ESTIMASI PARAMETER *AUTOREGRESSIVE* DENGAN FUNGSI MARGINAL LIKELIHOOD

ILMIYATI SARI

0305010262

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

ESTIMASI PARAMETER *AUTOREGRESSIVE* DENGAN

FUNGSI MARGINAL LIKELIHOOD

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

ILMIYATI SARI

0305010262

DEPOK

2009

SKRIPSI : ESTIMASI PARAMETER *AUTOREGRESSIVE* DENGAN FUNGSI MARGINAL LIKELIHOOD

NAMA : ILMIYATI SATI

NPM : 0305010262

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 9 NOVEMBER 2009

Dra. IDA FITHRIANI, M. Si.	FEVI NOVKANIZA, S. Si., M. Si.
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana: 21 Desember 2009

Penguji I : Dra. Ida Fithriani, M. Si.

Penguji II : Dr. Yudi Satria, M. T.

Penguji III : Dra. Saskya Mary, M. Si.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil ‘aalamiin. Segala puji dan syukur hanya kepada ALLAH SWT, Yang Maha Pengasih, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam penulis sampaikan kepada suri teladan kita, manusia biasa dengan akhlak luar biasa, Rasulullah SAW. Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan, dan doa yang tulus dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Ida Fithriani selaku Pembimbing 1 penulis yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, saran, pengarahan dan kemudahan lainnya dengan sangat sabar sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Mba Fevi Novkaniza selaku Pembimbing 2 yang juga telah meluangkan waktu disela kesibukkan . Terima kasih banyak atas saran dan pengarahan yang mba berikan selama penulisan skripsi ini.
3. Orang tua penulis yang terus memberikan semangat, pengorbanan, doa, dan banyak dukungan lainnya selama ini.
4. Kakak dan adik penulis yang telah banyak memberikan dukungan, bantuan, dan doanya.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

5. Keponakan penulis Dhea dan si kembar ”Sifa, Sisi, dan Icha” dengan celotehannya bisa menghiburku di sela-sela kepenatan.
6. Bapak Suryadi MT dan Ibu Siti Nurrohmah pembimbing akademis yang telah memberikan nasihat dan bimbingannya.
7. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis peroleh selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
8. Seluruh karyawan Departemen Matematika yang telah banyak memberikan bantuannya.
9. Ka Avi, ka Intan, Desti, Nurma, Rani, Raisa, akmal, Miranti, Yuni, Teman-teman seperjuangan penulis yang sama-sama berjuang untuk menyelesaikan skripsi pada semester ini.
10. Dyant dan Fia, tetap semangat ya... Allah pasti punya rencana yang indah untuk kalian…
11. Aya dan karlina, semoga cepat menyusul penulis dan yuni yach.....!!!!
12. Teman-teman angkatan 2005 lainnya yang sama-sama berjuang untuk menyelesaikan skripsnya secepatnya.
13. Teman-teman angkatan 2004, 2006, 2007, dan 2008.
14. ”Kaka-ku” yang selalu memberikan support yang sangat bermanfaat bagi penulis dan kesediaannya dalam mendengarkan keluh kesah penulis.
15. Semua pihak yang telah membantu penulis dengan dukungan dan doanya.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

Semoga skripsi ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan yang baik orang banyak.

Depok, 23 November 2009

Penulis

Ilmiyati Sari

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

ABSTRAK

Estimasi parameter model *autoregressive* dapat diperoleh dengan beberapa metode, salah satunya adalah metode Marginal Likelihood. Untuk memperoleh fungsi marginal likelihood, proses *autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *structural model* (Fraser, 1968). Dalam *structural model*, data runtun waktu stasioner dinyatakan sebagai kombinasi linear dari *mean* proses dan variabel error yang tidak terobservasi. Dengan mengganggap variabel error sebagai proses *circular* dan *noncircular,* diperoleh sifat distribusi dari variabel error yang tidak bergantung pada parameter populasi, sehingga data runtun waktu mengikuti model *Location-scale*. Melalui model *Location*-Scale dapat dibuktikan bahwa vektor data runtun waktu yang distandarisasi merupakan *ancillary statistic*. *Ancillary statistic* ini menjadi dasar untuk membangun fungsi marginal likelihood karena distribusi dari *ancillary statistic* bebas dari parameter populasi.

Kata kunci : estimasi parameter *autoregressive*, fungsi marginal likelihood, *struktural model*, proses *circular* dan *noncircular*, *ancillary statistic*.

x+105 hlm.;gbr,; lamp.

Bibliografi: 10 (1955-2005)

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

DAFTAR ISI

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

DAFTAR GAMBAR

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Dalam berbagai penelitian sering kali diperoleh data yang berhubungan dengan waktu, atau yang lebih dikenal dengan istilah runtun waktu. Runtun waktu adalah himpunan barisan pengamatan yang terurut dengan waktu, dengan jarak interval waktu yang sama (Box – Jenkins, 1976). Jika barisan pengamatan tersebut dicatat dalam waktu yang kontinu maka disebut runtun waktu kontinu. Sedangkan jika barisan pengamatan dicatat dalam waktu diskrit maka disebut runtun waktu diskrit.

Pada tahun 1970, Box & Jenkins memperkenalkan model runtun waktu yang biasa digunakan untuk memodelkan runtun waktu yaitu *Autoregressive Moving Avarage* (ARMA (p,q)), dimana p dan q berturut-turut adalah orde dari *autoregressive* dan *moving avarage*. Suatu proses runtun waktu agar dapat dimodelkan dengan model ARMA, harus memenuhi sifat stasioner, yaitu fungsi mean dan variansinya konstan terhadap waktu, dan fungsi autokovariansi antara dua observasi pada dua titik waktu yang berbeda hanya bergantung pada selisih antara dua titik waktu tersebut. Salah satu bentuk khusus dari model ARMA adalah *autoregressive* yang merupakan model ARMA dengan bagian moving avarage berorde 0. Model

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

autoregressive berdasarkan namanya adalah regresi terhadap dirinya sendiri (Jonathan D. Cryer, 1986).

Dalam suatu model *autoregressive* perlu dilakukan penaksiran parameter yang terdapat dalam model *autoregressive* tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model *autoregressive* adalah metode Marginal Likelihood. Untuk memperoleh fungsi marginal likelihood dalam proses *autoregressive*, maka proses *autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *struktural model* (Fraser, 1968).

Berbeda dengan fungsi likelihood, fungsi marginal likelihood tidak lagi mengandung parameter populasi yang pada umumnya tidak diketahui. Untuk membangun fungsi marginal likelihood, diperlukan *ancillary statistic* yang distribusinya tidak bergantung pada parameter populasi.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Perumusan masalah tugas akhir ini adalah:

1) Bagaimana mencari fungsi marginal likelihood untuk proses *autoregressive*.
2) Bagaimana menaksir parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood.

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

1) Mencari fungsi marginal likelihood untuk proses *autoregressive*.
2) Mencari taksiran untuk parameter *autoregressive* menggunakan fungsi marginal likelihood.

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Dalam mencari taksiran parameter dalam proses *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood perlu diadakan pembatasan masalah:

1) Penaksiran parameter untuk proses *autoregressive* orde 1.
2) Error berdistribusi normal.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan tugas akhir yang merupakan hasil studi pustaka ini, dibagi menjadi lima bab, yaitu:

Bab I Membahas tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Membahas tentang dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan skripsi, yaitu konsep dasar matriks, konsep dasar runtun waktu, proses *autoregressive*, proses *circular*, proses *noncircular*, distribusi marginal, *sufficient* dan *ancillary statistic*, dan marginal likelihood.

Bab III Membahas bagaimana mendapatkan fungsi marginal likelihood untuk proses *autoregressive*, dan bagaimana menaksir parameter *autoregressive* dari fungsi marginal likelihood.

Bab IV Aplikasi penaksiran parameter model untuk proses *autoregressive* orde satu.

Bab V Kesimpulan dan Saran untuk tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini akan membahas landasan teori yang menjadi dasar estimasi parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood, yaitu konsep dasar matriks, distribusi marginal, *sufficient* dan *ancillary statistic* serta fungsi marginal likelihood. Selain itu, untuk lebih mengenal proses *autoregressive*, diberikan pula konsep dasar runtun waktu dan proses *autoregressive* yang telah dikenal secara umum.

2.1 KONSEP DASAR MATRIKS

Dalam subbab ini diberikan beberapa teorema dalam operasi dasar matriks yang akan digunakan dalam tugas akhir ini yang diambil dari buku Howard Anton, 1994.

Teorema 2.1.1

Misalkan **A** adalah matriks berukuran N×M dan **B** adalah matriks berukuran P×Q, dimana N,M, P dan Q adalah bilangan asli , maka

a) $((\mathbf{A})')' = \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ dan $(\mathbf{A}-\mathbf{B})' = \mathbf{A}' - \mathbf{B}'$, dimana N=P dan M=Q

c) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, dimana k adalah sembarang skalar

d) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$, dimana M=P

Selanjutnya diberikan definisi dari minor dan kofaktor yang akan digunakan dalam mencari deteminan suatu matriks $\mathbf{A}_{N\times N}$ dan beberapa teorema mengenai determinan suatu matriks.

Definisi 2.1.2 "Definisi Minor dan kofaktor"

Jika **A** adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang bersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari **A**. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan C_{ij} dan disebut kofaktor dari entri a_{ij}.

Teorema 2.1.3

Determinan dari matriks $\mathbf{A}_{N\times N}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam baris (atau kolom) dengan kofaktor mereka dan menambahkan hasil perkaliannya, untuk setiap 1 ≤ i ≤ N dan 1 ≤ j ≤ N,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{Nj}C_{Nj}$$

(perluasan kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{iN}C_{iN}$$

(perluasan kofaktor sepanjang baris ke-i)

Teorema 2.1.4

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks bujur sangkar.

a) Jika $\mathbf{A}$ mempunyai baris atau kolom yang nol, maka det ($\mathbf{A}$)=0.

b) Det ($\mathbf{A}$) = det ($\mathbf{A}$')

Teorema 2.1.5

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks segitiga berukuran N×N (matriks segitiga atas, bawah atau diagonal), maka det($\mathbf{A}$) adalah perkalian entri-entri diagonalnya, yaitu det ($\mathbf{A}$)= $a_{11}a_{22}...a_{N\times N}$

Teorema 2.1.6

Misalkan $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks yang berukuran N×N dan k adalah skalar, maka

a) Det (k$\mathbf{A}$)= k^N det($\mathbf{A}$)

b) det($\mathbf{AB}$)= det($\mathbf{A}$) det($\mathbf{B}$)

Teorema 2.1.7

Jika $\mathbf{A}$ invertible, maka $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

Teorema 2.1.8

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks yang mempunyai invers, maka $\mathbf{A}'$ juga mempunyai invers, dan $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

2.2 KONSEP DASAR RUNTUN WAKTU

2.2.1 Runtun Waktu dan Proses Stokastik

Runtun waktu adalah himpunan barisan pengamatan yang terurut dengan waktu, dengan jarak interval waktu yang sama (Box – Jenkins, 1976).

Jika barisan pengamatan tersebut dicatat dalam waktu yang kontinu maka disebut runtun waktu kontinu, dan jika barisan pengamatan dicatat dalam waktu yang diskrit maka disebut runtun waktu diskrit.

Notasikan X_t sebagai observasi pada waktu t. Untuk memodelkan ketidakpastian dalam observasi, asumsikan bahwa untuk setiap titik waktu t, X_t adalah variabel random. Runtun waktu yang akan dianalisis dapat dipandang sebagai realisasi dari proses stokastik.

2.2.2 Fungsi Mean, Fungsi Autokovariansi dan Fungsi Autokorelasi

Untuk proses stokastik $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, fungsi mean dinotasikan dengan μ_t, yaitu:

$$\mu_t = E(X_t) \qquad \text{untuk } t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Fungsi autokovariansi antara X_t dan X_s, dinotasikan dengan $\gamma_{t,s}$, yaitu :

$$\gamma_{t,s} = Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)] = E(X_t X_s) - \mu_t \mu_s$$

untuk $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (ditunjukkan dalam lampiran 1)

Jika t = s maka $\gamma_{t,s}$ menjadi variansi X_t, yaitu :

$$\gamma_{t,t} = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) \qquad \text{untuk } t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Fungsi autokorelasi antara X_t dan X_s, dinotasikan dengan $\rho_{t,s}$, yaitu

$$\rho_{t,s} = Corr(X_t, X_s) = \frac{Cov(X_t, X_s)}{(Var(X_t).Var(X_s))^{1/2}} = \frac{\gamma_{t,s}}{(\gamma_{t,t}.\gamma_{s,s})^{1/2}} \quad \text{untuk t dan s} = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

2.2.3 Kestasioneran

2.2.3.1 Stasioner Kuat

Proses stokastik $\{X_t\}$ bersifat **stasioner kuat** jika distribusi bersama dari $X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $X_{t_1-k}, X_{t_2-k}, ..., X_{t_n-k}$, yaitu dapat ditulis :

$$\Pr(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = \Pr(X_{t_1-k}, X_{t_2-k}, ..., X_{t_{n-k}})$$

Untuk setiap titik waktu $t_1, t_2, ..., t_n$ dan lag k (Jonathan D. Crayer, 1986).

2.2.3.2 Stasioner Lemah

Proses stokastik $\{X_t\}$ bersifat stationer lemah jika :

1. Fungsi mean konstan terhadap waktu, yaitu:

   $$E(X_t) = E(X_{t-k}) = \mu \qquad |\mu| < \infty,$$

   Untuk setiap t dan k.

2. Fungsi kovariansi antara X_t dan X_{t-k} hanya bergantung pada selang waktu k, tidak bergantung pada t, yaitu :

   $$Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_{t-j}, X_{t-k-j}) = \gamma_k \qquad |\gamma_k| < \infty$$

   Untuk setiap t, k, dan j.

Jika k=0 maka γ_k menjadi variansi X_t, yaitu :

$$Var(X_t) = Cov(X_t, X_t) = \gamma_0 < \infty$$

Sehingga jika {X_t} stasioner lemah maka fungsi autokorelasi antara X_t dan X_{t-k}

$$\rho_k = Corr(X_t, X_{t-k}) = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{(Var(X_t).Var(X_{t-k}))^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{(\gamma_0.\gamma_0)^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Untuk pembahasan selanjutnya, kata 'stasioner' saja berarti stasioner lemah.

2.2.4 Proses *White Noise*

Proses *white noise* didefinisikan sebagai barisan variabel random {a_t} yang independen dan berdistribusi identik. Proses *white noise* bersifat stasioner kuat.

Buktinya adalah sebagai berikut :

$$\Pr(a_{t_1} \le x_1, a_{t_2} \le x_2, ..., a_{t_n} \le x_n) = \Pr(a_{t_1} \le x_1).\Pr(a_{t_2} \le x_2)...\Pr(a_{t_n} \le x_n)$$

(karena independen)

$$= \Pr(a_{t_1-k} \le x_1).\Pr(a_{t_2-k} \le x_2)...\Pr(a_{t_n-k} \le x_n)$$

(karena berdistribusi identik)

$$= \Pr(a_{t_1-k} \le x_1, a_{t_2-k} \le x_2, ..., a_{t_n-k} \le x_n)$$

Karena berdistribusi identik, proses *white noise* mempunyai fungsi mean konstan, yaitu

$$\mu = E(a_t) \qquad\qquad t = 1, 2, ...$$

Fungsi autokovariansinya konstan :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= Var(\mathrm{a}_t) = \sigma_{\mathrm{a}}^2 && jika\, k = 0 \\ &= Cov(\mathrm{a}_t, \mathrm{a}_{t-k}) = 0 && jika\, k \neq 0\end{aligned}$$

Sehingga fungsi autokorelasinya, yaitu :

$$\begin{aligned}\rho_k &= 1 && , jika\, k = 0 \\ &= 0 && , jika\, k \neq 0\end{aligned}$$

Pada umumnya proses *white noise* diasumsikan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan σ_{a}^2 sehingga dapat ditulis $\mathrm{a}_t \sim NIID(0, \sigma_{\mathrm{a}}^2)$.

2.3 PROSES *AUTOREGRESSIVE*

Misalkan $\{X_t\}$ menotasikan runtun waktu yang terobservasi, dengan $E(X_t) = \mu$ dan $\{a_t\}$ adalah proses *white noise* yang berdistribusi NIID $(0, \sigma_{\mathrm{a}}^2)$. Asumsikan bahwa $E(X_t) = \mu = 0$, dan jika $\mu \neq 0$ maka nilai runtun waktu $\{X_t\}$ masing-masing dikurangi dengan μ , sehingga runtun waktu $\{X_t - \mu\}$ mempunyai mean nol. Asumsikan $\{X_t\}$ stationer dan a_t independen dengan X_{t-1}, X_{t-2},.... .

Proses *autoregressive*, seperti pada namanya, berarti regresi terhadap dirinya sendiri. Runtun waktu $\{X_t\}$ mengikuti proses *autoregressive* orde ke-p apabila memenuhi persamaan berikut ini :

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} = \mathrm{a}_t \tag{2.1}$$

atau

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + a_t \qquad \text{dimana } \phi_i = -\alpha_i \text{ untuk i=1,2,...,p}$$

Jadi pada proses ini, nilai runtun waktu saat ini direpresentasikan sebagai kombinasi linear dari dirinya sendiri sampai p satuan waktu kebelakang, kemudian ditambah satu suku *white noise* a_t.

