan pada skripsi ini.

Multiplication rules diperoleh dari perbandingan antara besar pengaruh fungsi *drift* dengan fungsi *diffusion* terhadap suatu PDS pada interval tertentu.

Contoh penggunaan dan pembahasan selengkapnya dapat dibaca pada buku *Derivatives Market*, oleh Robert MacDonald [13]. Adapun bentuk dari *multiplication rules* adalah

$$dt^2 = 0,$$

$$dt \times dZ = 0,$$

$$dZ^2 = dt,$$

dan

$$dZ_i \times dZ_j = \rho dt,$$

dengan ρ merupakan korelasi antara Z_i dan Z_j .

Misalkan suatu fungsi deterministik $f(x, t)$ yang dapat diturunkan dua kali dan suatu proses $Y = f(X, t)$ dengan X merupakan suatu proses Ito seperti pada (2.1.3). Formula Ito untuk menghitung dY adalah

$$dY = \left[\frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + \mu(X, t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + \sigma(X, t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} dZ. \quad (2.3.1)$$

Untuk mendapatkan persamaan (2.3.1), perhatikan ekspansi deret Taylor dari ΔY ,

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta X + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta X + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta X^2 \right) + O(\Delta X^3, \Delta t^3). \quad (2.3.2)$$

Dengan menggunakan *multiplication rules*, $dX^2 = \sigma^2(X, t)dt$, $dt^2 = 0$, dan $dXd t = 0$ untuk limit $\Delta X \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$ sehingga

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \sigma(X, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt. \quad (2.3.3)$$

Substitusikan dX dari persamaan (2.1.3) ke dalam persamaan (2.3.3) akan diperoleh persamaan (2.3.1).

Pada skripsi ini, model *short rate* yang digunakan mengikuti beberapa proses Ito, sehingga pergerakan harga *zero-coupon bond*-nya merupakan suatu PDS m-dimensi. Oleh karena itu diperlukan Lemma Ito untuk PDS m-dimensi. Lemma Ito untuk PDS m-dimensi disebut Lemma Ito Multivariat.

Lemma Ito Multivariat

Misalkan suatu fungsi deterministik $f(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ yang dapat diturunkan dua kali dan proses Y_m didefinisikan sebagai

$$Y_m = f(X_1, X_2, \dots, X_m, t)$$

dengan

$$dX_i = \mu_i(X_i, t)dt + \sigma_i(X_i, t)dZ_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Z_i dan Z_j merupakan proses Wiener dan diasumsikan memiliki korelasi ρ_{ij} sedemikian sehingga $dZ_i dZ_j = \rho_{ij} dt$. Perhatikan ekspansi deret Taylor order dua dari ΔY_m ,

$$\Delta Y_m = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta X_i \Delta X_j + O(\Delta t \Delta X_j) + O(\Delta t^2) \right).$$

Untuk $\Delta X_i \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, fungsi $O(\Delta t \Delta X_i)$ dan $O(\Delta t^2)$ dapat dihilangkan dan dengan *multiplication rules*, $dX_i dX_j = \sigma_i(X_i, t) \sigma_j(X_j, t) \rho_{ij} dt$. Maka diperoleh versi Lemma Ito untuk PDS m-dimensi berupa

$$\begin{aligned}
 dY_m = & \left[\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^m \mu_i(X_i, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_i(X_i, t) \sigma_j(X_j, t) \rho_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt \\
 & + \sum_{i=1}^m \sigma_i(X_i, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} dZ_i.
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

2.4 TINGKAT BUNGA

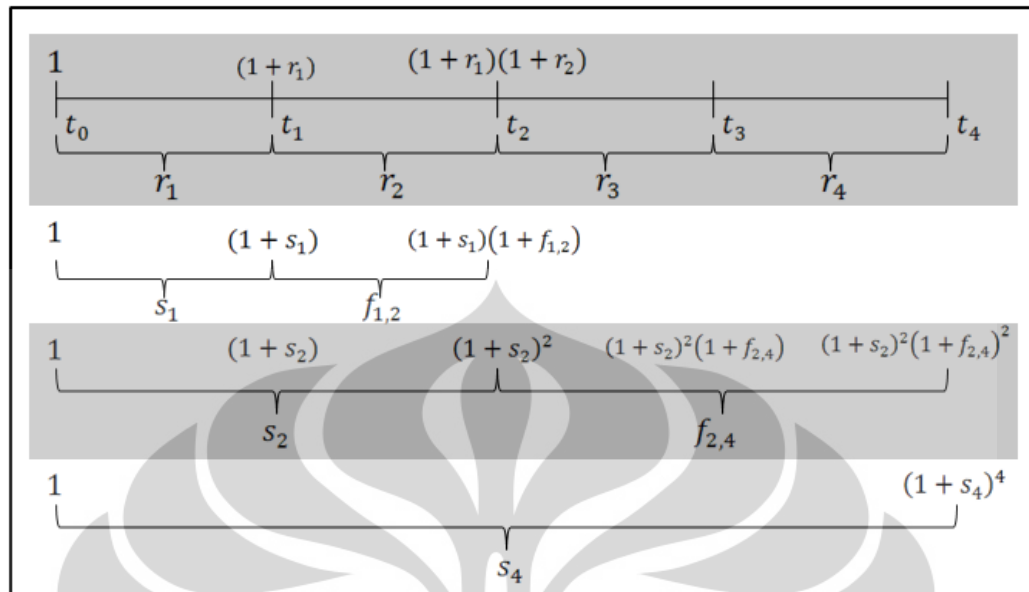
Skripsi ini membahas suatu model tingkat bunga, oleh karena itu, pengertian tingkat bunga secara umum menjadi penting untuk dikuasai. Subbab ini akan membahas pengertian tingkat bunga, jenis-jenis tingkat bunga, dan teori pergerakan tingkat bunga.

Bunga dapat didefinisikan sebagai kompensasi yang dibayarkan oleh peminjam modal (*borrower*) kepada pemilik modal (*lender*) atas pemakaian modal yang dimiliki pemilik modal oleh peminjam modal. Oleh karena itu, bunga dapat dilihat sebagai biaya sewa yang dikenakan atas pemakaian modal. Tingkat bunga adalah perbandingan antara besarnya bunga dengan besarnya modal yang dipinjam (hutang).

Terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi besar kecilnya tingkat bunga, salah satunya adalah masa jatuh tempo pembayaran hutang atau

biasa disebut *maturity date*. Semakin panjang masa jatuh tempo pembayaran hutang, maka semakin tinggi tingkat bunga yang diharapkan oleh pemberi pinjaman. Begitu juga sebaliknya, semakin pendek masa jatuh tempo pembayaran hutangnya, tingkat bunga yang diharapkan pemberi pinjaman akan semakin rendah pula. Dinamika tingkat bunga terkait dengan masa jatuh tempo pembayaran hutang biasa disebut sebagai *term structure of interest rates*.

Tingkat bunga dapat diklasifikasikan menjadi *spot rate*, *short rate*, dan *forward rate*. *Spot rate* s_t adalah tingkat bunga yang berlaku saat ini hingga masa jatuh tempo t . Terkadang *spot rate* disebut juga sebagai *yield rate* atau *yield to maturity*. *Short rate* r_t adalah tingkat bunga yang berlaku untuk suatu interval tertentu. Sementara itu, *forward rate* f_{t_1, t_2} adalah tingkat bunga yang dikenakan pada uang yang dipinjam pada saat t_1 dan dibayarkan pada saat t_2 . Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi pada gambar berikut ini:



Gambar 1. Hubungan antar tingkat bunga

Perhatikan Gambar 1, misalkan terdapat sejumlah uang sebesar 1 pada saat t_0 . Pada saat t_1 , dengan menggunakan *short rate* yang berlaku nilai dari 1 telah menjadi $(1 + r_1)$ dan pada saat t_2 nilai dari $(1 + r_1)$ menjadi $(1 + r_1)(1 + r_2)$. Apabila tingkat bunga yang digunakan adalah *spot rate* s_1 dan *forward rate* $f_{1,2}$, pada saat t_1 nilai dari 1 telah berubah menjadi $(1 + s_1)$ dan pada saat t_2 nilai dari $(1 + s_1)$ telah berubah menjadi $(1 + s_1)(1 + f_{1,2})$. Sementara jika yang digunakan adalah *spot rate* s_2 , pada saat t_1 nilai dari 1 berubah menjadi $(1 + s_2)$ dan pada saat t_2 berubah lagi menjadi $(1 + s_2)^2$. Nilai 1 pada saat t_2 dengan menggunakan berbagai tingkat bunga yang berlaku adalah sama, yaitu $(1 + r_1)(1 + r_2) = (1 + s_1)(1 + f_{1,2}) = (1 + s_2)^2$.

Secara matematis, hubungan antara *spot rate* dengan *short rate* dapat ditulis sebagai berikut [12]:

$$(1 + s_i)^i = (1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_i).$$

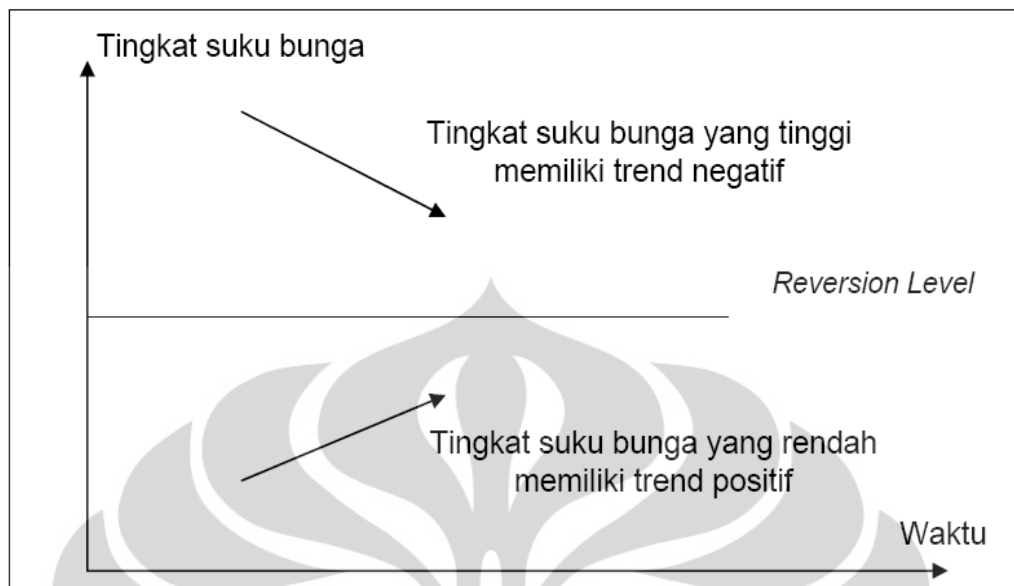
Sementara hubungan antara *spot rate* dengan *forward rate* dapat ditulis sebagai berikut:

$$(1 + s_j)^j = (1 + s_i)^i (1 + f_{i,j})^{j-i},$$

dengan $j > i$.

Pergerakan *short rate* tidak sepenuhnya acak, akan tetapi menuju suatu level tertentu. Pada saat *short rate* tinggi, permintaan kredit akan menurun dan mengakibatkan nilai *short rate* turun menuju suatu level tertentu. Begitu juga sebaliknya, pada saat *short rate* rendah, permintaan kredit akan meningkat dan mengakibatkan nilai *short rate* naik menuju suatu level tertentu. Level yang dituju ini disebut *mean-reversion level*, sementara laju perubahan *short rate* menuju *mean-reversion level* disebut *reversion rate*. *Short rate* yang memiliki pergerakan seperti ini disebut mengikuti teori *mean-reversion level*.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi pada gambar sebagai berikut:



Gambar 2. *Mean-reversion level*

[Sumber: Hadi Ismail, 2008]

Terdapat beberapa model *short rate* yang mengikuti teori *mean-reversion level*, diantaranya adalah model Vasicek dan model Hull-White Satu Faktor. Model *short rate* yang menjadi topik pada skripsi ini, yaitu model Hull-White Dua Faktor juga mengikuti teori *mean-reversion level*.

2.5 PERSAMAAN HARGA *BOND*

Bond adalah suatu kontrak yang menjamin penerbit *bond* untuk membayar sejumlah uang tertentu kepada pemegang *bond* menurut peraturan yang ditetapkan pada saat *bond* tersebut ditetapkan. Suatu *bond*

menjamin penerbit *bond* untuk membayar sejumlah uang tertentu (*par value*) pada saat jatuh tempo dan biasanya penerbit *bond* juga memberikan suatu pembayaran secara periodik yang disebut *coupon*. Penerbit *bond* dapat berupa suatu perusahaan ataupun pemerintahan suatu negara, sementara pemegang *bond* dapat berupa individu maupun institusi. *Bond* biasanya diterbitkan untuk menggalang modal.

Pada dasarnya, *bond* adalah suatu hutang yang dikenakan tingkat bunga. Sama seperti tingkat bunga, harga *bond* juga dipengaruhi masa jatuh tempo. Untuk masa jatuh tempo yang panjang, harga *bond* akan cenderung lebih murah karena tingkat bunga yang dikenakan lebih tinggi. Sebaliknya, untuk masa jatuh tempo yang pendek, harga *bond* akan cenderung lebih mahal karena tingkat bunga yang dikenakan lebih rendah. Dapat dikatakan hubungan antara harga *bond* dengan tingkat bunga adalah berbanding terbalik.

Harga *bond* sama dengan nilai kini dari *par value* ditambah nilai kini dari pembayaran *coupon*. Persamaan harga *bond* P yang membayar 1 pada saat jatuh tempo T adalah [12]

$$P = \frac{1}{(1+r)^T} + \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1+r)^i}$$

dengan C menyatakan *coupon* dan r menyatakan tingkat bunga yang berlaku. Pada persamaan harga *bond* di atas, tingkat bunga yang berlaku selalu sama hingga masa jatuh tempo T .

Suatu *bond* yang tidak memberikan *coupon* disebut *zero-coupon bond*. Karena tidak memberikan *coupon*, harga dari *zero-coupon bond* hanya bergantung kepada nilai kini dari *par value*. Untuk *zero-coupon bond* P yang membayar 1 pada saat jatuh tempo T dengan tingkat bunga r yang berlaku hingga masa jatuh tempo, persamaan harganya adalah

$$P = \frac{1}{(1+r)^T}.$$

Untuk *zero-coupon bond* dengan tingkat bunga yang berubah-ubah pada tiap interval, persamaan harganya menjadi

$$P = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_T)}.$$

Sementara itu, untuk *zero-coupon bond* dengan tingkat bunga $r(t)$ yang kontinu terhadap waktu t , persamaan harganya adalah

$$P = e^{-\int_0^T r(t)dt}.$$

Pada skripsi ini, model *short rate* yang akan digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond* bersifat stokastik. Persamaan harga *bond* untuk *short rate* yang bersifat stokastik adalah unik dan

bergantung pada asumsi-asumsi yang digunakan pada model *short rate* itu sendiri. Akan tetapi, untuk model *short rate* yang memiliki pola tertentu akan membentuk persamaan harga *zero-coupon bond* dengan pola tertentu pula.

Misalkan suatu model *short rate* memiliki PDS berupa

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dZ. \quad (2.5.1)$$

Model (2.5.1) disebut memiliki *affine term structure* jika μ dan σ^2 merupakan fungsi yang dapat dinyatakan dengan

$$\mu(r, t) = a(t)r + b(t),$$

$$\sigma^2(r, t) = c(t)r + d(t),$$

dengan a , b , c , dan d merupakan fungsi deterministik terhadap waktu.

Persamaan harga *zero-coupon bond* dengan jatuh tempo T untuk model *short rate* yang memiliki *affine term structure* didefinisikan sebagai

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r},$$

dengan fungsi $A(t, T)$ dan $B(t, T)$ ditentukan kemudian berdasarkan asumsi yang digunakan model *short rate*.

Pada skripsi ini, model *short rate* mengikuti dua proses Ito sehingga diperlukan pendekatan berbeda. Misalkan suatu *short rate* memiliki PDS berupa

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, t)dt + \sigma_x(x, t)dZ_x, \\ dy &= \mu_y(y, t)dt + \sigma_y(y, t)dZ_y. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Model *short rate* (2.5.2) memiliki *affine term structure* apabila μ_x , μ_y , σ_x^2 , dan σ_y^2 merupakan fungsi yang dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \mu_x(x, t) &= a_x(t)x + b_x(t), \\ \mu_y(y, t) &= a_y(t)y + b_y(t), \\ \sigma_x^2(x, t) &= c_x(t)x + d_x(t), \\ \sigma_y^2(y, t) &= c_y(t)y + d_y(t), \end{aligned}$$

dengan a_x , a_y , b_x , b_y , c_x , c_y , d_x , dan d_y merupakan fungsi deterministik terhadap waktu. Persamaan harga *zero-coupon bond* dengan jatuh tempo T untuk model *short rate* dengan dua faktor stokastik yang memiliki *affine term structure* didefinisikan sebagai [2]

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)x - C(t, T)y),$$

dengan fungsi $A(t, T)$, $B(t, T)$ dan $C(t, T)$ ditentukan kemudian berdasarkan asumsi yang digunakan model *short rate*.

2.6 TAKSIRAN MAKSIMUM LIKELIHOOD

Untuk mengestimasi parameter-parameter dari model yang menjadi topik dari skripsi ini, akan digunakan taksiran maksimum likelihood (MLE).

Subbab ini akan khusus membahas mengenai MLE.

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan suatu sampel acak berukuran n dari suatu distribusi yang memiliki pdf $f(X; \theta)$, yang bergantung terhadap $\theta \in \Omega$. Ω disebut ruang parameter. Karena X_1, X_2, \dots, X_n saling bebas dan memiliki distribusi yang sama, pdf bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n dapat dinyatakan sebagai

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = f(X_1; \theta)f(X_2; \theta) \dots f(X_n; \theta).$$

Pdf bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n juga mengandung parameter θ sehingga dapat ditulis sebagai suatu fungsi terhadap θ , yaitu $L(\theta)$ yang disebut fungsi Likelihood dan memiliki bentuk

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta), \\ &= f(X_1; \theta)f(X_2; \theta) \dots f(X_n; \theta), \\ &= \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta). \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk θ yang memaksimumkan fungsi $L(\theta)$. Untuk mempermudah pencarian solusi θ , fungsi $L(\theta)$ dimodifikasi ke

dalam bentuk $\ln L(\theta)$. Modifikasi ini dapat dilakukan karena nilai θ yang memaksimumkan $\ln L(\theta)$ juga memaksimumkan $L(\theta)$. Fungsi $L(\theta)$ yang telah dimodifikasi akan menjadi

$$\begin{aligned}\ln L(\theta) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n f(X_i; \theta) \right), \\ &= \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; \theta).\end{aligned}$$

Fungsi $\ln L(\theta)$ disebut sebagai fungsi log-likelihood.

Solusi θ yang memaksimumkan fungsi log-likelihood $\ln L(\theta)$ diperoleh dengan cara menurunkan fungsi $\ln L(\theta)$ terhadap θ . Solusi dari θ dapat diperoleh dengan memecahkan persamaan

$$\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta} = 0.$$

Solusi $\theta = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ akan memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta)$ dan disebut sebagai taksiran maksimum likelihood untuk parameter θ .

Idealnya, taksiran maksimum likelihood dapat diperoleh dalam bentuk solusi eksplisit dari $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta} = 0$. Akan tetapi, ada kalanya solusi tersebut sulit untuk diperoleh yaitu apabila fungsi $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}$ memiliki banyak parameter yang saling bergantung. Oleh karena itu, untuk mendapatkan nilai θ akan digunakan pendekatan numerik. Salah satu pendekatan numerik

yang dapat digunakan adalah metode Newton-Raphson yang penjelasannya akan diberikan pada subbab selanjutnya.

2.7 METODE NEWTON-RAPHSON

Pada bab sebelumnya, telah dijelaskan bahwa taksiran maksimum likelihood akan digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter dari model yang menjadi topik dalam skripsi ini. Akan tetapi, ada kalanya solusi untuk taksiran tersebut sulit untuk dipecahkan. Apabila hal tersebut terjadi, akan digunakan suatu pendekatan numerik untuk menaksir parameter-parameter tersebut. Subbab ini akan membahas suatu pendekatan numerik untuk menaksir parameter-parameter tersebut, yaitu metode Newton-Raphson.

Misalkan p adalah solusi dari $f(x) = 0$. Misalkan pula \bar{x} adalah aproksimasi dari p sedemikian sehingga $f'(\bar{x}) \neq 0$ dan nilai dari $|p - \bar{x}|$ cukup kecil. Perhatikan ekspansi deret Taylor order satu untuk $f(x)$ terhadap \bar{x} , yaitu

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(x)),$$

dengan $\xi(x)$ berada di antara x dan \bar{x} . Karena $f(p) = 0$, maka persamaan di atas apabila $x = p$ akan menjadi

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x)).$$

Metode Newton-Raphson mengasumsikan $|p - \bar{x}|$ cukup kecil, sehingga $(p - \bar{x})^2$ akan menjadi lebih kecil dan dapat diabaikan. Dengan asumsi tersebut, persamaan sebelumnya menjadi

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}).$$

Dari persamaan di atas, diperoleh

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Metode Newton-Raphson dimulai dengan nilai awal p_0 dan membentuk barisan $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dengan

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad \text{untuk } n \geq 0. \quad (2.7.1)$$

Solusi rekursif (2.7.1) akan terus dicari hingga nilai dari $|p_{n+1} - p_n|$ lebih kecil dari toleransi error yang diinginkan.

Metode iteratif Newton-Raphson ini nantinya akan digunakan pada Bab 3.5, yaitu untuk mengaproksimasi parameter-parameter dari model yang menjadi topik dalam skripsi ini.

2.8 SIMULASI MODEL TINGKAT BUNGA

Model tingkat bunga yang menjadi topik dari skripsi ini memiliki *mean-reversion level* yang memiliki komponen stokastik. Untuk mensimulasikan komponen stokastik tersebut akan digunakan skema Euler-Maruyama. Akan tetapi, untuk mensimulasikan tingkat bunga akan digunakan simulasi Monte Carlo. Hal ini dikarenakan model tingkat bunga yang digunakan memiliki suatu parameter yang berupa suatu fungsi deterministik sehingga tidak dapat disimulasikan dengan skema Euler-Maruyama.

Pada subbab ini akan dibahas mengenai skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo. Pertama-tama akan dibahas skema Euler-Maruyama.

