

**PELABELAN HARMONIOUS PADA GRAF HASIL OPERASI
GRAF HARMONIOUS**

R. ARKAN GILANG

0 3 0 3 0 1 0 3 1 1



**UNIVERSITAS INDONESIA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
2009**

**PELABELAN HARMONIOUS PADA GRAF HASIL OPERASI
GRAF HARMONIOUS**

**Skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains**

Oleh :

R. ARKAN GILANG

0 3 0 3 0 1 0 3 1 1



DEPOK

2009

SKRIPSI : PELABELAN HARMONIOUS PADA GRAF HASIL

OPERASI GRAF HARMONIOUS

NAMA : R. ARKAN GILANG

NPM : 0303010311

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 10 JULI 2009

Dr. Kiki.Ariyanti Sugeng

Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom

PEMBIMBING I

PEMBIMBING II

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana : 10 Juli 2009

PENGUJI I : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng

PENGUJI II : Dr. Sri Mardiyati

PENGUJI III : Dra. Rustina

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah SWT. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

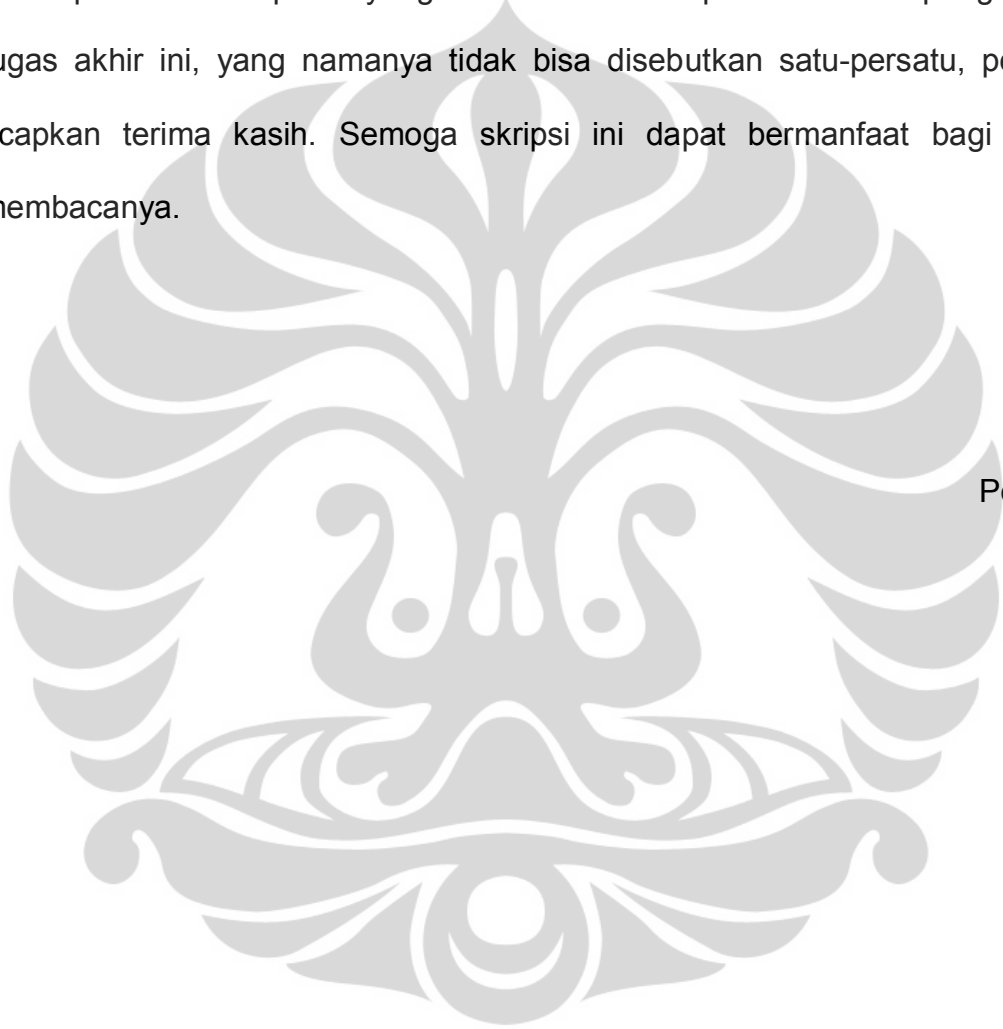
Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Orang tua yang tercinta yang selalu ada untuk membantu dan menyemangati di semua situasi.
2. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng selaku pembimbing I, dan Ibu Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing II. Terima kasih yang teramat banyak untuk semua nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat yang luar biasa yang telah diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Drs. Gatot Fatwanto H. MSc., PhD selaku pembimbing akademik penulis selama menyelesaikan masa studi dan Dra. Bevina D. Handari, MSc., PhD atas semua bantuan dan nasihatnya.