2.3.1 Proses *Autoregressive* Orde Pertama

Runtun waktu $\{X_t\}$ mengikuti proses *autoregressive* orde pertama, atau AR (1), apabila memenuhi persamaan berikut :

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} = a_t$$

Fungsi autokovariansi proses AR (1) didapatkan dengan mengalikan kedua sisi persamaan $X_t + \alpha_1 X_{t-1} = a_t$ dengan X_{t-k}, lalu mengekspektasikannya, yaitu :

$$E(X_t X_{t-k} + \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k}) \qquad = E(a_t X_{t-k})$$

$$E(X_t X_{t-k}) + \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) = E(a_t X_{t-k}), \; k \geq 1 \tag{2.1}$$

Karena a_t independen dengan X_{t-k}, k≥1, maka $E(a_t X_{t-k}) = 0$. Lalu untuk proses yang stasioner maka dapat ditulis $E(X_t X_{t-k}) = \gamma_k$ dan $E(X_{t-1} X_{t-k}) = \gamma_{k-1}$.

Sehingga (2.1) menjadi :

$$\gamma_k = -\alpha_1 \gamma_{k-1} \quad , k \geq 1 \tag{2.2}$$

Untuk k = 0, akan diperoleh variansi dari AR(1). Dengan mengambil variansi pada kedua sisi $X_t + \alpha_1 X_{t-1} = a_t$ didapatkan

$$Var(X_t) + Var(\alpha_1 X_{t-1}) + 2Cov(X_t, \alpha_1 X_{t-1}) = Var(\mathrm{a}_t)$$
$$Var(X_t) + \alpha_1^2 Var(X_{t-1}) + 2\alpha_1 Cov(X_t, X_{t-1}) = Var(\mathrm{a}_t)$$

Karena diasumsikan prosesnya stasioner, maka Var (X_t) = Var(X_{t-1}) = γ_0 dan Cov(X_t, X_{t-1})= γ_1. Sehingga variansi proses AR(1) yaitu :

$$\gamma_0 + \alpha_1^2\ \gamma_0 + 2\alpha_1\gamma_1 = +\sigma_{\mathrm{a}}^2$$
$$\gamma_0\ (1+\alpha_1^2) = \sigma_{\mathrm{a}}^2 - 2\alpha_1\gamma_1$$
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_{\mathrm{a}}^2 - 2\alpha_1\gamma_1}{1+\alpha_1^2}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.2) maka diperoleh

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_{\mathrm{a}}^2 - 2\alpha_1(-\alpha_1\gamma_0)}{1+\alpha_1^2}$$
$$\gamma_0(1+\alpha_1^2) = \sigma_{\mathrm{a}}^2 + 2\alpha_1^2\gamma_0$$
$$\gamma_0(1+\alpha_1^2 - 2\alpha_1^2) = \sigma_{\mathrm{a}}^2$$
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_{\mathrm{a}}^2}{1-\alpha_1^2}$$

Karena γ_0 adalah variansi maka $1-\alpha_1^2 > 0$ atau $|\alpha_1| < 1$. Hal ini merupakan kondisi stasioner untuk AR(1).

Dengan mensubstitusikan variansi dari AR(1) atau γ_0 ke dalam persamaan (2.2) maka didapatkan

$$\gamma_k = (-1)^k\, \alpha_1^k \frac{\sigma_{\mathrm{a}}^2}{1-\alpha_1^2}\text{ ,k≥1} \qquad (2.3)$$

Dengan membagi kedua sisi persamaan (2.2) dengan γ_0, didapatkan fungsi autokorelasi proses AR(1), yaitu :

$$\rho_k = -\alpha_1\rho_{k-1}\text{, k ≥ 1}$$

Atau dari (2.3),

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-1)^k \alpha_1^k \frac{\sigma_a^2}{1-\alpha_1^2}}{\frac{\sigma_a^2}{1-\alpha_1^2}} = (-1)^k \alpha_1^k \text{, k≥1} \qquad (2.4)$$

2.3.2 Proses *Autoregressive* Orde Dua

Runtun waktu $\{X_t\}$ mengikuti proses *autoregressive* orde kedua, atau AR (2), apabila memenuhi persamaan berikut :

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} = \mathrm{a}_t \qquad (2.5)$$

Jika kedua sisi persamaan (2.5) dikalikan dengan X_{t-k} lalu diekspektasikan maka didapatkan fungsi autokovariansi proses AR(2), yaitu :

$$\begin{aligned} X_t X_{t-k} + \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-k} &= \mathrm{a}_t X_{t-k} \\ E\left(X_t X_{t-k} + \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-k}\right) &= E\left(\mathrm{a}_t X_{t-k}\right) \end{aligned}$$

$$E\left(X_t X_{t-k}\right) + \alpha_1 E\left(X_{t-1} X_{t-k}\right) + \alpha_2 E\left(X_{t-2} X_{t-k}\right) = E\left(\mathrm{a}_t X_{t-k}\right), k \geq 1 \qquad (2.6)$$

Karena a_t independen dengan $X_{t-k,}$ k≥1, maka $E(a_t X_{t-k}) = 0$. Lalu untuk proses yang stasioner maka dapat ditulis $E(X_t X_{t-k}) = \gamma_k$, $E(X_{t-1} X_{t-k}) = \gamma_{k-1}$ dan $E(X_{t-2} X_{t-k}) = \gamma_{k-2}$. Sehingga (2.6) menjadi :

$$\gamma_k = -\alpha_1 \gamma_{k-1} - \alpha_2 \gamma_{k-2} \text{, k } \geq 1 \qquad (2.7)$$

Untuk k = 1,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\alpha_1 \gamma_0 - \alpha_2 \gamma_{-1} \qquad \text{karena } \gamma_{-1} = \gamma_1 \\ &= -\alpha_1 \gamma_0 - \alpha_2 \gamma_1 \\ &= \frac{-\alpha_1 \gamma_0}{1+\alpha_2}, \alpha_2 \neq -1 \end{aligned}$$

Untuk k = 2,

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_0 \\
&= -\alpha_1 \frac{-\alpha_1\gamma_0}{1+\alpha_2} - \alpha_2\gamma_0 \\
&= \frac{\gamma_0\left(\alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_2^2\right)}{1+\alpha_2}
\end{aligned}
$$

Dengan mengambil variansi pada kedua sisi persamaan (2.5) didapatkan :

$$
\begin{aligned}
& Var(X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2}) = Var(\mathrm{a}_t) \\
& Var(X_t) + Var(\alpha_1 X_{t-1}) + Var(\alpha_2 X_{t-2}) + \\
& 2Cov(X_t, \alpha_1 X_{t-1}) + 2Cov(X_t, \alpha_2 X_{t-2}) + 2Cov(\alpha_1 X_{t-1}, \alpha_2 X_{t-2}) = Var(\mathrm{a}_t) \\
& Var(X_t) + \alpha_1^2 Var(X_{t-1}) + \alpha_2^2 Var(X_{t-2}) + \\
& 2\alpha_1 Cov(X_t, X_{t-1}) + 2\alpha_2 Cov(X_t, X_{t-2}) + 2\alpha_1\alpha_2 Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) = Var(\mathrm{a}_t)
\end{aligned}
$$

Karena diasumsikan stasioner maka Var(X_t) = Var (X_{t-1}) = Var (X_{t-2}) = γ_0,

Cov (X_t,X_{t-1})= Cov(X_{t-1},X_{t-2})= γ_1, Cov(X_t,X_{t-2})= γ_2, dan Sehingga variansi proses

AR (2) yaitu :

$$
\begin{aligned}
& \gamma_0(1+\alpha_1^2+\alpha_2^2) + 2\alpha_1\gamma_1 + 2\alpha_2\gamma_2 + 2\alpha_1\alpha_2\gamma_1 = \sigma_{\mathrm{a}}^2 \\
& \gamma_0(1+\alpha_1^2+\alpha_2^2) + 2\alpha_1 \frac{-\alpha_1\gamma_0}{1+\alpha_2} + 2\alpha_2 \frac{\gamma_0\left(\alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_2^2\right)}{1+\alpha_2} + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{-\alpha_1\gamma_0}{1+\alpha_2} = \sigma_{\mathrm{a}}^2 \\
& \frac{\gamma_0\left(1+\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\left(1+\alpha_2\right) - 2\alpha_1^2\gamma_0 - 2\alpha_2^2\gamma_0 - 2\alpha_2^3\gamma_0}{1+\alpha_2} = \sigma_{\mathrm{a}}^2 \\
& \frac{\gamma_0(1-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_2^3)}{1+\alpha_2} = \sigma_{\mathrm{a}}^2 \\
& \gamma_0 = \frac{\left(1+\alpha_2\right)\sigma_{\mathrm{a}}^2}{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_2^3} \\
& \gamma_0 = \frac{\left(1+\alpha_2\right)}{\left(1-\alpha_2\right)} \frac{\sigma_{\mathrm{a}}^2}{\left(1-\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\right)\left(1+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right)}
\end{aligned}
$$

karena γ_0 adalah variansi maka :

$$\gamma_0 = \frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}\frac{1}{(1-(\alpha_1-\alpha_2))(1+(\alpha_1+\alpha_2))} > 0$$

Solusinya adalah syarat kestasioneran untuk AR(2), yaitu :

$$|\alpha_2| < 1,\ \alpha_1 - \alpha_2 < 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 < -1 \quad (2.8)$$

Dengan membagi kedua sisi persamaan (2.7) dengan γ_0, didapatkan fungsi autokorelasi proses AR (2), yaitu :

$$\rho_k = -\alpha_1\rho_{k-1} - \alpha_2\rho_{k-2}\text{, k = 1,2,...} \quad (2.9)$$

Jadi ρ_k, k = 2,3,... , dapat dicari secara rekursif dari (2.9) dengan nilai awal $\rho_0 = 1$ dan $\rho_1 = \frac{-\alpha_1}{1+\alpha_2}$. Nilai ini akan menurun secara eksponensial untuk nilai k yang semakin besar. Persamaan (2.7) dan (2.9) disebut persamaan *Yule-Walker*.

2.3.3 Proses *Autoregressive* Orde ke-p

Runtun waktu $\{X_t\}$ mengikuti proses *autoregressive* umum orde ke-p, atau AR (p), apabila memenuhi persamaan berikut :

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + ... + \alpha_p X_{t-p} = \mathrm{a}_t \quad (2.10)$$

Dengan mengalikan kedua sisi persamaan (2.10) dengan X_{t-k} lalu diekspektasikan maka didapatkan fungsi autokovariansi untuk AR (p), yaitu :

$$X_t X_{t-k} + \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-k} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-k} = \mathrm{a}_t X_{t-k}$$
$$E\left(X_t X_{t-k} + \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-k} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-k}\right) = E\left(\mathrm{a}_t X_{t-k}\right)$$
$$E\left(X_t X_{t-k}\right) + \alpha_1 E\left(X_{t-1} X_{t-k}\right) + \alpha_2 E\left(X_{t-2} X_{t-k}\right) + \ldots + \alpha_p E\left(X_{t-p} X_{t-k}\right) = 0$$
$$E\left(X_t X_{t-k}\right) = -\alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) - \alpha_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) - \ldots - \alpha_p E(X_{t-p} X_{t-k})$$

$$\gamma_k = -\alpha_1 \gamma_{k-1} - \alpha_2 \gamma_{k-2} - \ldots - \alpha_p \gamma_{k-p} \qquad (2.11)$$

Kalikan persamaan (2.10) dengan X_t lalu diekspektasikan, didapatkan :

$$X_t X_t + \alpha_1 X_{t-1} X_t + \alpha_2 X_{t-2} X_t + \ldots + \alpha_p X_{t-p} X_t = \mathrm{a}_t X_t$$
$$E(X_t X_t + \alpha_1 X_{t-1} X_t + \alpha_2 X_{t-2} X_t + \ldots + \alpha_p X_{t-p} X_t) = E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t X_t) + \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) + \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) + \ldots + \alpha_p E(X_{t-p} X_t) = E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t, X_t) = -\alpha_1 E(X_{t-1}, X_t) - \alpha_2 E(X_{t-2}, X_t) - \ldots - \alpha_p E(X_{t-p}, X_t) + E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$\gamma_0 = -\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \ldots - \alpha_p \gamma_p + E(\mathrm{a}_t X_t)$$

Karena $E(\mathrm{a}_t X_t)$ = E $(\mathrm{a}_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \mathrm{a}_t))$ = E (a_t^2) = σ_{a}^2, maka variansi proses AR (p), yaitu :

$$\gamma_0 = -\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \ldots - \alpha_p \gamma_p + \sigma_{\mathrm{a}}^2$$

Dengan membagi persamaan (2.11) dengan γ_0, didapatkan fungsi autokorelasi proses AR (p), yaitu :

$$\rho_k = -\alpha_1 \rho_{k-1} - \alpha_2 \rho_{k-2} - \ldots - \alpha_p \rho_{k-p} \qquad (2.12)$$

Persamaan (2.12) disebut persamaan *Yule-walker*. Nilai ini akan menurun secara eksponensial untuk nilai k yang semakin besar.

Untuk X_t dengan mean tidak nol ($E(X_t) = \mu \neq 0$), model AR (p) dapat ditulis :

$$(X_t - \mu) + \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (X_{t-2} - \mu) + \ldots + \alpha_p (X_{t-p} - \mu) = \mathrm{a}_t$$
$$X_t = \mu - \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1 \mu - \phi_2 X_{t-2} + \alpha_2 \mu + \ldots - \alpha_p X_{t-p} + \alpha_p \mu = \mathrm{a}_t$$
$$X_t = \theta_0 - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \ldots - \alpha_p X_{t-p} + \mathrm{a}_t$$

dengan $\theta_0 = \mu(1+\phi_1+\phi_2+...+\phi_p)$. Penambahan θ_0 pada ruas kanan tidak mempengaruhi variansi dan fungsi autokovariansi. Buktinya adalah sebagai berikut :

$$X_t \quad = \theta_0 - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - ... - \alpha_p X_{t-p} + \mathrm{a}_t$$
$$E(X_t X_t) = E(\theta_0 X_t - \alpha_1 X_{t-1} X_t - \alpha_2 X_{t-2} X_t - ... - \alpha_p X_{t-p} X_t + \mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t^{\ 2}) = \theta_0 E(X_t) - \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) - \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) - ... - \alpha_p E(X_{t-p} X_t) + E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t^{\ 2}) = \mu(1+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p)\mu - \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) - \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) - ... - \alpha_p E(X_{t-p} X_t) + E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t^{\ 2}) = \mu^2 + \alpha_1\mu^2 + \alpha_2\mu^2 + ... + \alpha_p\mu^2 - \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) - \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) - ... - \alpha_p E(X_{t-p} X_t) + E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$E(X_t X_t) - \mu^2 = -\alpha_1\left[E(X_{t-1} X_t) - \mu^2\right] - \alpha_2\left[E(X_{t-2} X_t) - \mu^2\right] - ... - \alpha_p\left[E(X_{t-p} X_t) - \mu^2\right] + E(\mathrm{a}_t X_t)$$
$$\gamma_0 \quad = -\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 - ... - \alpha_p\gamma_p + \sigma^2$$

Untuk membuktikan bahwa fungsi autokovariansi tidak berubah dengan penambahan θ_0 pada ruas kanan dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti membuktikan bahwa variansi tidak berubah dengan penambahan θ_0.

2.4 PROSES *CIRCULAR*

Definisi

Vektor dari N variabel random diberikan dengan $\mathbf{X}' = \{X_N, X_{N-1}, ..., X_1\}$, disebut proses *circular* jika mempunyai sifat-sifat distribusi seperti dibawah ini:

1. $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$
2. $E(X_s^2) = \sigma^2$ s = 1, 2, ..., N

3. $E(X_s X_{s+L}) = \sigma^2 \rho_L$ s = 1, 2, ..., N

dimana $\rho_{N+L} = \rho_{N-L} = \rho_L$

barisan dari nilai $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N$ adalah barisan autokorelasi dari proses.

4. $$E(\mathbf{XX}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi yang berukuran N×N (J. Wise, 1955).

Berdasarkan definisi diatas, proses *circular* dapat disimpulkan merupakan proses yang stationer berdasarkan sub 2.2.3.1.

Matriks autokovariansi, $\mathbf{\Omega}$**,** dapat dinyatakan dalam bentuk dibawah ini:

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + ... + \rho_{\frac{1}{2}(N-1)}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)})\},$$

dimana N bilangan ganjil positif, atau

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + ... + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N})\},$$

dimana N bilangan genap positif (ditunjukkan dalam lampiran 2). Untuk semua nilai N, $\mathbf{I}$ menotasikan matriks identitas berukuran N×N dan $\mathbf{W}$ adalah *circulant definition of auxiliary identity matrix* berukuran N×N, dimana

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari $\mathbf{W}$, yaitu :

1. $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}'$ (ditunjukkan dalam lampiran 3).
2. $\mathbf{W}^{N} = \mathbf{I}$ (ditunjukkan dalam lampiran 4).

2.5 PROSES *NONCIRCULAR*

Definisi

Vektor dari N variabel random diberikan dengan $\mathbf{X}' = \{X_N, X_{N-1}, ..., X_1\}$, disebut proses *noncircular* jika mempunyai sifat-sifat distribusi seperti dibawah ini:

1. $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$
2. $E(X_s^2) = \sigma^2$ s = 1, 2, ..., N
3. $E(X_s X_t) = \sigma^2 \rho_{|s-t|}$ s,t = 1, 2, ..., N , s≠t

barisan dari nilai $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N$ adalah barisan autokorelasi dari proses.

4. $$E(\mathbf{XX}')=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_{N-2} & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_{N-3} & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_{N-4} & \rho_{N-3} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \rho_{N-4} & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{\Omega}$$

dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi yang berukuran N×N (J. Wise, 1955).

Berdasarkan definisi diatas, dapat disimpulkan proses *noncircular* adalah proses yang stasioner berdasarkan 2.2.3.1.