Misalkan suatu PDS 1-dimensi

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dZ(t), \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.8.1)$$

Apabila $g \equiv 0$ dan X_0 merupakan suatu konstanta, maka PDS (2.8.1)

menjadi persamaan diferensial biasa $dX(t)/dt = f(X(t))$, dengan $X(0) = X_0$.

Untuk mengaplikasikan metode numerik terhadap PDS (2.8.1) pada interval $[0, T]$, dimisalkan $\Delta t = T/L$ untuk suatu bilangan bulat positif L , dan

$\tau_j = j\Delta t$. Untuk mempermudah penulisan, aproksimasi numerik $X(\tau_j)$ akan ditulis sebagai X_j . Skema Euler-Maruyama dari PDS (2.8.1) memiliki bentuk

$$X_{j+1} = X_j + f(X_j)\Delta t + g(X_j)\left(Z(\tau_{j+1}) - Z(\tau_j)\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, L.$$

Setelah membahas skema Euler-Maruyama, berikutnya akan dibahas simulasi Monte Carlo.

Simulasi Monte Carlo dalam proses stokastik adalah metode yang secara iteratif mengevaluasi suatu model stokastik menggunakan bilangan acak sebagai *input*. Misalkan suatu PDS

$$dX(t) = (\mu(t) + aX(t))dt + \sigma(t)dZ(t), \quad (2.8.2)$$

dengan μ dan σ merupakan fungsi deterministik terhadap waktu. PDS (2.8.2) memiliki solusi

$$X(t) = X(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-s)}\mu(s)ds + \int_s^t e^{-a(t-s)}\sigma(s)dZ(s). \quad (2.8.3)$$

Bentuk rekursif dari persamaan (2.8.3) adalah

$$X_{i+1} = X_i e^{-a\Delta t} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)}\mu(s)ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)}\sigma(s)dZ(s), \quad (2.8.4)$$

dengan $X_{i+1} = X(t_{i+1})$ dan $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$. $Z(t)$ merupakan proses Wiener, maka $X(t)$ berdistribusi normal. Misalkan $m(t_{i+1}, t_i)$ adalah *mean* dari persamaan (2.8.3) dan $v^2(t_{i+1}, t_i)$ adalah *variance* dari persamaan

(2.8.4). Simulasi Monte Carlo untuk $X(t)$ pada titik-titik $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ adalah

$$X_{i+1} = m(t_{i+1}, t_i) + v(t_{i+1}, t_i)\xi, \quad (2.8.4)$$

dengan ξ merupakan bilangan *random*.

Untuk kasus dengan PDS 2-dimensi, akan dibutuhkan dua bilangan *random*, misalkan ξ_1 dan ξ_2 . Untuk simulasi Monte Carlo, misalkan x_1 dan x_2 berdistribusi $N(0,1)$, maka bilangan *random* ξ_1 dan ξ_2 dapat diperoleh dengan cara [6]

$$\xi_1 = x_1,$$

$$\xi_2 = x_1\rho + x_2\sqrt{1-\rho^2},$$

dengan ρ merupakan korelasi antara x_1 dengan x_2 .

BAB III

MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR DALAM MENGAPROKSIMASI HARGA *ZERO-COUPON BOND*

Pada bab sebelumnya, telah dijelaskan teori-teori persamaan harga *bond*, skema Euler-Maruyama, simulasi Monte Carlo, taksiran Maksimum Likelihood, dan metode Newton-Raphson. Maka pada bab ini teori-teori tersebut akan digunakan untuk membuat simulasi harga *zero-coupon bond* berdasarkan model Hull-White Dua Faktor. Secara rinci, subbab 3.1 akan menjelaskan model Hull-White Dua Faktor, subbab 3.2 akan membahas persamaan harga *zero-coupon bond* untuk model Hull-White Dua Faktor, subbab 3.3 membahas solusi eksplisit dari model Hull-White Dua Faktor, subbab 3.4 membahas metode simulasi dari model Hull-White Dua Faktor, dan subbab 3.5 membahas estimasi parameter-parameter model Hull-White Dua Faktor.

3.1 MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Merujuk pada teori *mean-reversion level* yang telah dijelaskan pada subbab 2.4, pada tahun 1977, Oldrich Vasicek dalam jurnalnya mengemukakan suatu model *short rate* yang mengikuti proses

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dZ, \quad (3.1.1)$$

dengan r menyatakan *short rate*, b menyatakan *mean-reversion level* dari r , a menyatakan *reversion rate*, σ menyatakan fluktuasi dari pergerakan *short rate* r , dan Z merupakan proses Wiener.

Model (3.1.1) disebut model Vasicek. Model Vasicek merupakan dasar dari model-model *short rate* yang mengadopsi teori *mean-reversion level*. Kekurangan dari model ini adalah kemungkinan dapat terjadinya kondisi *arbitrage*, yaitu suatu kondisi dimana dua aset yang sama memiliki harga yang berbeda pada saat yang bersamaan. Kekurangan ini terjadi karena pada model Vasicek, tingkat bunga pada saat ini merupakan *output* sedangkan tingkat bunga saat ini telah diketahui dari observasi pasar. Hal ini dapat menyebabkan perbedaan antara tingkat bunga yang merupakan *output* dari model Vasicek dengan tingkat bunga yang diperoleh melalui observasi pasar.

Untuk mengatasi masalah kemungkinan terjadinya kondisi *arbitrage*, pada tahun 1986 Thomas Ho dan Sang-Bin Lee mengajukan suatu model *short rate* yang selalu cocok dengan tingkat bunga saat ini, sehingga menutup kemungkinan terjadinya *arbitrage*. Model yang diajukan oleh Ho-Lee memiliki unsur *drift* berupa suatu fungsi deterministik terhadap waktu dan nilainya diambil dari tingkat bunga pada saat ini. Hal ini berbeda dengan model Vasicek yang unsur *drift*-nya berupa konstanta (parameter a dan b). Unsur *drift* yang merupakan fungsi terhadap waktu mengakibatkan tingkat bunga pada saat ini merupakan *input* sehingga dapat dipastikan model *short rate* ini selalu cocok dengan tingkat bunga saat ini. Model-model yang tidak memberi kemungkinan terjadinya *arbitrage* biasa disebut dengan model *no-arbitrage*.

Model *no-arbitrage* yang diajukan Ho-Lee mengikuti proses

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dZ, \quad (3.1.2)$$

dengan r menyatakan *short rate*, σ menyatakan fluktuasi dari pergerakan *short rate* r , Z merupakan proses Wiener, dan $\theta(t)$ merupakan fungsi berdasarkan waktu yang dipilih agar model sesuai dengan *term structure* untuk tingkat bunga saat ini. Kekurangan dari model Ho-Lee adalah pada model Ho-Lee tidak ada *mean-reversion* sehingga model Ho-Lee kurang menggambarkan pergerakan tingkat bunga yang sebenarnya.

Model *no-arbitrage* yang telah mengadopsi teori *mean-reversion level* diajukan oleh John Hull dan Alan White pada tahun 1990. Pada model Hull-White, pergerakan *short rate* mengikuti proses

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dZ, \quad (3.1.3)$$

dengan r menyatakan *short rate*, a menyatakan *reversion rate*, σ menyatakan fluktuasi dari pergerakan *short rate*, dan Z merupakan proses Wiener. $\theta(t)$ merupakan fungsi deterministik terhadap waktu dan dipilih agar model sesuai dengan *term structure* untuk tingkat bunga saat ini. Pada model Hull-White, $\frac{\theta(t)}{a}$ menyatakan *mean-reversion level* dari *short rate* r , sehingga model Hull-White mengandung *mean-reversion level* yang berubah ubah terhadap waktu. Kelebihan lain dari model Hull-White adalah model ini dapat ditelusuri secara analitik. Model Hull-White sering kali disebut model Hull-White Extended Vasicek, karena model Hull-White merupakan bentuk umum dari model Vasicek, dan juga sebagai model Hull-White Satu Faktor agar dapat dibedakan dengan model Hull-White Dua Faktor.

Pada model Hull-White, *mean-reversion level* $\frac{\theta(t)}{a}$ berubah-ubah berdasarkan waktu secara deterministik, akan tetapi pada kenyataannya *mean-reversion level* berubah secara stokastik dan perubahannya tidak dapat ditebak. Oleh karena itu, pada tahun 1994 Hull-White mengajukan sebuah model *short rate* yang memiliki *mean-reversion level* dengan

komponen stokastik. Model yang diajukan Hull-White ini disebut model Hull-White Dua Faktor dan mengikuti proses

$$dr = (\theta(t) + u - ar)dt + \sigma_1 dZ_1, \quad r(0) = r_0, \quad (3.1.4)$$

dengan u mengikuti proses

$$du = -budt + \sigma_2 dZ_2, \quad u(0) = 0. \quad (3.1.5)$$

Pada model Hull-White Dua Faktor, r menyatakan *short rate*, a menyatakan *reversion rate*, σ_1 menyatakan fluktuasi dari pergerakan *short rate*. Sama seperti pada model Hull-White Satu Faktor, $\theta(t)$ merupakan fungsi deterministik terhadap waktu yang dipilih agar model sesuai dengan *term structure* tingkat bunga saat ini. Z_1 dan Z_2 merupakan proses Wiener dan memiliki korelasi sesaat ρ . Perbedaan utama dengan model Hull-White Satu Faktor adalah adanya proses stokastik u , dengan u merupakan komponen stokastik dari *mean-reversion level*, b menyatakan kelajuan u menuju 0, dan σ_2 menyatakan fluktuasi pergerakan u .

Pada model Hull-White Dua Faktor, *mean-reversion level* dinyatakan oleh $\frac{\theta(t)+u}{a}$, hal ini mengindikasikan bahwa perubahan *mean-reversion level* pada model Hull-White Dua Faktor bersifat acak. Akan tetapi, dari persamaan (3.1.5), untuk suatu jangka waktu tertentu, u diharapkan akan menghilang. Model Hull-White Dua Faktor akan sama dengan model Hull-White Satu Faktor hanya pada saat $t = 0$.

Sama seperti model Hull-White Satu Faktor, model Hull-White Dua Faktor juga dapat ditelusuri secara analitik, akan tetapi karena model Hull-White Dua Faktor telah mengakomodasi satu faktor stokastik lagi dalam *mean-reversion level*, diharapkan model Hull-White Dua Faktor dapat lebih menggambarkan pergerakan tingkat bunga yang sebenarnya.

Model Hull-White Dua Faktor merupakan model yang memiliki *affine term structure* karena *drift* dan *diffusion* dari r dan u dapat dinyatakan sebagai

$$\mu_r = \alpha_r(t)r + \beta_r(t),$$

$$\sigma_r^2 = \gamma_r(t)r + \delta_r(t),$$

$$\mu_u = \alpha_u(t)u + \beta_u(t),$$

$$\sigma_u^2 = \gamma_u(t)u + \delta_u(t),$$

dengan $\alpha_r(t) = -a$, $\beta_r(t) = \theta(t) + u$, $\gamma_r(t) = 0$, $\delta_r(t) = \sigma_1^2$, $\alpha_u(t) = -b$, $\beta_u(t) = 0$, $\gamma_u(t) = 0$, dan $\delta_u(t) = \sigma_2^2$. Maka persamaan harga *zero-coupon bond* dari model Hull-White Dua Faktor memiliki bentuk

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r - C(t, T)u),$$

dengan fungsi $A(t, T)$, $B(t, T)$, dan $C(t, T)$ akan ditentukan kemudian.

3.2 PERSAMAAN HARGA *ZERO-COUPON BOND* UNTUK MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Pada subbab 2.5 lalu telah dijelaskan bahwa persamaan harga *zero-coupon bond* untuk tingkat bunga yang mengikuti proses stokastik adalah berbeda-beda dan bersifat unik tergantung dari asumsi-asumsi model tingkat bunga yang digunakan. Pada subbab ini akan dijelaskan bagaimana membentuk persamaan harga *zero-coupon bond* sekaligus menentukan fungsi $\theta(t)$ untuk model Hull-White Dua Faktor.

Model Hull-White Dua Faktor merupakan model yang *risk neutral*. Untuk mendapatkan persamaan harga *zero-coupon bond* dari model Hull-White Dua Faktor, pertama-tama akan dimisalkan suatu pergerakan harga *zero-coupon bond* di dunia nyata. Kemudian *zero-coupon bond* ini akan dibawa ke dunia *risk neutral* agar sesuai dengan model Hull-White Dua Faktor. Kemudian dibentuk suatu persamaan *zero-coupon bond* yang telah *risk neutral*. Persamaan *zero-coupon bond* ini berbentuk suatu persamaan diferensial parsial. Dengan menyelesaikan persamaan diferensial parsial tersebut akan diperoleh persamaan harga *zero-coupon bond* untuk model Hull-White Dua Faktor.

Misalkan harga suatu *zero-coupon bond* P di dunia nyata mengikuti proses Ito sebagai berikut [11]:

$$\frac{dP}{P} = \epsilon(r, u, t)dt + \omega_1(r, u, t)dZ_1 + \omega_2(r, u, t)dZ_2, \quad (3.2.1)$$

dengan *short rate* mengikuti proses

$$dr = \alpha_1(r)dt + \beta_1(r)dZ_1, \quad (3.2.2)$$

$$du = \alpha_2(u)dt + \beta_2(u)dZ_2, \quad (3.2.3)$$

dan

$$dZ_1dZ_2 = \rho dt.$$

Z_1 dan Z_2 merupakan proses Wiener dengan ρ sebagai korelasi sesaatnya.

ϵ , ω_1 , dan ω_2 merupakan fungsi deterministik terhadap variabel r , u , dan t .

Sementara α_1 dan β_1 merupakan fungsi deterministik terhadap r , sedangkan

α_2 dan β_2 merupakan fungsi deterministik terhadap variabel u .

$\epsilon(r, u, t)$ menyatakan ekspektasi perubahan dari *zero-coupon bond* P , sementara $\omega_1(r, u, t)$ menyatakan besar fluktuasi yang dibawa oleh proses r dan $\omega_2(r, u, t)$ menyatakan besar fluktuasi yang dibawa oleh proses u .

Dengan menggunakan lemma Ito multivariat yang telah dibahas pada subbab 2.3, akan dilihat hubungan antara pergerakan P dengan *short rate* yang dipilih. Dengan lemma Ito multivariat, persamaan pergerakan harga *zero-coupon bond* P dapat ditulis menjadi

$$\partial P = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} (du)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u} (dr)(du) + \frac{\partial P}{\partial t} dt. \quad (3.2.4)$$

Pada persamaan (3.2.4) terdapat beberapa perkalian antara dua proses stokastik, yaitu $(dr)^2$, $(du)^2$, dan $(dr)(du)$. Untuk mendapatkan hasil dari perkalian proses stokastik tersebut akan digunakan *multiplication rules* yang telah dibahas pada subbab 2.3 dan diperoleh

$$(dr)^2 = \beta_1^2(r)dt, \quad (3.2.5)$$

$$(du)^2 = \beta_2^2(u)dt, \quad (3.2.6)$$

dan

$$(dr)(du) = \beta_1(r)\beta_2(u)\rho dt. \quad (3.2.7)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.2) dan (3.2.3) dan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.5), (3.2.6), dan (3.2.7) ke dalam persamaan (3.2.4), akan diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \partial P &= \frac{\partial P}{\partial r} (\alpha_1(r)dt + \beta_1(r)dZ_1) + \frac{\partial P}{\partial u} (\alpha_2(u)dt + \beta_2(u)dZ_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \beta_1^2(r)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \beta_2^2(u)dt + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u} \beta_1(r)\beta_2(u)\rho dt + \frac{\partial P}{\partial t} dt, \\ &= \left[\frac{\partial P}{\partial r} \alpha_1(r) + \frac{\partial P}{\partial u} \alpha_2(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \beta_1^2(r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \beta_2^2(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u} \beta_1(r)\beta_2(u)\rho dt + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] dt + \frac{\partial P}{\partial r} \beta_1(r)dZ_1 + \frac{\partial P}{\partial u} \beta_2(u)dZ_2. \quad (3.2.8) \end{aligned}$$

Agar persamaan (3.2.8) konsisten dengan persamaan (3.2.1), maka tiga persamaan berikut harus dipenuhi

$$\begin{aligned} \epsilon(r, u, t) = & \frac{1}{P} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \alpha_1(r) + \frac{\partial P}{\partial u} \alpha_2(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \beta_1^2(r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \beta_2^2(u) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u} \beta_1(r) \beta_2(u) \rho + \frac{\partial P}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\omega_1(r, u, t) = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \beta_1(r) \right], \quad (3.2.10)$$

$$\omega_2(r, u, t) = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial P}{\partial u} \beta_2(u) \right]. \quad (3.2.11)$$

Karena terdapat dua faktor stokastik pada model harga *zero-coupon bond* P pada persamaan (3.2.1), maka dibutuhkan tiga *zero-coupon bond* dengan masa jatuh tempo yang berbeda-beda untuk membentuk suatu portofolio tanpa risiko. Misalkan suatu portofolio yang mengandung *bond* V_1, V_2 , dan V_3 dengan masa jatuh tempo T_1, T_2 , dan T_3 . Misalkan pula Π menyatakan harga dari portofolio tersebut. Berdasarkan persamaan (3.2.1), pergerakan harga portofolio adalah

$$\begin{aligned} d\Pi = & [V_1 \epsilon(T_1) + V_2 \epsilon(T_2) + V_3 \epsilon(T_2)] dt \\ & + [V_1 \omega_1(T_1) + V_2 \omega_1(T_2) + V_3 \omega_1(T_3)] dZ_1 \\ & + [V_1 \omega_2(T_1) + V_2 \omega_2(T_2) + V_3 \omega_2(T_3)] dZ_2. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$\epsilon(T_i) = \epsilon(r, u, t; T_i)$ dengan $i = 1, 2, 3$ menyatakan unsur *drift* dari *bond* dengan jatuh tempo T_i . Begitu juga dengan $\omega_1(T_i)$ dan $\omega_2(T_i)$ yang menyatakan fluktuasi dari *bond* dengan jatuh tempo T_i .

Pilih V_1, V_2 , dan V_3 sedemikian sehingga faktor stokastik pada persamaan (3.2.12) hilang dan menyebabkan portofolio menjadi bebas risiko.

Sehingga diperoleh persamaan

$$V_1\omega_1(T_1) + V_2\omega_1(T_2) + V_3\omega_1(T_3) = 0 \quad (3.2.13)$$

$$V_1\omega_2(T_1) + V_2\omega_2(T_2) + V_3\omega_2(T_3) = 0.$$

Karena portofolio telah bebas risiko, maka untuk menghindari *arbitrage*, persamaan berikut harus dipenuhi [11],

$$d\Pi = [V_1\epsilon(T_1) + V_2\epsilon(T_2) + V_3\epsilon(T_3)]dt = r(V_1 + V_2 + V_3)dt$$

sedemikian sehingga

$$V_1(\epsilon(T_1) - r) + V_2(\epsilon(T_2) - r) + V_3(\epsilon(T_3) - r) = 0. \quad (3.2.14)$$

Persamaan (3.2.13) dan (3.2.14) membentuk suatu sistem persamaan linear

$$\begin{pmatrix} \omega_1(T_1) & \omega_1(T_2) & \omega_1(T_3) \\ \omega_2(T_1) & \omega_2(T_2) & \omega_2(T_3) \\ \epsilon(T_1) - r & \epsilon(T_2) - r & \epsilon(T_3) - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Agar solusi dari sistem persamaan linear (3.2.15) memiliki solusi non-trivial, tetapkan baris ketiga dari matrix 3x3 pada sistem persamaan linear (3.2.15) sebagai kombinasi linear dari baris pertama dan kedua dari matriks yang sama. Karena T_1, T_2 , dan T_3 adalah sebarang, maka dapat diperoleh persamaan

$$\epsilon(r, u, t) - r = \lambda_1(r, u, t)\omega_1(r, u, t) + \lambda_2(r, u, t)\omega_2(r, u, t), \quad (3.2.16)$$

dengan $\lambda_1(r, u, t)$ dan $\lambda_2(r, u, t)$ secara berturut-turut dikenal sebagai *market price of risk* dari r dan u . *Market price of risk* adalah ekspektasi tambahan imbal hasil yang diperoleh investor berdasarkan tambahan risiko yang diterima.