4. Dr. Yudi Satria selaku Ketua Departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku Sekretaris Departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku Koordinator Pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
5. Untung Darwadi Mochtar, SH. atas segala bantuan dan petunjuk-petunjuk yang diberikan.
6. Seluruh staf pengajar di Departemen Matematika UI atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis.
7. Seluruh karyawan di Departemen Matematika UI khususnya mba Santi dan pak Ansori.
8. Gunung, Ilham, Bembi, Diki, Wanto, Jahe, Eny, Mita, dan semua teman-teman seperjuangan yang telah berjuang bersama dengan sangat kompak.
9. Ario Pratyakso, Ardian Nurandy, dan Indriono atas semua bantuan semangat dan dukungannya.
10. Juwita Wichapradita atas semua bantuan dan semangatnya serta Yanuar Singgih atas segala bantuan penginapan, peralatan, dan hiburan selama pengerjaan tugas akhir ini.
11. Seluruh teman-teman angkatan 2003 yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.
12. Bunayya-ers and friends atas semua hiburan-hiburan pelepas stress.

13. Kepada semua teman-teman yang telah membantu pengerjaan skripsi ini, terutama teman-teman di Matematika UI, khususnya angkatan 2004, 2005, 2006.

Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tugas akhir ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya.



Penulis
2009

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul $V=V(G)$ dan himpunan busur $E=E(G)$, dimana $|E|$ menyatakan banyaknya busur dan $|V|$ menyatakan banyaknya simpul. Suatu pemetaan λ dari V ke $Z_{|E|}$ dimana $|V| \leq |E|$ disebut pelabelan harmonious jika λ merupakan pemetaan injektif sedemikian sehingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda. Dalam skripsi ini akan diberikan pelabelan harmonious untuk graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonious yang memiliki jumlah busur sama, graf hasil penjumlahan graf harmonious yang banyak busur sama dengan banyak simpulnya dengan graf tanpa busur, dan graf hasil kali kartesian dari graf harmonious yang banyak busur sama dengan banyak simpulnya dengan graf lintasan dengan panjang 2.

Kata kunci: pelabelan harmonious, gabungan graf, penjumlahan pada graf, hasil kali kartesian pada graf

viii+34 hlm.

Bibilografi: 6 (1980-2009)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
ABSTRAK.....	iv
DAFTAR ISI.....	v
DAFTAR TABEL.....	vii
DAFTAR GAMBAR.....	viii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Permasalahan.....	2
1.3 Tujuan.....	2
1.4 Pembatasan Masalah.....	3
1.5 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Grup Bilangan Bulat Modulo n	4
2.2 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf.....	7
2.3 Jenis-Jenis Graf dan Operasi pada Graf.....	9
2.4 Pelabelan Harmonious.....	12
BAB II PELABELAN HARMONIOUS PADA HASIL OPERASI GRAF HARMONIOUS.....	14
3.1 Pelabelan Harmonious dari Gabungan Graf Harmonious.....	16
3.2 Pelabelan Harmonious dari Graf Hasil Penjumlahan.....	21

3.3 Pelabelan Harmonious dari Graf Hasil Kali Kartesian.....	27
KESIMPULAN	33
DAFTAR PUSTAKA.....	34



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Z_6 dengan operasi + 5



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh graf dengan 4 simpul dan 5 busur.....	8
Gambar 2.2 Contoh graf dengan (a) gelung, (b) busur berganda, dan (c) graf sederhana	8
Gambar 2.3 Contoh graf (a) lintasan (b) lingkaran (c) pohon	10
Gambar 2.4 (a) $C_3 \circ K_1$ (b) $C_3 \circ K_2$	10
Gambar 2.5 Contoh operasi gabungan pada graf	11
Gambar 2.6 Contoh operasi penjumlahan pada graf.....	11
Gambar 2.7 Contoh hasil kali kartesian dari graf	12
Gambar 2.8 Pelabelan harmonious pada C_5	13
Gambar 3.1 Ilustrasi kasus pembuktian Teorema 3.1	18
Gambar 3.2 Contoh 3 buah graf harmonious dengan 6 buah busur.....	20
Gambar 3.3 Contoh pelabelan harmonious dari hasil gabungan graf.....	20
Gambar 3.4 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 simpul untuk ketiga kasus pada pembuktian teorema 3.2	22
Gambar 3.5 Ilustrasi pengelompokan busur (a) E_0 (b) E_1 (c) E_i	24
Gambar 3.6 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 busur untuk ketiga kasus pada pembuktian teorema 3.2	24
Gambar 3.7 Pelabelan harmonious pada $C_3 \circ K_1$	26
Gambar 3.8 Pelabelan harmonious pada $C_3 \circ K_1 + K_2$	26
Gambar 3.9 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 simpul untuk ketiga kasus pada pembuktian teorema 3.3	28
Gambar 3.10 Ilustrasi pengelompokan busur pada $G' \times P_2$	30
Gambar 3.11 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 busur untuk ketiga kasus pada pembuktian teorema 3.3	30
Gambar 3.12 Pelabelan harmonious pada sebuah graf <i>unicyclic</i>	32
Gambar 3.13 Contoh pelabelan harmonious pada graf hasil kali kartesian ..	32