Matriks autokovariansi, $\mathbf{\Omega}$**,** dapat dinyatakan dalam bentuk dibawah ini:

$$\mathbf{\Omega}=\sigma^2\{\mathbf{I}+\rho_1(\mathbf{U}+\mathbf{U}')+\rho_2(\mathbf{U}^2+\mathbf{U}'^{\mathbf{2}})+...+\rho_{N-1}(\mathbf{U}^{N-1}+\mathbf{U}'^{(N-1)})\},$$

Untuk sembarang N, dimana N bilangan asli (ditunjukkan dalam lampiran 5). Untuk semua nilai N, $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas berukuran N×N dan $\mathbf{U}$ adalah *noncirculant definition of auxiliary identity matrix* berukuran N×N, dimana

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat dari matriks **U** adalah $\mathbf{U}^N=\mathbf{0}$, dimana **0** adalah matriks nol berukuran N×N (ditunjukkan dalam lampiran 6).

2.6 DISTRIBUSI MARGINAL

Definisi

Jika X dan Y adalah variabel random kontinu dan f(x,y) adalah pdf bersama dari X dan Y, maka

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

adalah pdf marginal dari X, dan

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \quad \text{untuk } -\infty < y < \infty$$

adalah pdf marginal dari Y (J. E. Freund, 1992).

Definisi diatas dapat diperluas untuk N variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$.

Jika pdf bersama dari variabel random kontinu $X_1, X_2, ..., X_N$ adalah $f(x_1, x_2, ..., x_N)$, maka pdf marginal dari X_2 adalah

$$h(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_3 ... dx_N \quad \text{untuk } -\infty < x_2 < \infty$$

Pdf marginal dari X_1 dan X_N adalah

$$\varphi(x_1, x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_N)\, dx_2 dx_3 ... dx_{N-1} \quad \text{untuk } -\infty < x_1 < \infty \,\text{dan} -\infty < x_N < \infty$$

2.7 *SUFFICIENT* DAN *ANCILLARY STATISTIC*

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_N$ adalah sampel random berukuran N dari variabel random X, dimana X memiliki distribusi tertentu. Jika sembarang fungsi $Y = u(X_1, X_2, ..., X_N)$ adalah fungsi dari sampel random X yang tidak bergantung pada parameter maka fungsi $Y = u(X_1, X_2, ..., X_N)$ disebut dengan statistik (Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, 2005).
Contoh, variabel random $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ adalah statistik.

Walaupun statistik tidak bergantung pada parameter, namun distribusinya bisa saja masih bergantung pada parameter. Statistik yang distribusinya bergantung pada parameter disebut *sufficient statistic*. *Sufficient statistic* mengandung semua informasi mengenai parameter, namun ada statistik lain yang kelihatannya tidak memuat informasi mengenai parameter karena distribusinya bebas dari parameter, statistik ini disebut *ancillary statistic*. Berikut ini, diberikan penjelasan lebih lanjut mengenai *sufficient* dan *ancillary statistic*.

2.7.1 *Sufficient Statistic*

Berikut ini definisi dari *sufficient statistic*:

Misal $X_1, X_2, ..., X_N$ menyatakan suatu sampel random berukuran N dari suatu distribusi yang mempunyai pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$. Misal $Y_1 = u_1(X_1, X_2, ..., X_N)$ adalah suatu statistik yang pdf-nya adalah $g_1(y_1;\theta)$. Maka Y_1 adalah *sufficient statistic* untuk θ jika dan hanya jika

$$\frac{f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \ldots f(x_N;\theta)}{g_1\left[u_1(x_1, x_2, ..., x_N);\theta\right]} = H(x_1, x_2, ..., x_N)$$

Dimana $H(x_1, x_2, ..., x_N)$ tidak bergantung pada $\theta \in \Omega$ (Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, 2005).

Definisi dapat diperluas untuk kasus dimana $X_1, X_2, ..., X_N$ tidak saling bebas dan tidak berdistribusi identik, yaitu dengan persamaan berikut:

$$\frac{f(x_1, x_2, ..., x_N;\theta)}{g_1(u_1(x_1, x_2, ..., x_N);\theta)} = H(x_1, x_2, ..., x_N)$$

dimana $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ adalah pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_N$ dan $H(x_1, x_2, ..., x_N)$ tidak bergantung pada $\theta \in \Omega$.

Berdasarkan definisi diatas, jika $Y_1 = u_1(X_1, X_2, ..., X_N)$ adalah *Sufficient statistic*, probabilitas bersyarat dari $X_1, X_2, ..., X_N$ tidak tergantung pada θ. Secara intuisi, jika ditentukan $Y_1 = y_1$, distribusi dari statistik lain, misalnya $Y_2 = u_2(X_1, X_2, ..., X_N)$, tidak bergantung pada parameter θ karena distribusi bersyarat dari $X_1, X_2, ..., X_N$ tidak bergantung pada θ. Jadi, Y_1 mengambil semua informasi dari θ yang terkandung dalam sampel.

2.7.2 *Ancillary statistic*

Ada statistik lain yang hampir kelihatannya berlawanan dengan *sufficient statistic*. Jika *sufficient statistic* mengandung semua informasi mengenai parameter, statistik yang lain ini, disebut *ancillary statistic*, mempunyai distribusi yang bebas dari parameter dan kelihatannya tidak mengandung informasi mengenai parameter itu. Untuk ilustrasi, variansi S^2 dari sampel random yang berdistribusi $N(\theta,1)$ mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ. Contoh lain, rasio $Z = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, dimana X_1, X_2 adalah sampel random dari distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ diketahui dan parameter $\beta = \theta$ tidak diketahui, karena Z mempunyai distribusi beta yang bebas dari parameter θ, maka Z adalah *ancillary statistic* (Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, 2005)".

Untuk menentukan apakah statistik adalah *ancillary statistic*, harus dibuktikan bahwa distribusi dari statistik tersebut bebas dari parameter populasi yang tidak diketahui. Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, (2005), memberikan beberapa aturan sehingga dapat lebih mudah menemukan *ancillary statistic* untuk model tertentu, yaitu:

1. Model *Location*

Sampel random berukuran N, $X_1, X_2, ..., X_N$, mengikuti Model *location* jika

$$X_i = \theta + W_i \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{2.13}$$

dimana $-\infty < \theta < \infty$ dan $W_1, W_2, ..., W_N$ adalah variabel random dengan pdf $f(W)$ yang tidak bergantung pada θ dan cdf kontinu $F(W)$. Dengan pendefinisian seperti ini, maka θ adalah *location* parameter.

Dari persamaan (2.13), $w_i = x_i - \theta$, i=1,2,...,N, maka pdf dari X_i adalah

$$\begin{aligned} g(x_i;\theta) &= f(w_i)\left|\frac{dx_i}{dw_i}\right| \\ &= f(x_i - \theta).1 \\ &= f(x_i - \theta) \qquad\qquad i = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

Misalkan $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ adalah statistik sedemikian sehingga

$$u\left(x_1 + c, x_2 + c, ..., x_N + c\right) = u(x_1, x_2, ..., x_N)$$

untuk semua bilangan real c. Oleh karena itu,

$$v = u(W_1 + \theta, W_2 + \theta, ..., W_N + \theta) = u(W_1, W_2, ..., W_N)$$

adalah fungsi dari $W_1, W_2, ..., W_N$ yang tidak tergantung pada θ. Oleh sebab itu, v mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ. Statistik $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ disebut juga *location-invariant statistic*.

2. Model *Scale*

Misalkan variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$ mengikuti model *scale*, bentuk modelnya yaitu:

$$X_i = \theta W_i \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{2.14}$$

Dimana $\theta > 0$, dan $W_1, W_2, ..., W_N$ adalah variabel dengan pdf $f(W)$ yang tidak bergantung pada θ dan cdf kontinu $F(W)$. Dengan pendefinisian seperti ini, maka θ adalah *scale* parameter.

Dari persamaan (2.14), $w_i = \frac{x_i}{\theta}$, i=1,2,...,N, maka pdf dari X_i adalah

$$\begin{aligned} g(x_i;\theta) &= f(w_i)\frac{dx_i}{dw_i} \\ &= f(\frac{x_i}{\theta}).\frac{1}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x_i}{\theta}\right) \qquad i = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

Misalkan $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ adalah statistik sedemikian sehingga

$$u(cx_1, cx_2, ..., cx_N) = u(x_1, x_2, ..., x_N)$$

untuk semua bilangan real c>0. Maka

$$v = u(X_1, X_2, ..., X_N) = u(\theta W_1, \theta W_2, ..., \theta W_N) = u(W_1, W_2, ..., W_N)$$

adalah fungsi dari $W_1, W_2, ..., W_N$ yang tidak tergantung pada θ. Oleh sebab itu, v mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ. Statistik $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ disebut juga *scale-invariant statistic*.

3. Model *Location-Scale*

Misalkan variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$ mengikuti model *Location-scale*, bentuk modelnya yaitu:

$$X_i = \theta_1 + \theta_2 W_i \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{2.15}$$

Dimana $-\infty < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 > 0$, dan $W_1, W_2, ..., W_N$ adalah variabel random dengan pdf $f(W)$ yang tidak bergantung pada θ_1 dan θ_2. Dengan pendefinisian seperti ini, maka θ_1 adalah *Location* parameter dan θ_2 adalah *scale* parameter.

Dari persamaan (2.15), $w_i = \dfrac{x_i - \theta_1}{\theta_2}$, i=1,2,...,N, maka pdf dari X_i adalah

$$\begin{aligned} g(x_i;\theta) &= f(w_i)\left|\frac{dx_i}{dw_i}\right| \\ &= f\left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2}\right).\frac{1}{\theta_2} \\ &= \frac{1}{\theta_2} f\left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2}\right) \qquad i = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

Misalkan $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ adalah statistik sedemikian sehingga

$$u\left(cx_1 + d, cx_2 + d, ..., cx_N + d\right) = u(x_1, x_2, ..., x_N)$$

untuk semua bilangan real d dan c>0. Maka

$$v = u(X_1, X_2, ..., X_N) = u(\theta_1 + \theta_2 W_1, ..., \theta_1 + \theta_2 W_N) = u(W_1, W_2, ..., W_N)$$

adalah fungsi dari $W_1, W_2, ..., W_N$ yang tidak tergantung pada θ_1 dan θ_2. Oleh sebab itu, v mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ_1 dan θ_2. Statistik $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ disebut juga *location-scale-invariant statistic*.

Berikut ini, diberikan contoh dari penggunaan model *Location-Scale* untuk membuktikan suatu statistik adalah *ancillary statistic*. Misalkan terdapat N variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$, dapat dinyatakan sebagai:

$$X_i = \mu + \sigma e_i \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

dimana e_i mempunyai distribusi tertentu yang tidak bergantung pada μ dan σ. Akan dibuktikan $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \overline{x}\right)/ s_x\right\}$, i=1,2,...,N , dimana $\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$ dan $s_x^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 /(N-1)$ adalah *ancillary statistic*.

Bukti:

Karena variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$ mengikuti model *location-scale* maka $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \overline{x}\right)/ s_x\right\}$, i=1,2,...,N disebut *ancillary statistic* jika untuk sembarang bilangan real d dan c>0 berlaku

$$u\left(cx_1 + d, cx_2 + d, ..., cx_N + d\right) = u(x_1, x_2, ..., x_N)$$

Untuk sembarang bilangan real d dan c>0,

$$d_i = u_i\left(cx_1 + d, cx_2 + d, ..., cx_N + d\right)$$

$$= \frac{cx_i + d - \frac{\sum_{i=1}^{N} cx_i + d}{N}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(cx_i + d - \frac{\sum_{i=1}^{N} cx_i + d}{N}\right)^2}}{\sqrt{N-1}}}$$

$$d_i = \frac{N(cx_i + d) - c\sum_{i=1}^{N} x_i - Nd}{N} \cdot \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(cx_i + d - \frac{c\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} - d\right)^2}}$$

$$= \frac{c\left(Nx_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{N} \cdot \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(c\left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)\right)^2}}$$

$$= c\left(x_i - \overline{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{c^2\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$$

$$= c\left(x_i - \overline{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{N-1}}{c\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}$$

$$= u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

sehingga

$$d_i = u_i(x_1, x_2, ..., x_N) = u(\mu + \sigma e_1, ..., \mu + \sigma e_N) = u(e_1, e_2, ..., e_N)$$

adalah fungsi dari $e_1, e_2, ..., e_N$ yang tidak tergantung pada μ dan σ. Oleh sebab itu, d mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada μ dan σ. Jadi $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \overline{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N , adalah *ancillary statistic*.

Berikut ini diberikan alternatif lain untuk membuktikan bahwa $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \overline{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N adalah *ancillary statistic.*

$d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \overline{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N adalah *ancillary statistic* jika distribusi dari d tidak bergantung pada μ dan σ. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa distribusi dari d tidak bergantung pada μ dan σ.

Bukti:

- Transformasi

  $$d_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x} \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

- Invers dari transformasi, $d_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{s_x}$, i=1,2,...,N , yaitu

  $$x_i = d_i s_x + \overline{x}$$
  $$\mu + \sigma e_i = d_i s_x + \overline{x}$$

  jadi $e_i = \dfrac{d_i s_x + \overline{x} - \mu}{\sigma}$ untuk i=1,2,...,N

- Pdf dari $\bar{x}, s_x, d$

$$f\left(\bar{x}, s_x, d; \mu, \sigma\right) = |J|\, f\left(v_1(\bar{x}, s_x, d_1), \ldots, v_N(\bar{x}, s_x, d_N); \mu, \sigma\right)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial e_1}{\partial s_x} & \frac{\partial e_1}{\partial d_1} & \frac{\partial e_1}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial e_1}{\partial d_{N-2}} \\ \frac{\partial e_2}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial e_2}{\partial s_x} & \frac{\partial e_2}{\partial d_1} & \frac{\partial e_2}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial e_2}{\partial d_{N-2}} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_{N-2}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial e_{N-2}}{\partial s_x} & \frac{\partial e_{N-2}}{\partial d_1} & \frac{\partial e_{N-2}}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial e_{N-2}}{\partial d_{N-2}} \\ \frac{\partial e_{N-1}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial s_x} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial d_1} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial d_{N-2}} \\ \frac{\partial e_N}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial e_N}{\partial s_x} & \frac{\partial e_N}{\partial d_1} & \frac{\partial e_N}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial e_N}{\partial d_{N-2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma} & \frac{d_1}{\sigma} & \frac{s_x}{\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & \frac{d_2}{\sigma} & 0 & \frac{s_x}{\sigma} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sigma} & \frac{d_{N-2}}{\sigma} & 0 & 0 & \cdots & \frac{s_x}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} & \frac{d_{N-1}}{\sigma} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & \frac{d_N}{\sigma} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & d_1 & s_x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_2 & 0 & s_x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N-2} & 0 & 0 & \cdots & s_x \\ 1 & d_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right| \qquad \text{teorema 2.1.6 a}$$

$$= \frac{1}{\sigma^N} \begin{vmatrix} 1 & d_1 & s_x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_2 & 0 & s_x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N-2} & 0 & 0 & \cdots & s_x \\ 1 & d_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_x}{\sigma^N} \begin{vmatrix} 1 & d_1 & s_x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_2 & 0 & s_x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N-3} & 0 & 0 & \cdots & s_x \\ 1 & d_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \frac{s_x^{N-2}}{\sigma^N} \begin{vmatrix} 1 & d_{N-1} \\ 1 & d_N \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_x^{N-2}}{\sigma^N} \left(d_N - d_{N-1}\right)$$

Jadi

$$f\left(\bar{x}, s_x, d; \mu, \sigma\right) = \left|J\right| f\left(v_1(\bar{x}, s_x, d_1), ..., v_N(\bar{x}, s_x, d_N); \mu, \sigma\right)$$

$$= \frac{s_x^{N-2}\left(d_N - d_{N-1}\right)}{\sigma^N} f\left(\frac{d_1 s_x + \bar{x} - \mu}{\sigma}, ..., \frac{d_N s_x + \bar{x} - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.16)$$

Integrasi terhadap $\bar{x}$ dan s_x mengeliminasi μ dan σ (ditunjukkan dalam lampiran 7). Ini menunjukkan distribusi marginal dari *d* bebas dari parameter μ dan σ. Sehingga terbukti bahwa d adalah *ancillary statistic*.

2.8 Marginal Likelihood

Misalkan variabel random $X = \{x_i\}$, i=1,2,…,N, dengan pdf $f(x;\theta)$ dan θ=(μ,σ) adalah vektor parameter yang tidak diketahui, maka fungsi likelihood adalah sebagai berikut

$$L(\mu, \sigma; X) = f(X; \mu, \sigma)$$

Menurut Sprott D.A (2000), jika statistik $d = \{d_i\}$, i=1,2,...,N, merupakan *ancillary statistic* untuk μ, maka fungsi marginal likelihood untuk σ, $L_m(\sigma; d)$, adalah

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma; X) &= f(X; \mu, \sigma) \\ &= f(d, \sigma) f(X; \mu, \sigma \mid d) \\ &= L_m(\sigma; d) L_{res}(\mu, \sigma; X) \end{aligned}$$

dimana factor $L_{res}(\mu, \sigma; X)$ mengandung informasi yang tidak berarti mengenai σ ketika μ tidak diketahui.

BAB III

Fungsi Marginal *Likelihood* untuk Proses AR

3.1 *Structural Model*

Misalkan variabel respon X dihasilkan dari suatu proses yang stabil. Variasi dalam variabel respon biasanya diakibatkan oleh: variasi dalam alat yang digunakan, variasi dalam kondisi proses, dan variasi dalam operasi dari proses. Sumber-sumber variasi ini membentuk error dari proses yang merupakan variabel random yang membutuhkan ukuran *scale*.