Apabila ϵ , ω_1 , dan ω_2 pada persamaan (3.2.9), (3.2.10), dan (3.2.11) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.16), maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + [\alpha_1(r) - \beta_1(r)\lambda_1(r, u, t)] \frac{\partial P}{\partial r} + [\alpha_2(u) - \beta_2(u)\lambda_2(r, u, t)] \frac{\partial P}{\partial u} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \beta_1(r)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \beta_2(u)^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u} \beta_1(r)\beta_2(u)\rho + rP = 0. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Pada persamaan (3.2.17), koefisien dari $\frac{\partial P}{\partial r}$ dan $\frac{\partial P}{\partial u}$ masing-masing mengandung *risk premium* yang secara berturut-turut dinotasikan dengan $\beta_1(r)\lambda_1(r, u, t)$ dan $\beta_2(u)\lambda_2(r, u, t)$. *Risk premium* adalah imbal hasil yang diperoleh berdasarkan risiko yang diterima. Proses *risk neutral* untuk *short rate* pada persamaan (3.2.2) dan (3.2.3) didapat dengan cara mengurangi fungsi *drift* dengan *risk premium* [12]. Oleh karena itu, proses *risk neutral* untuk *short rate* (3.2.2) dan (3.2.3) adalah

$$dr = [\alpha_1(r) - \beta_1(r)\lambda_1(r, u, t)]dt + \beta_1(r)dZ_1 \quad (3.2.18)$$

dan

$$du = [\alpha_2(u) - \beta_2(u)\lambda_2(r, u, t)]dt + \beta_2(u)dZ_2. \quad (3.2.19)$$

Model Hull-White Dua Faktor diasumsikan mengikuti proses *risk neutral*, sehingga fungsi *drift* dan *diffusion* pada persamaan (3.2.18) dan (3.2.19) dapat diganti dengan fungsi *drift* dan *diffusion* dari model Hull-White Dua Faktor, yakni

$$\alpha_1(r) - \beta_1(r)\lambda_1(r, u, t) = \theta(t) + u - ar, \quad (3.2.20)$$

$$\alpha_2(u) - \beta_2(u)\lambda_2(r, u, t) = -bu, \quad (3.2.21)$$

$$\beta_1(r) = \sigma_1, \quad (3.2.22)$$

dan

$$\beta_2(u) = \sigma_2. \quad (3.2.23)$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $P_t = \frac{\partial P}{\partial t}$, $P_r = \frac{\partial P}{\partial r}$, $P_u = \frac{\partial P}{\partial u}$, $P_{rr} = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$, $P_{uu} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$, dan $P_{ru} = \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial u}$. Dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.20), (3.2.21), (3.2.22), (3.2.23) dan pemisalan tadi ke dalam persamaan (3.2.17), maka akan diperoleh

$$P_t + [\theta(t) + u - ar]P_r - buP_u + \frac{1}{2}\sigma_1^2 P_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 P_{uu} + \rho\sigma_1\sigma_2 P_{ru} - rP = 0. \quad (3.2.24)$$

Model *short rate* Hull-White Dua Faktor tergolong ke dalam model tingkat bunga *affine*, sehingga persamaan harga *zero-coupon bond*-nya memiliki bentuk

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r - C(t, T)u), \quad (3.2.25)$$

dengan fungsi $A(t, T)$, $B(t, T)$, dan $C(t, T)$ akan ditentukan kemudian dan $P(T, T) = 1$. Misalkan $A_t = \frac{\partial A(t, T)}{\partial t}$, $B_t = \frac{\partial B(t, T)}{\partial t}$, dan $C_t = \frac{\partial C(t, T)}{\partial t}$, dengan mensubstitusikan $P(t, T)$ pada persamaan (3.2.25) ke dalam persamaan (3.2.24), diperoleh persamaan

$$A_t + A[-Br - Cu] - [\theta(t) + u - ar]AB + buAC + \frac{1}{2}\sigma_1^2 AB^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 AC^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 ABC - rA = 0$$

yang dapat ditulis kembali menjadi

$$A_t - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma_1^2 AB^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 AC^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 ABC + [(B_t - aB + 1)(-r) + (C_t - bC + B)(-u)]A = 0. \quad (3.2.26)$$

Jika persamaan (3.2.26) diturunkan terhadap r maka akan diperoleh

$$(B_t - aB + 1)(-A) = 0.$$

Sementara, jika diturunkan terhadap u , diperoleh

$$(C_t - bC + B)(-A) = 0.$$

Karena T sebarang, maka haruslah

$$B_t - aB + 1 = 0 \quad (3.2.27)$$

dan

$$C_t - bC + B = 0. \quad (3.2.28)$$

Dari fakta yang diperoleh pada persamaan (3.2.27) dan (3.2.28) dan menggunakannya ke dalam persamaan (3.2.26), diperoleh

$$A_t - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma_1^2 AB^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 AC^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 ABC = 0. \quad (3.2.29)$$

Penurunan ini dilakukan karena lebih mudah mendapatkan fungsi $A(t, T)$, $B(t, T)$, dan $C(t, T)$ serta menentukan fungsi $\theta(t)$ dari persamaan (3.2.27), (3. 2.28), dan (3. 2.29) daripada mencarinya langsung dari persamaan (3. 2.26).

Sebelum mencari solusi dari persamaan (3.2.27), (3. 2.28), dan (3. 2.29), akan dicari terlebih dahulu *boundary condition* dari masing-masing persamaan yang nantinya akan berguna dalam mencari solusi tersebut.

Berdasarkan definisi yang digunakan, $P(T, T) = 1$ sehingga dari persamaan (3.2.25) diperoleh $A(T, T) = 1$, $B(T, T) = 0$, dan $C(T, T) = 0$.

Sekarang akan ditentukan solusi untuk persamaan (3.2.27) dan (3.2.28). Persamaan (3.2.27) dan (3.2.28) merupakan Persamaan Diferensial Linier (PD linier) dengan $B(T, T) = 0$ dan $C(T, T) = 0$. Untuk mencari solusi dari PD linier akan digunakan faktor integrasi yang sesuai. Faktor integrasi dari persamaan (3.2.27) adalah e^{-at} sehingga

$$\begin{aligned} B_t - aB + 1 &= 0, \\ B_t e^{-at} - aB e^{-at} &= -e^{-at}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(e^{-at}B)}{\partial t} = -e^{-at},$$

$$\int_t^T \partial(e^{-at}B) = - \int_t^T e^{-at} dt,$$

$$e^{-at}B(t, T) \Big|_t^T = \frac{1}{a} [e^{-aT} - e^{-at}],$$

$$e^{-aT}B(T, T) - e^{-at}B(t, T) = \frac{1}{a} [e^{-aT} - e^{-at}],$$

karena $B(T, T) = 0$, maka

$$B(t, T) = \frac{1}{a} \left[\frac{e^{-aT} - e^{-at}}{-e^{-at}} \right],$$

dan dapat ditulis

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}). \quad (3.2.30)$$

Sementara itu, faktor integrasi dari persamaan (3.2.28) adalah e^{-bt} sehingga dengan menggunakan cara yang sama untuk mencari (3.2.30), diperoleh

$$C(t, T) = \frac{1}{a(a-b)} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(a-b)} e^{-b(T-t)} + \frac{1}{ab}. \quad (3.2.31)$$

Untuk mencari solusi dari persamaan (3.2.29), yaitu $A(t, T)$, akan lebih mudah apabila fungsi $\theta(t)$ dicari terlebih dahulu. Apabila persamaan (3.2.29) dibagi dengan $A(t, T)$, maka diperoleh

$$\frac{\partial A}{A} = \left[\theta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2(t, T) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 C^2(t, T) - \rho\sigma_1\sigma_2 B(t, T)C(t, T) \right] \partial t,$$

yang apabila diintegrasikan menjadi

$$\begin{aligned} \ln A(t, T) \Big|_0^T &= \int_0^T \theta(t) B(t, T) \partial t - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_0^T B^2(t, T) \partial t \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_0^T C^2(t, T) \partial t - \rho \sigma_1 \sigma_2 \int_0^T B(t, T) C(t, T) \partial t, \\ \ln A(T, T) - \ln A(0, T) &= \int_0^T \theta(t) B(t, T) \partial t - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_0^T B^2(t, T) \partial t \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_0^T C^2(t, T) \partial t - \rho \sigma_1 \sigma_2 \int_0^T B(t, T) C(t, T) \partial t, \end{aligned}$$

karena $A(T, T) = 1$ maka $\ln A(T, T) = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} \int_0^T \theta(t) B(t, T) \partial t &= -\ln A(0, T) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_0^T B^2(t, T) \partial t + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_0^T C^2(t, T) \partial t \\ &\quad + \rho \sigma_1 \sigma_2 \int_0^T B(t, T) C(t, T) \partial t. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Dari persamaan (3.2.25) dapat diperoleh

$$\ln A(t, T) = \ln P(t, T) + B(t, T)r + C(t, T)u, \quad (3.2.33)$$

sehingga apabila $\ln A(t, T)$ pada persamaan (3.2.33) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.32) dan $B(t, T)$ yang diperoleh dari persamaan (3.2.30) disubstitusikan ke dalam sisi kiri persamaan (3.2.32) akan diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\theta(t)(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \partial t &= -\ln P(0, T) - B(0, T)r - C(0, T)u \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_0^T B^2(t, T) \partial t + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_0^T C^2(t, T) \partial t \\ &\quad + \rho \sigma_1 \sigma_2 \int_0^T B(t, T) C(t, T) \partial t. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Untuk mencari $\theta(t)$, persamaan (3.2.34) akan diturunkan dua kali terhadap T . Untuk turunan pertamanya, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^T \theta(t) e^{-\alpha(T-t)} \partial t = & F(0, T) - B_T(0, T)r - C_T(0, T)u \\ & + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B^2(t, T) \partial t + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T C^2(t, T) \partial t \\ & + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B(t, T)C(t, T) \partial t, \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

dengan $F(0, T)$ merupakan *instantaneous forward rate* dari *short rate* dan

$$F(0, T) = - \frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T}.$$

Sebelum melanjutkan pembahasan untuk menentukan $\theta(t)$, terlebih dahulu akan dibahas fungsi $B^2(t, T)$, $C^2(t, T)$, dan $B(t, T)C(t, T)$ dan hubungannya dengan $B^2(0, T)$, $C^2(0, T)$, dan $B(0, T)C(0, T)$. Pembahasan ini diperlukan untuk mempermudah pencarian fungsi $\theta(t)$.

Pertama-tama, akan dibahas fungsi $B^2(t, T)$ dan hubungannya dengan $B^2(0, T)$. Dengan menggunakan fungsi $B(t, T)$ yang diperoleh dari persamaan (3.2.30), diperoleh

$$\begin{aligned} B^2(t, T) &= \frac{1 - 2e^{-\alpha(T-t)} + e^{-2\alpha(T-t)}}{\alpha^2}, \\ \int_0^T B^2(t, T) dt &= \frac{2\alpha T - e^{2\alpha T} + 4e^{-\alpha T} + 3}{2\alpha^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B^2(t, T) \partial t = \frac{1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}}{a^2},$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B^2(t, T) \partial t = B^2(0, T). \quad (3.2.36)$$

Kemudian hubungan fungsi $C^2(t, T)$ dengan $C^2(0, T)$. Dengan menggunakan fungsi $C(t, T)$ yang diperoleh pada persamaan (3.2.31), diperoleh

$$\begin{aligned} C^2(t, T) &= \left[\frac{1}{a^2 b^2 (a-b)^2} \right] \left[b^2 e^{-2a(T-t)} - 2ab e^{-(a+b)(T-t)} + a^2 e^{-2b(T-t)} \right. \\ &\quad \left. 2b(a-b)e^{-a(T-t)} - 2a(a-b)e^{-b(T-t)} + a^2 - ab + b^2 \right], \\ \int_0^T C^2(t, T) dt &= \left[\frac{1}{a^2 b^2 (a-b)^2} \right] \left[\frac{2ab(e^{-(a+b)T} - 1)}{a+b} - \frac{3b^2(1 - e^{-2aT})}{2a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3a^2(1 - e^{-2bT})}{2b} + 2a(1 - e^{-bT}) + 2b(1 - e^{-2aT}) + (a^2 - ab + b^2)T \right], \\ \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T C^2(t, T) \partial t &= \left[\frac{1}{a^2 b^2 (a-b)^2} \right] \left[b^2 e^{-2aT} - 2ab e^{-(a+b)T} + a^2 e^{-2bT} \right. \\ &\quad \left. 2b(a-b)e^{-aT} - 2a(a-b)e^{-bT} + a^2 - ab + b^2 \right], \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T C^2(t, T) \partial t = C^2(0, T). \quad (3.2.37)$$

Terakhir, hubungan fungsi $B(t, T)C(t, T)$ dengan $B(0, T)C(0, T)$. Dengan menggunakan fungsi $B(t, T)$ dan $C(t, T)$ yang diperoleh dari persamaan (3.2.30) dan (3.2.31), diperoleh

$$\begin{aligned}
B(t, T)C(t, T) &= \left[\frac{1}{a^2 b(a-b)} \right] \left[a e^{-(a+b)(T-t)} + (2b-a)e^{-a(T-t)} \right. \\
&\quad \left. - b e^{-2a(T-t)} - a e^{-b(T-t)} + a - b \right], \\
\int_0^T B(t, T)C(t, T) dt &= \left[\frac{1}{a^2 b(a-b)} \right] \left[\frac{a e^{-(a+b)T}}{a+b} - \frac{(2b-a)e^{-aT}}{a} - \frac{b e^{-2aT}}{2a} - \frac{a e^{-bT}}{b} \right. \\
&\quad \left. + (a-b)T + \frac{(3b^2 - 2ab - 2a^2)(a+b) + 2a^2 b}{2ab(a+b)} \right], \\
\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B(t, T)C(t, T) \partial t &= \left[\frac{1}{a^2 b(a-b)} \right] \left[a e^{-(a+b)T} + (2b-a)e^{-aT} \right. \\
&\quad \left. - b e^{-2aT} - a e^{-bT} + a - b \right],
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T B(t, T)C(t, T) \partial t = B(0, T)C(0, T). \quad (3.2.38)$$

Kembali ke pembahasan $\theta(t)$, dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh dari persamaan (3.2.36), (3.2.37), dan (3.2.38) ke dalam persamaan (3.2.35), akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^T \theta(t) e^{-\alpha(T-t)} \partial t &= F(0, T) - B_T(0, T)r - C_T(0, T)u + \frac{1}{2} \sigma_1^2 B(0, T)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma_2^2 C(0, T)^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 B(0, T)C(0, T). \quad (3.2.39)
\end{aligned}$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan

$$\phi(t, T) = \frac{1}{2} \sigma_1^2 B(t, T)^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 C(t, T)^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 B(t, T)C(t, T),$$

maka persamaan (3.2.39) dapat ditulis sebagai

$$\int_0^T \theta(t)e^{-a(T-t)} \partial t = F(0, T) - B_T(0, T)r - C_T(0, T)u + \phi(0, T). \quad (3.2.40)$$

Apabila persamaan (3.2.40) diturunkan terhadap T akan diperoleh

$$-a \int_0^T \theta(t)e^{-a(T-t)} \partial t + \theta(T) = F_T(0, T) - B_{TT}(0, T)r - C_{TT}(0, T)u + \phi_T(0, T), \quad (3.2.41)$$

sehingga apabila hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.40) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.41), diperoleh

$$\begin{aligned} \theta(T) &= F_T(0, T) - B_{TT}(0, T)r - C_{TT}(0, T)u + \phi_T(0, T) + a \int_0^T \theta(t)e^{-a(T-t)} \partial t, \\ &= F_T(0, T) + aF(0, T) + \phi_T(0, T) + a\phi(0, T) \\ &\quad - B_{TT}(0, T)r - aB_T(0, T)r - C_{TT}(0, T)u - aC_T(0, T)u. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Perhatikan fungsi $B_T(0, T)$ dan $B_{TT}(0, T)$ pada persamaan (3.2.42).

Kedua fungsi ini secara berurutan merupakan turunan pertama dan kedua terhadap T dari fungsi $B(t, T)$ dari persamaan (3.2.30) pada saat $t = 0$, yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} B(0, T) &= \frac{1 - e^{-aT}}{a}, \\ B_T(0, T) &= e^{-aT}, \\ B_{TT}(0, T) &= -ae^{-aT}, \end{aligned}$$

sehingga $B_{TT}(0, T) = -aB_T(0, T)$ dan mengakibatkan

$$-B_{TT}(0, T)r - aB_T(0, T)r = 0. \quad (3.2.43)$$

Sementara itu, $u(t) = 0$ pada saat $t = 0$ sehingga

$$-C_{TT}(0, T)u - aC_T(0, T)u = 0. \quad (3.2.44)$$

Substitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.43) dan (3.2.44) ke dalam persamaan (3.2.42), diperoleh

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \phi_t(0, t) + a\phi(0, t) \quad (3.2.45)$$

dengan

$$F(0, t) = -\frac{\partial \log P(0, t)}{\partial t}, \quad (3.2.46)$$

$$\phi(t, T) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 B(t, T)^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 C(t, T)^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 B(t, T)C(t, T), \quad (3.2.47)$$

dan $B(t, T)$ dan $C(t, T)$ seperti yang didapat pada persamaan (3.2.30) dan (3.2.31).

Setelah $\theta(t)$ berhasil diperoleh, sekarang akan dilanjutkan dengan pembahasan solusi persamaan (3.2.29), yaitu fungsi $A(t, T)$. Substitusikan $\theta(t)$ pada persamaan (3.2.45) ke dalam persamaan (3.2.29), maka persamaan (3.2.29) dapat ditulis

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = [F_t(0, t) + aF(0, t) + \phi_t(0, t) + a\phi(0, t)]B(t, T) - \phi(t, T),$$

yang apabila diintegrasikan menjadi

$$\begin{aligned} \ln A(t, T) \Big|_t^T &= \int_t^T F_t(0, t)B(t, T)dt + a \int_t^T F(0, t)B(t, T)dt + \int_t^T \phi_t(0, t)B(t, T)dt \\ &+ a \int_t^T \phi(0, t)B(t, T)dt - \int_t^T \phi(t, T)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln A(T, T) - \ln A(t, T) &= \int_t^T F_t(0, t)B(t, T)\partial t + a \int_t^T F(0, t)B(t, T)\partial t + \int_t^T \phi_t(0, t)B(t, T)\partial t \\ &+ a \int_t^T \phi(0, t)B(t, T)\partial t - \int_t^T \phi(t, T)\partial t. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.30) ke dalam persamaan (3.2.48) dan *boundary condition* $A(T, T) = 1$, maka

$$\begin{aligned} -\ln A(t, T) &= \int_t^T F_t(0, t) \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \partial t + a \int_t^T F(0, t) \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \partial t \\ &+ \int_t^T \phi_t(0, t) \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \partial t + a \int_t^T \phi(0, t) \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \partial t - \int_t^T \phi(t, T) \partial t \\ &= \frac{1}{a} \int_t^T F_t(0, t) \partial t - \frac{1}{a} \int_t^T F_t(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t + \int_t^T F(0, t) \partial t - \int_t^T F(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t \\ &\frac{1}{a} \int_t^T \phi_t(0, t) \partial t - \frac{1}{a} \int_t^T \phi_t(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t + \int_t^T \phi(0, t) \partial t - \int_t^T \phi(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t \\ &- \int_t^T \phi(t, T) \partial t. \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Untuk mempermudah penurunan, ada baiknya apabila persamaan (3.2.49) tidak diselesaikan secara langsung, akan tetapi dengan cara membahas beberapa suku pada sisi kanan persamaan (3.2.49) secara terpisah. Hal ini bertujuan untuk mengubah persamaan (3.2.49) ke dalam bentuk yang lebih mudah dalam penurunan selanjutnya.

Pandang suku pertama dari sisi kanan persamaan (3.2.49),

$$\int_t^T F_t(0, t) \partial t = F(0, T) - F(0, t). \quad (3.52.50)$$

Kemudian perhatikan suku ketiga dari sisi kanan persamaan (3.2.49), karena (3.2.46) maka

$$\begin{aligned}
\int_t^T F(0, t) \partial t &= -[\ln P(0, T) - \ln P(0, t)] \\
&= -\ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)}. \tag{3.2.51}
\end{aligned}$$

Sementara untuk suku kelima dari sisi kanan persamaan (3.2.49),

$$\int_t^T \phi_t(0, t) \partial t = \phi(0, T) - \phi(0, t). \tag{3.2.52}$$

Hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.50), (3.2.51), dan (3.2.52) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.49) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
-\ln A(t, T) &= \frac{1}{a} [F(0, T) - F(0, t)] - \frac{1}{a} \int_t^T F_t(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t - \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \\
&\quad - \int_t^T F(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t + \frac{1}{a} [\phi(0, T) - \phi(0, t)] - \frac{1}{a} \int_t^T \phi_t(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t \\
&\quad + \int_t^T \phi(0, t) \partial t - \int_t^T \phi(0, t) e^{-a(T-t)} \partial t - \int_t^T \phi(t, T) \partial t, \\
&= \frac{1}{a} [F(0, T) - F(0, t)] - \frac{1}{a} \int_t^T [F_t(0, t) e^{-a(T-t)} - aF(0, t) e^{-a(T-t)}] \partial t \\
&\quad - \frac{1}{a} [\phi(0, T) - \phi(0, t)] \\
&\quad - \frac{1}{a} \int_t^T [\phi_t(0, t) e^{-a(T-t)} - a\phi(0, t) e^{-a(T-t)}] \partial t \\
&\quad - \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + \int_t^T \phi(0, t) \partial t - \int_t^T \phi(t, T) \partial t. \tag{3.2.53}
\end{aligned}$$

Sekarang pandang suku kedua dari sisi kanan persamaan (3.2.53),

$$\int_t^T [F_t(0, t) e^{-a(T-t)} - aF(0, t) e^{-a(T-t)}] \partial t = F(0, T) - F(0, t) e^{-a(T-t)}. \tag{3.2.54}$$

Kemudian perhatikan suku keempat dari sisi kanan persamaan (3.2.3),

$$\int_t^T [\phi_t(0, t)e^{-a(T-t)} - a\phi(0, t)e^{-a(T-t)}] \partial t = \phi(0, T) - \phi(0, t)e^{-a(T-t)}. \quad (3.2.55)$$

Hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.54) dan (3.2.55) kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.53), sehingga

$$\begin{aligned} -\ln A(t, T) &= \frac{1}{a} [F(0, T) - F(0, t)] - \frac{1}{a} [F(0, T) - F(0, t)e^{-a(T-t)}] \\ &\quad + \frac{1}{a} [\phi(0, T) - \phi(0, t)] - \frac{1}{a} [\phi(0, T) - \phi(0, t)e^{-a(T-t)}] \\ &\quad - \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + \int_t^T \phi(0, t) \partial t - \int_t^T \phi(t, T) \partial t, \\ &= - \left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] F(0, t) - \left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] \phi(0, t) \\ &\quad - \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + \int_t^T \phi(0, t) \partial t - \int_t^T \phi(t, T) \partial t, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \ln A(t, T) &= B(t, T)F(0, t) + B(t, T)\phi(0, t) + \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \\ &\quad - \int_t^T \phi(0, t) \partial t + \int_t^T \phi(t, T) \partial t. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

Sampai di sini fungsi $A(t, T)$ pada persamaan (3.2.56) telah ditentukan dalam bentuk $\ln A(t, T)$ dan pembahasannya boleh dihentikan, akan tetapi persamaan (3.2.56) dapat lebih disederhanakan lagi. Perhatikan suku keempat dan kelima dari sisi kanan persamaan (3.59),

$$- \int_t^T \phi(0, t) \partial t + \int_t^T \phi(t, T) \partial t = - \int_0^T \phi(0, t) \partial t + \int_0^t \phi(0, t) \partial t + \int_0^T \phi(t, T) \partial t - \int_0^t \phi(t, T) \partial t. \quad (3.2.57)$$

Persamaan (3.2.36), (3. 2.37), dan (3. 2.38) dapat ditulis sebagai

$$\int_0^T B^2(t, T) \partial t = \int_0^T B^2(0, t) \partial t,$$

$$\int_0^T C^2(t, T) \partial t = \int_0^T C^2(0, t) \partial t,$$

dan

$$\int_0^T B(t, T)C(t, T) \partial t = \int_0^T B(0, t)C(0, t) \partial t.$$

Sehingga, dengan mensubstitusikan ketiga persamaan tersebut ke dalam persamaan (3.2.47) akan diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi(t, T) \partial t &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \int_0^T B^2(t, T) \partial t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \int_0^T C^2(t, T) \partial t + \rho\sigma_1\sigma_2 \int_0^T B(t, T)C(t, T) \partial t, \\ &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 \int_0^T B^2(0, t) \partial t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \int_0^T C^2(0, t) \partial t + \rho\sigma_1\sigma_2 \int_0^T B(0, t)C(0, t) \partial t, \\ &= \int_0^T \phi(0, t) \partial t. \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Substitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.2.58) ke dalam persamaan (3.2.57) maka akan diperoleh

$$-\int_t^T \phi(0, t) \partial t + \int_t^T \phi(t, T) \partial t = \int_0^t \phi(0, t) \partial t - \int_0^t \phi(t, T) \partial t.$$

yang apabila disubstitusikan ke persamaan (3.2.56), persamaan (3.2.56) akan berubah menjadi

$$\ln A(t, T) = B(t, T)F(0, t) + B(t, T)\phi(0, t) + \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)}$$

$$+ \int_0^t \phi(0, t) \partial t - \int_0^t \phi(t, T) \partial t. \quad (3.62)$$

Sebagai kesimpulan dari subbab ini, model Hull-White Dua Faktor memiliki bentuk persamaan harga *zero-coupon bond*

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r - C(t, T)u),$$

dengan

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}),$$

$$C(t, T) = \frac{1}{a(a-b)} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(a-b)} e^{-b(T-t)} + \frac{1}{ab},$$

dan

$$\ln A(t, T) = B(t, T)F(0, t) + B(t, T)\phi(0, t) + \log \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + \int_0^t \phi(0, t) \partial t - \int_0^t \phi(t, T) \partial t.$$

Sementara fungsi $\theta(t)$ adalah

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \phi_t(0, t) + a\phi(0, t)$$

dengan

$$F(0, t) = -\frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t},$$

$$\phi(t, T) = \frac{1}{2} \sigma_1^2 B(t, T)^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 C(t, T)^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 B(t, T) C(t, T),$$

dan $B(t, T)$ dan $C(t, T)$ seperti yang didapat pada persamaan (3.2.30) dan (3.2.31).