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Pendahuluan

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler (1707-1783). Saat itu graf digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan jembatan Konigsberg. Di kota Konigsberg terdapat 7 jembatan yang menghubungkan 4 daratan. Warga kota Konigsberg ingin mengetahui apakah mungkin melewati semua jembatan tepat sekali dan kembali ke tempat awal. Dengan memodelkan masalah tersebut menjadi graf didapat solusi bahwa hal tersebut tidak mungkin.

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ terdiri atas suatu himpunan tak-kosong dan berhingga $V = V(G)$ yang anggotanya disebut simpul, dan suatu himpunan berhingga $E = E(G)$ yang anggotanya disebut busur, dimana busur tersebut merupakan pasangan tak-terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada $V(G)$. Banyak anggota pada himpunan simpul V dinyatakan sebagai $|V|$. Banyaknya busur pada suatu graf G dinyatakan sebagai $|E|$.

Pelabelan L pada graf $G(V, E)$ adalah pemetaan dari himpunan busur V atau himpunan simpul E , atau keduanya $(V \cup E)$ ke suatu himpunan, biasanya himpunan bilangan asli, dengan kondisi tertentu. $L(x)$ disebut label dari simpul atau busur x .

Pelabelan L pada graf $G(V, E)$ dimana $|E(G)| \geq |V(G)|$ dikatakan pelabelan harmonious jika dan hanya jika L adalah pemetaan injektif dari V ke

$\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda.

Pelabelan harmonious diperkenalkan oleh Graham dan Sloane pertama kali pada tahun 1980 berawal dari masalah pada *error-correcting code*. Pelabelan harmonious memiliki beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan tersedia sebanyak $|E|$ saluran frekuensi, simpul-simpul merepresentasikan stasiun komunikasi dan busur merepresentasikan jalur komunikasi yang ada dari satu stasiun ke stasiun lain. Dengan memberikan kode pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan kode dua stasiun yang berkomunikasi.

Mencari rumus umum untuk pelabelan harmonious cukup sulit dan berbeda-beda untuk tiap kelas graf. Oleh karena itu banyak graf yang belum diketahui apakah memiliki pelabelan harmonious atau tidak.

1.2 Permasalahan

Dapatkah ditemukan pelabelan harmonious pada graf-graf lain yang belum diketahui, khususnya graf yang dihasilkan dari operasi gabungan, penjumlahan, dan perkalian kartesian dari graf harmonious yang telah diketahui?