Misalkan x_i adalah respon ke-i, dan $v_{1i}, v_{2i}, ..., v_{ri}$ adalah *constructed variabel* yang bersesuaian dengan respon ke-i. Dan misalkan σ adalah *scaling respon* dari variabel error dan $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ adalah kontribusi yang diberikan oleh *constructed variabel* terhadap variabel respon. Fraser (1967) memperkenalkan *structural model*. *Structural model* adalah variabel respon dari suatu proses yang stabil dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari *constructed variabel* dan variabel error, dan dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 v_{11} + ... + \beta_r v_{r1} + \sigma e_1 \\ x_2 &= \beta_1 v_{12} + ... + \beta_r v_{r2} + \sigma e_2 \\ &\vdots \\ x_N &= \beta_1 v_{1N} + ... + \beta_r v_{rN} + \sigma e_N \end{aligned} \tag{3.1}$$

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

3.2 Proses *Autoregressive* sebagai *Structural Model*

Pada umumnya, bentuk umum proses *autoregressive* orde p telah dinyatakan dalam persamaan (2.1) sebagai

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X_{t-k} - \mu) = \mathrm{a}_t \qquad (\alpha_0 = 1)$$

dimana $\{X_t : t = 1, 2, ..., N\}$ adalah data runtun waktu yang stasioner, a_t adalah *white noise*, $\mathrm{a}_t \sim NIID(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_p)'$ adalah parameter *autoregressive* dan μ adalah *mean proses*.

Misalkan terdapat variabel random Z_t yang mempunyai mean nol, variansi 1 dan *independent* , maka σZ_t akan mempunyai mean nol dan variansi σ^2 sama halnya dengan a_t (ditunjukkan dalam lampiran 8), sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X_{t-k} - \mu) = \sigma Z_t \qquad (\alpha_0 = 1) \tag{3.2}$$

Untuk ukuran sampel N, data runtun waktu yang stasioner $\{X_t ; t = 1, 2, ..., N\}$, dapat dinyatakan sebagai *structural model*, yaitu:

$$\mathbf{X} = \mu\mathbf{1} + \sigma\mathbf{e} \tag{3.3}$$

dimana $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)'$, $\mathbf{1}' = (1, 1, ..., 1)$ dan $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_N)'$ adalah vektor variabel error yang tidak terobservasi yang dibatasi pada pembatasan masalah berdistribusi normal.

Berdasarkan persamaan (3.3), maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X_{t-k} - \mu) &= \sigma Z_t \qquad (\alpha_0 = 1) \\
\alpha_0 (X_t - \mu) + \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \ldots + \alpha_p (X_{t-p} - \mu) &= \sigma Z_t \\
\alpha_0 (\mu + \sigma e_t - \mu) + \alpha_1 (\mu + \sigma e_{t-1} - \mu) + \ldots + \alpha_p (\mu + \sigma e_{t-p} - \mu) &= \sigma Z_t \\
\sigma (\alpha_0 e_t + \alpha_1 e_{t-1} + \ldots + \alpha_p e_{t-p}) &= \sigma Z_t \\
\alpha_0 e_t + \alpha_1 e_{t-1} + \ldots + \alpha_p e_{t-p} &= Z_t
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{s=0}^{p} \alpha_s e_{t-s} = Z_t \qquad (\alpha_0 = 1) \tag{3.4}
$$

Persamaan (3.3) dan (3.4) adalah proses *autoregressive* sebagai *structural model*.

3.2.1 Proses *Autoregressive* yang *Circular*

Dengan memandang **e** sebagai proses *autoregressive* yang *circular*, maka persamaan (3.4) untuk N observasi dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
e_N + \alpha_1 e_{N-1} + \alpha_2 e_{N-2} + \ldots + \alpha_p e_{N-p} &= Z_N \\
e_{N-1} + \alpha_1 e_{N-2} + \alpha_2 e_{N-3} + \ldots + \alpha_p e_{N-p-1} &= Z_{N-1} \\
e_{N-2} + \alpha_1 e_{N-3} + \alpha_2 e_{N-4} + \ldots + \alpha_p e_{N-p-2} &= Z_{N-2} \\
&\vdots \\
e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_N + \ldots + \alpha_p e_{N-p+2} &= Z_2 \\
e_1 + \alpha_1 e_N + \alpha_2 e_{N-1} + \ldots + \alpha_p e_{N-p+1} &= Z_1
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Dengan menggunakan notasi matriks, persamaan (3.5) dinyatakan sebagai:

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\dots&1&0\\0&0&0&\dots&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\alpha_1&0&\dots&0&0\\0&0&\alpha_1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&\alpha_1\\\alpha_1&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\alpha_2&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots&\vdots\\\alpha_2&0&0&\dots&0&0\\0&\alpha_2&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}0&\dots&0&\alpha_p&0&\dots0\\0&\dots&0&0&\alpha_p&\dots0\\0&\dots&0&0&0&\dots0\\\vdots&&&&&\vdots\\0&\dots&0&0&0&\dots0\\0&\dots&\alpha_p&0&0&\dots0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}e_N\\e_{N-1}\\e_{N-2}\\\vdots\\e_2\\e_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_N\\Z_{N-1}\\Z_{N-2}\\\vdots\\Z_2\\Z_1\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\dots&1&0\\0&0&0&\dots&0&1\end{bmatrix}+\alpha_1\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&1\\1&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0&0&1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\dots+\alpha_p\begin{bmatrix}0&\dots&0&1&0&\dots0\\0&\dots&0&0&1&\dots0\\0&\dots&0&0&0&\dots0\\\vdots&&&&&\vdots\\0&\dots&0&0&0&\dots0\\0&\dots&1&0&0&\dots0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}e_N\\e_{N-1}\\e_{N-2}\\\vdots\\e_2\\e_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_N\\Z_{N-1}\\Z_{N-2}\\\vdots\\Z_2\\Z_1\end{bmatrix}$$

atau

$$\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+\alpha_2\mathbf{W}^2+\dots+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)\mathbf{e}=\mathbf{Z} \tag{3.6}$$

dimana $\mathbf{e}'=\{e_N,e_{N-1},\dots,e_2,e_1\}$ dan $\mathbf{Z}'=\left\{Z_N,Z_{N-1},\dots,Z_2,Z_1\right\}$. Dengan metode invers, maka diperoleh

$$\mathbf{e}=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+\alpha_2\mathbf{W}^2+\dots+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\mathbf{Z} \tag{3.7}$$

Selanjutnya akan dicari parameter dari $\mathbf{e}$ yaitu $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{e}}=E(\mathbf{e})$ dan $\boldsymbol{\Omega}=E(\mathbf{ee}')$. Dari persaamaan (3.7), diperoleh

$$\begin{aligned}E(\mathbf{e})&=E\left(\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+\alpha_2\mathbf{W}^2+\dots+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right)\\&=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+\alpha_2\mathbf{W}^2+\dots+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}E\left(\mathbf{Z}\right)\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.8}$$

dan

$E(\mathbf{ee}') = \mathbf{\Omega}\,(matriks\ autokovariansi)$

$$= E\left\{\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]'\right\}$$

$$= E\left\{\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\mathbf{ZZ}'\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\right]'\right\} \quad \text{teorema 2.1.1 (d)}$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\right]' E(\mathbf{ZZ}')$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\right]'\mathbf{1}$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)'\right]^{-1} \quad \text{teorema 2.1.8}$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}'+(\alpha_1\mathbf{W})'+...+\left(\alpha_p\mathbf{W}^p\right)'\right)\right]^{-1} \quad \text{teorema 2.1.1 (b)}$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}'+...+\alpha_p\mathbf{W}'^p\right)^{-1} \quad \text{teorema 2.1.1 (c)}$$

$$= \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}^{-1}+...+\alpha_p\mathbf{W}^{(-1)p}\right)^{-1} \quad \text{sifat } \mathbf{W} \text{ ke-1}$$

Jadi, diperoleh

$$\mathbf{\Omega} = \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}^{-1}+...+\alpha_p\mathbf{W}^{-p}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

Dengan menginverskan matriks autokovariansi maka diperoleh,

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}^{-1}+...+\alpha_p\mathbf{W}^{-p}\right)^{-1}\right]^{-1}$$
$$= \left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}^{-1}+...+\alpha_p\mathbf{W}^{-p}\right)^{-1}\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}^{-1}+...+\alpha_p\mathbf{W}^{-p}\right)\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{W}+...+\alpha_p\mathbf{W}^p\right) \quad (3.10)$$

Dengan demikian, jika menganggap **e** merupakan proses *autoregressive* yang *circular*, **e** berdistribusi normal dengan mean **0** dan variansi $\mathbf{\Omega}$, dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (3.9).

3.2.2 Proses *Autoregressive* yang *Noncircular*

Dengan memandang **e** sebagai proses *autoregressive* yang *noncircular*, maka persamaan (3.4) untuk N observasi dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} &e_N + \alpha_1 e_{N-1} + \alpha_2 e_{N-2} + \ldots + \alpha_p e_{N-p} = Z_{\mathrm{N}} \\ &e_{N-1} + \alpha_1 e_{N-2} + \alpha_2 e_{N-3} + \ldots + \alpha_p e_{N-p-1} = Z_{\mathrm{N-1}} \\ &e_{N-2} + \alpha_1 e_{N-3} + \alpha_2 e_{N-4} + \ldots + \alpha_p e_{N-p-2} = Z_{\mathrm{N-2}} \\ &\vdots \\ &e_2 + \alpha_1 e_1 = Z_2 \\ &e_1 = Z_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dengan menggunakan notasi matriks, persamaan (3.11) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_p & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_p \\ \vdots & \ldots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_N \\ e_{N-1} \\ e_{N-2} \\ \vdots \\ e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{N}} \\ Z_{\mathrm{N-1}} \\ Z_{\mathrm{N-2}} \\ \vdots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_p \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ldots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_N \\ e_{N-1} \\ e_{N-2} \\ \vdots \\ e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{N}} \\ Z_{\mathrm{N-1}} \\ Z_{\mathrm{N-2}} \\ \vdots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

atau

$$\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\alpha_2\mathbf{U}^2+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)\mathbf{e}=\mathbf{Z} \tag{3.12}$$

dimana $\mathbf{e}'=\{e_N, e_{N-1},\ldots,e_2,e_1\}$ dan $\mathbf{Z}'=\left\{Z_N, Z_{N-1},\ldots,Z_2,Z_1\right\}$. Dengan metode invers, maka diperoleh

$$\mathbf{e}=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\alpha_2\mathbf{U}^2+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\mathbf{Z} \tag{3.13}$$

Selanjutnya akan dicari parameter dari $\mathbf{e}$ yaitu $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{e}}=E(\mathbf{e})$ dan $\boldsymbol{\Omega}=E(\mathbf{ee}')$. Dari persaamaan (3.13), diperoleh

$$\begin{aligned}E(\mathbf{e})&=E\left(\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\alpha_2\mathbf{U}^2+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right)\\&=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\alpha_2\mathbf{U}^2+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}E\left(\mathbf{Z}\right)\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dan

$E(\mathbf{ee}')=\boldsymbol{\Omega}\,(matriks\ autoko\,\mathrm{var}\,iansi)$

$$=E\left\{\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]'\right\}$$

$$=E\left\{\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\mathbf{ZZ}'\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\right]'\right\}$$ teorema 2.1.1 (d)

$$=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\right]'E(\mathbf{ZZ}')$$

$$=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\right]'\mathbf{1}$$

$$=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)'\right]^{-1}$$ teorema 2.1.8

$$=\left(\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{U}+\ldots+\alpha_p\mathbf{U}^p\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{I}'+\left(\alpha_1\mathbf{U}\right)'+\ldots+\left(\alpha_p\mathbf{U}^p\right)'\right)\right]^{-1}$$ teorema 2.1.1 (b)

$E(\mathbf{ee}') = \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + ... + \alpha_p \mathbf{U}^p\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}' + ... + \alpha_p \mathbf{U}'^p\right)^{-1}$ teorema 2.1.1 (c)

Jadi diperoleh

$$\mathbf{\Omega} = \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + ... + \alpha_p \mathbf{U}^p\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}' + ... + \alpha_p \mathbf{U}'^p\right)^{-1} \quad (3.15)$$

Dengan persamaan (3.15) maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}^{-1} &= \left[\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + ... + \alpha_p \mathbf{U}^p\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}' + ... + \alpha_p \mathbf{U}'^p\right)^{-1} \sigma^2\right]^{-1} \\
&= \left[\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}' + ... + \alpha_p \mathbf{U}'^p\right)^{-1}\right]^{-1} \left[\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + ... + \alpha_p \mathbf{U}^p\right)^{-1}\right]^{-1} \\
&= \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}' + ... + \alpha_p \mathbf{U}'^p\right)\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + ... + \alpha_p \mathbf{U}^p\right) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Sehingga jika menganggap **e** sebagai proses *autoregressive* yang *noncircular*, **e** berdistribusi normal dengan mean **0** dan variansi $\mathbf{\Omega}$, dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (3.15).

3.3 Fungsi Marginal Likelihood untuk AR (p)

Dari dua subbab diatas, distribusi dari **e** tidak bergantung pada parameter μ dan σ, sehingga persamaan (3.3)

$$\mathbf{X} = \mu\mathbf{1} + \sigma\mathbf{e}$$

adalah model *Location-scale* berdasarkan 2.7.2.(3), sehingga μ adalah *location* parameter, σ adalah *scale* parameter, dan $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$.

Telah dibuktikan dalam sub bab 2.7.2

$$d_i = \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)}{s_x} = \frac{\left(e_i - \bar{e}\right)}{s_e} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

adalah *ancillary statistic*, sehingga distribusi marginal dari **d** hanya tergantung pada $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)'$. Distribusi marginal dari **d** diberikan oleh (Fraser, 1968, 32)

$$L(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{d}) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\ldots, s_e(N^{-\frac{1}{2}} t\mathbf{1} + \mathbf{d}), \ldots) s_e^{N-1} dt ds_e \tag{3.17}$$

Dalam tugas akhir ini, **e** dibatasi pada pembatasan masalah berdistribusi normal, dengan mean **0** dan variansi $\boldsymbol{\Omega}$ yang diperoleh pada sub bab 3.2.1 dan 3.2.2, maka pdf dari **e**, $f(\mathbf{e}; \boldsymbol{\Omega})$, adalah

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N} \left|\boldsymbol{\Omega}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{e}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e})$$

Dengan demikian, penyelesaian persamaan (3.17) adalah

$$L(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{d}) = \left|\boldsymbol{\Omega}\right|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2 / A)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \tag{3.18}$$

dimana $NA = \mathbf{1}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{1}$, $N^{\frac{1}{2}} B = \mathbf{1}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{d}$ dan $C = \mathbf{d}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{d}$.

3.3.1 AR (1) sebagai *Structural Model*

Berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4), model AR (1) yang dinyatakan dalam *structural model*, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} e_t + \alpha_1 e_{t-1} &= Z_t \qquad t = 1, 2, \ldots, N \\ \mathbf{x} &= \mu \mathbf{1} + \sigma \mathbf{e} \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.3.1.1 Fungsi Marginal Likelihood untuk AR (1) yang *Circular*

Misalkan $\mathbf{e}$ sebagai proses AR (1) yang *circular*, maka $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$ dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (3.9), yaitu

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W})^{-1} (\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W}^{-1})^{-1} \tag{3.20}$$

Bentuk umum fungsi marginal Likelihood berdasarkan persamaan (3.18)

$$L(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{d}) = |\mathbf{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2 / A)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Dimana $NA = \mathbf{1'\Omega^{-1}1}$, $N^{\frac{1}{2}} B = \mathbf{1'\Omega^{-1}d}$ dan $C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$.