3.3 SOLUSI EKSPLISIT MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Pada subbab ini, akan dibahas solusi eksplisit dari model Hull-White Dua Faktor. Solusi eksplisit ini nantinya akan digunakan sebagai dasar dari simulasi model.

PDS (3.1.4) dan (3.1.5) merupakan PDS tipe Langevin. Untuk mencari solusi dari PDS (3.1.4), perhatikan proses $e^{at}r(t)$,

$$d(e^{at}r(t)) = e^{at}[ar(t)dt + dr(t)]. \quad (3.3.1)$$

Susbtitusikan dr pada persamaan (3.1.4) ke dalam persamaan (3.2.1), maka

$$\begin{aligned} d(e^{at}r(t)) &= e^{at}[ar(t)dt + (\theta(t) + u(t) - ar(t))dt + \sigma_1 dZ_1], \\ &= e^{at}[\theta(t)dt + u(t)dt + \sigma_1 dZ_1]. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Integral dari persamaan (3.3.2) adalah

$$e^{at}r(t) - e^{as}r(s) = \int_s^t e^{av}\theta(v)dv + \int_s^t e^{av}u(v)dv + \int_s^t \sigma_1 dZ_1,$$

$$e^{at}r(t) = e^{as}r(s) + \int_s^t e^{av}\theta(v)dv + \int_s^t e^{av}u(v)dv + \int_s^t \sigma_1 dZ_1,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-a(t-s)}r(s) + \int_s^t e^{-a(t-v)}\theta(v)dv + \int_s^t e^{-a(t-v)}u(v)dv \\ &\quad + \int_s^t e^{-a(t-v)}\sigma_1 dZ_1. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Dengan cara yang sama, akan dicari solusi dari PDS (3.1.5). Perhatikan proses $e^{bt}u(t)$,

$$d(e^{bt}u(t)) = e^{bt}[bu(t)dt + du(t)]. \quad (3.3.4)$$

Substitusikan du pada persamaan (3.1.5) ke dalam persamaan (3.3.4), maka

$$\begin{aligned} d(e^{bt}u(t)) &= e^{bt}[bu(t)dt - bu(t)dt + \sigma_2 dZ_2], \\ &= e^{bt}[\theta\sigma_2 dZ_2]. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Integral dari persamaan (3.3.5) adalah

$$\begin{aligned} e^{bt}u(t) - e^{bs}u(s) &= \int_s^t e^{bv}\sigma_2 dZ_2, \\ e^{bt}u(t) &= e^{bs}u(s) + \int_s^t e^{bv}\sigma_2 dZ_2, \end{aligned}$$

sehingga solusi untuk PDS (3.1.5) adalah

$$u(t) = e^{-b(t-s)}u(s) + \int_s^t e^{-b(t-v)}\sigma_2 dZ_2. \quad (3.3.6)$$

Persamaan (3.3.3) masih mengandung fungsi $u(t)$ dan $\theta(t)$. Agar nilai $r(t)$ dapat dicari, substitusikan $u(t)$ pada persamaan (3.3.6) dan $\theta(t)$ pada persamaan (3.2.45) ke dalam persamaan (3.3.3). Pertama-tama substitusikan $u(t)$ pada persamaan (3.3.6) ke dalam persamaan (3.3.3). Perhatikan suku ketiga dari persamaan (3.3.3), dan asumsikan $a \neq b$,

$$\begin{aligned} \int_s^t e^{-a(t-v)} u(v) dv &= \int_s^t e^{-a(t-v)-b(t-v)} u(s) dv + \int_s^t e^{-a(t-v)} \int_s^v e^{-b(x-v)} \sigma_2 dZ_2 dv, \\ &= u(s) \frac{e^{-b(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{a-b} + \sigma_2 e^{-at} \int_s^t e^{(a-b)v} \int_s^v e^{bx} dZ_2 dv. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pandang suku kedua dari persamaan (3.3.7), dengan *integration by parts* [2]

$$\begin{aligned} \int_s^t e^{(a-b)v} \left(\int_s^v e^{bx} dZ_2 \right) dv &= \frac{1}{a-b} \int_s^t \left(\int_s^v e^{bx} dZ_2 \right) d_v (e^{(a-b)v}), \\ &= \frac{1}{a-b} \left[e^{(a-b)t} \int_s^t e^{bx} dZ_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_s^t e^{(a-b)v} d_v \left(\int_s^v e^{bx} dZ_2 \right) \right], \\ &= \frac{1}{a-b} \int_s^t [e^{(a-b)t} - e^{(a-b)v}] d_v \left(\int_s^v e^{bx} dZ_2 \right), \\ &= \frac{1}{a-b} \int_s^t [e^{at-b(t-v)} - e^{av}] dZ_2. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Substitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.3.8) ke dalam persamaan (3.3.7), maka

$$\int_s^t e^{-a(t-v)} u(v) dv = u(s) \frac{e^{-b(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{a-b} + \frac{\sigma_2}{a-b} \int_s^t [e^{-b(t-v)} - e^{-a(t-v)}] dZ_2. \quad (3.3.9)$$

Substitusikan hasil pada persamaan (3.3.9) ke dalam (3.3.3), maka diperoleh

$$\begin{aligned} r(t) = & e^{-a(t-s)} r(s) + \int_s^t e^{-a(t-v)} \theta(v) dv + u(s) \frac{e^{-b(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{a-b} \\ & + \sigma_1 \int_s^t e^{-a(t-v)} dZ_1 + \frac{\sigma_2}{a-b} \int_s^t [e^{-b(t-v)} - e^{-a(t-v)}] dZ_2. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Sekarang $\theta(t)$ pada persamaan (3.2.45) akan disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3.10). Pandang suku kedua pada persamaan (3.3.10),

$$\begin{aligned} \int_s^t e^{-a(t-v)} \theta(v) dv &= \int_s^t e^{-a(t-v)} [F_v(0, v) + aF(0, v) + \phi_v(0, v) + a\phi(0, v)] dv, \\ &= \int_s^t [F_v(0, v) e^{-a(t-v)} + aF(0, v) e^{-a(t-v)}] dv \\ &\quad + \int_s^t [\phi_v(0, v) e^{-a(t-v)} + a\phi(0, v) e^{-a(t-v)}] dv, \\ &= F(0, t) + \phi(0, t) - (F(0, s) + \phi(0, s)) e^{-a(t-s)}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Substitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.3.11) ke dalam persamaan (3.3.10), maka diperoleh solusi $r(t)$ berupa

$$\begin{aligned} r(t) = & e^{-a(t-s)} r(s) + u(s) \frac{e^{-b(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{a-b} + \kappa(t) - \kappa(s) e^{-a(t-s)} \\ & + \sigma_1 \int_s^t e^{-a(t-v)} dZ_1 + \frac{\sigma_2}{a-b} \int_s^t [e^{-b(t-v)} - e^{-a(t-v)}] dZ_2, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

dengan

$$\kappa(t) = F(0, t) + \phi(0, t). \quad (3.3.13)$$

Proses Wiener berdistribusi normal, maka $r(t)$ juga berdistribusi normal. Dengan menggunakan analogi dari model Gaussian 2++ (G2++) [2], diperoleh *mean*

$$m = e^{-a(t-s)}r(s) + u(s) \frac{e^{-b(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{a-b} + \kappa(t) - \kappa(s)e^{-a(t-s)} \quad (3.3.14)$$

dan *variance*

$$v^2 = \frac{1}{2a} \left[\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(a-b)} \right] (1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{1}{2b} \left[\frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right] (1 - e^{-2b(t-s)}) \quad (3.3.15)$$

$$+ \frac{2}{(a+b)} \left[\frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{(a-b)} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right] (1 - e^{-(a+b)(t-s)}).$$

Mean dan *variance* dari $r(t)$ ini nantinya akan digunakan untuk estimasi parameter dari model Hull-White Dua Faktor yang akan dibahas pada subbab 3.5 dan juga untuk simulasi model Hull-White Dua Faktor dengan menggunakan simulasi Monte Carlo yang akan dibahas pada subbab 3.4. Sebelum membahas estimasi parameter model Hull-White Dua Faktor, terlebih dahulu akan dibahas simulasi tingkat bunga yang mengikuti model Hull-White Dua Faktor.

3.4 SIMULASI TINGKAT BUNGA UNTUK MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Untuk simulasi tingkat bunga, akan digunakan skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo. Subbab ini akan membahas bentuk skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo untuk model Hull-White Dua Faktor.

Skema Euler-Maruyama akan digunakan untuk mensimulasikan $u(t)$, sementara simulasi Monte Carlo akan digunakan untuk mensimulasikan $r(t)$. Untuk simulasi $u(t)$, akan digunakan persamaan (3.1.5) untuk membentuk skema Euler-Maruyama untuk $u(t)$. Sementara itu, solusi eksplisit $r(t)$ seperti yang ditunjukkan pada persamaan (3.3.12) akan digunakan untuk membangun simulasi Monte Carlo untuk $r(t)$. Alasan kenapa $r(t)$ disimulasikan dengan menggunakan simulasi Monte Carlo adalah karena model $r(t)$ pada persamaan (3.1.4) terlalu rumit untuk disimulasikan dengan skema Euler-Maruyama. Hal ini dikarenakan terdapatnya fungsi $\theta(t)$.

Pertama-tama akan dibahas simulasi $u(t)$. Misalkan $u(t)$ akan disimulasikan pada selang $[0, T]$. Misalkan pula $\Delta t = T/L$ dan $\tau_j = j\Delta t$ untuk suatu bilangan bulat positif L . Untuk mempermudah penulisan,

misalkan aproksimasi numerik $u(\tau_j)$ akan ditulis sebagai u_j . Skema Euler-Maruyama untuk $u(t)$ adalah

$$u_{j+1} = u_j - bu_j\Delta t + \sigma_2 \left(Z_2(\tau_{j+1}) - Z_2(\tau_j) \right). \quad (3.4.1)$$

Untuk simulasi $r(t)$, akan digunakan *mean* dan *variance* dari $r(t)$ seperti yang ditunjukkan pada persamaan (3.3.14) dan (3.3.15). Untuk mempermudah penulisan, misalkan $r(\tau_j) = r_j$. Simulasi Monte Carlo untuk $r(t)$ adalah

$$\begin{aligned} r_{j+1} = & e^{-a\Delta t} r_j + u_j \frac{e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t}}{a - b} + \kappa_{j+1} - \kappa_j e^{-a\Delta t} \\ & + \left(\frac{1}{2a} \left[\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - 2\rho \frac{\sigma_1\sigma_2}{(a-b)} \right] (1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{1}{2b} \left[\frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right] (1 - e^{-2b(t-s)}) \right. \\ & \left. + \frac{2}{(a+b)} \left[\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right] (1 - e^{-(a+b)(t-s)}) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi_2\rho + \xi_1\sqrt{1-\rho^2} \right), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

dengan

$$\kappa_j = F(0, t_j) + \phi(0, t_j). \quad (3.4.3)$$

Fungsi $F(0, t_j)$ diberikan pada persamaan (3.2.46) dan fungsi $\phi(0, t_j)$ seperti yang diberikan pada persamaan (3.2.47). Pada saat pemrograman, untuk menghindari kerancuan antara skema Euler-Maruyama dengan simulasi Monte Carlo, pilih $\tau_j = t_j$.

3.5 ESTIMASI PARAMETER MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Subbab ini akan membahas cara mengestimasi parameter-parameter pada model Hull-White Dua Faktor. Metode estimasi yang akan digunakan adalah taksiran Maksimum Likelihood. Adapun parameter-parameter yang akan diestimasi adalah a , b , σ_1 , σ_2 , dan ρ .

Misalkan m menyatakan *mean* dari model *short rate* seperti yang dinyatakan pada persamaan (3.3.14) dan v^2 menyatakan *variance* dari model *short rate* seperti yang dinyatakan pada persamaan (3.3.15). Model Hull-White Dua Faktor berdistribusi normal dengan *mean* m dan *variance* v^2 . Pdf dari model Hull-White Dua Faktor adalah

$$f(x|m, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2v^2}\right).$$

Pdf bersyarat dari variabel r_{i+1} terhadap variabel sebelumnya, r_i adalah

$$f(r_{i+1}|r_i; a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{\left(r_{i+1} - r_i e^{-a\Delta t} + u_i \frac{e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t}}{a - b} + \kappa_{i+1} - \kappa_i e^{-a\Delta t}\right)^2}{2v^2}\right). \quad (3.5.1)$$

Dari persamaan (3.5.1) akan dibentuk fungsi likelihood dengan n sampel yang saling bebas,

$$\prod_{i=0}^{n-1} f(r_{i+1}|r_i; a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \left(\frac{1}{2\pi v^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(- \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(r_{i+1} - r_i e^{-a\Delta t} + u_i \frac{e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t}}{a-b} + \kappa_{i+1} - \kappa_i e^{-a\Delta t} \right)^2}{2v^2} \right),$$

kemudian dibentuk fungsi log-likelihood yang berupa

$$L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(v) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(- \frac{\left(r_{i+1} - r_i e^{-a\Delta t} + u_i \frac{e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t}}{a-b} + \kappa_{i+1} - \kappa_i e^{-a\Delta t} \right)^2}{2v^2} \right).$$

Untuk memperoleh taksiran parameter dari a , b , σ_1 , σ_2 , dan ρ , fungsi log-likelihood L akan diturunkan sekali terhadap tiap parameter yang akan ditaksir. Hasil taksiran dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan-persamaan

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial a} = 0, \quad \text{untuk } a, \quad (3.5.2)$$

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial b} = 0, \quad \text{untuk } b, \quad (3.5.3)$$

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \text{untuk } \sigma_1, \quad (3.5.4)$$

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \text{untuk } \sigma_2, \quad (3.5.5)$$

dan

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \rho} = 0, \quad \text{untuk } \rho. \quad (3.5.6)$$

Akan tetapi,

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial a} = -\frac{n G_a}{2 G} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_a^i}{G} - \frac{2(Q^i)^2 G_a}{G} \right), \quad (3.5.7)$$

dengan

$$G = \frac{2 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{2 \left(\frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2b\Delta t})}{b}$$

$$+ \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b},$$

$$G_a = \frac{2 \left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) \Delta t e^{-2a\Delta t}}{a}$$

$$- \frac{2 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} - \frac{4\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b}$$

$$+ \frac{8 \left(\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} + \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) \Delta t e^{-(a+b)\Delta t}}{a+b}$$

$$- \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2},$$

$$Q^i = r_{i+1} - r_i e^{-a\Delta t} - \frac{u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{a-b} - \kappa_{i+1} + \kappa_i e^{-a\Delta t},$$

dan

$$Q_a^i = r_i \Delta t e^{-a\Delta t} - \frac{u_i \Delta t e^{-a\Delta t}}{a-b} + \frac{u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^2} - \kappa_i \Delta t e^{-a\Delta t},$$

dengan κ_i seperti yang diberikan pada persamaan (3.4.3). Terlihat pada persamaan (3.5.7) bahwa parameter-parameter dari persamaan (3.5.2) masih saling bergantung sehingga sulit untuk mendapatkan solusi dari (3.5.2). Hal yang sama juga dijumpai untuk persamaan (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5), dan (3.5.6). Untuk mengatasinya, akan digunakan pendekatan numerik untuk mendapatkan nilai taksiran parameter. Pendekatan numerik yang akan digunakan adalah metode Newton-Raphson.

Misalkan suatu vektor parameter

$$p^i = \begin{pmatrix} a^i \\ b^i \\ \sigma_1^i \\ \sigma_2^i \\ \rho^i \end{pmatrix}.$$

Metode Newton-Raphson membutuhkan vektor fungsi turunan pertama dari L , yaitu

$$w(p^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial a} \\ \frac{\partial L}{\partial b} \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} \end{pmatrix},$$

dan matriks fungsi turunan kedua dari L , yaitu

$$H(p^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \end{pmatrix},$$

dengan elemen dari vektor $w(p^i)$ dan elemen dari matriks $H(p^i)$ diberikan pada lampiran. Matriks turunan kedua $H(p^i)$ biasa disebut sebagai matriks Hessian.

Untuk memulai metode Newton-Raphson, ambil vektor parameter awal

$$p^0 = \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix}.$$

Untuk mendapatkan vektor parameter p^1 , simulasikan $u(t)$ menggunakan skema Euler-Maruyama dengan parameter b^0 dan σ_2^0 yang merupakan elemen dari vektor p^0 . Simulasi $u(t)$ dilakukan karena data $u(t)$ tidak dapat diperoleh dari pasar. p^1 dapat diperoleh dari persamaan

$$p^1 = p^0 - [H(p^0)]^{-1}w(p^0).$$

Setelah mendapatkan p^1 , $u(t)$ disimulasikan kembali dengan parameter terbaru p^1 . Hasil simulasi $u(t)$ yang terbaru akan digunakan untuk mencari p^2 . Dengan cara yang sama, dapat diperoleh vektor parameter p^3, p^4, \dots, p^ξ untuk suatu bilangan bulat ξ . Secara garis besar, p^{i+1} dapat diperoleh dari persamaan

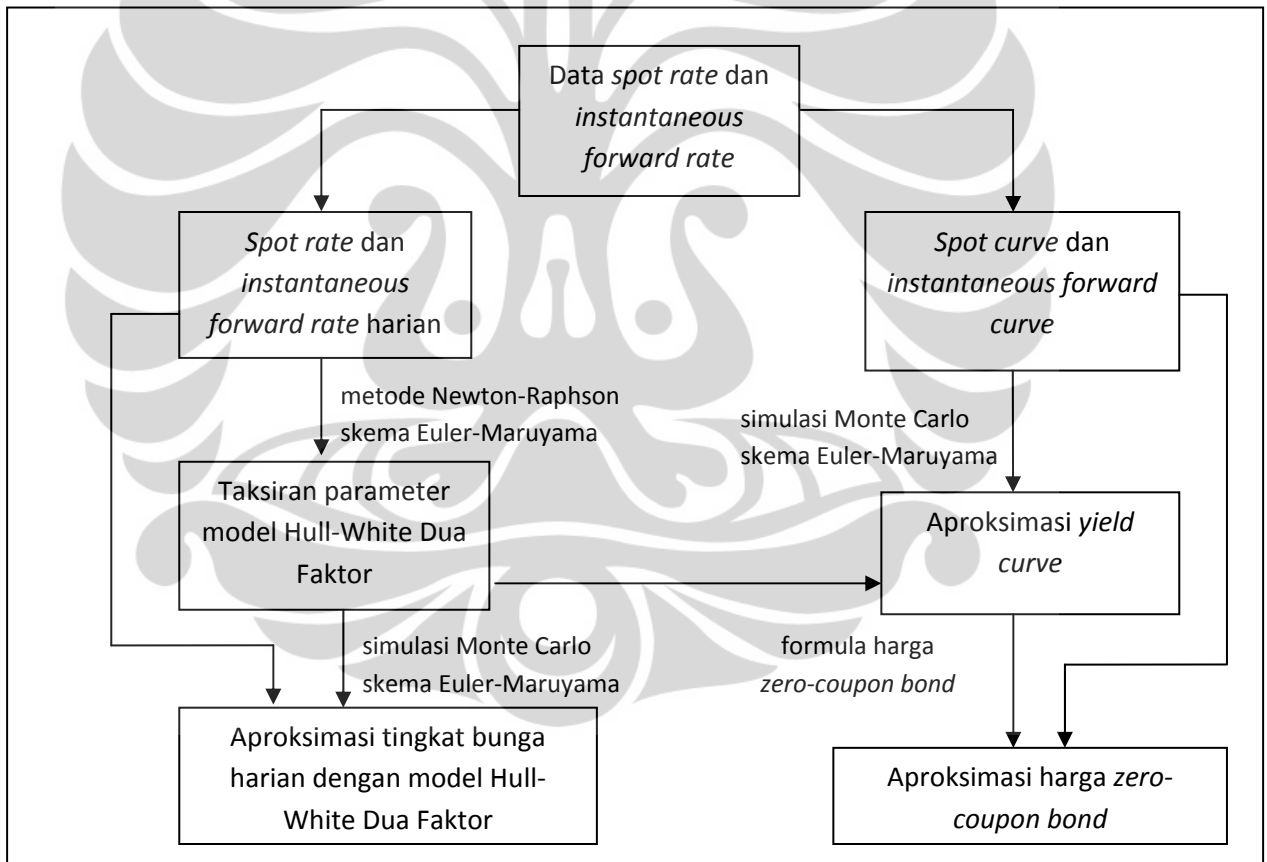
$$p^{i+1} = p^i - [H(p^i)]^{-1} w(p^i).$$

Metode ini akan terus berlangsung hingga nilai dari $\|p^{i+1} - p^i\|$ telah lebih kecil dari toleransi yang diinginkan.