1.3 Tujuan

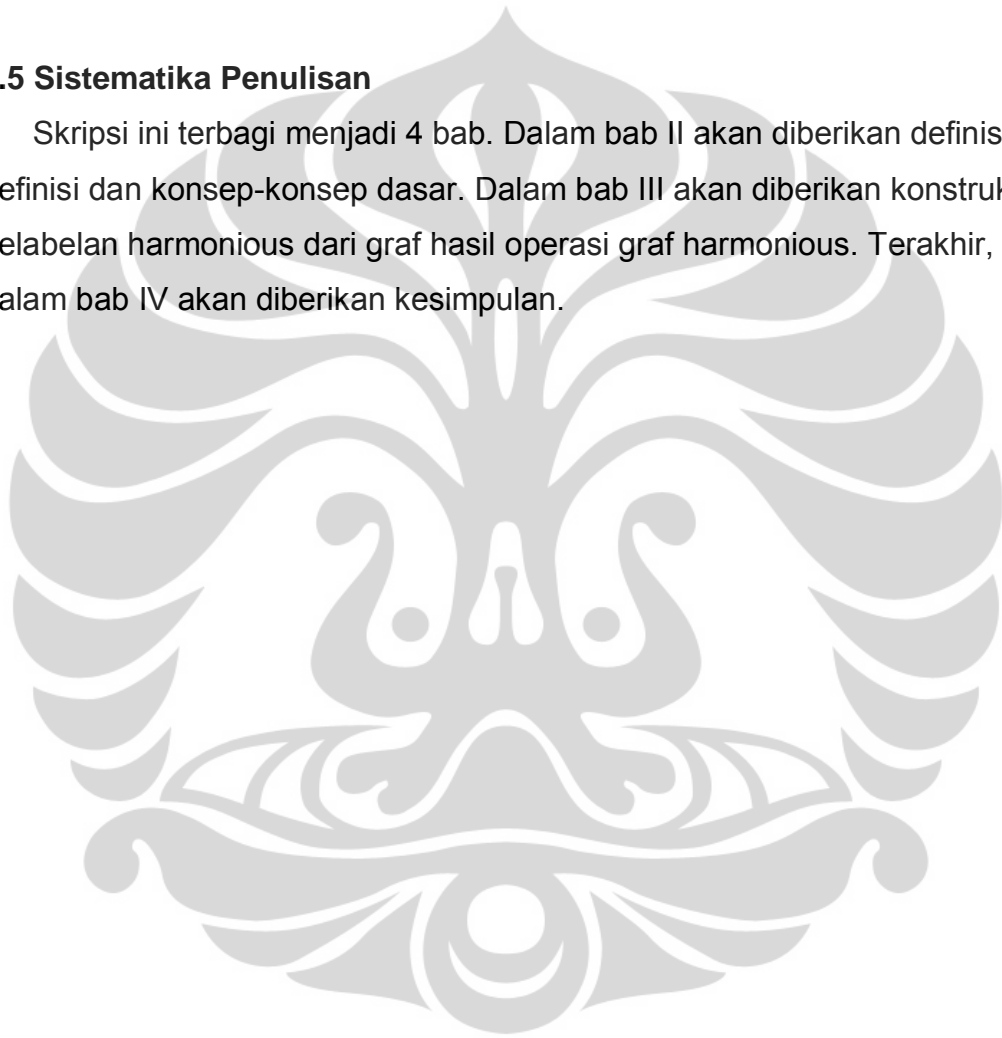
Mencari pelabelan harmonious dari hasil operasi gabungan, penjumlahan, dan perkalian kartesian dari graf harmonious yang telah diketahui.

1.4 Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini hanya dibatasi pada konstruksi pelabelan harmonious pada hasil operasi gabungan, penjumlahan, dan perkalian kartesian dari graf harmonious yang telah diketahui.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terbagi menjadi 4 bab. Dalam bab II akan diberikan definisi-definisi dan konsep-konsep dasar. Dalam bab III akan diberikan konstruksi pelabelan harmonious dari graf hasil operasi graf harmonious. Terakhir, dalam bab IV akan diberikan kesimpulan.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dalam aljabar, teori graf, pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

2.1 Grup Bilangan Bulat Modulo n

Berikut ini akan diberikan definisi dan beberapa lema dan teorema dari grup bilangan bulat modulo n dan kosetnya yang akan dipakai lebih lanjut di bab selanjutnya.

Suatu sistem matematika yang terdiri atas himpunan G dan operasi biner $+$ disebut **grup** (Arifin, 2001) jika $\forall a, b, c \in G$ berlaku

1. $a + b \in G$ (operasi $+$ tertutup di G)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (sifat komutatif)
3. $\exists e \in G$ sehingga $a + e = e + a = a, \forall a \in G$ (mempunyai elemen satuan)
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sehingga $a + a^{-1} = e$ (setiap elemen memiliki invers)

Diketahui \mathbb{Z} merupakan himpunan seluruh bilangan bulat dan $n \in \mathbb{Z}$. Didefinisikan relasi \sim pada \mathbb{Z} yaitu: diketahui $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \sim b$ jika dan hanya jika $a - b = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Relasi \sim tersebut dinamakan **relasi ekuivalen modulo n** (Arifin, 2001).

Kelas a modulo n adalah himpunan semua bilangan-bilangan bulat yang memiliki relasi modulo n dengan a , ditulis sebagai $[a]$. Diketahui $n \in \mathbb{Z}$, maka $G = \{ [0], [1], \dots, [n - 1] \}$ (himpunan kelas-kelas modulo n) merupakan grup terhadap operasi $+$ (penjumlahan modulo n) yang didefinisikan sebagai

$[a] + [b] = [a + b]$. Grup tersebut dinamakan grup bilangan bulat modulo n , yang dilambangkan dengan \mathbb{Z}_n .