Dalam menurunkan fungsi marginal likelihood $L(\rho; \mathbf{d})$ untuk AR (1) yang *circular* dilakukan dalam beberapa tahap.

a) Tahap pertama

Dalam tahap ini, akan dicari determinan dari matriks autokovariansi AR (1) yang *circular*. Dari persamaan (3.10) invers matriks autokovariansi untuk AR (1) yang *circular* adalah

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = (\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W}^{-1})(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W}) \tag{3.21}$$

Berdasarkan persamaan (2.4), $\rho_1 = -\alpha_1$, sehingga persamaan (3.21) menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}^{-1} &= (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}^{-1})(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}) \\ &= \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left|\mathbf{\Omega}^{-1}\right| = \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}^{-1})(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})\right|$$ teorema 2.1.6 b

$$= \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}^{-1})\right|\left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})\right|$$

Misalkan $P = \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}^{-1})\right|$ dan $Q = \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})\right|$

$$\begin{aligned} \left|P\right| &= \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}^{-1})\right| \\ &= \left|\mathbf{I}\right| - \left|\rho\mathbf{W}^{-1}\right| \\ &= 1-\rho^{N}\left|\mathbf{W}^{-1}\right| \\ &= 1-\rho^{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})\right| \\ &= \left|\mathbf{I}\right| - \left|\rho\mathbf{W}\right| \\ &= 1-\rho^{N}\left|\mathbf{W}\right| \\ &= 1-\rho^{N} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{\Omega}^{-1}\right| &= \left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}^{-1})\right|\left|(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})\right| \\ &= \left(1-\rho^{N}\right)\left(1-\rho^{N}\right) \\ &= \left(1-\rho^{N}\right)^{2} \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.1.7, maka $\left|\mathbf{\Omega}\right| = \dfrac{1}{\left|\mathbf{\Omega}^{-1}\right|} = = \left(1-\rho^{N}\right)^{-2}$ (3.22)

b) Tahap kedua

Dalam tahap kedua ini, akan dicari $NA = \mathbf{1'\Omega^{-1}1}$.

$$NA = \mathbf{1'\Omega^{-1}1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$NA = \begin{bmatrix} 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & \cdots & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & \cdots & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= N(1-\rho)^2 \qquad (3.23)$$

c) Tahap ketiga

Dalam tahap ketiga ini, akan dicari $N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$.

$$N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & \cdots & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & \cdots & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$N^{\frac{1}{2}}B = (1-\rho)^2 d_1 + (1-\rho)^2 d_2 + (1-\rho)^2 d_3 + \ldots + (1-\rho)^2 d_{N-1} + (1-\rho)^2 d_N$$

$$= (1-\rho)^2 (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{N-1} + d_N)$$

$$= (1-\rho)^2 \sum_{i=1}^{N} d_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{N-1} + d_N$$

$$= \frac{x_1 - \overline{x}}{s_x} + \frac{x_2 - \overline{x}}{s_x} + \frac{x_3 - \overline{x}}{s_x} + \ldots + \frac{x_{N-1} - \overline{x}}{s_x} + \frac{x_N - \overline{x}}{s_x}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1} + x_N - n\overline{x}}{s_x}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i}{s_x}$$

$$= 0$$

Jadi

$$N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1'\Omega^{-1}d}$$

$$= (1-\rho)^2 \sum_{i=1}^{N} d_i$$

$$= (1-\rho)^2 .0$$

$$= 0 \qquad (3.24)$$

d) Tahap keempat

Dalam tahap ini, akan dicari $C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$.

$$C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & -\rho \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} d_N(-\rho)+d_1(1+\rho^2)+d_2(-\rho) & d_1(-\rho)+d_2(1+\rho^2)+d_3(-\rho) & d_2(-\rho)+d_3(1+\rho^2)+d_4(-\rho) & \cdots & d_{N-1}(-\rho)+d_N(1+\rho^2)+d_1(-\rho) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$=d_1\left[d_N(-\rho)+d_1(1+\rho^2)+d_2(-\rho)\right]+d_2\left[d_1(-\rho)+d_2(1+\rho^2)+d_3(-\rho)\right]+d_3\left[d_2(-\rho)+d_3(1+\rho^2)+d_4(-\rho)\right]+\ldots+d_N\left[d_{N-1}(-\rho)+d_N(1+\rho^2)+d_1(-\rho)\right]$$

$$=d_1d_N(-\rho)+d_1^2(1+\rho^2)+d_1d_2(-\rho)+d_1d_2(-\rho)+d_2^2(1+\rho^2)+d_2d_3(-\rho)+d_2d_3(-\rho)+d_3^2(1+\rho^2)+d_3d_4(-\rho)+\ldots+d_{N-1}d_N(-\rho)+d_N^2(1+\rho^2)+d_Nd_1(-\rho)$$

$$=(1+\rho^2)(d_1^2+d_2^2+d_3^2+\ldots+d_N^2)-2\rho(d_1d_N+d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{N-1}d_N)$$

$$=(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{N}d_i^2-2\rho\sum_{i=1}^{N}d_id_{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}d_i^2=d_1^2+d_2^2+d_3^2+\ldots+d_N^2$$

$$=\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2}{s_x^2}+\frac{\left(x_2-\overline{x}\right)^2}{s_x^2}+\frac{\left(x_3-\overline{x}\right)^2}{s_x^2}+\ldots+\frac{\left(x_N-\overline{x}\right)^2}{s_x^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{s_x^2}$$

$$=\frac{(N-1)s_x^2}{s_x^2}$$

$$=N-1$$

$r'=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}d_id_{i+1}}{N-1}$, dimana $d_{N+1}=d_1$

Jadi

$$C=\mathbf{d'\Omega^{-1}d}$$

$$=(1+\rho^2)\sum_{i=1}^{N}d_i^2-2\rho\sum_{i=1}^{N}d_id_{i+1}$$

$$=(1+\rho^2)\left(N-1\right)-2\rho\left(N-1\right)r'$$

$$=\left(N-1\right)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right) \tag{3.25}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.22), (3.23), (3.24) dan (3.25), sehinga diperoleh fungsi marginal likelihood untuk AR(1) yang *circular*, yaitu

$$L(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{d}) = |\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2/A)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$L(\rho;\mathbf{d}) = \left(\left(1-\rho^N\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(1-\rho\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(N-1\right)\left(1-2\rho r' + \rho^2\right) - 0^2/\left(1-\rho\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$= \left(1-\rho^N\right)\left(1-\rho\right)^{-1}\left(N-1\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\left(1-2\rho r' + \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \qquad (3.26)$$

3.3.1.2 Fungsi Marginal Likelihood untuk AR (1) yang *Noncircular*

Misalkan $\mathbf{e}$ sebagai proses AR (1) yang *noncircular*, maka $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0},\boldsymbol{\Omega})$ dimana $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (3.15), yaitu

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}\right)^{-1}\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}'\right)^{-1} \qquad (3.27)$$

Bentuk umum fungsi marginal Likelihood berdasarkan persamaan (3.18)

$$L(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{d}) = |\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2/A)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Dimana $NA = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1}$, $N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$ dan $C = \mathbf{d}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$.

Dalam menurunkan fungsi marginal likelihood $L(\rho;\mathbf{d})$ untuk AR (1) yang *noncircular* dilakukan dalam beberapa tahap.

a) Tahap pertama

Dalam tahap ini, akan dicari determinan dari matriks autokovariansi AR (1) yang *noncircular*. Dari persamaan (3.16) invers matriks autokovariansi untuk AR (1) yang *noncircular* adalah

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = (\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}')(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U}) \tag{3.28}$$

Berdasarkan persamaan (2.4), $\rho_1 = -\alpha_1$, sehingga persamaan (3.28) menjadi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}^{-1} &= (\mathbf{I} - \rho \mathbf{U}')(\mathbf{I} - \rho \mathbf{U}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\left|\boldsymbol{\Omega}^{-1}_{N\times N}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{N\times N}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$= (1+\rho^2)\begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$-\rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$\left|\mathbf{\Omega}_{N\times N}^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)} + \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$+\rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)} - \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$= \left(1+\rho^2\right) \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)}$$

$$-\rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)}$$

$$
\left|\mathbf{\Omega}_{N\times N}^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)} + \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)}
$$

$$
+\rho \begin{vmatrix} -\rho & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)} - \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)} + \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}_{(N-3)\times(N-3)}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\vdots
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \left(1+\rho^2\right) \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} - \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} + \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} - \rho^2 \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{\Omega}_{N\times N}^{-1}\right| &= \left(1+\rho^2\right)\begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix} + \rho\begin{vmatrix}-\rho & 0\\ -\rho & 1\end{vmatrix} - \rho^2\begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix} + \rho^2\begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix} + \rho\begin{vmatrix}-\rho & 0\\ -\rho & 1\end{vmatrix} - \rho^2\begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 1\end{vmatrix} + \rho\begin{vmatrix}-\rho & 0\\ -\rho & 1\end{vmatrix}\\
&= \left(1+\rho^2-\rho^2\right)+\rho\left(-\rho-0\right)\\
&= 1-\rho^2
\end{aligned}
$$

Berdasarkan teorema 2.1.7, maka $|\mathbf{\Omega}| = \dfrac{1}{\left|\mathbf{\Omega}^{-1}\right|} = = \left(1-\rho^2\right)^{-1}$ (3.29)

Misalkan

$$l_1 = \sum_{i=2}^{N-1} d_i^2 \qquad l_2 = \sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1} \qquad l_3 = \left(\sum_{i=2}^{N-1} d_i\right)^2$$

b) Tahap kedua

Dalam tahap kedua ini, akan dicari $NA = \mathbf{1'\Omega^{-1}1}$.

$$
\begin{aligned}
NA &= \mathbf{1'\Omega^{-1}1}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho\\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\1\\1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1-\rho & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & \cdots & 1+\rho^2-2\rho & 1-\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$NA = \begin{bmatrix} 1-\rho & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & \cdots & (1-\rho)^2 & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2(1-\rho) + (N-2)(1-\rho)^2 \\ &= (1-\rho)\left(2 + (N-2)(1-\rho)\right) \\ &= (1-\rho)\left(N(1-\rho) + 2\rho\right) \end{aligned} \qquad (3.30)$$

c) Tahap ketiga

Dalam tahap ketiga ini, akan dicari $N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1'\Omega^{-1}d}$.

$$N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1'\Omega^{-1}d}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ -\rho & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\rho & 1+\rho^2-2\rho & 1+\rho^2-2\rho & \cdots & 1+\rho^2-2\rho & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\rho & (1-\rho)^2 & (1-\rho)^2 & \cdots & (1-\rho)^2 & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$= (1-\rho)(d_1 + d_N) + (1-\rho)^2(d_2 + d_3 + \ldots + d_{N-2} + d_{N-1})$$

$$N^{\frac{1}{2}}B = (1-\rho)(d_1 + (1-\rho)d_2 + (1-\rho)d_3 + \ldots + (1-\rho)d_{N-1} + d_N)$$
$$= (1-\rho)\left(d_1 + d_2 + \ldots + d_{N-1} + d_N - \rho\left(d_2 + d_3 + \ldots + d_{N-2} + d_{N-1}\right)\right)$$
$$= (1-\rho)\left(\sum_{i=1}^{N} d_i - \rho\sum_{i=2}^{N-1} d_i\right)$$
$$= (1-\rho)\left(-\rho\sum_{i=2}^{N-1} d_i\right)$$
$$= -\rho(1-\rho)l_3^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

d) Tahap keempat

Dalam tahap ini, akan dicari $C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$

$$C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$$
$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{N-1} & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} d_1 + d_2(-\rho) & d_1(-\rho) + d_2(1+\rho^2) + d_3(-\rho) & \cdots & d_{N-2}(-\rho) + d_{N-1}(1+\rho^2) + d_N(-\rho) & d_{N-1} + d_N(-\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$
$$= d_1(d_1 - d_2\rho) + d_2(-d_1\rho + d_2(1+\rho^2) - d_3\rho) + \ldots + d_{N-1}(-d_{N-2}\rho + d_{N-1}(1+\rho^2) - d_N\rho) + d_N(d_{N-1} - d_N\rho)$$
$$= d_1^2 - 2d_1d_2\rho + d_2^2(1+\rho^2) - 2d_2d_3\rho + d_3^2(1+\rho^2) - \ldots + d_{N-1}^2(1+\rho^2) - 2d_{N-1}d_N\rho + d_N^2$$
$$= \left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_{N-1}^2 + d_N^2\right) + \rho^2\left(d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_{N-1}^2\right) - 2\rho\left(d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{N-1}d_N\right)$$
$$= (N-1) + \rho^2\sum_{i=2}^{N-1} d_i^2 - 2\rho\sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1}$$
$$= (N-1) + \rho^2 l_1 - 2\rho l_2 \tag{3.32}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.29), (3.30), (3.31), dan (3.32), sehingga diperoleh

$$L(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{d}) = |\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2/A)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$L(\rho;\mathbf{d}) = \left[\left(1-\rho^2\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-\rho)\left(N(1-\rho)+2\rho\right)}{N}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[(N-1)+\rho^2 l_1 - 2\rho l_2 - \frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N} . \frac{N}{(1-\rho)\left(N(1-\rho)+2\rho\right)}\right]^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$= \left[(1-\rho)(1+\rho)\right]^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{N - N\rho + 2\rho}{N}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[(N-1)+\rho^2 l_1 - 2\rho l_2 - \frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N - N\rho + 2\rho}\right]^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$= (1+\rho)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{N-2}{N}\rho\right)^{-\frac{1}{2}} \left((N-1)+\rho^2 l_1 - 2\rho l_2 - \frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \quad (3.33)$$

Untuk jumlah N yang besar $\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho} \approx 0$, $1-\frac{N-2}{N}\rho \approx 1-\rho$ dan

$$l_1 = \sum_{i=1}^{N-1} d_i^2$$

$$= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_{N-1}^2$$

$$= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2}{s_x^2} + \frac{\left(x_2 - \bar{x}\right)^2}{s_x^2} + \frac{\left(x_3 - \bar{x}\right)^2}{s_x^2} + \ldots \frac{\left(x_{N-1} - \bar{x}\right)^2}{s_x^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N-1}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{s_x^2} \approx \frac{(N-1)s_x^2}{s_x^2}$$

$$\approx N-1$$

Jadi, fungsi marginal likelihood untuk AR (1) yang *noncircular* untuk jumlah N yang besar dapat didekati dengan fungsi dibawah ini:

$$L(\rho;\mathbf{d}) \approx (1+\rho)^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{-\frac{1}{2}} \left((N-1)+\rho^2(N-1) - 2\rho l_2 - 0\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$L\left(\rho;\mathbf{d}\right)\approx\left(1+\rho\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left(N-1\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\left(1+\rho^{2}-\frac{2\rho l_{2}}{N-1}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \tag{3.34}$$

Persamaan (2.34) hampir serupa dengan fungsi marginal likelihood untuk proses *autoregressive* yang *circular*.

3.4 Estimasi Parameter *Autoregressive* dengan Fungsi Marginal Likelihood

Taksiran parameter *autoregressive* diperoleh dengan memaksimumkan persamaan (3.18). Secara matematis, estimasi maksimum marginal likelihood lebih mudah dilakukan dengan memanipulasi persamaan (3.18) menjadi logaritma fungsinya. Memaksimumkan fungsi marginal likelihood ekivalen dengan memaksimumkan logaritma fungsi marginal likelihood (bukti dalam lampiran 9).

Untuk mencari nilai taksiran parameter $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,...,\hat{\alpha}_p)'$ yang memaksimumkan persamaan (3.18), maka pendekatan yang paling sering digunakan adalah menentukan turunan parsial dari logaritma fungsi marginal likelihood untuk setiap parameter lalu menyamakan dengan nol,

$$\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{d}))}{\partial \alpha_i}=0 \qquad \text{untuk i=1,2,…,p} \tag{3.35}$$

Berdasarkan persamaan(3.35), akan diperoleh persamaan sebanyak parameter yang tidak diketahui. Taksiran ini dapat diselesaikan secara bersamaan. Jika penyelesaian dari fungsi turunan parsial tidak dapat ditemukan, maka pendekatan numerik dilakukan.

3.4.1 Estimasi Parameter AR (1) yang *Circular*

Fungsi marginal likelihood untuk AR (1) yang *circular* pada persamaan (3.26) adalah

$$L(\rho;\mathbf{d}) = \left(1-\rho^N\right)(1-\rho)^{-1}(N-1)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Berdasarkan persamaan (3.35), parameter AR (1) diperoleh dengan menurunkan logaritma dari fungsi marginal likelihood terhadap ρ lalu menyamakan dengan nol,yaitu:

$$\frac{dLn\left(L(\rho;\mathbf{d})\right)}{d\rho} = 0$$

$$\frac{dLn\left(\left(1-\rho^N\right)(1-\rho)^{-1}(N-1)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\right)}{d\rho} = 0$$

$$\frac{d\left(Ln\left(1-\rho^N\right) - Ln(1-\rho) - \frac{1}{2}(N-1)Ln(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)Ln\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)\right)}{d\rho} = 0$$

$$\frac{-N\rho^{N-1}}{1-\rho^N} + \frac{1}{1-\rho} + \frac{(N-1)(r'-\rho)}{1-2\rho r'+\rho^2} = 0$$

$$\frac{-N\rho^{N-1}(1-\rho)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right) + \left(1-\rho^N\right)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right) + (N-1)(r'-\rho)\left(1-\rho^N\right)(1-\rho)}{\left(1-\rho^N\right)(1-\rho)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)} = 0$$

Taksiran ρ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$-N\rho^{N-1}(1-\rho)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)+\left(1-\rho^N\right)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)+(N-1)(r'-\rho)\left(1-\rho^N\right)(1-\rho)=0 \quad (3.36)$$

dengan syarat

$$\left(1-\rho^N\right)(1-\rho)\left(1-2\rho r'+\rho^2\right)\neq 0$$

Persamaan (3.36) merupakan persamaan polinomial dari ρ derajat N+2, sehingga akan diperoleh N+2 nilai akar dari persamaan tersebut. Karena ρ adalah korelasi maka nilainya akan terletak pada interval $-1\leq\rho\leq 1$, sehingga taksiran untuk ρ diperoleh dengan mengambil nilai akar yang terlatak dalam interval tersebut.

3.4.2 Estimasi Parameter AR (1) yang *Noncircular*

Fungsi marginal likelihood untuk AR (1) yang *Noncircular* pada persamaan (3.33) adalah

$$L(\rho;\mathbf{d})=(1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Berdasarkan persamaan (3.35), parameter AR (1) diperoleh dengan menurunkan logaritma dari fungsi marginal likelihood terhadap ρ lalu menyamakan dengan nol,yaitu:

$$\frac{dLn\left(L(\rho;\mathbf{d})\right)}{d\rho}=0$$

$$\frac{d Ln\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\right)}{d\rho}=0$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}Ln(1+\rho)-\frac{1}{2}Ln\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)-\frac{1}{2}(N-1)Ln\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)\right)}{d\rho}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\rho)}-\frac{1}{2}\frac{-\frac{N-2}{N}}{\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)}-\frac{1}{2}\frac{(N-1)\left(2l_1\rho-2l_2-\frac{2\rho(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}+\frac{\rho^2 l_3}{N-(N-2)\rho}+\frac{\rho^2(1-\rho)l_3(-N+2)}{\left(N-(N-2)\rho\right)^2}\right)}{\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)}=0$$

$$\frac{\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)-\left(\frac{N-2}{N}\right)(1+\rho)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)-(N-1)\left(\frac{N-2}{N}\right)(1+\rho)}{(1+\rho)\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)}=0$$

Taksiran ρ diperoleh dengan menyelesaikan

$$\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)-\left(\frac{N-2}{N}\right)(1+\rho)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)$$
$$-(N-1)\left(\frac{N-2}{N}\right)(1+\rho)=0 \qquad (3.37)$$

dengan syarat

$$(1+\rho)\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)\left((N-1)+\rho^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)\neq 0$$

Persamaan (3.37) yang merupakan persamaan polinomial dari ρ derajat 4, sehingga akan diperoleh 4 nilai akar dari persamaan tersebut. Karena ρ adalah korelasi maka nilainya akan terletak pada interval $-1\leq\rho\leq 1$, sehingga taksiran untuk ρ diperoleh dengan mengambil nilai akar yang terlatak dalam interval tersebut.