BAB IV

IMPLEMENTASI MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

Pada bab ini akan dibahas implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian yang sedang berlaku di pasar dan harga *zero-coupon bond* di pasar. Secara garis besar, implementasi model Hull-White Dua Faktor dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. Skema implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*

Berdasarkan Gambar 3, data *spot rate* dan *instantaneous forward rate* akan digunakan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian dengan model Hull-White Dua Faktor dan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*. Data *spot rate* dan *instantaneous forward rate* dapat dibagi lagi menjadi data *spot rate* dan *instantaneous forward rate* harian dan data *spot curve* dan *instantaneous forward curve*. Data *spot rate* dan *instantaneous forward rate* akan digunakan untuk menaksir parameter-parameter model Hull-White Dua Faktor menggunakan skema Euler-Maruyama dan metode Newton-Raphson. Hasil taksiran parameter ini dengan data *spot rate* dan *instantaneous forward rate* harian akan digunakan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian dengan menggunakan skema Euler-Maruyama dan simulasi Monte Carlo. Sementara data *spot curve* dan *instantaneous forward curve* dengan hasil taksiran parameter model Hull-White Dua Faktor akan digunakan untuk mengaproksimasi *yield curve*. *Yield curve* adalah kurva yang menggambarkan imbal hasil dari investasi *zero-coupon bond*. Aproksimasi *yield curve* ini akan digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*.

Untuk lebih detailnya, pembahasan mengenai aproksimasi tingkat bunga harian dengan model Hull-White Dua Faktor dapat dibaca pada subbab 4.1. Sedangkan pembahasan mengenai aproksimasi harga *zero-coupon bond* dengan model Hull-White Dua Faktor dapat dibaca pada subbab 4.2.

4.1 IMPLEMENTASI MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR UNTUK MENGAPROKSIMASI TINGKAT BUNGA HARIAN

Subbab ini akan membahas implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian. Implementasi ini dilakukan untuk melihat perilaku model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian. Berikut ini akan dibahas langkah-langkah yang akan diambil untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian.

Untuk memulai implementasi, pertama-tama diambil data tingkat bunga harian pada pasar. Data yang diambil merupakan data *spot rate* harian dan data *instantaneous forward rate* harian yang diambil dari Bank of England untuk *zero-coupon bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun. Data tersebut dapat dilihat pada [14].

Setelah data diperoleh, akan dilakukan estimasi parameter-parameter model Hull-White Dua Faktor dengan data tersebut. Untuk estimasi parameter akan digunakan skema Euler-Maruyama dan metode Newton-Raphson. Skema Euler-Maruyama digunakan untuk simulasi komponen stokastik dari *mean-reversion level*, yaitu $u(t)$. Hal ini dilakukan karena data $u(t)$ tidak terdapat di pasar. Skema Euler-Maruyama untuk $u(t)$ diberikan pada (3.4.1). Setelah simulasi $u(t)$, metode Newton-Raphson digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter model Hull-White Dua Faktor

dengan menggunakan data historis dan data hasil dari simulasi $u(t)$. Proses estimasi parameter ini akan dilakukan dengan *software* Matlab 7.0.1 dan contoh programnya akan diberikan dalam lampiran.

Untuk memulai metode Newton-Raphson diperlukan suatu vektor parameter awal. Pada implementasi ini, dilakukan beberapa kali percobaan hingga diperoleh suatu vektor parameter awal yang cukup baik dalam menaksir nilai parameter sebenarnya. Vektor parameter awal yang diperoleh adalah

$$p^0 = \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-8} \\ 10^{-4} \\ 9 \times 10^{-7} \\ 0,5 \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Vektor parameter awal (4.1.1) akan digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter model Hull-White Dua Faktor. Pemilihan vektor parameter awal (4.1.1) terlihat kurang wajar, terutama jika toleransi error yang diinginkan adalah 10^{-3} . Hal ini terjadi karena model tingkat bunga mengandung faktor stokastik u .

Misalkan dari proses estimasi ini, diperoleh hasil taksiran parameter berupa

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \widehat{\sigma}_1 \\ \widehat{\sigma}_2 \\ \hat{\rho} \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Vektor parameter \hat{p} akan digunakan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian. Untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian, akan digunakan skema Euler-Maruyama untuk simulasi $u(t)$. Kemudian dengan menggunakan data $u(t)$ hasil simulasi, $r(t)$ akan disimulasikan dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Simulasi Monte Carlo untuk $r(t)$ diberikan pada (3.4.2). Simulasi Monte Carlo ini akan dilakukan beberapa kali, hingga dapat diperoleh suatu lintasan rata-rata. Lintasan rata-rata ini akan digunakan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian pada pasar.

Setelah menjelaskan langkah-langkah dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian, berikut ini akan dijabarkan proses implementasi beserta hasilnya.

Pertama-tama model Hull-White Dua Faktor akan diimplementasikan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian untuk jangka waktu 1 tahun terhitung dari tanggal 2 Januari 2002. Pada skripsi ini diasumsikan pada 1 tahun terdapat 256 hari kerja, sehingga data yang digunakan adalah 256 data *spot rate* harian dan 256 data *instantaneous forward rate* harian.

Untuk mendapatkan taksiran parameter, pertama-tama $u(t)$ akan disimulasikan terlebih dahulu dengan menggunakan nilai parameter awal,

$b = 10^{-8}$ dan $\sigma_2 = 9 \times 10^{-7}$. $u(t)$ akan disimulasikan dengan nilai awal $u(0) = 0$ seperti yang telah dijelaskan pada subbab 3.1. Setelah simulasi $u(t)$ diperoleh, maka hasil simulasi ini dan vektor parameter awal akan digunakan dalam metode Newton-Raphson untuk mendapatkan vektor parameter yang baru, misalkan p^1 . Vektor parameter p^1 akan digunakan untuk mensimulasikan $u(t)$ kembali dengan nilai b dan σ_2 hasil aproksimasi. Hasil simulasi $u(t)$ terbaru dengan vektor p^1 akan digunakan untuk mendapatkan vektor parameter baru p^2 dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Proses ini akan terus dilakukan hingga dicapai *infinite error* ($\|p^{i+1} - p^i\|_\infty$) yang diinginkan, yaitu 10^{-3} .

Hasil yang diperoleh dari metode Newton-Raphson ini adalah vektor taksiran parameter berupa

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0,12411 \\ -699 \times 10^{-10} \\ 236 \times 10^{-3} \\ 899 \times 10^{-7} \\ 0,38876 \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Gambar 4 menunjukkan hasil estimasi parameter yang berupa *output* dari program Matlab. Hasil pada (4.1.3) akan digunakan untuk simulasi $u(t)$, yang kemudian akan digunakan untuk mensimulasikan $r(t)$ dengan $r(0) = 5,0082$, yaitu tingkat bunga pada tanggal 2 Januari 2002. Simulasi $u(t)$ dan $r(t)$ akan dilakukan sebanyak 100 kali. Dari 100 kali simulasi $r(t)$, akan

dibuat satu lintasan rata-rata yang akan digunakan untuk mengaproksimasi tingkat bunga pada pasar.

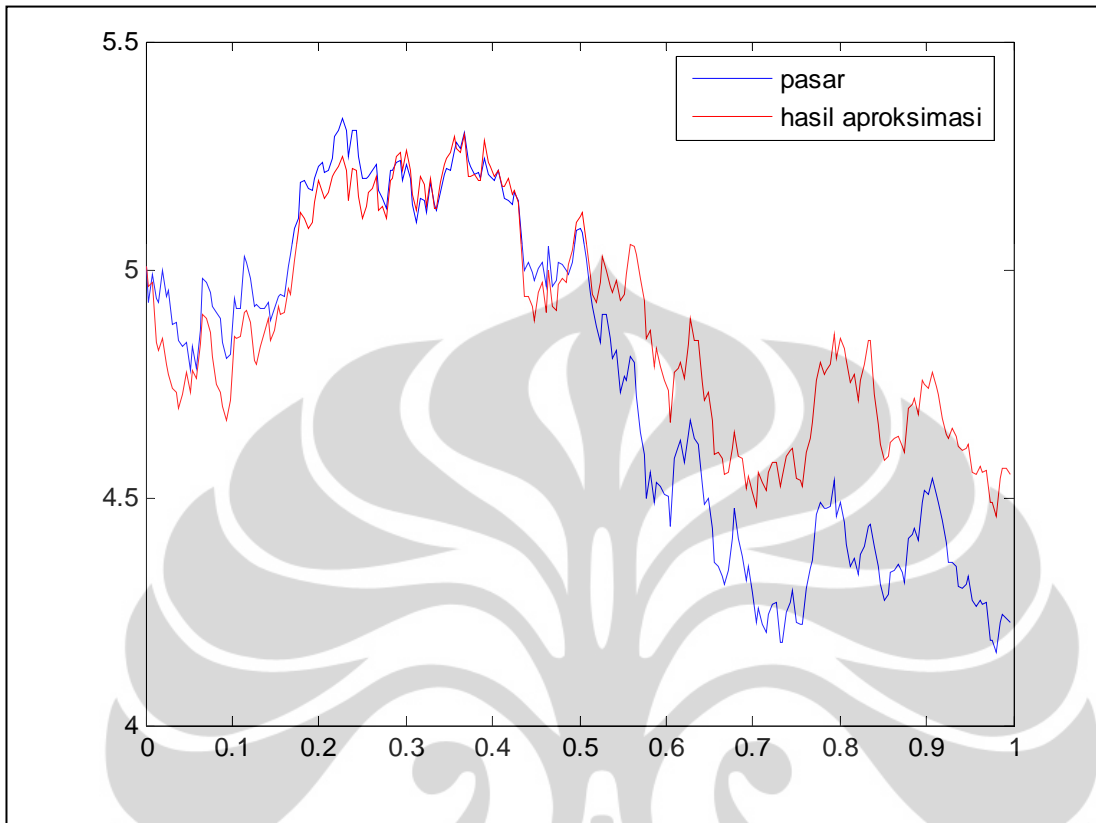
----- Hasil estimasi paramater -----	
a	= 0.124112
b	= -0.0000000000699
sigma1	= 0.002366
sigma2	= 0.000000899990
rho	= 0.388765

Gambar 4. Hasil estimasi parameter untuk 1 tahun

Dari simulasi yang dilakukan, diperoleh *relative error* terbesar

($\left\| \frac{r_i - x_i}{x_i} \right\|_{\infty}$, dengan x_i menyatakan tingkat bunga pada pasar) yaitu 9,26%.

Hal ini menandakan model Hull-White Dua Faktor cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun. Hasil aproksimasi tingkat bunga harian dapat dilihat pada Gambar 5 sementara contoh *output* hasil implementasi dapat dilihat pada Tabel 1.



Gambar 5. Aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun

Pada Gambar 5, terlihat bahwa simulasi tingkat bunga dengan model Hull-White Dua Faktor cenderung menjauhi simulasi tingkat bunga di pasar setelah melewati 0,5 tahun. Walaupun demikian, berdasarkan Gambar 5 dapat disimpulkan bahwa pergerakan tingkat bunga hasil simulasi dengan model Hull-White Dua Faktor memiliki pola yang sama dengan pergerakan tingkat bunga harian yang sebenarnya.

Tabel 1

Contoh *output* hasil implementasi sepanjang 1 tahun

Aproksimasi Tingkat Bunga Harian (dalam %)		
Pasar	Hasil aproksimasi	<i>Relative Error</i>
5,008166	5,008166	0
4,929458	4,964108	0,7029
4,989129	4,969545	0,3925
4,934484	4,837822	1,9589
4,927050	4,823093	2,1099
4,996295	4,848378	2,9605
4,941289	4,793636	2,9881
4,954148	4,771273	3,6914
4,878758	4,738224	2,8805
4,885580	4,729248	3,1999
⋮	⋮	⋮
5,086228	5,103135	0,3324
5,087826	5,117805	0,5892
5,081276	5,126456	0,8892
5,023000	5,060795	0,7524
4,947957	4,987122	0,7916
4,919126	4,946327	0,5530
⋮	⋮	⋮
4,260619	4,551398	6,8248
4,274449	4,568314	6,8749
4,264825	4,554505	6,7923
4,268457	4,560271	6,8365
4,187554	4,488432	7,1850
4,186393	4,490616	7,2669
4,158313	4,456649	7,1744
4,224076	4,540375	7,4880
4,241497	4,565777	7,6454
4,235381	4,562914	7,7333
4,224516	4,549830	7,7006
<i>Relative Error</i> Terbesar = 9,2606		

Pada Tabel 1, kolom pertama menunjukkan tingkat bunga harian pada pasar, kolom kedua menunjukkan hasil aproksimasi tingkat bunga dengan

model Hull-White Dua Faktor, dan kolom ketiga menunjukkan *relative error* hasil implementasi. Untuk mempermudah penyajian data yang disajikan hanya berjumlah 27 dari 256 data, yaitu 10 data pertama, 6 data yang dimulai dari data ke-128, dan 11 data terakhir.

Selanjutnya model Hull-White Dua Faktor akan diimplementasikan untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian dengan interval yang lebih panjang. Hal ini dilakukan untuk melihat bagaimana model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga dengan interval lebih panjang.

Untuk tujuan tersebut akan digunakan tingkat bunga harian untuk jangka waktu 5 tahun dihitung dari tanggal 2 Januari 2002. Diasumsikan pada 1 tahun terdapat 256 hari kerja, sehingga data yang digunakan adalah 1280 data *spot rate* harian dan 1280 data *instantaneous forward rate* harian.

Dengan cara seperti pada implementasi untuk satu tahun, vektor parameter awal yang akan digunakan adalah vektor (4.1.1). *Infinite error* ($\|p^{i+1} - p^i\|_{\infty}$) yang diinginkan adalah 10^{-3} .

Hasil yang diperoleh dari metode Newton-Raphson dengan data sepanjang 5 tahun adalah vektor taksiran parameter berupa

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 748 \times 10^{-3} \\ 463 \times 10^{-9} \\ 562 \times 10^{-4} \\ 899 \times 10^{-7} \\ 0,4963 \end{pmatrix}. \quad (4.1.4)$$

Gambar 6 menunjukkan hasil estimasi parameter untuk tingkat bunga sepanjang 5 tahun yang berupa *output* dari program Matlab. Hasil pada (4.1.4) akan digunakan untuk simulasi $r(t)$ dengan $r(0) = 5,0082$, yaitu tingkat bunga pada tanggal 2 Januari 2002. Dari simulasi sepanjang 5 tahun diperoleh *relative error* terbesar ($\left\| \frac{|x_i - r_i|}{x_i} \right\|_{\infty}$) yaitu 14,26%.

```

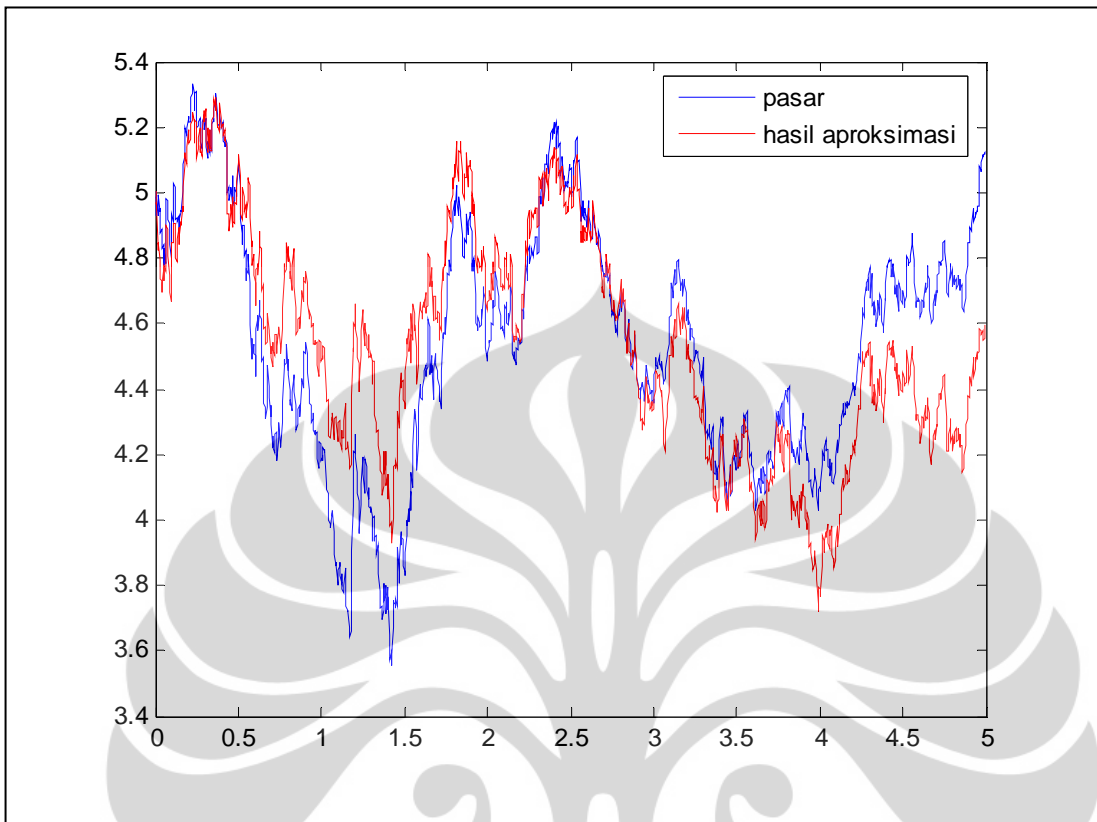
-----
                Hasil estimasi paramater
-----
a           = 0.007482
b           = 0.000000004637
sigma1     = 0.000562
sigma2     = 0.000000899991
rho        = 0.496387
-----

```

Gambar 6. Hasil estimasi parameter untuk 5 tahun

Error yang diperoleh pada aproksimasi sepanjang 1 tahun dengan aproksimasi sepanjang 5 tahun tidak terlalu berbeda, sehingga dapat disimpulkan model Hull-White Dua Faktor cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian dengan jangka waktu yang lebih lama, dalam hal ini sekitar 4 tahun.

Hasil aproksimasi tingkat bunga sepanjang 5 tahun dapat dilihat pada Gambar 7. Sementara contoh *output* hasil implementasi dapat dilihat pada Tabel 2.



Gambar 7. Aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 5 tahun

Dari Gambar 7, terlihat bahwa model Hull-White Dua Faktor cukup baik untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian dengan jangka waktu sekitar 4 tahun.

Tabel 2

Contoh *output* hasil implementasi sepanjang 5 tahun

Aproksimasi Tingkat Bunga Harian (dalam %)		
Pasar	Hasil aproksimasi	<i>Relative Error</i>
5,008166	5,008166	0
4,929458	4,964035	0,7014
4,989129	4,969401	0,3954
4,934484	4,837606	1,9633
4,927050	4,822805	2,1158
4,996295	4,848020	2,9677
4,941289	4,793207	2,9968
4,954148	4,770773	3,7015
4,878758	4,737652	2,8922
4,885580	4,728605	3,2130
⋮	⋮	⋮
5,069950	4,992509	1,5275
5,075459	5,010254	1,2847
4,989577	4,949896	0,7953
4,998962	4,951903	0,9414
5,002836	4,960903	0,8382
5,096463	5,053770	0,8377
⋮	⋮	⋮
4,960679	4,513986	9,0047
5,039119	4,529790	10,1075
5,080147	4,581958	9,8066
5,072376	4,576238	9,7812
5,066023	4,563910	9,9114
5,092851	4,564835	10,3678
5,108068	4,579297	10,3517
5,115135	4,574235	10,5745
5,113118	4,548278	11,0469
5,123659	4,556958	11,0605
5,118793	4,593231	10,2673
<i>Relative Error</i> Terbesar =14,2556		

Pada Tabel 2, kolom pertama menunjukkan tingkat bunga harian pada pasar, kolom kedua menunjukkan hasil aproksimasi tingkat bunga dengan

model Hull-White Dua Faktor, dan kolom ketiga menunjukkan *relative error* hasil implementasi. Untuk mempermudah penyajian data yang disajikan hanya berjumlah 27 dari 1280 data, yaitu 10 data pertama, 6 data yang dimulai dari data ke-640, dan 11 data terakhir.

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 3.2, parameter b merupakan kelajuan $u(t)$ menuju 0 dengan $u(t)$ merupakan komponen stokastik dari *mean-reversion level*. Dari persamaan (4.1.2), (4.1.3), dan (4.1.4) terlihat bahwa hasil taksiran parameter b sangat kecil baik untuk implementasi sepanjang 1 maupun 5 tahun. Hal ini menandakan bahwa kelajuan $u(t)$ menuju 0 sangat lambat sehingga dapat disimpulkan sifat stokastik pada *mean-reversion level* tidak akan hilang untuk waktu yang lama.

4.2 IMPLEMENTASI MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR UNTUK MENGAPROKSIMASI HARGA ZERO-COUPON BOND

Pada subbab ini akan dibahas implementasi model Hull-White Dua Faktor untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*. Berikut ini akan dibahas langkah-langkah yang akan diambil untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*.

Pertama-tama, diambil data tingkat bunga harian yang berlaku di pasar. Untuk implementasi ini, akan digunakan data *spot curve* dan *instantaneous forward curve* untuk *zero-coupon bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun yang diambil dari Bank of England. Data yang diambil adalah data historis pada tanggal 1 Juni 2009. Data dapat diperoleh di [14].