\mathbb{Z}_6 merupakan salah satu contoh dari grup bilangan bulat modulo. $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dengan operasi $+$ didefinisikan seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 \mathbb{Z}_6 dengan operasi $+$

$+$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Lema 2.1 (Arifin, 2001)

Pada \mathbb{Z}_n , jika $0 < a \neq b < n$ maka $[a] \neq [b]$.

Bukti

Misalkan $[a] = [b]$, ambil $b \in [b] \rightarrow b \in [a]$ yang berarti $b - a = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Anggap $b > a$. Karena $0 < a < b < n$ maka berlaku $0 < b - a < n$. Karena $0 < b - a = qn < n$ menyebabkan kontradiksi maka dapat diambil kesimpulan $[a] \neq [b]$. ■

Suatu subhimpunan tidak kosong H dari grup $G = (G, +)$ dikatakan **subgrup** (Arifin, 2001) jika dan hanya jika H tertutup terhadap operasi $+$ dan H membentuk grup terhadap operasi $+$. Misalkan $n = ab$ untuk bilangan-bilangan bulat a dan b , maka suatu subhimpunan $\mathbb{Z}_{n|a} = \{[0], [a], [2a], \dots\}$

..., $[(b-1)a]$ merupakan subgrup dari \mathbb{Z}_n . Contohnya pada \mathbb{Z}_6 memiliki subgrup $\mathbb{Z}_{6|2} = \{[0], [2], [4]\}$.

Misalkan H subgrup dari grup G , himpunan $H + a = \{h + a | h \in H\}$ untuk sembarang $a \in G$ disebut sebagai **koset kanan** terhadap subgrup H sedangkan himpunan $a + H = \{a + h | h \in H\}$ untuk sembarang $a \in G$ disebut sebagai **koset kiri** terhadap subgrup H . Pada grup yang bersifat komutatif berlaku $a + H = H + a$. Maka untuk memudahkan, $H + a$ atau $a + H$ disebut sebagai **koset** terhadap subgrup H (Arifin, 2001). Contohnya pada \mathbb{Z}_6 dengan subgrup $\mathbb{Z}_{6|2}$ memiliki koset-koset:

$$\mathbb{Z}_{6|2} + [0] = \{[0], [2], [4]\}$$

$$\mathbb{Z}_{6|2} + [1] = \{[1], [3], [5]\}$$

Teorema 2.1 (Arifin, 2001)

Misalkan H adalah subgrup dari grup G dengan operasi $+$ maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $H + a = H + b$ atau $(H + a) \cap (H + b) = \emptyset$.

Bukti

Misalkan $(H + a) \cap (H + b) \neq \emptyset$. Pilih $x \in (H + a) \cap (H + b)$, maka $x = h_1 + a = h_2 + b$ untuk suatu h_1 dan h_2 di H . Karena $h_1 + a = h_2 + b$ maka berlaku $a = h_1^{-1} + h_2 + b$. Selanjutnya ambil suatu $y \in H + a$. Berarti $y = h_3 + a$ untuk suatu $h_3 \in H$. Dengan menggantikan a dengan $h_1^{-1} + h_2 + b$ didapat $y = h_3 + h_1^{-1} + h_2 + b = h' + b$ dimana $h' = h_3 + h_1^{-1} + h_2 \in H$. Artinya $y \in H + b$.

Sehingga diperoleh $H + a \subseteq H + b$. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan $H + b \subseteq H + a$. Oleh karena itu $H + a = H + b$. Karena dengan mengasumsikan $(H + a) \cap (H + b) \neq \emptyset$ mengakibatkan $H + a = H + b$ maka berlaku $(H + a) \cap (H + b) = \emptyset$ atau $H + a = H + b$. ■

Teorema 2.2 (Arifin, 2001)

Misalkan G suatu grup dengan operasi $+$ dan H suatu subgrup dari G . Dua unsur a dan b di G terkandung dalam satu koset kanan yang sama terhadap H jika dan hanya jika $a + b^{-1} \in H$.

Bukti

Misalkan $a \in H + x$ dan $b \in H + x$. Maka berlaku $a = h_1 + x$ dan $b = h_2 + x$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Karena $b = h_2 + x$ dan $b^{-1} + b = 0$ maka $b^{-1} = x^{-1} + h_2^{-1}$. Oleh karena itu didapat $a + b^{-1} = h_1 + x + (h_2 + x)^{-1} = h_1 + x + x^{-1} + h_2^{-1} = h_1 + h_2^{-1} \in H$.