BAB IV

APLIKASI ESTIMASI PARAMETER AR (1) DENGAN FUNGSI MARGINAL LIKELIHOOD

Untuk melengkapi pembahasan estimasi parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood, bab ini membahas contoh data runtun waktu yang dimodelkan dengan proses AR (1) yang parameter *autoregressive*nya ditaksir dengan fungsi marginal likelihood yang telah diperoleh pada bab sebelumnya.

4.1 Pendahuluan

Untuk mendapatkan taksiran parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Penyedian data runtun waktu yang stasioner yang dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* orde 1
2. Melakukan penaksiran parameter *autoregresive*

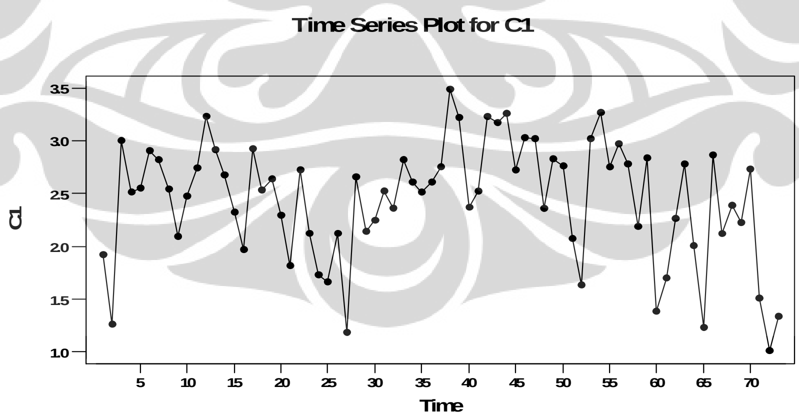
Data yang digunakan adalah data ”*Annual yield of grain on Broadbalk field at Rothamsted* 1852-1925” (diberikan dalam lampiran 9).

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

4.2 Taksiran parameter *Autoregressive* dengan Fungsi Marginal Likelihood untuk Data "*Annual yield of grain on Broadbalk field at Rothamsted* 1852-1925"

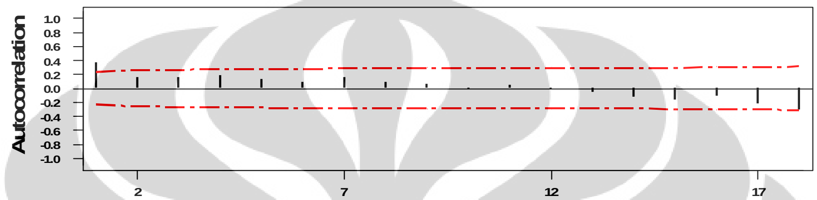
Data "*Annual yield of grain on Broadbalk filed at Rothamsted* 1852-1925" terdiri dari 73 pengamatan. Sebelum dilakukan penaksiran parameter *Autoregressive*, penulis terlebih dahulu memaparkan bahwa data tersebut bersifat stasioner dan dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* orde 1 (identifikasi model).

Berdasarkan gambar, data yang stasioner bersifat acak (tidak memiliki trend atau musiman). Secara definitif, kondisi stasioner AR (1) adalah nilai mutlak parameter AR (1) kurang dari satu. Plot dari data ini, menunjukkan bahwa data tersebut stasioner. Plot dari data tersebut diberikan dibawah ini:



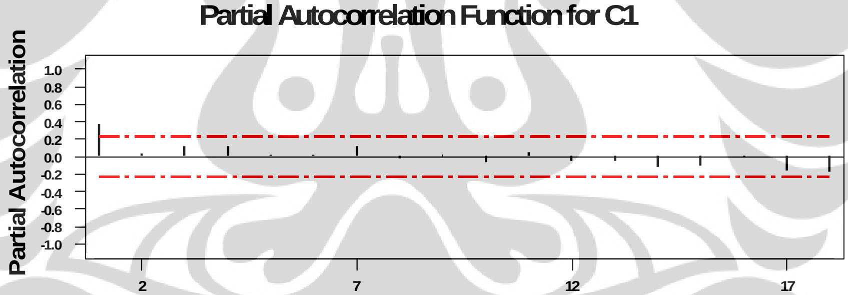
Untuk proses *autoregressive*, identifikasi model dapat dilihat dari plot ACF (*Autocorrelation Function*) dan PACF (*Partial Autocorrelation Function*). Suatu data runtun waktu dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* jika bentuk ACF dari data tersebut menurun secara eksponensial seiring dengan pertambahan lag dan PACF menunjukkan orde dari proses *autoregressive* tersebut. Dibawah ini diberikan plot ACF dan PACF dari data "*Annual yield of grain on Broadbalk filed at Rothamsted* 1852-1925".

ACF "Annual yield of grain on Broadbalk filed at Rothamsted 1852-1925"



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.36	3.09	9.98	8	0.09	0.62	21.09	15	-0.17	-1.18	26.24
2	0.15	1.16	11.76	9	0.05	0.36	21.32	16	-0.11	-0.75	27.45
3	0.16	1.16	13.66	10	-0.02	-0.13	21.35	17	-0.22	-1.47	32.31
4	0.19	1.36	16.39	11	0.04	0.27	21.49	18	-0.31	-1.98	41.81
5	0.13	0.92	17.71	12	-0.01	-0.06	21.49				
6	0.09	0.62	18.33	13	-0.06	-0.40	21.80				
7	0.16	1.11	20.41	14	-0.13	-0.89	23.37				

Partial Autocorrelation Function for C1



Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	0.36	3.09	8	-0.03	-0.26	15	-0.12	-0.99
2	0.02	0.21	9	-0.00	-0.01	16	-0.01	-0.08
3	0.11	0.92	10	-0.08	-0.66	17	-0.17	-1.41
4	0.11	0.94	11	0.04	0.32	18	-0.19	-1.63
5	0.02	0.17	12	-0.06	-0.51			
6	0.02	0.13	13	-0.05	-0.44			
7	0.11	0.95	14	-0.12	-1.05			

Dari plot diatas dapat disimpulkan bahwa data tersebut merupakan proses *autoregressive* orde 1.

Fungsi marginal likelihood untuk AR (1), jika variabel error dianggap sebagai proses yang *circular*, diberikan pada persamaan (3.27)

$$L(\rho;d)=\left(1-\rho^{N}\right)(1-\rho)^{-1}(N-1)^{-\frac{1}{2}(N-1)}\left(1-2\rho r'+\rho^{2}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Berdasarkan data tersebut, diperoleh $r'=0.386997703$, dimana

$r'=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} d_i d_{i+1}}{N-1}$, $d_{N+1}=d_1$. Sehingga fungsi marginal likelihood untuk data ini, jika variabel error adalah proses yang *circular* adalah

$$L(\rho;d)=\left(1-\rho^{73}\right)(1-\rho)^{-1}\,72^{-\frac{72}{2}}\left(1-0.773995406\rho+\rho^{2}\right)^{-\frac{72}{2}}$$

Berdasarkan lampiran 11 (1), taksiran parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood jika variabel error dianggap sebagai proses yang *circular* adalah 0.4069178784.

Sedangkan jika variabel error dianggap sebagai proses yang *noncircular*, fungsi marginal likelihood diberikan pada persamaan (3.34)

$$L(\rho;d)=(1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{N-2}{N}\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left((N-1)+\rho_1^2 l_1-2\rho l_2-\frac{\rho_1^2(1-\rho)l_3}{N-(N-2)\rho}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

Berdasarkan data tersebut diperoleh $l_1=\sum_{i=2}^{N-1} d_i^2$ = 67.3772808,

$l_2=\sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1}$ = 26.08054, dan $l_3=\left(\sum_{i=2}^{N-1} d_i\right)^2$ = 8.18929949. $d_i=\dfrac{\left(x_i-\bar{x}\right)}{s_x}$, i=1, 2, ..., N

Sehingga fungsi marginal likelihood untuk data ini adalah:

$$L(\rho;d)=(1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{71}{73}\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left(72+67,3772808\rho_1^2-2.26,08054\rho-\frac{8.18929949\rho_1^2(1-\rho)}{73-71\rho}\right)^{-\frac{72}{2}}$$

Berdasarkan lampiran 11 (2), taksiran parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood jika variabel error dianggap sebagai proses yang *noncircular* adalah 0.4024965490.

Untuk perbandingan, dengan menggunakan *software* ”PhiCast” diperoleh taksiran α_1 dengan fungsi maksimum likelihood adalah 0.381463 dan dengan metode moment diperoleh α_1 = 0.362229782. Dengan demikian, estimasi parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood mendukung estimasi titik dari motode-metode penaksiran parameter *autoregressive* yang sudah ada.

BAB V

PENUTUP

5.1 KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dalam penulisan tugas akhir ini adalah:

1) Proses *Autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *structural model,* sehingga data runtun waktu stasioner merupakan kombinasi linear dari *mean* proses dan variabel error yang tidak terobservasi.
2) Dengan mengganggap variabel error sebagai proses *circular* dan *noncircular* dapat diperoleh sifat distribusi dari variabel error tidak bergantung pada parameter populasi, sehingga data runtun waktu mengikuti model *Location-scale*.
3) Dengan menggunakan *model Location*-Scale, vektor data runtun waktu yang distandarisasi merupakan *ancillary statistic* untuk μ dan σ.
4) Karena distribusi dari *ancillary statistic* bebas dari parameter populasi, maka *ancillary statistic* merupakan dasar untuk membangun fungsi marginal likelihood yang hanya bergantung pada parameter *Autoregressive*.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

5) Estimasi parameter AR dengan fungsi marginal likelihood mendukung estimasi titik dari metode-metode penaksiran parameter AR yang sudah ada.

5.2 SARAN

Dalam tugas akhir ini penaksiran parameter hanya dilakukan untuk proses *Autoregressive* orde 1, sehingga penulis menyarankan menaksir parameter proses *Autoregressive* untuk orde yang lebih tinggi.

Daftar Pustaka

Anton, Howard. (1994). *Elementary Linear Algebra*, New Jersey: John Wiley.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., dan Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis Forecasting and Control*, New Jersey: Prantice Hall.

Craig, A.T., Hogg, R.V., dan McKean, J.W. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*, New Jersey: Prentice Hall.

Cryer, J. D. (1986). *Time Series Analysis*, Boston: PSW Publisher.

Freund, J. E. (1992). *Mathematical Statistics*, New Jersey: Prentice Hall.

Harville, D. A. (1997). *Matrix Algebra from A statistician's Perspective*, New York: Springer.

Hyndman, R.J. (n.d.) *Time Series Data Library*, http://robjhyndman.com/TSDL/, 3 November 2009. pk. 10.02.

Levenbach, Hans. (1972). Estimation of Autoregressive Parameter from a Marginal Likelihood Function*. Biometrika* 59. 61-71.

Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*, New York: Springer.

Wise, J. (1955). The Autocorrelation Function and the spectral Density Function. *Biometrika* 42. 151-159.

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

LAMPIRAN 1

Menunjukkan $\gamma_{t,s} = E(X_t X_s) - \mu_t \mu_s$ **untuk** $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Tujuan:

Akan dibuktikan $\gamma_{t,s} = Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)] = E(X_t X_s) - \mu_t \mu_s$

untuk $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\gamma_{t,s} &= Cov(X_t, X_s) = E\left[\left(X_t - \mu_t\right)\left(X_s - \mu_s\right)\right] \\
&= E\left[X_t X_s - \mu_t X_s - \mu_s X_t + \mu_t \mu_s\right] \\
&= E\left[X_t X_s\right] - E\left[\mu_t X_s\right] - E\left[\mu_s X_t\right] + E\left[\mu_t \mu_s\right] \\
&= E\left[X_t X_s\right] - \mu_t E\left[X_s\right] - \mu_s E\left[X_t\right] + E\left[\mu_t \mu_s\right] \\
&= E\left[X_t X_s\right] - \mu_t \mu_s - \mu_s \mu_t + \mu_t \mu_s \\
&= E\left[X_t X_s\right] - \mu_t \mu_s \qquad\qquad untuk\, t, s = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}$$

■

Estimasi parameter..., Ilmiyati Sari, FMIPA UI, 2009.

LAMPIRAN 2

Menunjukkan Ω (Matriks Autokovariansi), Berukuran N×N, dalam Proses *Circular* Dapat Dinyatakan sebagai

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + \ldots + \rho_{\frac{1}{2}(N-1)}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)})\}$$

Untuk N ganjil, dan

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + \ldots + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N})\}$$

Untuk N genap

Tujuan:

Dalam proses *circular*, matriks *autokovariansi* yang berukuran NxN mempunyai bentuk seperti dibawah ini:

$$E(\mathbf{XX}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

disini akan dibuktikan bahwa bentuk diatas dapat dinyatakan dalam bentuk lain seperti dibawah ini:

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + \ldots + \rho_{\frac{1}{2}(N-1)}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)})\},$$

dimana N bilangan ganjil positif, atau

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + ... + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N})\},$$

dimana N bilangan genap positif. Untuk semua nilai N, $\mathbf{I}$ menotasikan matriks identitas berukuran N×N dan $\mathbf{W}$ adalah *circulant definition of auxiliary identity matrix* berukuran N×N, dimana

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & \mathbf{I}_{(N-1)\times(N-1)} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

a) Untuk N bilangan ganjil posiitif, akan dibuktikan

$$\mathbf{\Omega}_{N\times N} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + ... + \rho_{\frac{1}{2}(N-1)}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)})\}$$

Bukti:

$$\mathbf{\Omega}_{1\times 1} = \sigma^2[1] = \sigma^2\mathbf{1}$$

$$\mathbf{\Omega}_{3\times3} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \rho_1 \mathbf{W} + \rho_1 \mathbf{W}' \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \rho_1 \left(\mathbf{W} + \mathbf{W}' \right) \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \rho_1 \left(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1} \right) \right\}$$

$$\mathbf{\Omega}_{5\times5} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_2 \\ \rho_2 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & \rho_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ \rho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ \rho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{5\times 5} &= \sigma^2\left\{\mathbf{I}+\rho_1\mathbf{W}+\rho_1\mathbf{W}'+\rho_2\mathbf{W}^2+\rho_2\left(\mathbf{W}^2\right)'\right\} \\
&= \sigma^2\left\{I+\rho_1\left(\mathbf{W}+\mathbf{W}'\right)+\rho_2\left(\mathbf{W}^2+\left(\mathbf{W}^2\right)'\right)\right\} \\
&= \sigma^2\left\{I+\rho_1\left(\mathbf{W}+\mathbf{W}^{-1}\right)+\rho_2\left(\mathbf{W}^2+\left(\mathbf{W}^2\right)^{-1}\right)\right\} \\
&= \sigma^2\left\{I+\rho_1\left(\mathbf{W}+\mathbf{W}^{-1}\right)+\rho_2\left(\mathbf{W}^2+\mathbf{W}^{-2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Dengan melihat pola pada $\mathbf{\Omega}_{3\times 3}$ dan $\mathbf{\Omega}_{5\times 5}$, tentu kita dapat memperluasnya lagi pada $\mathbf{\Omega}_{N\times N}$, dimana N bilangan ganjil positif, sebagai berikut:

$$
\mathbf{\Omega}_{N\times N}=\sigma^2\begin{bmatrix}
1 & \rho_1 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & \rho_1 \\
\rho_1 & 1 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-3)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & \rho_2 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
\rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-3)} & \dots & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} \\
\rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-3)} \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
\rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-3)} & \dots & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}
0 & \rho_1 & \dots & 0 & \dots & \rho_1 \\
\rho_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\rho_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
\rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} \\
\rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}\right\}
$$

$$
\mathbf{\Omega}_{N\times N}=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\rho_1&\cdots&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\ddots&\vdots\\\rho_1&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\cdots&\rho_1\\\rho_1&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\ldots+\right.
$$

$$
\left.\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\cdots&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\\\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\right\}
$$

$$
=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}+\rho_1\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\rho_1\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\cdots&1\\1&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\ldots+\right.
$$

$$
\left.\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\begin{bmatrix}0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\\1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\right\}
$$

$$
=\sigma^2\left\{\mathbf{I}+\rho_1\mathbf{W}+\rho_1\mathbf{W}'+\ldots+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)}+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\left(\mathbf{W}'\right)^{\frac{1}{2}(N-1)}\right\}
$$

$$
=\sigma^2\left\{\mathbf{I}+\rho_1\mathbf{W}+\rho_1\mathbf{W}^{-1}+\ldots+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)}+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)}\right\}
$$

$$
=\sigma^2\{\mathbf{I}+\rho_1(\mathbf{W}+\mathbf{W}^{-1})+\ldots+\rho_{\frac{1}{2}(N-1)}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}(N-1)}+\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}(N-1)})\} \qquad \blacksquare
$$

b) Untuk N bilangan genap posiitif, akan dibuktikan

$$\mathbf{\Omega}_{N\times N} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \dots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \rho_2(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}) + \dots + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N}(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N})\}$$