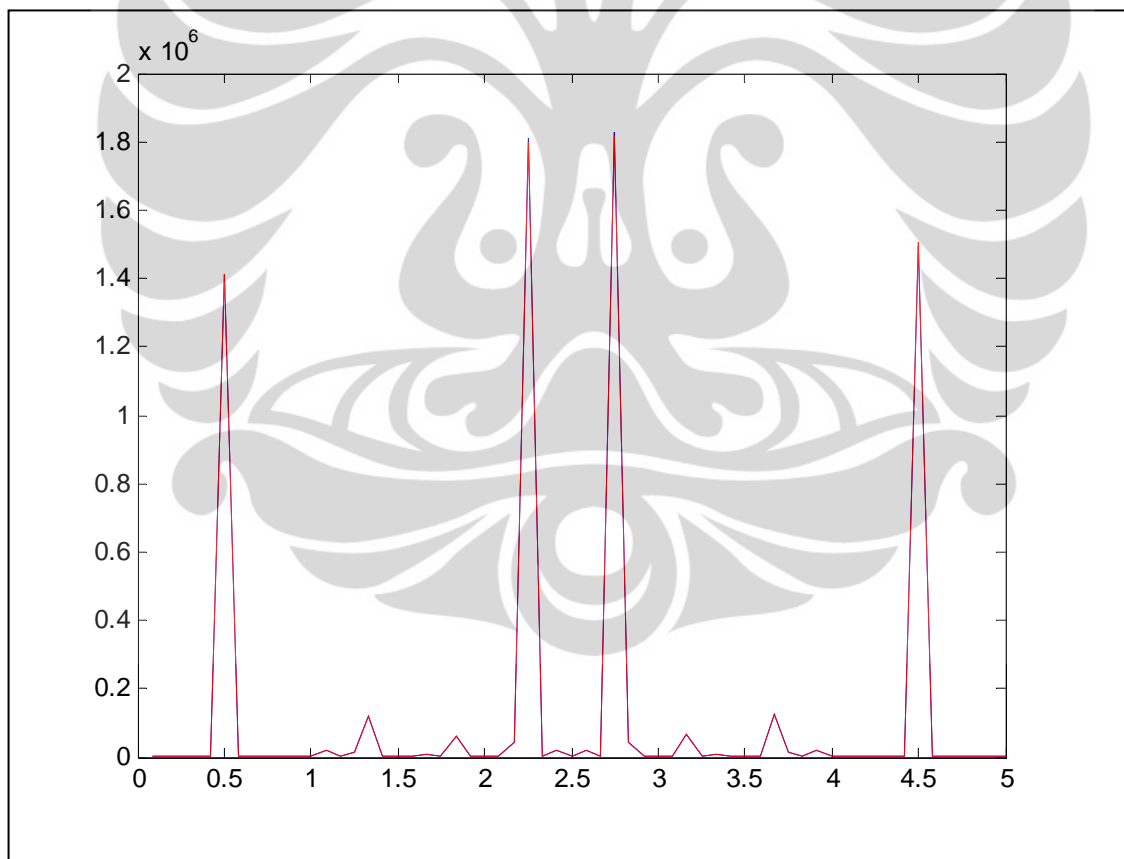
Selanjutnya, $u(t)$ akan disimulasikan dengan menggunakan parameter yang diperoleh pada saat mengaproksimasi tingkat bunga harian, yaitu (4.1.2). Dengan $u(t)$ yang telah diperoleh dan parameter (4.1.2), akan dibuat beberapa lintasan *yield curve* $r(t)$ dengan menggunakan persamaan (3.4.2). Dari beberapa lintasan *yield curve* akan dibuat suatu lintasan rata-rata. Lintasan rata-rata ini akan digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond* berdasarkan persamaan harga *zero-coupon bond* yang diberikan pada persamaan (3.2.25).

Setelah menjabarkan langkah-langkah dalam mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*, selanjutnya akan dijabarkan proses implementasi beserta hasilnya.

Model Hull-White Dua Faktor akan digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun terhitung sejak tanggal 1 Juni 2009. Data yang digunakan adalah data *spot curve* dan *instantaneous forward curve* bulanan tertanggal 1 Juni 2009 sehingga terdapat 60 data *spot curve* dan 60 data *instantaneous forward curve*.

Taksiran parameter yang akan digunakan adalah taksiran parameter yang telah diperoleh pada saat mengaproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 5 tahun, yaitu (4.1.4).

Untuk mensimulasikan *yield curve*, $u(t)$ akan disimulasikan dengan menggunakan parameter (4.1.4) dengan $u(0) = 0$. Kemudian hasil simulasi $u(t)$ akan digunakan untuk mensimulasikan *yield curve* dengan $r(0) = 2,82$, yaitu *spot curve* pada tanggal 1 Juni 2009. Hasil yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Kurva harga *zero-coupon bond* yang salah

Gambar 8 tidak memperlihatkan suatu kurva harga *zero-coupon bond*. Hal ini disebabkan karena pemilihan data tingkat bunga harian yang kurang cocok dengan data harga *zero-coupon bond*. Pada implementasi ini, data tingkat bunga harian yang digunakan adalah data sepanjang 5 tahun yang dimulai pada tanggal 2 Januari 2002. Sehingga data tingkat bunga harian tersebut berakhir pada 2 Januari 2007. Sementara data harga *zero-coupon bond* yang digunakan adalah data pada tanggal 1 Juni 2009. Selanjutnya akan dicoba implementasi harga *zero-coupon bond* dengan menggunakan parameter yang diperoleh dari aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun yang dimulai pada tanggal 1 Juni 2008.

Pemilihan parameter awal (4.1.1) cukup baik untuk aproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 5 tahun yang dimulai pada tanggal 2 Januari 2002. Akan tetapi kurang baik untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun yang dimulai pada tanggal 1 Juni 2008. Berikut adalah vektor parameter awal yang cukup baik untuk mengaproksimasi tingkat bunga harian sepanjang 1 tahun yang dimulai pada 1 Juni 2008,

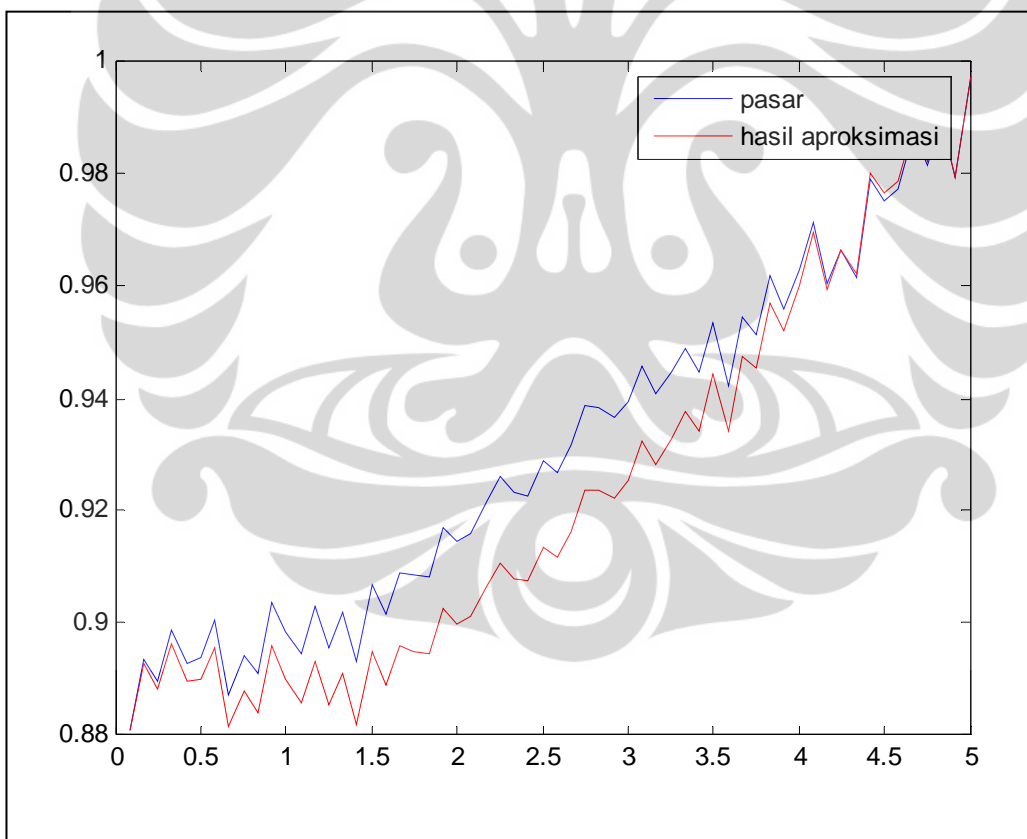
$$p^0 = \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-9} \\ 5 \times 10^{-6} \\ 9 \times 10^{-9} \\ 0,5 \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk memperoleh taksiran parameter seperti pada subbab 4.1, diperoleh taksiran parameter

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0,364 \\ -209 \times 10^{-10} \\ 210 \times 10^{-3} \\ 899 \times 10^{-9} \\ 0,93225 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Vektor parameter (4.2.2) akan digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero-coupon bond*.

Dengan cara yang sama seperti pada aproksimasi dengan menggunakan vektor parameter awal (4.1.4), diperoleh hasil yang dapat dilihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Kurva harga *zero-coupon bond*

Dari Gambar 9, terlihat bahwa pergerakan harga *zero-coupon bond* hasil aproksimasi berfluktuasi dan memiliki perbedaan yang cukup kentara dengan pergerakan harga *zero-coupon bond* yang diperkirakan oleh Bank of England. Apabila diasumsikan harga *zero-coupon bond* hasil aproksimasi dengan model Hull-White Dua Faktor adalah harga wajar di pasar, maka jika seorang investor yang memiliki suatu *zero-coupon bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun ingin menjual *zero-coupon bond* miliknya, maka saat antara 0,5 hingga 4 tahun adalah saat yang tepat. Hal ini dikarenakan harga pada pasar lebih tinggi daripada harga hasil aproksimasi dengan model Hull-White Dua Faktor. Akan tetapi setelah *zero-coupon bond* melewati 4 tahun, harga pada pasar tidak jauh berbeda dengan harga hasil aproksimasi, sehingga untuk investor yang belum memiliki *zero-coupon bond* tersebut disarankan untuk membelinya. Sementara untuk investor yang telah memiliki *zero-coupon bond* tersebut, disarankan untuk menahan *zero-coupon bond* tersebut hingga jatuh tempo.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya beserta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 KESIMPULAN

Dari pembahasan Bab 3, model Hull-White Dua Faktor memiliki bentuk seperti yang diberikan pada (3.14) dan (3.1.5) dan terkait dengan persamaan harga *zero-coupon bond* (3.2.25). Hasil implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian menunjukkan bahwa aproksimasi tingkat bunga berdasarkan model memiliki pola yang sama dengan tingkat bunga harian pada pasar dan cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian untuk interval yang pendek maupun yang panjang. Sementara hasil implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi harga *zero-coupon bond* menunjukkan bahwa pemilihan data tingkat bunga harian mempengaruhi kurva harga *zero-coupon bond* dan hasil aproksimasi harga *zero-coupon bond* dapat memberikan informasi untuk investor dalam bertransaksi *zero-coupon bond*.

5.2 SARAN

Pada implementasi yang telah dijelaskan pada Bab 4, tidak terlihat hubungan antara hasil aproksimasi tingkat bunga dengan hasil aproksimasi harga *zero-coupon bond*. Oleh karena itu, perlu diteliti lebih jauh hubungan antara hasil aproksimasi tingkat bunga dengan hasil aproksimasi harga *zero-coupon bond*. Kemudian perlu dicoba implementasi model Hull-White Dua Faktor dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian dan harga *zero-coupon bond* dengan interval yang lebih panjang dari 5 tahun.

Kalman filter merupakan suatu metode aproksimasi dan estimasi yang cukup populer [4]. Ada baiknya untuk mencoba mengimplementasikan model Hull-White Dua Faktor dengan menggunakan Kalman filter.

Model Hull-White Dua Faktor cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat bunga harian, namun ada baiknya untuk mencoba model-model dua faktor lainnya seperti model Brennan-Schwartz [11] maupun model Gaussian G2++ [2].

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bodie, Z, Kane, A dan Marcus, A. 2001. *Investments*, 5th ed. The McGraw-Hill Companies.
- [2] Brigo, D dan Mercurio F. 2006. *Interest Rate Models: Theory and Practice*. Springer.
- [3] Burden, R.L. dan Faires, J.D. 2001. *Numerical Analysis*, 7th ed. Brooks/cole.
- [4] Garcia, Anonio H. 2006. *Interest Rate Model Calibration Using Kalman Filtering*. Universidad Pontificia Comillas Madrid.
- [5] Higham, Desmond. *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*. SIAM Nomor 3, Voulume 43, September 2000.
- [6] Hull, John C. 2002. *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6th ed. Prentice-Hall.
- [7] Ismail, Hadi. 2008. *Implementasi Metode Least-Square Monte Carlo dalam Mengaproksimasi Nilai Opsi Put Amerika*, skripsi, Universitas Indonesia.
- [8] Kellison, Stephen G. 1991. *The Theory of Interest*, 2nd ed. Irwin/McGraw-Hill.
- [9] Klebaner, Fima C. 2005. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications, 2nd Edition*. Imperial College Press
- [10] Kloeden, P.E. dan Platen,E.1991. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Applications of Mathematics, Vol.23, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [11] Kwok, Yue. 2008. *Mathematical Models of Financial Derivatives*, 2nd ed. Springer Berlin Heidelberg.
- [12] Luenberger, David G. 1998. *Investment Science*. Oxford University Press.
- [13] McDonald, Robert L. 2006. *Derivatives Markets, 2nd Edition*. Addison-Wesley.
- [14] <http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>

Lampiran 1

Lampiran ini akan memberikan elemen-elemen dari vektor turunan pertama

$$w(p^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial a} \\ \frac{\partial L}{\partial b} \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} \end{pmatrix}$$

dan elemen-elemen dari matriks turunan kedua

$$H(p^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$G = \frac{2 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{2 \left(\frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2b\Delta t})}{b} \\ + \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b},$$

dan

$$Q^i = r_{i+1} - r_i e^{-a\Delta t} - \frac{u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{a-b} - \kappa_{i+1} + \kappa_i e^{-a\Delta t},$$

dengan κ_i seperti yang diberikan pada persamaan (3.4.3). Maka elemen pertama dari vektor turunan pertama w adalah

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial a} = -\frac{n G_a}{2 G} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_a^i}{G} - \frac{2(Q^i)^2 G_a}{G^2} \right),$$

dengan

$$G_a = \frac{2 \left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) e^{-2a\Delta t} \Delta t}{a} \\ - \frac{2 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} - \frac{4\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b} \\ + \frac{8 \left(\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} + \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{a+b} \\ - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2},$$

dan

$$Q_a^i = r_i e^{-a\Delta t} \Delta t - \frac{u_i e^{-a\Delta t} \Delta t}{a-b} + \frac{u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^2} - \kappa_i e^{-a\Delta t} \Delta t.$$

Elemen kedua dari vektor turunan pertama w adalah

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial b} = -\frac{n G_b}{2 G} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_b^i}{G} - \frac{2(Q^i)^2 G_b}{G^2} \right),$$

dengan

$$G_b = \frac{2 \left(\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b} + \frac{4\sigma_2^2 e^{-2b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2 b}$$

$$- \frac{2\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^2 b^2} + \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b}$$

$$+ \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{a+b} - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2},$$

dan

$$Q_b^i = \frac{u_i e^{-b\Delta t} \Delta t}{a-b} - \frac{u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^2}.$$

Elemen ketiga dari vektor turunan pertama w adalah

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \sigma_1} = -\frac{n G_{\sigma_1}}{2 G} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_1}}{G^2} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_1} = \frac{2\left(2\sigma_1 - \frac{2\rho\sigma_2}{a-b}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{8\rho\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)}.$$

Elemen keempat dari vektor turunan pertama w adalah

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \sigma_2} = -\frac{n}{2} \frac{G_{\sigma_2}}{G} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_2}}{G^2} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_2} = \frac{2\left(\frac{2\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1}{a-b}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4\sigma_2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^2 b} \\ + \frac{8\left(\frac{\rho\sigma_1}{a-b} - \frac{2\sigma_2}{(a-b)^2}\right)(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b}.$$

Elemen kelima dari vektor turunan pertama w adalah

$$\frac{\partial L(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)}{\partial \rho} = -\frac{n}{2} \frac{G_{\rho}}{G} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\rho}}{G^2} \right),$$

dengan

$$G_{\rho} = -\frac{4\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)a} + \frac{8\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)}.$$

Berikut ini akan diberikan elemen-elemen dari matriks turunan kedua. Pertama-tama, untuk elemen pada baris dan kolom pertama yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_a^2}{G^2} - \frac{G_{aa}}{G} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4(Q_a^i)^2 + 4Q^i Q_{aa}^i}{G} - \frac{8Q^i Q_a^i G_a + 2(Q^i)^2 G_{aa}}{G^2} + \frac{4(Q^i)^2 G_a^2}{G^3} \right),$$

dengan

$$\begin{aligned} G_{aa} = & \frac{2 \left(\frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} - \frac{4\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{8 \left(-\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} + \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) e^{-2a\Delta t} \Delta t}{a} \\ & - \frac{4 \left(-\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} + \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} - \frac{8 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) e^{-2a\Delta t} \Delta t^2}{a} \\ & - \frac{8 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) e^{-2a\Delta t} \Delta t}{a^2} + \frac{4 \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a^3} \\ & + \frac{12\sigma_2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^4 b} + \frac{8 \left(-\frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} + \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} \\ & + \frac{16 \left(-\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} + \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{a+b} - \frac{16 \left(-\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2} \\ & - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t^2}{a+b} - \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a+b)^2} \\ & + \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^3}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Q_{aa}^i = & -r_i e^{-a\Delta t} \Delta t^2 + \frac{u_i e^{-a\Delta t} \Delta t^2}{a-b} + \frac{2u_i e^{-a\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2} - \frac{2u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^3} \\ & + \kappa_i e^{-a\Delta t} \Delta t^2. \end{aligned}$$

Elemen pada baris pertama dan kolom kedua adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_a G_b}{G^2} - \frac{G_{ab}}{G} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q_a^i Q_b^i + 4Q^i Q_{ab}^i}{G} - \frac{4Q^i Q_b^i G_a + 4Q^i Q_a^i G_b + 2(Q^i)^2 G_{ab} + 4(Q^i)^2 G_a G_b}{G^2} + \frac{4(Q^i)^2 G_a G_b}{G^3} \right),$$

dengan

$$\begin{aligned} G_{ab} = & \frac{2 \left(-\frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} + \frac{4\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4 \left(\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) e^{-2a\Delta t} \Delta t}{a} \\ & - \frac{2 \left(\frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} - \frac{12\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^4 b} - \frac{8\sigma_2^2 e^{-2b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^3 b} \\ & + \frac{4\sigma_2^2 (1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b^2} + \frac{8 \left(\frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} \\ & - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t^2}{a+b} - \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a+b)^2} \\ & + \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^3}, \end{aligned}$$

dan

$$Q_{ab}^i = -\frac{u_i e^{-b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2} - \frac{u_i e^{-a\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2} + \frac{2u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^3}.$$

Elemen pada baris kedua dan kolom pertama akan sama dengan elemen pada baris pertama kolom kedua, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} = \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b}.$$

Elemen pada baris pertama dan kolom ketiga adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_1} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_a G_{\sigma_1}}{G^2} - \frac{G_{a\sigma_1}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_a^i G_{\sigma_1} + 2(Q^i)^2 G_{a\sigma_1}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_a G_{\sigma_1}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{a\sigma_1} = \frac{4\rho\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)^2 a} + \frac{4\left(2\sigma_1 - \frac{2\rho\sigma_2}{a-b}\right)e^{-2a\Delta t}\Delta t}{a} - \frac{2\left(2\sigma_1 - \frac{2\rho\sigma_2}{a-b}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} \\ - \frac{8\rho\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)^2(a+b)} + \frac{8\rho\sigma_1 e^{-(a+b)\Delta t}\Delta t}{(a-b)(a+b)} - \frac{8\rho\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)^2}.$$

Elemen pada baris ketiga dan kolom pertama akan sama dengan elemen pada baris pertama dan kolom ketiga, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial a} = \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_1}.$$

Elemen pada baris pertama dan kolom keempat adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_a G_{\sigma_2}}{G^2} - \frac{G_{a\sigma_2}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_a^i G_{\sigma_2} + 2(Q^i)^2 G_{a\sigma_2}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_a G_{\sigma_2}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{a\sigma_2} = \frac{2\left(\frac{2\rho\sigma_1}{(a-b)^2} - \frac{4\sigma_2}{(a-b)^3}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{4\left(\frac{2\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1}{a-b}\right)e^{-2a\Delta t}\Delta t}{a} \\ - \frac{2\left(\frac{2\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\rho\sigma_1}{a-b}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a^2} - \frac{8\sigma_2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b} \\ + \frac{8\left(\frac{4\sigma_2}{(a-b)^3} - \frac{\rho\sigma_1}{(a-b)^2}\right)(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} + \frac{8\left(\frac{\rho\sigma_1}{a-b} - \frac{2\sigma_2}{(a-b)^2}\right)e^{-(a+b)\Delta t}\Delta t}{a+b}$$

$$-\frac{8\left(\frac{\rho\sigma_1}{a-b} - \frac{2\sigma_2}{(a-b)^2}\right)(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2}.$$

Elemen pada baris keempat dan kolom pertama akan sama dengan elemen pada baris pertama dan kolom keempat, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial a} = \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \sigma_2}.$$

Elemen pada baris pertama dan kolom kelima adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \rho} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_a G_\rho}{G^2} - \frac{G_{a\rho}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_a^i G_\rho + 2(Q^i)^2 G_{a\rho}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_a G_\rho}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{a\rho} = \frac{4\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)^2 a} - \frac{8\sigma_1\sigma_2 e^{-2a\Delta t} \Delta t}{(a-b)a} + \frac{4\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)a^2} \\ - \frac{8\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)^2(a+b)} + \frac{8\sigma_1\sigma_2 e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a-b)(a+b)} - \frac{8\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)^2}.$$

Elemen pada baris dan kolom kedua adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b^2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_b^2}{G^2} - \frac{G_{bb}}{G} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4(Q_b^i)^2 + 4Q^i Q_{bb}^i}{G} - \frac{8Q^i Q_b^i G_b + 2(Q^i)^2 G_{bb}}{G^2} + \frac{4(Q^i)^2 G_b^2}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{bb} = \frac{2\left(\frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} - \frac{4\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^3}\right)(1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{12\sigma_2^2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^4 b} + \frac{16\sigma_2^2 e^{-2b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^3 b} \\ - \frac{8\sigma_2^2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b^2} - \frac{8\sigma_2^2 e^{-2b\Delta t} \Delta t^2}{(a-b)^2 b} - \frac{8\sigma_2^2 e^{-2b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2 b^2} + \frac{4\sigma_2^2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^2 b^3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8 \left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{6\sigma_2^2}{(a-b)^4} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b} + \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{a+b} \\
& + \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{(a-b)^2} - \frac{2\sigma_2^2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2} - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t^2}{a+b} \\
& - \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a+b)^2} + \frac{16 \left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{a-b} - \frac{\sigma_2^2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^3},
\end{aligned}$$

dan

$$Q_{bb}^i = -\frac{u_i e^{-b\Delta t} \Delta t^2}{a-b} + \frac{2u_i e^{-b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2} - \frac{2u_i (e^{-b\Delta t} - e^{-a\Delta t})}{(a-b)^3}.$$

Elemen pada baris kedua dan kolom ketiga adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_1} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_b G_{\sigma_1}}{G^2} - \frac{G_{b\sigma_1}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_b^i G_{\sigma_1} + 2(Q^i)^2 G_{b\sigma_1}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_b G_{\sigma_1}}{G^3} \right),$$

dengan

$$\begin{aligned}
G_{b\sigma_1} &= -\frac{4\rho\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)^2 a} + \frac{8\rho\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)^2(a+b)} + \frac{8\rho\sigma_2 e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a-b)(a+b)} \\
&+ \frac{8\rho\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)^2}.
\end{aligned}$$