Misalkan $a + b^{-1} \in H$. Berarti $a + b^{-1} = h'$ atau dapat ditulis $a = h' + b$ untuk suatu $h' \in H$. Jelas bahwa $a \in H + a$. Dengan menggantikan nilai a didapat $a = h' + b \in H + b$. Maka $H + a \subseteq H + b$. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan $H + b \subseteq H + a$. Didapat $H + a = H + b$. Maka a dan b terkandung dalam satu koset kanan yang sama terhadap H . ■

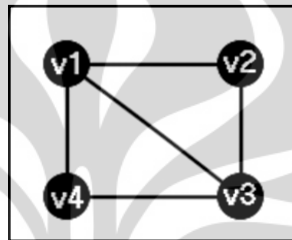
2.2 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf

Semua definisi yang dibahas pada subbab ini diambil dari (Harary, 1994). Suatu **graf** $G = (V, E)$ terdiri dari gabungan himpunan simpul $V(G)$ yang tidak kosong dan himpunan busur $E(G)$. Untuk penyederhanaan, $G = (V, E)$ akan dinotasikan dengan G , $V(G)$ dengan V dan $E(G)$ dengan E . Himpunan busur boleh kosong. Banyaknya simpul dan busur pada graf masing-masing dinyatakan sebagai $|V|$ dan $|E|$. Graf G dikatakan graf hingga jika banyaknya simpul berhingga. Suatu busur menghubungkan dua simpul (boleh sama) pada graf, simpul tersebut disebut **titik ujung** (*endpoint*) dari busur.

Suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram. Simpulnya direpresentasikan dalam bentuk suatu lingkaran kecil, sedangkan busur di-

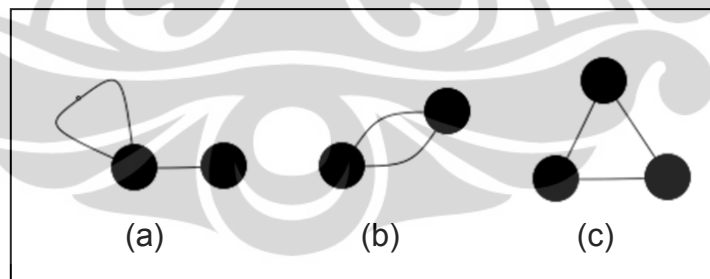
representasikan dalam bentuk garis. Simpul lazimnya ditulis sebagai u atau v atau dapat juga ditulis dalam huruf yang lain. Sedangkan busur dapat ditulis sebagai e atau sebagai pasangan kedua titik ujung, uv atau (u,v) .

Gambar 2.1 memberikan contoh graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$.



Gambar 2.1 Contoh graf dengan 4 simpul dan 5 busur

Gelung (*loop*) adalah busur yang memiliki titik ujung yang sama. Jika dua simpul dihubungkan oleh lebih dari satu busur, maka busur-busur tersebut disebut sebagai **busur berganda** (*multiple edge*). Graf yang tidak memiliki gelung dan busur berganda disebut sebagai **graf sederhana**. Semua graf yang akan dibahas pada bab selanjutnya adalah sederhana.



Gambar 2.2 Contoh graf dengan (a) gelung, (b) busur berganda, dan (c) graf sederhana

Lintasan P_n pada graf G adalah suatu barisan n simpul dan $n - 1$ busur $v_1, e_1, v_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dimana $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Lintasan P_n disebut

juga lintasan dari v_1 ke v_n . Suatu graf dikatakan **terhubung** jika untuk setiap pasang simpul u dan v terdapat lintasan dari u ke v .

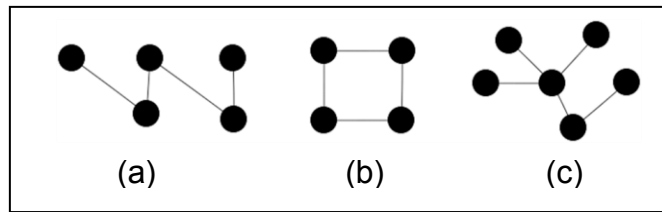
Gambar II.2 (a) memberikan contoh graf terhubung dengan gelung didalamnya, (b) graf dengan busur berganda dan (c) graf sederhana yang terhubung.

Dua simpul dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika terdapat busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Simpul dan busur yang terhubung padanya dikatakan **saling hadir** (*incident*). Dua busur dikatakan bertetangga jika keduanya hadir pada simpul yang sama. **Derajat** dari simpul v menyatakan banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut, dinotasikan sebagai $\text{deg}(v)$. **Simpul terisolasi** adalah simpul yang memiliki derajat 0.