Bukti:

$$\mathbf{\Omega}_{2\times 2} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\rho_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \frac{1}{2}\rho_1 (\mathbf{W} + \mathbf{W}') \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \frac{1}{2}\rho_1 \left(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}\right) \right\}$$

$$\mathbf{\Omega}_{4\times 4} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2}\rho_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2}\rho_2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$\mathbf{\Omega}_{4\times4} = \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\mathbf{W} + \rho_1\mathbf{W}' + \frac{1}{2}\rho_2\left(\mathbf{W}^2 + \left(\mathbf{W}^2\right)'\right)\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\left(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}\right) + \frac{1}{2}\rho_2\left(\mathbf{W}^2 + \left(\mathbf{W}^2\right)^{-1}\right)\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\left(\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}\right) + \frac{1}{2}\rho_2\left(\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^{-2}\right)\right\}$$

Dengan melihat pola pada $\mathbf{\Omega}_{2\times2}$ dan $\mathbf{\Omega}_{4\times4}$, tentu kita dapat memperluasnya lagi pada $\mathbf{\Omega}_{N\times N}$, dimana N bilangan genap positif, sebagai berikut:

$$\mathbf{\Omega}_{N\times N} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N} & \rho_{\frac{1}{2}N-1} & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N-1} & \rho_{\frac{1}{2}N} & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \rho_{\frac{1}{2}N-1} & \rho_{\frac{1}{2}N-2} & \cdots & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N} \\ \rho_{\frac{1}{2}N} & \rho_{\frac{1}{2}N-1} & \cdots & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N-1} \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N-1} & \rho_{\frac{1}{2}N-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & \cdots & 0 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho_{\frac{1}{2}N} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \rho_{\frac{1}{2}N} \\ \rho_{\frac{1}{2}N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$
\mathbf{\Omega}_{N\times N} = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \rho_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \right.
$$

$$
\left. \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 2 \\ 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right\}
$$

$$
= \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \right.
$$

$$
\left. \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}
$$

$$
= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \rho_1 \mathbf{W} + \rho_1 \mathbf{W}' + \ldots + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N} \left(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \left(\mathbf{W}'\right)^{\frac{1}{2}N} \right) \right\}
$$

$$
= \sigma^2 \left\{ \mathbf{I} + \rho_1 \mathbf{W} + \rho_1 \mathbf{W}^{-1} + \ldots + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N} \left(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N} \right) \right\}
$$

$$
= \sigma^2 \{ \mathbf{I} + \rho_1 (\mathbf{W} + \mathbf{W}^{-1}) + \ldots + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1}{2}N} (\mathbf{W}^{\frac{1}{2}N} + \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}N}) \} \qquad \blacksquare
$$

LAMPIRAN 3

W Matriks Ortogonal

Tujuan:

Akan dibuktikan W adalah matriks ortogonal, yaitu:

$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}'$ dimana $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Bukti:

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{W})} Adj(\mathbf{W})$$

Pertama kali akan dicari $\det(\mathbf{W})$ dengan menggunakan teorema 2.2.1, yaitu perluasan kofaktor sepanjang kolom ke-1

$$\det(\mathbf{W}) = a_{11}\mathbf{C}_{11} + a_{21}\mathbf{C}_{21} + \dots + a_{N1}\mathbf{C}_{N1}$$

$$= 0(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{N-1\times N-1} + 0(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{N-1\times N-1} + \dots + 1(-1)^{N+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{N-1\times N-1}$$

$$= (-1)^{N+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{N-1\times N-1} = (-1)^{N+1}$$

Jika N bilangan ganjil, maka N+1 genap, sehingga $\det(\mathbf{W}) = 1$, sedangkan jika N genap, maka N+1 ganjil, sehingga $\det(\mathbf{W}) = -1$.

Selanjutnya akan dicari matriks kofaktor **C** karena $Adj(\mathbf{W}) = \mathbf{C}'$ (tranpose dari matriks kofaktor).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{(N-1)1} & C_{(N-1)2} & C_{(N-1)3} & \cdots & C_{(N-1)N} \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = 1.0 = 0$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)1(-1)^{(N-1)+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$= (-1)^{N+1}.1$$

$$= (-1)^{N+1} = \begin{cases} 1 & untuk\ N ganjil \\ -1 & untuk\ N\ genap \end{cases}$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = 1.0 = 0$$

$$C_{1N} = \left(-1\right)^{N+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = \left(-1\right)^{N+1}.0 = 0$$

$$C_{21} = \left(-1\right)^{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = -1.0 = 0$$

$$C_{22} = \left(-1\right)^{4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = 1.0 = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)1(-1)^{(N-1)+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$= (-1)^{N+1}.1$$

$$= (-1)^{N+1} = \begin{cases} 1 & untuk\ N ganjil \\ -1 & untuk\ N\ genap \end{cases}$$

$$C_{2N} = \left(-1\right)^{N+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = \left(-1\right)^{N+2}.0 = 0$$

$$C_{(N-1)1} = (-1)^N \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^N .0 = 0$$

$$C_{(N-1)2} = (-1)^{N+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{N+1} .0 = 0$$

$$C_{(N-1)3} = (-1)^{N+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{N+2} .0 = 0$$

$$C_{N1} = (-1)^{N+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{N+1} 1 = (-1)^{N+1} = \begin{cases} 1 & untuk\ N ganjil \\ -1 & untuk\ N\ genap \end{cases}$$

$$C_{(N-1)N} = (-1)^{2N-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{2N-1} 1 (-1)^{(N-1)+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-2)\times(N-2)}$$

$$= (-1)^{3N-1} .1$$

$$= (-1)^{3N-1} = \begin{cases} 1 & untuk\ N ganjil \\ -1 & untuk\ N\ genap \end{cases}$$

$$C_{N2} = (-1)^{N+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{N+2}.0 = 0$$

$$C_{N3} = (-1)^{N+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{N+3}.0 = 0$$

$$C_{NN} = (-1)^{2N} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = (-1)^{2N}.0 = 0$$

sehingga

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{(N-1)1} & C_{(N-1)2} & C_{(N-1)3} & \cdots & C_{(N-1)N} \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{W}$$

untuk N bilangan genap positif, sedangkan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{(N-1)1} & C_{(N-1)2} & C_{(N-1)3} & \cdots & C_{(N-1)N} \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{W}$$

untuk N bilangan ganjil positif.

Untuk N bilangan bilangan genap

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1} &= \frac{1}{-1} \times adj(\mathbf{W}) = -1 \times \mathbf{C}' \\ &= -1 \times (-1)\mathbf{W}' \\ &= \mathbf{W}' \end{aligned}$$

dan untuk N bilangan ganjil

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1} &= \frac{1}{1} \times adj(\mathbf{W}) = 1 \times \mathbf{C}' \\ &= \mathbf{W}' \end{aligned}$$

Jadi terbukti **W** ortogonal, $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}'$ ■

LAMPIRAN 4

Menunjukkan $\mathbf{W}_{N\times N}^{N}=\mathbf{I}_{N\times N}$

Tujuan:

Akan dibuktikan sifat ke-2 dari matriks **W**, yaitu

$\mathbf{W}_{N\times N}^{N}=\mathbf{I}$ dimana $\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\\1&0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}$ dan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas.

Bukti:

Untuk N=2

$$\mathbf{W}_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1)\text{ dimana }\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{ dan }\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{2\times2}^{2}=\mathbf{W}_{2\times2}.\mathbf{W}_{2\times2}=(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1)\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_{2\times2}$$

Untuk N=3

$$\mathbf{W}_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\text{ dimana }\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\text{ dan }\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{3\times3}^2 = \mathbf{W}_{3\times3}.\mathbf{W}_{3\times3} = \left(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{3\times3}^3 = \mathbf{W}_{3\times3}^2.\mathbf{W}_{3\times3} = \left(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3\times3}$$

Dengan melihat pola dari $\mathbf{W}_{2\times2}^2$ dan $\mathbf{W}_{3\times3}^3$, tentu kita dapat memperluasnya lagi pada $\mathbf{W}_{N\times N}^N$ sebagai berikut:

$$\mathbf{W}_{N\times N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1})$$ dimana $\mathbf{a}_j$ adalah vektor kolom yang entri ke-j adalaj 1 dan entri lainnya 0.

$$\mathbf{W}_{N\times N}^2 = \mathbf{W}_{N\times N}.\mathbf{W}_{N\times N} = \left(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-3}, \mathbf{a}_{N-2}\right)$$

$$\mathbf{W}_{N\times N}^3 = \mathbf{W}_{N\times N}^2.\mathbf{W}_{N\times N} = \left(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-3}, \mathbf{a}_{N-2}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_N, \dots, \mathbf{a}_{N-4}, \mathbf{a}_{N-3}\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{W}_{N\times N}^{N-1} = \mathbf{W}_{N\times N}^{N-2}.\mathbf{W}_{N\times N} = \left(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, ..., \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1\right)$$

$$\mathbf{W}_{N\times N}^{N} = \mathbf{W}_{N\times N}^{N-1}.\mathbf{W}_{N\times N} = \left(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_1\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_N\right)$$

$$= \mathbf{I}_{N\times N} \qquad \blacksquare$$

LAMPIRAN 5

Menunjukkan Ω (Matrik Autokovariansi), berukuran N×N, dalam Proses *Noncircular* Dapat Dinyatakan Sebagai $\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{U} + \mathbf{U}^{'}) + ... + \rho_{N-1}(\mathbf{U}^{N-1} + \mathbf{U}^{'(N-1)})\}$ untuk semua N

Tujuan:

Dalam proses *noncircular* matrik autokovariansi yang berukuran NxN dinyatakan dalam bentuk di bawah ini

$$E(\mathbf{XX}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_{N-2} & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_{N-3} & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_{N-4} & \rho_{N-3} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \rho_{N-4} & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

disini akan dibuktikan bahwa matriks autokovariansi diatas dapat dinyatakan dalam dalam bentuk

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2\{\mathbf{I} + \rho_1(\mathbf{U} + \mathbf{U}^{'}) + \rho_2(\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^{'2}) + ... + \rho_{N-1}(\mathbf{U}^{N-1} + \mathbf{U}^{'(N-1)})\}$$

Untuk sembarang N, dimana N bilangan asli. Untuk semua nilai N, $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas berukuran N×N dan $\mathbf{U}$ adalah *noncirculant definition of auxiliary identity matrix* berukuran N×N, dimana

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bukti:

$$\mathbf{\Omega}_{1\times1} = \sigma^2\left[1\right] = \sigma^2\mathbf{1}$$

$$\mathbf{\Omega}_{2\times2} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\mathbf{U} + \rho_1\mathbf{U}'\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\left(\mathbf{U} + \mathbf{U}'\right)\right\}$$

$$\mathbf{\Omega}_{3\times3} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 0 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_1\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\mathbf{U} + \rho_1\mathbf{U}' + \rho_2\mathbf{U}^2 + \rho_2\left(\mathbf{U}^2\right)'\right\}$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{I} + \rho_1\left(\mathbf{U} + \mathbf{U}'\right) + \rho_2\left(\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}'^2\right)\right\}$$

Dengan melihat pola pada $\mathbf{\Omega}_{2\times2}$ dan $\mathbf{\Omega}_{3\times3}$, tentu kita dapat memperluasnya lagi pada $\mathbf{\Omega}_{N\times N}$, dimana N bilangan asli, sebagai berikut:

$$\mathbf{\Omega}_{N\times N} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-2} & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-3} & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{N-4} & \rho_{N-3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \rho_{N-4} & \dots & 1 & \rho_1 \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_{N\times N}=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&1&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\rho_1&0&\dots&0&0\\\rho_1&0&\rho_1&\dots&0&0\\0&\rho_1&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&\rho_1\\0&0&0&\dots&\rho_1&0\end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&\rho_{N-1}\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\\rho_{N-1}&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&1&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\rho_1&0&\dots&0&0\\0&0&\rho_1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&\rho_1\\0&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\\rho_1&0&0&\dots&0&0\\0&\rho_1&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&\rho_1&0\end{bmatrix}+\dots+\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&\rho_{N-1}\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\\rho_{N-1}&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&1&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}+\rho_1\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&1\\0&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\rho_1\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&1&0\end{bmatrix}+\dots+\right.$$

$$\left.\rho_{N-1}\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&1\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}+\rho_{N-1}\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&0\\1&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{\mathbf{I}+\rho_1\mathbf{U}+\rho_1\mathbf{U}'+\dots+\rho_{N-1}\mathbf{U}^{N-1}+\rho_{N-1}\left(\mathbf{U}'\right)^{N-1}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{\mathbf{I}+\rho_1\left(\mathbf{U}+\mathbf{U}'\right)+\dots+\rho_{N-1}\left(\mathbf{U}^{N-1}+U'^{(N-1)}\right)\right\}$$

■

Lampiran 6

Menunjukkan $\mathbf{U}_{N\times N}^{N} = \mathbf{0}_{N\times N}$

Tujuan:

Akan dibuktikan sifat dari matriks **U**, yaitu

$\mathbf{U}_{N\times N}^{N} = \mathbf{0}$ dimana $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{0}$ adalah matriks nol.

Bukti:

Untuk N=2

$\mathbf{U}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{a}_1)$ dimana $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{U}_{2\times 2}^{2} = \mathbf{U}_{2\times 2}.\mathbf{U}_{2\times 2} = (\mathbf{0}, \mathbf{a}_1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2}$$

Untuk N=3

$\mathbf{U}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ dimana $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{U}_{3\times 3}^{2} = \mathbf{U}_{3\times 3}.\mathbf{U}_{3\times 3} = (\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{3\times3}^{3}=\mathbf{U}_{3\times3}^{2}.\mathbf{U}_{3\times3}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{a}_1\right)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\right)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{0}_{3\times3}$$

Dengan melihat pola dari $\mathbf{U}_{2\times2}^{2}$ dan $\mathbf{U}_{3\times3}^{3}$, tentu kita dapat memperluasnya lagi pada $\mathbf{U}_{N\times N}^{N}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{U}_{N\times N}=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}=(\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{a}_{N-1})$$ dimana $\mathbf{a}_j$ adalah vektor kolom yang entri ke-j adalaj 1 dan entri lainnya 0 dan **0** adalah vektor kolom 0.

$$\mathbf{U}_{N\times N}^{2}=\mathbf{U}_{N\times N}.\mathbf{U}_{N\times N}=\left(\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{a}_{N-1}\right)\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{N-3},\mathbf{a}_{N-2}\right)$$

$$\mathbf{U}_{N\times N}^{3}=\mathbf{U}_{N\times N}^{2}.\mathbf{U}_{N\times N}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{N-3},\mathbf{a}_{N-2}\right)\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots,\mathbf{a}_{N-4},\mathbf{a}_{N-3}\right)$$

$\vdots$

$$\mathbf{U}_{N\times N}^{N-1}=\mathbf{U}_{N\times N}^{N-2}.\mathbf{U}_{N\times N}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right)\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots,\mathbf{0},\mathbf{a}_1\right)$$

$$\mathbf{U}_{N\times N}^{N}=\mathbf{U}_{N\times N}^{N-1}.\mathbf{U}_{N\times N}=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{a}_1\right)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}$$

$$=\left(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}\right)$$

$$=\mathbf{0}_{N\times N}$$

■

LAMPIRAN 7

Menunjukkan distribusi dari d bebas dari parameter μ dan σ

Tujuan:

Misalkan terdapat N variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$, dapat dinyatakan sebagai:

$$X_i = \mu + \sigma e_i \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

dimana e_i mempunyai distribusi tertentu yang tidak bergantung pada μ dan σ. Akan dibuktikan distribusi marginal dari $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \bar{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N , dimana $\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$ dan $s_x^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 /(N-1)$, bebas dari parameter μ dan σ.

Bukti:

Berdasarkan persamaan (2.16), pdf bersama dari $\bar{x}, s_x$ dan d adalah

$$f\left(\bar{x}, s_x, d; \mu, \sigma\right) = \frac{s_x^{N-2}\left(d_N - d_{N-1}\right)}{\sigma^N} f\left(\frac{d_1 s_x + \bar{x} - \mu}{\sigma}, ..., \frac{d_N s_x + \bar{x} - \mu}{\sigma}\right)$$

Untuk mempermudah pembuktian misalkan $e_i \sim NIID(0,1)$,

$$f(e_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{e_i^2}{2}) \qquad -\infty < e_i < \infty$$

sehingga persamaan (2.16) menjadi

$$f\left(\bar{x},s_x,d;\mu,\sigma\right)=\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{\sigma^N}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_1s_x+\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\ldots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_Ns_x+\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$=\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d_is_x+\left(\bar{x}-\mu\right)}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$=\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\sum d_i^2+2s_x\left(\bar{x}-\mu\right)\sum d_i+\sum\left(\bar{x}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

dari pada sub bab 3.3.1.1 c) dan d) telah dibuktikan bahwa $\sum d_i=0$ dan $\sum d_i^2=N-1$, sehingga

$$f\left(\bar{x},s_x,d;\mu,\sigma\right)=\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)+N\left(\bar{x}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

Berdasarkan definisi dalam sub. bab 2.6, maka distribusi marginal dari d

$$f(d)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)+N\left(\bar{x}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\right)d\bar{x}ds_x \qquad u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \qquad \bar{x}=-\infty\rightarrow u=-\infty$$

$$=\int_0^\infty\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{N\left(\bar{x}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\right)d\bar{x}ds_x \qquad du=\frac{1}{\sigma}d\bar{x} \qquad \bar{x}=\infty\rightarrow u=\infty$$

$$d\bar{x}=\sigma du$$

$$=\int_0^\infty\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{1Nu^2}{2}\right)\sigma duds_x \qquad (1)$$

Sebelum menyelesaikan integral diatas, terlebih dahulu akan dicari nilai dari

$$\int_{-\infty}^\infty\exp(-\frac{y^2}{2})\,dy$$

Misalkan

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2})\, dy$$

Integral ini ada, karena integrannya positif kontinu dan dibatasi oleh fungsi yang integrabel, yaitu:

$$0 < \exp(-\frac{y^2}{2}) < \exp(-|y|+1) \qquad -\infty < y < \infty$$

dan $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|y|+1)\, dy = 2e$.