Elemen pada baris ketiga dan kolom kedua akan sama dengan elemen pada baris kedua dan kolom ketiga, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial b} = \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_1}.$$

Elemen pada baris kedua dan kolom keempat adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_b G_{\sigma_2}}{G^2} - \frac{G_{b\sigma_2}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_b^i G_{\sigma_2} + 2(Q^i)^2 G_{b\sigma_2}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_b G_{\sigma_2}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{b\sigma_2} = \frac{2 \left(\frac{4\sigma_2}{(a-b)^3} - \frac{2\rho\sigma_1}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-2a\Delta t})}{a} + \frac{8\sigma_2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^3 b} + \frac{8\sigma_2 e^{-2b\Delta t} \Delta t}{(a-b)^2 b}$$

$$- \frac{4\sigma_2(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^2 b^2} + \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1}{(a-b)^2} - \frac{4\sigma_2}{(a-b)^3} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{a+b}$$

$$+ \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1}{(a-b)} - \frac{2\sigma_2}{(a-b)^2} \right) e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{a+b} - \frac{8 \left(\frac{\rho\sigma_1}{a-b} - \frac{2\sigma_2}{(a-b)^2} \right) (1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a+b)^2}.$$

Elemen pada baris keempat dan kolom kedua akan sama dengan elemen pada baris kedua dan kolom keempat, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial b} = \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \sigma_2}.$$

Elemen pada baris kedua dan kolom kelima adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \rho} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_b G_{\rho}}{G^2} - \frac{G_{b\rho}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4Q^i Q_b^i G_{\rho} + 2(Q^i)^2 G_{b\rho}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_b G_{\rho}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{b\rho} = -\frac{4\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)^2 a} + \frac{8\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)^2(a+b)} + \frac{8\sigma_1\sigma_2 e^{-(a+b)\Delta t} \Delta t}{(a-b)(a+b)}$$

$$- \frac{8\sigma_1\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)^2}.$$

Elemen pada baris kelima dan kolom kedua akan sama dengan elemen pada baris kedua dan kolom kelima, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial b} = \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial \rho}.$$

Elemen pada baris dan kolom ketiga adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1^2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_{\sigma_1}^2}{G^2} - \frac{G_{\sigma_1 \sigma_1}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_1 \sigma_1}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_{\sigma_1}^2}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_1 \sigma_1} = \frac{4(1 - e^{-2a\Delta t})}{a}.$$

Elemen pada baris ketiga dan kolom keempat adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_{\sigma_1} G_{\sigma_2}}{G^2} - \frac{G_{\sigma_1 \sigma_2}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_1 \sigma_2}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_{\sigma_1} G_{\sigma_2}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{8\rho(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)} - \frac{4\rho(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)a}.$$

Elemen pada baris keempat dan kolom ketiga akan sama dengan elemen pada baris ketiga dan kolom keempat, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}.$$

Elemen pada baris ketiga dan kolom kelima adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \rho} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_{\sigma_1} G_{\rho}}{G^2} - \frac{G_{\sigma_1 \rho}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_1 \rho}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_{\sigma_1} G_{\rho}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_1 \rho} = \frac{8\sigma_2(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)} - \frac{4\sigma_2(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)a}.$$

Elemen pada baris kelima dan kolom ketiga akan sama dengan elemen pada baris ketiga dan kolom kelima, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \rho}.$$

Elemen pada baris dan kolom keempat adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2^2} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_{\sigma_2}^2}{G^2} - \frac{G_{\sigma_2 \sigma_2}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_2 \sigma_2}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_{\sigma_2}^2}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_2 \sigma_2} = \frac{4(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)^2 a} + \frac{4(1 - e^{-2b\Delta t})}{(a-b)^2 b} - \frac{16(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)^2 (a+b)}.$$

Elemen pada baris keempat dan kolom kelima adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_2 \partial \rho} = \frac{n}{2} \left(\frac{G_{\sigma_2} G_{\rho}}{G^2} - \frac{G_{\sigma_2 \rho}}{G} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2(Q^i)^2 G_{\sigma_2 \rho}}{G^2} - \frac{4(Q^i)^2 G_{\sigma_2} G_{\rho}}{G^3} \right),$$

dengan

$$G_{\sigma_1\rho} = \frac{8\sigma_1(1 - e^{-(a+b)\Delta t})}{(a-b)(a+b)} - \frac{4\sigma_1(1 - e^{-2a\Delta t})}{(a-b)a}.$$

Elemen pada baris kelima dan kolom ketiga akan sama dengan elemen pada baris ketiga dan kolom kelima, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial \sigma_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_1 \partial \rho}.$$

Elemen pada baris dan kolom kelima adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} = \frac{n G_\rho^2}{2 G} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4(Q^i)^2 G_\rho^2}{G^3} \right).$$

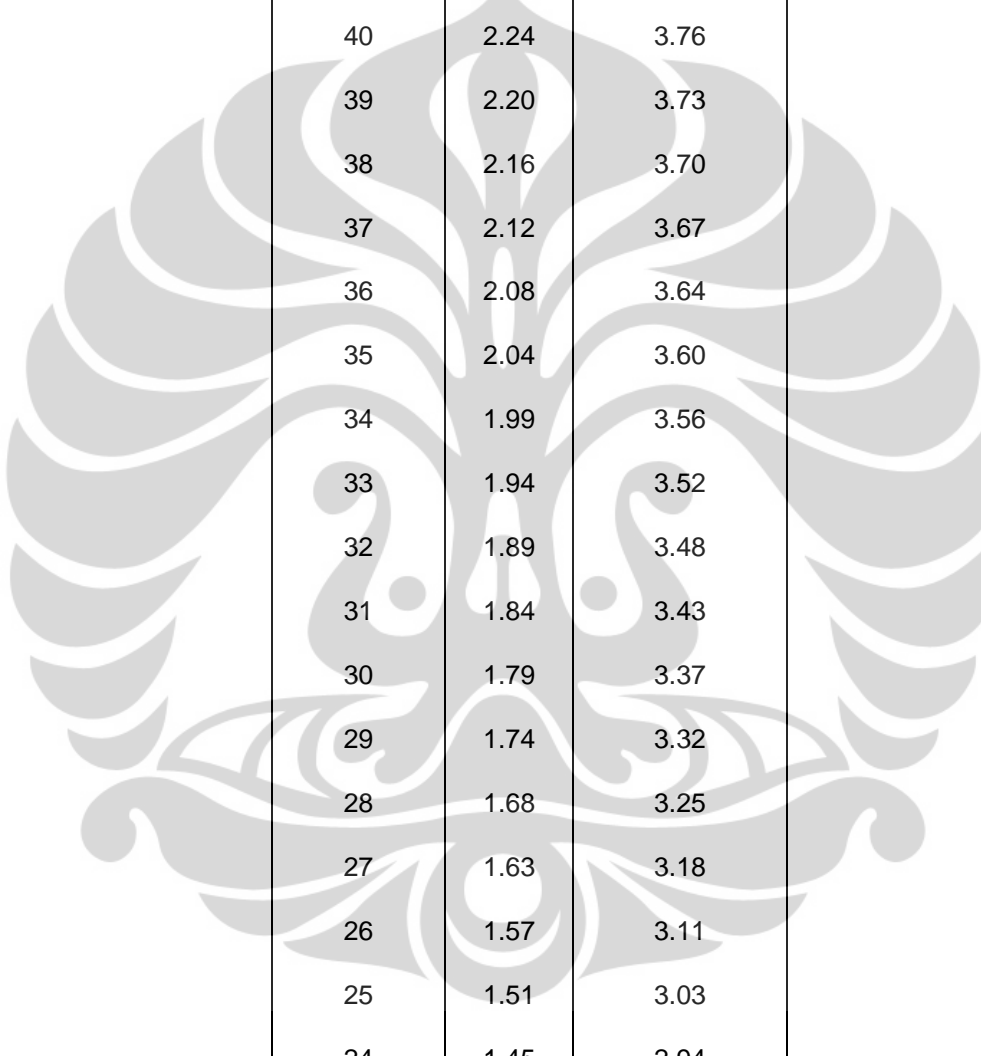
LAMPIRAN 2

Tabel-Tabel Data

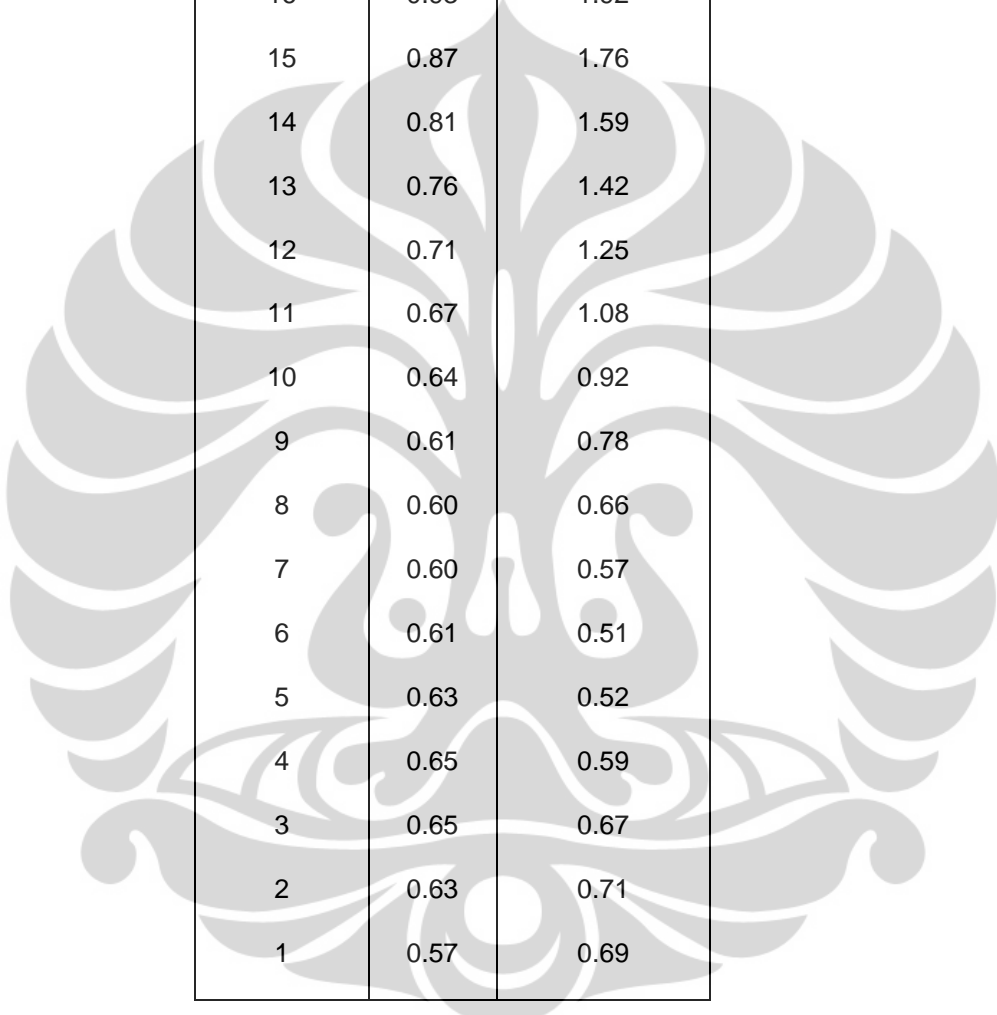
Tabel 3

Data *Yield Curve* UK Government Bonds 1 Juni 2009

Jatuh Tempo (Bulan)	<i>Spot</i> <i>Curve</i>	<i>Instantaneous</i> <i>Forward</i> <i>Curve</i>
60	2.82	4.16
59	2.79	4.14
58	2.77	4.12
57	2.75	4.10
56	2.72	4.08
55	2.70	4.06
54	2.67	4.04
53	2.65	4.02
52	2.62	4.00
51	2.59	3.99
50	2.57	3.97
49	2.54	3.95
48	2.51	3.93
47	2.48	3.91
46	2.45	3.89



45	2.42	3.87
44	2.38	3.85
43	2.35	3.83
42	2.31	3.80
41	2.28	3.78
40	2.24	3.76
39	2.20	3.73
38	2.16	3.70
37	2.12	3.67
36	2.08	3.64
35	2.04	3.60
34	1.99	3.56
33	1.94	3.52
32	1.89	3.48
31	1.84	3.43
30	1.79	3.37
29	1.74	3.32
28	1.68	3.25
27	1.63	3.18
26	1.57	3.11
25	1.51	3.03
24	1.45	2.94
23	1.38	2.84
22	1.32	2.74
21	1.26	2.62



20	1.19	2.50
19	1.12	2.37
18	1.06	2.23
17	0.99	2.08
16	0.93	1.92
15	0.87	1.76
14	0.81	1.59
13	0.76	1.42
12	0.71	1.25
11	0.67	1.08
10	0.64	0.92
9	0.61	0.78
8	0.60	0.66
7	0.60	0.57
6	0.61	0.51
5	0.63	0.52
4	0.65	0.59
3	0.65	0.67
2	0.63	0.71
1	0.57	0.69

Tabel 4

Data *Spot Rate* dan *Instantaneous Forward Rate* Harian

UK Government Bonds dengan Masa Jatuh Tempo 5 Tahun

Tanggal	<i>Spot Rate</i>	<i>Instantaneous Forward Rate</i>	Tanggal	<i>Spot Rate</i>	<i>Instantaneous Forward Rate</i>
02 Jan 02	5.01	5.16	18 Feb 02	4.92	4.95
03 Jan 02	4.93	5.12	19 Feb 02	4.91	4.98
04 Jan 02	4.99	5.13	20 Feb 02	4.91	5.01
07 Jan 02	4.93	4.99	21 Feb 02	4.93	5.05
08 Jan 02	4.93	4.98	22 Feb 02	4.89	5.00
09 Jan 02	5.00	5.00	25 Feb 02	4.92	5.02
10 Jan 02	4.94	4.95	26 Feb 02	4.94	5.07
11 Jan 02	4.95	4.93	27 Feb 02	4.95	5.05
14 Jan 02	4.88	4.89	28 Feb 02	4.94	5.06
15 Jan 02	4.89	4.88	01 Mar 02	5.01	5.11
16 Jan 02	4.84	4.85	04 Mar 02	5.03	5.10
17 Jan 02	4.83	4.88	05 Mar 02	5.09	5.17
18 Jan 02	4.84	4.93	06 Mar 02	5.11	5.24
21 Jan 02	4.78	4.89	07 Mar 02	5.19	5.28
22 Jan 02	4.83	4.93	08 Mar 02	5.20	5.26
23 Jan 02	4.78	4.92	11 Mar 02	5.18	5.24
24 Jan 02	4.86	4.99	12 Mar 02	5.18	5.26
25 Jan 02	4.98	5.06	13 Mar 02	5.20	5.30

28 Jan 02	4.97	5.05	14 Mar 02	5.23	5.35
29 Jan 02	4.95	5.02	15 Mar 02	5.23	5.32
30 Jan 02	4.92	4.96	18 Mar 02	5.21	5.31
31 Jan 02	4.90	4.90	19 Mar 02	5.21	5.32
01 Feb 02	4.89	4.89	20 Mar 02	5.24	5.36
04 Feb 02	4.84	4.85	21 Mar 02	5.29	5.37
05 Feb 02	4.80	4.82	22 Mar 02	5.31	5.38
06 Feb 02	4.82	4.87	25 Mar 02	5.33	5.40
07 Feb 02	4.94	5.01	26 Mar 02	5.31	5.37
08 Feb 02	4.91	5.00	27 Mar 02	5.25	5.30
11 Feb 02	4.91	5.01	28 Mar 02	5.30	5.37
12 Feb 02	5.03	5.06	02 Apr 02	5.31	5.37
13 Feb 02	5.01	5.06	03 Apr 02	5.25	5.31
14 Feb 02	4.98	5.04	04 Apr 02	5.20	5.26
15 Feb 02	4.92	4.96	05 Apr 02	5.20	5.29

LAMPIRAN 3

CONTOH PROGRAM MODEL HULL-WHITE DUA FAKTOR

```

clear all

% Obtaining interest rate data (Bank of England)
tingkatbunga=xlsread('dailyrates.xls');
x=tingkatbunga(1:256*5,1);
f=tingkatbunga(1:256*5,2);
[n begin] = size(x);

% Defining functions for phi
B = inline('(1-exp(-a*(T-t)))/a', 't', 'T', 'a');
C = inline('exp(-a*(T-t))/(a*(a-b))-exp(-b*(T-t))/(b*(a-b))+1/(a*b)', 't', 'T', 'a', 'b');
phi =
inline('(s1^2)*(b^2)/2+(s2^2)*(c^2)/2+rh*s1*s2*b*c', 'b', 'c', 's1', 's2', 'rh');
alpha = inline('fh+ph', 'fh', 'ph');

% Constructing the stochastic variabel u
randn('state', sum(100*clock))
T = 5; % 5 year maturity
date % 5*256 discrete
N = 5*256; % interval
times % 1 discrete times
dt = T/N;
discretization
R = 1;
per day
W = N/R;
Dt = R*dt;

% Number of simulations
M = 100;
dZ1 = sqrt(dt)*randn(M,N);
dZ2 = sqrt(dt)*randn(M,N);

% Determining discrete points of t
t(1)=0;
for i=2:1:n+1
    t(i)=(i-1)*Dt;
end

% Initializing the stochastic variabel u
u(1) = 0;

```

```

% The Newton-Raphson method
% Initial vector (p=[a b sigma1 sigma2 rho])
p = [0.01 10^-8 0.0001 9*10^-7 0.5];

for i=1:1:25
    a=p(i,1); b=p(i,2); sigma1=p(i,3); sigma2=p(i,4); rho=p(i,5);
    % Generating data for the stochastic variable u
    for j=1:1:W-1
        % The Brownian Process
        Zinc2 = sum(dZ2(i,R*(j-1)+1:R*j));
        % Approximating the stochastic variabel u
        u(j+1) =u(j)-b*u(j)*Dt+sigma2*Zinc2;
    end

    % Calculating the alpha function and stored it in kappa
    for k=1:1:n
kappa(k)=alpha(f(k),phi(B(t(1),t(k),p(i,1)),C(t(1),t(k),p(i,1),p(i,2
)),p(i,3),p(i,3),p(i,5)));
    end

    % Calculating the sums (the M functions)
    % Initiating the sums for the first derivatives
    suma=0;
    sumb=0;
    sumsigma1=0;
    sumsigma2=0;
    sumrho=0;

    % Intitiating the sums for the second derivatives
    sumaa=0;
    sumab=0;
    sumasigma1=0;
    sumasigma2=0;
    sumarho=0;
    sumbb=0;
    sumbsigma1=0;
    sumbsigma2=0;
    sumbrho=0;
    sumsigma1sigma1=0;
    sumsigma1sigma2=0;
    sumsigma1rho=0;
    sumsigma2sigma2=0;
    sumsigma2rho=0;
    sumrhorho=0;

    for h=1:1:n-1
        rt=x(h+1); rs=x(h); alphas=kappa(h+1); alphas=kappa(h);
us=u(h);
        % Calculating the sums for the first derivative
        % First derivative w.r.t a

```

```

tempa=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-
a*Dt)+us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b)^2)+(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-
exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*sigma2^2/(a-
b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2);
suma=suma+tempa;

% First derivative w.r.t b
tempb=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-
b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)+(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(2*sigma2^2/(a-b)^3-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-
2*b*Dt)/b/(a-b)^2-sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-
b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumb=sumb+tempb;

% First derivative w.r.t sigma1
tempsigma1=(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
sumsigma1=sumsigma1+tempsigma1;

% First derivative w.r.t sigma2
tempsigma2=(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-

```

```

b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*((2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b));
sumsigma2=sumsigma2+tempsigma2;

% First derivative w.r.t rho
temprho=(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-
b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
sumrho=sumrho+temprho;

% Calculating the sums for the second derivative
% Parameters of the second derivatives with the first
derivative w.r.t a
% Second derivative w.r.t a (doAdoA)
tempaa=-2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-a*Dt)+us*Dt*exp(-
a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b)^2)^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))+4*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-
a*Dt)+us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*((-
2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(-rs*Dt^2*exp(-a*Dt)-
alphan*Dt^2*exp(-a*Dt)-us*Dt^2*exp(-a*Dt)/(a-b)-2*us*Dt*exp(-
a*Dt)/(a-b)^2+2*us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^3)-2*(rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-

```

```

b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-
exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2+(rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*((6*sigma2^2/(a-b)^4-4*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^3)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*(-2*sigma2^2/(a-
b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-2*(-
2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a^2-4*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*Dt^2*exp(-2*a*Dt)/a-4*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-
2*a*Dt)/a^2+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^3+6*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^4+2*(4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3-12*sigma2^2/(a-b)^4)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+4*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-
b)^3)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-4*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt^2*exp((-a-
b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^3);
sumaa=sumaa+tempaa;

% Second derivative w.r.t b (doAdoB)
tempab=-2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b)^2)/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-a*Dt)+us*Dt*exp(-
a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)+2*(rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-a*Dt)+us*Dt*exp(-
a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*((2*sigma2^2/(a-
b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2-2*(rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)^2+us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)^2-

```

$$\begin{aligned}
& 2*us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^3+2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan- \\
& alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a- \\
& b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(- \\
& 2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b))^2*((-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a- \\
& b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1- \\
& exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*(-us*Dt*exp(- \\
& b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)-2*(rt-rs*exp(- \\
& a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a- \\
& b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1- \\
& exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b))^3*((-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a- \\
& b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1- \\
& exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*((2*sigma2^2/(a- \\
& b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(- \\
& 2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-sigma2^2*(1-exp(- \\
& 2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2+(rt-rs*exp(- \\
& a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a- \\
& b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1- \\
& exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b))^2*((-6*sigma2^2/(a-b)^4+4*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^3)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(2*sigma2^2/(a-b)^3- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(2*sigma2^2/(a-b)^3- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2- \\
& 4*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^3+2*sigma2^2*(1-exp(- \\
& 2*b*Dt))/b^2/(a-b)^3-6*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^4+2*(- \\
& 4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3+12*sigma2^2/(a-b)^4)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a- \\
& b)^3)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a- \\
& b)^3)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt^2*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)- \\
& 4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a- \\
& b)*Dt)/(a+b)^2-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
\end{aligned}$$


```

b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^3);
sumab=sumab+tempab;

% Second derivative w.r.t sigma1 (doAdoSigma1)
tempasigma1=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-
a*Dt)+us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b)^2)*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-
rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-
exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2)*((2*sigma1-
2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b))+rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(2*rho*sigma2/(a-b)^2*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*(2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-
(2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-4*rho*sigma2/(a-
b)^2*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+4*rho*sigma2/(a-b)*Dt*exp((-a-
b)*Dt)/(a+b)-4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumasigma1=sumasigma1+tempasigma1;

% Second derivative w.r.t sigma2 (doAdoSigma2)
tempasigma2=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphas*Dt*exp(-
a*Dt)+us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b)^2)*((2*sigma2/(a-b)^2-2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-
b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-