Graf G dikatakan **graf berarah** jika G terdiri dari himpunan simpul dan himpunan pasangan terurut simpul yang disebut **busur berarah** (*arc*). Semua graf yang akan dibahas pada bab selanjutnya adalah graf tidak berarah. Pada sub bab selanjutnya akan diberikan beberapa definisi jenis-jenis graf.

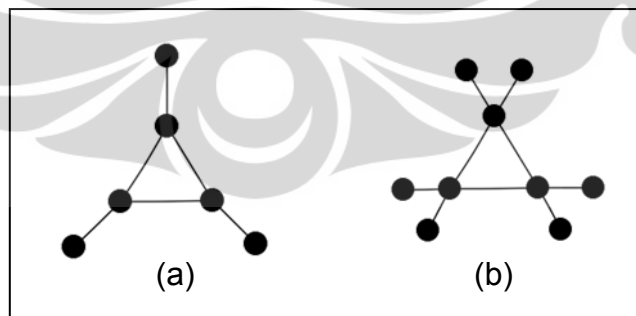
2.3 Jenis-Jenis Graf dan Operasi pada Graf

Graf **lintasan** (*path graph*), P_n , adalah graf dengan n simpul dengan busur $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$. Simpul v_1 disebut sebagai simpul awal dan v_n adalah simpul terakhir. Semua simpul berderajat 2 kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat 1. Graf **lingkaran** (*cycle graph*), C_n , adalah graf lintasan dengan n simpul yang diberi tambahan busur antara simpul awal dan simpul terakhir, sehingga pada graf lingkaran semua simpul memiliki derajat 2. Graf terhubung yang tidak memiliki subgraf lingkaran disebut graf **pohon** (*tree*).



Gambar 2.3 Contoh graf (a) lintasan (b) lingkaran (c) pohon

Suatu graf G dikatakan graf **unicycle** jika terdapat tepat satu subgraf lingkaran pada graf tersebut. Sehingga graf lingkaran termasuk graf *unicycle*. Graf unicycle memiliki jumlah busur sama dengan jumlah simpul-nya. Jenis-jenis graf lain yang termasuk dalam graf *unicycle* diantaranya graf matahari dan korona. Graf **matahari** $C_n \circ K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf lingkaran C_n , dengan menambahkan satu simpul luar berderajat satu pada setiap simpul (dalam) C_n . Graf **korona** $C_n \circ K_r$ merupakan generalisasi dari graf mahkota, dengan n menyatakan ukuran lingkaran dan r menyatakan banyaknya simpul luar. Graf korona adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sebarang r simpul luar berderajat satu pada simpul (dalam) C_n . Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf matahari $C_3 \circ K_1$ (a) dan graf korona $C_3 \circ K_2$ (b).



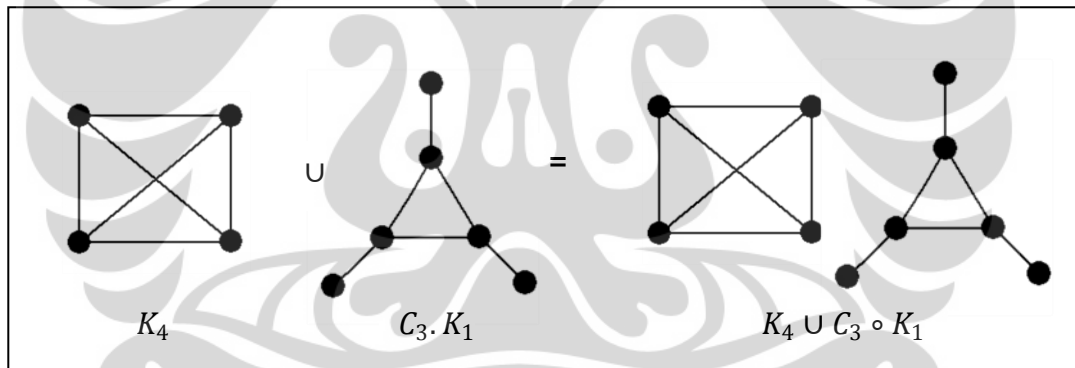
Gambar 2.4 (a) $C_3 \circ K_1$ (b) $C_3 \circ K_2$

Graf **komplit** K_n adalah graf dengan n simpul yang pada setiap pasang simpulnya memiliki busur.