Untuk menghitung integral I, I>0 dan $I^2 > 0$ ditulis:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{y^2+z^2}{2})\, dydz$$

Misalkan $y = r\cos\theta$ dan $z = r\sin\theta$, maka $y^2 + z^2 = r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r^2$ dan

$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$, sehingga

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2/2\right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\exp\left(-r^2/2\right)\Big|_0^{\infty} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

berarti $I = \sqrt{2\pi}$ (2)

Dari (1)

$$g=\sqrt{N}u \qquad u=-\infty \rightarrow g=-\infty$$

$$dg=\sqrt{N}du \qquad u=\infty \rightarrow g=\infty$$

$$du=1/\sqrt{N}dg$$

$$f(d)=\int_{0}^{\infty}\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}\sigma^{N}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1Nu^2}{2}\right)\sigma du ds_x$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}\sigma^{N-1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{g^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{N}}dg ds_x$$

Berdsarakan persamaan (1), maka

$$h=\frac{s_x}{\sigma} \qquad s_x=0\rightarrow h=0$$

$$dh=\frac{1}{\sigma}ds_x \qquad s_x=\infty\rightarrow h=\infty$$

$$ds_x=\sigma dh$$

$$f(d)=\int_{0}^{\infty}\frac{s_x^{N-2}(d_N-d_{N-1})}{\sqrt{N}\left(2\pi\right)^{\frac{N-1}{2}}\sigma^{N-1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)ds_x$$

$$=\frac{(d_N-d_{N-1})}{\sqrt{N}\left(2\pi\right)^{\frac{N-1}{2}}\sigma}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{s_x}{\sigma}\right)^{N-2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s_x^2\left(N-1\right)}{\sigma^2}\right)ds_x$$

$$=\frac{(d_N-d_{N-1})}{\sqrt{N}\left(2\pi\right)^{\frac{N-1}{2}}\sigma}\int_{0}^{\infty}h^{N-2}\exp\left(-\frac{1(N-1)}{2}h^2\right)\sigma dh$$

$$=\frac{(d_N-d_{N-1})}{\sqrt{N}\left(2\pi\right)^{\frac{N-1}{2}}}\int_{0}^{\infty}h^{N-2}\exp\left(-\frac{1(N-1)}{2}h^2\right)dh$$

Nilai dari integral $\int_{0}^{\infty}h^{N-2}\exp\left(-\frac{1(N-1)}{2}h^2\right)dh$ tidak bergantung pada σ,

sehingga terbukti bahwa distribusi marginal dari d tidak bergantung pada μ

dan σ. ■

Lampiran 8

Menunjukkan σZ_t Mempunyai Sifat-Sifat Distribusi

yang Sama dengan a_t

Tujuan:

Akan dibuktikan σZ_t mempunyai mean 0 dan variansi σ^2 sama halnya dengan a_t, dimana Z_t mempunyai mean nol, variansi 1 dan independent.

Bukti:

$$\begin{aligned}\mu_{\sigma Z_t} &= E(\sigma Z_t)\\ &= \sigma E(Z_t)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\sigma Z_t) &= E\left[(\sigma Z_t)^2\right] - \left[E(Z_t)\right]^2\\ &= E\left[\sigma^2 Z_t^2\right] - 0\\ &= \sigma^2 E(Z_t - 0)^2\\ &= \sigma^2 Var(Z_t)\\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

■

Lampiran 9

θ memaksimumkan $L(\theta)$ $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

Tujuan:

Menunjukkan, θ memaksimumkan $L(\theta)$ $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Bukti:

$(\rightarrow)$ Adit: θ memaksimumkan $L(\theta) \rightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

Karena θ memaksimumkan $L(\theta)$, maka:

- $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

  $$\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

  $$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (1)$$

- $$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

  $$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 . \frac{1}{L(\theta)}$$

  $$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{L(\theta)}<\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}+0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{L(\theta)}<\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot 0+0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{L(\theta)}<0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right)<0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}\right)<0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2}<0 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) terlihat bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

$(\leftarrow)$ Adit: θ memaksimumkan $\ln L(\theta) \rightarrow \theta$ memaksimumkan $L(\theta)$.

Karena θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$, maka

- $$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$L(\theta)\cdot\frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=L(\theta)\cdot 0$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{3}$$

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot 0 + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot L(\theta) < 0 \cdot L(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0 \tag{4}$$

Dari (3) dan (4) terlihat bahwa θ juga memaksimumkan $L(\theta)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

■

Lampiran 10

Data "*Annual yield of grain on Broadbalk field at Rothamsted* 1852-1925"

tahun	hasil panen	tahun	hasil panen	tahun	hasil panen	tahun	hasil panen	tahun	hasil panen	tahun	hasil panen
1853	1.92	1867	2.32	1881	2.14	1895	3.17	1909	2.78	1923	1.51
1854	1.26	1868	1.97	1882	2.25	1896	3.26	1910	2.19	1924	1.01
1855	3	1869	2.92	1883	2.52	1897	2.72	1911	2.84	1925	1.34
1856	2.51	1870	2.53	1884	2.36	1898	3.03	1912	1.39		
1857	2.55	1871	2.64	1885	2.82	1899	3.02	1913	1.7		
1858	2.9	1872	2.29	1886	2.61	1900	2.36	1914	2.26		
1859	2.82	1873	1.82	1887	2.51	1901	2.83	1915	2.78		
1860	2.54	1874	2.72	1888	2.61	1902	2.76	1916	2.01		
1861	2.09	1875	2.12	1889	2.75	1903	2.07	1917	1.23		
1862	2.47	1876	1.73	1890	3.49	1904	1.63	1918	2.87		
1863	2.74	1877	1.66	1891	3.22	1905	3.02	1919	2.12		
1864	3.23	1878	2.12	1892	2.37	1906	3.27	1920	2.39		
1865	2.91	1879	1.19	1893	2.52	1907	2.75	1921	2.23		
1866	2.67	1880	2.66	1894	3.23	1908	2.97	1922	2.73		

tahun	di	tahun	di	tahun	di	tahun	di	tahun	di
1853	-0.917	1868	-0.8284	1883	0.1461	1898	1.0498	1913	-1.3068
1854	-2.0864	1869	0.8549	1884	-0.1374	1899	1.0321	1914	-0.3146
1855	0.9966	1870	0.1638	1885	0.6777	1900	-0.1374	1915	0.6068
1856	0.1284	1871	0.3587	1886	0.3056	1901	0.6954	1916	-0.7575
1857	0.1993	1872	-0.2614	1887	0.1284	1902	0.5714	1917	-2.1396
1858	0.8194	1873	-1.0942	1888	0.3056	1903	-0.6512	1918	0.7663
1859	0.6777	1874	0.5005	1889	0.5536	1904	-1.4308	1919	-0.5626
1860	0.1816	1875	-0.5626	1890	1.8648	1905	1.0321	1920	-0.0842
1861	-0.6158	1876	-1.2537	1891	1.3864	1906	1.4750	1921	-0.3677
1862	0.0575	1877	-1.3777	1892	-0.1197	1907	0.5536	1922	0.5182
1863	0.5359	1878	-0.5626	1893	0.1461	1908	0.9435	1923	-1.6435
1864	1.4041	1879	-2.2105	1894	1.4041	1909	0.6068	1924	-2.5294
1865	0.8371	1880	0.3942	1895	1.2978	1910	-0.4386	1925	-1.9447
1866	0.4119	1881	-0.5272	1896	1.4573	1911	0.7131		
1867	-0.2083	1882	-0.3323	1897	0.5005	1912	-1.8561		

Lampiran 11

Taksiran Parameter AR (1) dengan Fungsi Marginal Likelihood

Untuk Data "*Annual yield of grain on Broadbalk field*

***at Rothamsted* 1852-1925"**

Tujuan:

Berikut ini akan diberikan penurunan untuk mendapatkan taksiran parameter AR (1) untuk Data "*Annual yield of grain on Broadbalk field at Rothamsted* 1852-1925" jika variabel error dianggap sebagai proses *circular* dan *noncircular*. Hasil taksiran diperoleh dengan menggunakan bantuan *software* Maple 9.5.

(1). Taksiran parameter AR (1) jika variabel error dianggap sebagai proses yang *circular*

Fungsi marginal likelihood untuk data ini adalah

$$L(\rho;d) = \left(1-\rho^{73}\right)\left(1-\rho\right)^{-1} 72^{-\frac{72}{2}} \left(1-0.773995406\rho+\rho^2\right)^{-\frac{72}{2}}$$

dalam Maple 9.5 diberikan dengan

```
> L1(rho):=(1-rho^73)*(1-rho)^(-1)*(72)^(-72/2)*(1-
2*0.386997703*rho+rho^2)^(-72/2);
```

$$L1(\rho) := (1-\rho^{73}) \Big/ (73108836365628197251824330703246272444819209836911221841738030 1 \, (1-\rho)\,(1-0.773995406\rho+\rho^2)^{36})$$

Taksiran parameter *autoregressive* orde 1, diperoleh dengan memaksimumkan fungsi marginal likelihood diatas. Telah dibuktikan pada lampiran 9 bahwa θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Ln dari fungsi marginal likelihood diatas, yaitu:

> **L2(rho):=ln(L1(rho));**

$L2(\rho) := \ln((1-\rho^{73}) \,/\, (73108836365628197251824330703246272444819209836911221841738030120$

$(1-\rho)\,(1-0.773995406\rho+\rho^2)^{36}))$

> **L3(rho):=diff(L2(rho),rho)=0;**

$L3(\rho) := 7310883636562819725182433070324627244481920983691122184173803012096(-73\,\rho^{72} \,/\, ($
$7310883636562819725182433070324627244481920983691122184173803012096\,(1-\rho)$
$(1-0.773995406\,\rho+\rho^2)^{36}) + (1-\rho^{73}) \,/\, ($
$7310883636562819725182433070324627244481920983691122184173803012096\,(1-\rho)^2$
$(1-0.773995406\;\rho+\rho^2)^{36}) - (1-\rho^{73})\,(-0.773995406\;+2\,\rho) \,/\, ($
$203080101015633881255067585286795201235608916213642282893716750336\quad(1-\rho)$
$(1-0.773995406\;\rho+\rho^2)^{37}))\,(1-\rho)\,(1-0.773995406\;\rho+\rho^2)^{36} \,/\, (1-\rho^{73}) = 0$

> **solve(%);**

-1., 1., -0.9961482043 − 0.08768554625I, -0.9961482043 + 0.08768554625I,
-0.9846221909 − 0.1746972845I, -0.9846221909 + 0.1746972845I, -0.9655098581 − 0.2603664991I,
-0.9655098581 + 0.2603664991I, -0.9389569642 − 0.3440346194I, -0.9389569642 + 0.3440346194I,
-0.9051660243 − 0.4250581941I, -0.9051660243 + 0.4250581941I, -0.8643947788 − 0.5028137493I,
-0.8643947788 + 0.5028137493I, -0.8169542443 − 0.5767024907I, -0.8169542443 + 0.5767024907I,
-0.7632063637 − 0.6461548161I, -0.7632063637 + 0.6461548161I, -0.7035612726 − 0.7106346007I,
-0.7035612726 + 0.7106346007I, -0.6384742046 − 0.7696432225I, -0.6384742046 + 0.7696432225I,
-0.5684420600 − 0.8227232976I, -0.5684420600 + 0.8227232976I, -0.4939996654 − 0.8694620927I,
-0.4939996654 + 0.8694620927I, -0.4157157549 − 0.9094945910I, -0.4157157549 + 0.9094945910I,
-0.3341887058 − 0.9425061851I, -0.3341887058 + 0.9425061851I, -0.2500420641 − 0.9682349747I,
-0.2500420641 + 0.9682349747I, -0.1639198989 − 0.9864736523I, -0.1639198989 + 0.9864736523I,
-0.07648202479 − 0.9970709603I, -0.07648202479 + 0.9970709603I,
0.01160086285 − 0.9999327077I, 0.01160086285 + 0.9999327077I, 0.09965209611 − 0.9950223413I,
0.09965209611 + 0.9950223413I, 0.1869939373 − 0.9823610677I, 0.1869939373 + 0.9823610677I,
0.2729524269 − 0.9620275322I, 0.2729524269 + 0.9620275322I, 0.3568621247 − 0.9341570660I,

$0.3568621247 + 0.9341570660\,I,\ 0.4069178784,\ 0.4380706924 - 0.8989405255\,I,$
$0.4380706924 + 0.8989405255\,I,\ 0.5159432669 - 0.8566227555\,I,\ 0.5159432669 + 0.8566227555\,I,$
$0.5898665822 - 0.8075007215\,I,\ 0.5898665822 + 0.8075007215\,I,\ 0.6592528121 - 0.7519213587\,I,$
$0.6592528121 + 0.7519213587\,I,\ 0.7235431411 - 0.6902791630\,I,\ 0.7235431411 + 0.6902791630\,I,$
$0.7822111251 - 0.6230134475\,I,\ 0.7822111251 + 0.6230134475\,I,\ 0.8347659977 - 0.5506048756\,I,$
$0.8347659977 + 0.5506048756\,I,\ 0.8807562048 - 0.4735699607\,I,\ 0.8807562048 + 0.4735699607\,I,$
$0.9197735940 - 0.3924494054\,I,\ 0.9197735940 + 0.3924494054\,I,\ 0.9514587921 - 0.3077761636\,I,$
$0.9514587921 + 0.3077761636\,I,\ 0.9755083192 - 0.2199625405\,I,\ 0.9755083192 + 0.2199625405\,I,$
$0.9916847225 - 0.1286911467\,I,\ 0.9916847225 + 0.1286911467\,I,\ 2.457498314$

Berdasarkan persamaan (2.4), $\alpha_1 = -\rho_1$, dan nilai $-1 < \rho_1 < 1$, sehingga

α_1 =0.4069178784.

(2). Taksiran parameter AR (1) jika variabel error dianggap sebagai proses yang *noncircular*

Fungsi marginal likelihood untuk data ini adalah

$$L(\rho;d) = (1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{71}{73}\rho\right)^{-\frac{1}{2}}\left(72+67{,}3772808\rho_1^2-2.26{,}08054\rho-\frac{8.18929949\rho_1^2(1-\rho)}{73-71\rho}\right)^{-\frac{72}{2}}$$

dalam Maple 9.5 diberikan dengan

```
> L2(rho,d):=(1+rho)^(1/2)*(1-(71/73)*rho)^(-
1/2)*(67.3772808*rho^2-2*26.08054428*rho+72-(rho^2*(1-
rho)*8.18929949)/(72-71*rho))^(-1/2*72);
```

$$\mathrm{L2}(\rho, d) := \frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\frac{71\,\rho}{73}}\left(67.3772808\rho^2 - 52.16108856\rho + 72 - \frac{8.18929949\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{36}}$$

Taksiran parameter *autoregressive* orde 1, diperoleh dengan memaksimumkan fungsi marginal likelihood diatas. Telah dibuktikan pada lampiran 9 bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan ln$L(\theta)$.

Ln dari fungsi marginal likelihood diatas, yaitu:

> **L3(rho,d):=ln(L2(rho,d));**

$$\mathrm{L3}(\rho, d) := \ln\left(\frac{\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\frac{71\,\rho}{73}}\left(67.3772808\,\rho^2 - 52.16108856\,\rho + 72 - \frac{8.18929949\,\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{36}}\right)$$

> **L3(rho,d):=diff(L3(rho,d),rho)=0;**

$$\mathrm{L3}(\rho, d) := \left(\frac{1}{2\sqrt{1+\rho}\,\sqrt{1-\frac{71\,\rho}{73}}\left(67.3772808\,\rho^2 - 52.16108856\,\rho + 72 - \frac{8.18929949\,\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{36}}\right.$$
$$+\frac{71\sqrt{1+\rho}}{146\left(1-\frac{71\,\rho}{73}\right)^{(3/2)}\left(67.3772808\,\rho^2 - 52.16108856\,\rho + 72 - \frac{8.18929949\,\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{36}} - 36\sqrt{1+\rho}$$
$$\left(134.7545616\,\rho - 52.16108856 - \frac{16.37859898\,\rho\,(1-\rho)}{72-71\,\rho} + \frac{8.18929949\,\rho^2}{72-71\,\rho} - \frac{581.4402638\,\rho^2\,(1-\rho)}{(72-71\,\rho)^2}\right)$$
$$\left.\Bigg/\left(\sqrt{1-\frac{71\,\rho}{73}}\left(67.3772808\,\rho^2 - 52.16108856\,\rho + 72 - \frac{8.18929949\,\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{37}\right)\right)$$
$$\sqrt{1-\frac{71\,\rho}{73}}\left(67.3772808\,\rho^2 - 52.16108856\,\rho + 72 - \frac{8.18929949\,\rho^2\,(1-\rho)}{72-71\,\rho}\right)^{36} \Bigg/ \sqrt{1+\rho} = 0$$

> **solve(%);**

-1.014193975, 0.4024965490, 1.011108766 − 0.006608275492*I*, 1.011108766 + 0.006608275492*I*, 1.019491442

Berdasarkan persamaan (2.4), $\alpha_1 = -\rho_1$, dan nilai $-1 \le \rho_1 \le 1$, sehingga $\alpha_1 = 0.4024965490$.