```

```

2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-
exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*((2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b))+rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alpha*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*((-4*sigma2/(a-
b)^3+2*rho*sigma1/(a-b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*(2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-4*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1/(a-b)^2+8*sigma2/(a-b)^3)*(1-
exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumasigma2=sumasigma2+tempasigma2;

% Second derivative w.r.t rho (doAdoRho)
temparho=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alpha*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(rs*Dt*exp(-a*Dt)+alphan*Dt*exp(-
a*Dt)+us*Dt*exp(-a*Dt)/(a-b)-us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*(-
2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-
exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alpha*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((-2*sigma2^2/(a-
b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a^2-2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+rt-
rs*exp(-a*Dt)+alphan-alpha*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(2*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-exp(-2*a*Dt))/a-
4*sigma1*sigma2/(a-b)*Dt*exp(-2*a*Dt)/a+2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-
exp(-2*a*Dt))/a^2-4*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-exp((-a-

```

```

b)*Dt))/(a+b)+4*sigma1*sigma2/(a-b)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
    sumarho=sumarho+temparho;

    % Parameters of the second derivatives with the first
    derivative w.r.t b
    % Second derivative w.r.t a (doBdoA=doAdoB)
    % Second derivative w.r.t b (doBdoB)
    tempbb=-2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b)^2)^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+4*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-
alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b)^2)*((2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-
sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2)-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(us*Dt^2*exp(-b*Dt)/(a-b)-
2*us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)^2+2*us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^3)-
2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-
sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2)^2+(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(6*sigma2^2/(a-b)^4-
4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3)*(1-exp(-2*a*Dt))/a-
4*sigma2^2*Dt^2*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-4*sigma2^2*Dt*exp(-
2*b*Dt)/b^2/(a-b)^2+8*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-
b)^3+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^3/(a-b)^2-4*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b^2/(a-b)^3+6*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^4+2*(4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3-12*sigma2^2/(a-b)^4)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-

```

```

b)^3)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-
4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt^2*exp((-a-
b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^3);
sumbb=sumbb+tempbb;

% Second derivative w.r.t sigma1 (doBdoSigma1)
tempbsigma1=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-
b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-
rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-
sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+ (rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*rho*sigma2/(a-b)^2*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)^2*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+4*rho*sigma2/(a-b)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumbsigma1=sumbsigma1+tempbsigma1;

% Second derivative w.r.t sigma2 (doBdoSigma2)
tempbsigma2=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-
b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*((2*sigma2/(a-b)^2-2*rho*sigma1/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2^2/(a-b)^3-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-

```

```

2*b*Dt)/b/(a-b)^2-sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-
b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*((2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b))+rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*((4*sigma2/(a-b)^3-
2*rho*sigma1/(a-b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma2*Dt*exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2-2*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+4*sigma2*(1-
exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(2*rho*sigma1/(a-b)^2-8*sigma2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumbsigma2=sumbsigma2+tempbsigma2;

% Second derivative w.r.t rho (doBdoRho)
tempbrho=2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-us*Dt*exp(-b*Dt)/(a-b)+us*(exp(-
b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)^2)*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-2*(rt-
rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-
sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+rt-
rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+4*sigma1*sigma2/(a-b)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
sumbrho=sumbrho+tempbrho;

% Parameters of the second derivatives with the first
derivative w.r.t sigma1

```

```

% Second derivative w.r.t a (doSigma1doA=doAdoSigma1)
% Second derivative w.r.t b (doSigma1doB=doBdoSigma1)
% Second derivative w.r.t sigma1 (doSigma1doSigma1)
tempsigma1sigma1=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2+2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(1-exp(-2*a*Dt))/a;
sumsigma1sigma1=sumsigma1sigma1+tempsigma1sigma1;

% Second derivative w.r.t sigma2 (doSigma1doSigma2)
tempsigma1sigma2=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*((2*sigma2/(a-b)^2-2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-
b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+rt-rs*exp(-
a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-
b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*rho/(a-b)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*rho/(a-b)*(1-
exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
sumsigma1sigma2=sumsigma1sigma2+tempsigma1sigma2;

% Second derivative w.r.t rho (doSigma1doRho)
tempsigma1rho=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dt))/a+4*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(-
2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-
exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
sumsigma1rho=sumsigma1rho+tempsigma1rho;

% Parameters of the second derivatives with the first
derivative w.r.t sigma2
% Second derivative w.r.t a (doSigma2doA=doAdoSigma2)
% Second derivative w.r.t b (doSigma2doB=doBdoSigma2)

```

```

% Second derivative w.r.t sigma1
(doSigma2doSigma1=doSigma1Sigma2)
% Second derivative w.r.t sigma2 (doSigma2doSigma2)
tempsigma2sigma2=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b))^2+(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2*(2/(a-b)^2*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2-8/(a-b)^2*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b));
sumsigma2sigma2=sumsigma2sigma2+tempsigma2sigma2;

% Second derivative w.r.t rho (doSigma2doRho)
tempsigma2rho=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*((2*sigma2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-
a-b)*Dt))/(a+b))*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))+
(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-
a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-2*sigma1/(a-b)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma1/(a-
b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
sumsigma2rho=sumsigma2rho+tempsigma2rho;

% Parameters of the second derivatives with the first
derivative w.r.t sigma2
% Second derivative w.r.t a (doRhodoA=doAdoRho)
% Second derivative w.r.t b (doRhodoB=doBdoRho)
% Second derivative w.r.t sigma1 (doRhodoSigma1=doSigma1Rho)
% Second derivative w.r.t sigma2 (doRhodoSigma2=doSigma2Rho)
% Second derivative w.r.t rho (doRhodoRho)
temprho=-2*(rt-rs*exp(-a*Dt)+alphan-alphas*exp(-
a*Dt)+us*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b))^2/((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+2*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^3*(-2*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2;
sumrho=sumrho+temprho;
end
% Function 'eval' is not defined for values of class 'double'

```

```

v1=-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(2*(-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-
2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a^2-4*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+4*(-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2);
v2=-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(2*(2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma2^2*Dt*exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-
2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+4*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^3+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a-
b)^3)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-
2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-
4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b)^2);
v3=-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(2*(2*sigma1-2*rho*sigma2/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+8*rho*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
v4=-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(2*(2*sigma2/(a-b)^2-2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*rho*sigma1/(a-
b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));
v5=-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))*(-4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+8*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));

% Vector of the first derivatives v
v=[v1+suma;
v2+sumb;
v3+sumsigma1;
v4+sumsigma2;
v5+sumrho];

% Function 'eval' is not defined for values of class 'double'
H11=1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+4*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*exp(-2*a*Dt)/a-

```


$$4\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^3+12\sigma_2^2/(a-b)^4)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)+4*(-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2+4\sigma_2^2/(a-b)^3)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-4*(-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2+4\sigma_2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^2+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2-4\sigma_2^2/(a-b)^3)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*Dt^2*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-8*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)^2-4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2-4\sigma_2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^2+8*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^3;$$

$$H13=1/2^n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+2\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^2+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))^2*(2*(-2\sigma_2^2/(a-b)^3+2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2)*(1-\exp(-2aDt))/a+4*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*Dt*\exp(-2aDt)/a-2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a^2-4\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^3+4*(-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2+4\sigma_2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^2*(2*(2\sigma_1-2\rho\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+8\rho\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))-1/2^n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+2\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^2+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))*(4\rho\sigma_2/(a-b)^2*(1-\exp(-2aDt))/a+4*(2\sigma_1-2\rho\sigma_2/(a-b))*Dt*\exp(-2aDt)/a-2*(2\sigma_1-2\rho\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a^2-8\rho\sigma_2/(a-b)^2*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)+8\rho\sigma_2/(a-b)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-8\rho\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^2);$$

$$H14=1/2^n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+2\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^2+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))^2*(2*(-2\sigma_2^2/(a-b)^3+2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2)*(1-\exp(-2aDt))/a+4*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*Dt*\exp(-2aDt)/a-2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a^2-4\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^3+4*(-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)^2+4\sigma_2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*Dt*\exp((-a-b)Dt)/(a+b)-4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b)^2*(2*(2\sigma_2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+4\sigma_2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^2+4*(2\rho\sigma_1/(a-b)-4\sigma_2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))-1/2^n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a+2\sigma_2^2*(1-\exp(-2bDt))/b/(a-b)^2+4*(2\rho\sigma_1\sigma_2/(a-b)-2\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)Dt))/(a+b))*(2*(-4\sigma_2/(a-b)^3+2\rho\sigma_1/(a-b)^2)*(1-\exp(-2aDt))/a+4*(2\sigma_2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1/(a-b))*Dt*\exp(-2aDt)/a-2*(2\sigma_2/(a-b)^2-2\rho\sigma_1/(a-b))*(1-\exp(-2aDt))/a^2-8\sigma_2*(1-\exp(-$$

$$\begin{aligned}
& 2*b*Dt))/b/(a-b)^3+4*(-2*rho*sigma1/(a-b)^2+8*sigma2/(a-b)^3)*(1- \\
& \exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a- \\
& b)^2)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1/(a-b)-4*sigma2/(a- \\
& b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2); \\
& H15=1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(-2*sigma2^2/(a-b)^3+2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+4*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*Dt*\exp(-2*a*Dt)/a- \\
& 2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-\exp(- \\
& 2*a*Dt))/a^2-4*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^3+4*(- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2+4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2*(- \\
& 4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+8*sigma1*sigma2/(a-b)*(1- \\
& \exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-\exp(- \\
& 2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(4*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-\exp(- \\
& 2*a*Dt))/a-8*sigma1*sigma2/(a-b)*Dt*\exp(- \\
& 2*a*Dt)/a+4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a^2- \\
& 8*sigma1*sigma2/(a-b)^2*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+8*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-8*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)^2); \\
& H22=1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*sigma2^2/(a-b)^3-2*rho*sigma1*sigma2/(a- \\
& b)^2)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+4*sigma2^2*Dt*\exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2- \\
& 2*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b^2/(a-b)^2+4*sigma2^2*(1-\exp(- \\
& 2*b*Dt))/b/(a-b)^3+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a- \\
& b)^3)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)- \\
& 4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)^2)^2-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2- \\
& 2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-\exp(- \\
& 2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(2*(6*sigma2^2/(a-b)^4- \\
& 4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a- \\
& 8*sigma2^2*Dt^2*\exp(-2*b*Dt)/b/(a-b)^2-8*sigma2^2*Dt*\exp(- \\
& 2*b*Dt)/b^2/(a-b)^2+16*sigma2^2*Dt*\exp(-2*b*Dt)/b/(a- \\
& b)^3+4*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b^3/(a-b)^2-8*sigma2^2*(1-\exp(- \\
& 2*b*Dt))/b^2/(a-b)^3+12*sigma2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\
& b)^4+4*(4*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^3-12*sigma2^2/(a-b)^4)*(1-\exp((-a- \\
& b)*Dt))/(a+b)+8*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2-4*sigma2^2/(a- \\
& b)^3)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)-8*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)^2- \\
& 4*sigma2^2/(a-b)^3)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2- \\
& 4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*Dt^2*\exp((-a- \\
& b)*Dt)/(a+b)-8*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a- \\
& b)^2)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)^2+8*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)- \\
& 2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b))*(1- \\ & \exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))*(-4*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)^2*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+8*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)^2*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b)+8*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)*Dt*\exp((-a-b)*Dt)/(a+b)- \\ & 8*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H33= & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a- \\ & b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*\sigma_1-2*\rho*\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+8*\rho*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2- \\ & 2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b))*(1- \\ & \exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H34= & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a- \\ & b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*\sigma_1-2*\rho*\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+8*\rho*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))*(2*(2*\sigma_2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1/(a-b))*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+4*\sigma_2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1/(a- \\ & b)-4*\sigma_2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))- \\ & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b))*(1- \\ & \exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))*(-4*\rho/(a-b)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+8*\rho/(a-b)*(1- \\ & \exp((-a-b)*Dt))/(a+b)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H35= & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a- \\ & b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*\sigma_1-2*\rho*\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+8*\rho*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(- \\ & 4*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+8*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)*(1- \\ & \exp((-a-b)*Dt))/(a+b))-1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2- \\ & 2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(- \\ & 2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a- \\ & b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(-4*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+8*\sigma_2/(a-b)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H44= & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a- \\ & b))*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*\sigma_2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1/(a-b))*(1-\exp(- \\ & 2*a*Dt))/a+4*\sigma_2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1/(a- \\ & b)-4*\sigma_2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2- \\ & 1/2*n/(2*(\sigma_1^2+\sigma_2^2/(a-b)^2-2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b))*(1- \\ & \exp(-2*a*Dt))/a+2*\sigma_2^2*(1-\exp(-2*b*Dt))/b/(a- \\ & b)^2+4*(2*\rho*\sigma_1*\sigma_2/(a-b)-2*\sigma_2^2/(a-b)^2)*(1-\exp((-a- \\ & b)*Dt))/(a+b))*(4/(a-b)^2*(1-\exp(-2*a*Dt))/a+4*(1-\exp(- \\ & 2*b*Dt))/b/(a-b)^2-16/(a-b)^2*(1-\exp((-a-b)*Dt))/(a+b)); \end{aligned}$$

```

H45=1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(2*(2*sigma2/(a-b)^2-2*rho*sigma1/(a-b))*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+4*sigma2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*rho*sigma1/(a-
b)-4*sigma2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(-4*sigma1*sigma2/(a-
b)*(1-exp(-2*a*Dt))/a+8*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))-1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-
2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-
2*b*Dt))/b/(a-b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))*(-4*sigma1/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+8*sigma1/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b));

```

```

H55=1/2*n/(2*(sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-
b))*(1-exp(-2*a*Dt))/a+2*sigma2^2*(1-exp(-2*b*Dt))/b/(a-
b)^2+4*(2*rho*sigma1*sigma2/(a-b)-2*sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp((-a-
b)*Dt))/(a+b))^2*(-4*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp(-
2*a*Dt))/a+8*sigma1*sigma2/(a-b)*(1-exp((-a-b)*Dt))/(a+b))^2;

```

```
% Elements of the Hessian matrix
```

```

H(1,1)=H11+sumaa;
H(1,2)=H12+sumab;
H(1,3)=H13+sumasigma1;
H(1,4)=H14+sumasigma2;
H(1,5)=H15+sumarho;
H(2,1)=H(1,2);
H(2,2)=H22+sumbb;
H(2,3)=H23+sumbsigma1;
H(2,4)=H24+sumbsigma2;
H(2,5)=H25+sumbrho;
H(3,1)=H(1,3);
H(3,2)=H(2,3);
H(3,3)=H33+sumsigmalsigma1;
H(3,4)=H34+sumsigmalsigma2;
H(3,5)=H35+sumsigmalrho;
H(4,1)=H(1,4);
H(4,2)=H(2,4);
H(4,3)=H(3,4);
H(4,4)=H44+sumsigma2sigma2;
H(4,5)=H45+sumsigma2rho;
H(5,1)=H(1,5);
H(5,2)=H(2,5);
H(5,3)=H(3,5);
H(5,4)=H(4,5);
H(5,5)=H55+sumrhorho;

```

```

p(i+1,:)=(p(i,:)-inv(H)*v)';
er(i)=norm(p(i+1,:)-p(i,:),inf);

```

```

if norm(p(i+1,:)-p(i,:),inf)<10^-3
    a=p(i+1,1);
    b=p(i+1,2);
    sigma1=p(i+1,3);
    sigma2=p(i+1,4);

```

```

        rho=p(i+1,5);
        break;
    end

end

% Generating the r(t)
for o=1:1:M
    simr(o,1)=x(1);
    for l=1:1:W-1
        % The Brownian Process
        Zinc1 = sum(dZ1(o,R*(l-1)+1:R*l));
        Zinc2 = sum(dZ2(o,R*(l-1)+1:R*l));
        % Approximating the interest rate
        simr(o,l+1)=simr(o,l)*exp(-a*Dt)+kappa(l+1)-kappa(l)*exp(-
a*Dt)+u(l)*(exp(-b*Dt)-exp(-a*Dt))/(a-b)+sqrt((sigma1^2+sigma2^2/(a-
b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-exp(-2*a*Dt))/(2*a)+(sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp(-2*b*Dt))/(2*b)+2*(rho*sigma1*sigma2/(a-b)-sigma2^2/(a-
b)^2)*(1-exp(-(a+b)*Dt))/(a+b))*(rho*Zinc2+Zinc1*sqrt(1-rho^2));
    end;
end
r=mean(simr);
erb=norm(abs(x'-r)./x',inf);

% Obtaining yield curve data
xb=xlsread('spotrates.xls');
fb=xlsread('forwardrates.xls');
[nb begin]=size(xb);

% Calculatin bond price
Tb=5;
tb=(1:nb)/12;
Dtb=1/12;

% Calculatin kappa for bond pricing and the bond present value
for k=1:1:nb

kappa(k)=alpha(fb(k),phi(B(tb(1),tb(k),a),C(tb(1),tb(k),a,b),sigma1,
sigma2,rho));
    P0t(k)=exp(-xb(nb+1-k)*(tb(k))/100);
end

% Aproximating the yield curve
dZ1b = sqrt(dt)*randn(1,nb);
dZ2b = sqrt(dt)*randn(1,nb);
P0T=exp(-xb(1)*(Tb-tb(1))/100);
for o=1:1:M
    simrb(o,1)=xb(1);
    for i=1:1:nb-1
        Zinc1 = sum(dZ1(R*(i-1)+1:R*i));
        Zinc2 = sum(dZ2(R*(i-1)+1:R*i));
        if i==1
            ub(i)=sigma2*Zinc2;

```

```

end
ub(i+1)=ub(i)-b*ub(i)*Dtb+sigma2*Zinc2;
simrb(o,i+1)=simrb(o,i)*exp(-a*Dtb)+kappa(i+1)-
kappa(i)*exp(-a*Dtb)+ub(i)*(exp(-b*Dtb)-exp(-a*Dtb))/(a-
b)+sqrt((sigma1^2+sigma2^2/(a-b)^2-2*rho*sigma1*sigma2/(a-b))*(1-
exp(-2*a*Dtb))/(2*a)+(sigma2^2/(a-b)^2)*(1-exp(-
2*b*Dtb))/(2*b)+2*(rho*sigma1*sigma2/(a-b)-sigma2^2/(a-b)^2)*(1-
exp(-(a+b)*Dtb))/(a+b))*(rho*Zinc2+Zinc1*sqrt(1-rho^2));
end
end
rb=mean(simrb);

for i=1:1:nb
% defining functions for A(t,T)
y1=exp(-(a+b)*Tb)*(exp((a+b)*tb(i))-1)/((a+b)*(a-b))-exp(-
2*a*Tb)*(exp(2*a*tb(i))-1)/(2*a*(a-b));
y2=(y1+C(tb(i),Tb,a,b)-C(0,Tb,a,b)+(1/2)*B(tb(i),Tb,a)^2-
(1/2)*B(0,Tb,a)^2+tb(i)/a-(exp(-a*(Tb-tb(i)))-exp(-
a*Tb))/a^2)/(a*b);
y3=-(exp(-(a+b)*tb(i))-1)/((a+b)*(a-b))+exp(-2*a*tb(i))-
1)/(2*a*(a-b));
y4=(y3-C(0,tb(i),a,b)-(1/2)*B(0,tb(i),a)^2+tb(i)/a+(exp(-
a*tb(i))-1)/a^2)/(a*b);
y5=((1/2)*C(tb(i),Tb,a,b)^2-(1/2)*C(0,Tb,a,b)^2+y2)/b;
y6=(y4-(1/2)*C(0,tb(i),a,b)^2)/b;

nu=sigma1^2*(1-exp(-2*a*tb(i)))*B(tb(i),Tb,a)^2/(4*a)-
rho*sigma1*sigma2*(B(0,tb(i),a)*C(0,tb(i),a,b)*B(tb(i),Tb,a)+y4-y2)-
(sigma2^2/2)*(C(0,tb(i),a,b)^2*B(tb(i),Tb,a)+y6-y5);

% Future cash flow
logA(i)=log(P0T/P0t(i))+B(tb(i),Tb,a)*fb(i)/100-nu;

% Bond price without inserting the function A(t,T)
Pr(i)=exp(logA(i)-B(tb(i),Tb,a)*rb(i)/100-
C(tb(i),Tb,a,b)*ub(i)/100);
Px(i)=exp(logA(i)-B(tb(i),Tb,a)*xb(i)/100-
C(tb(i),Tb,a,b)*ub(i)/100);
end

plot([0:Dt:T-Dt], x, 'b',[0:Dt:T-Dt], r, 'r')
legend('pasar','hasil aproksimasi')

% Displaying the estimated parameters
fprintf('-----\n');
fprintf('\t\t Hasil estimasi paramater\t\t\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('a \t\t= %f \n', a);
fprintf('b \t\t= %2.12f \n', b);
fprintf('sigma1 \t= %f \n', sigma1);
fprintf('sigma2 \t= %2.12f \n', sigma2);

```



```

fprintf('rho \t= %f \n', rho);
fprintf('-----\n');

% Displaying interest rate approximation
fprintf('-----\n');
fprintf('\t\t Aprokisasi tingkat bunga harian\t\t\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('Pasar \t\t\t Aproksimasi \t Relative Error\n');

for i=1:1:10
    fprintf('%f \t\t %f \t\t %f\n', x(i), r(i), abs(x(i)-
r(i))/x(i));
end

for i=ceil(n/2):1:ceil(n/2)+5
    fprintf('%f \t\t %f \t\t %f\n', x(i), r(i), abs(x(i)-
r(i))/x(i));
end

for i=n-10:1:n
    fprintf('%f \t\t %f \t\t %f\n', x(i), r(i), abs(x(i)-
r(i))/x(i));
end

fprintf('-----\n');
fprintf('Relative Error Terbesar = %f\n', erb);

```