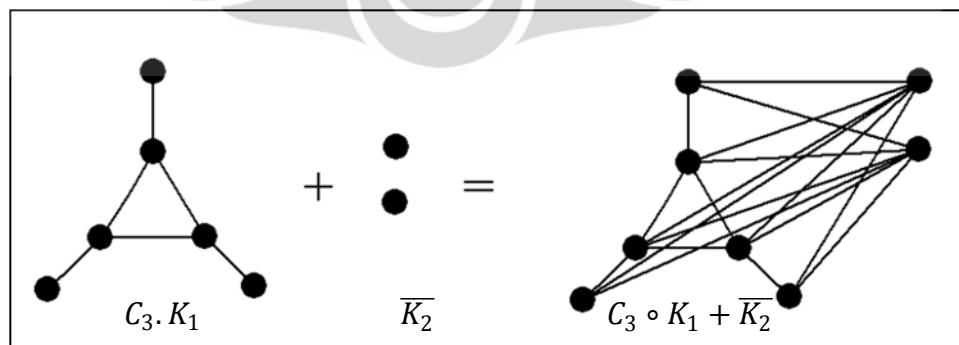
Operasi gabungan (Harary, 1994) pada graf $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ menghasilkan graf G dengan $V(G) = \bigcup_{i=1}^n V(G_i)$ dan $E(G) = \bigcup_{i=1}^n E(G_i)$. Gambar 2.5 merupakan contoh dari graf $K_4 \cup C_3 \cdot K_1$.

Operasi penjumlahan (Harary, 1994) pada graf $G = G_1 + G_2$ menghasilkan graf G dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Gambar 2.6 merupakan contoh dari $C_3 \cdot K_1 + \overline{K_2}$.

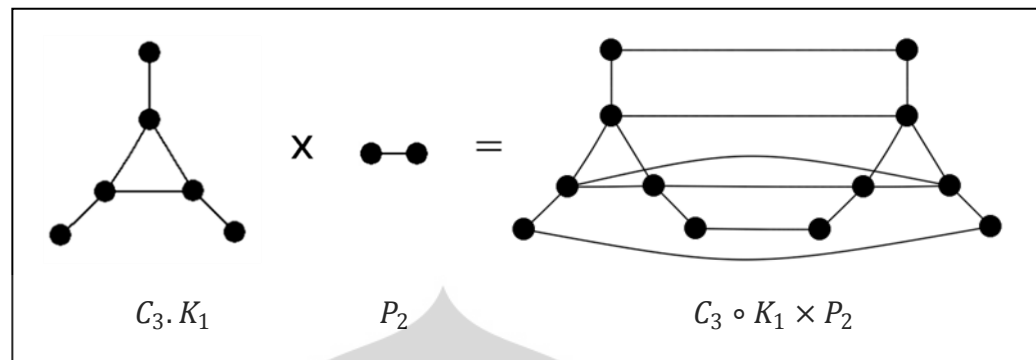
Operasi hasil kali kartesian (Weisstein) pada graf $G = G_1 \times G_2$ menghasilkan graf G dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan $E(G) = \{(ax, bx) | ax, bx \in V(G), (a, b) \in E(G_1), x \in V(G_2)\} \cup \{(ax, bx) | ax, bx \in V(G), (a, b) \in E(G_2), x \in V(G_1)\}$. Gambar 2.7 merupakan contoh dari operasi hasil kali kartesian.



Gambar 2.5 Graf operasi gabungan dari K_4 dengan $C_3 \cdot K_1$



Gambar 2.6 Graf operasi penjumlahan dari $C_3 \cdot K_1$ dengan $\overline{K_2}$

Gambar 2.7 Hasil kali kartesian $C_3 \circ K_1$ dengan P_2

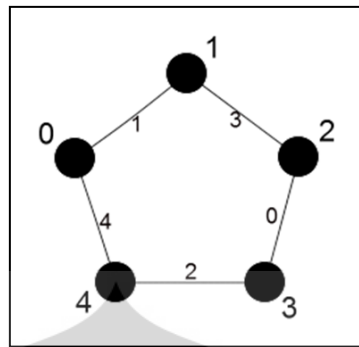
2.4 Pelabelan Harmonious

Pelabelan L pada graf $G(V, E)$ adalah pemetaan dari himpunan busur V atau himpunan simpul E , atau keduanya $(V \cup E)$ ke sebuah himpunan, biasanya bilangan asli, dengan kondisi tertentu. $L(x)$ disebut label dari simpul atau busur x .

Pelabelan L pada graf $G(V, E)$ dimana $|E(G)| \geq |V(G)|$ dikatakan **pelabelan harmonious** jika dan hanya jika L adalah pemetaan injektif dari V ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda (Graham & Sloane, On Additive Bases and Harmonious Graphs, 1980).

Karena label-label busur merupakan elemen $\mathbb{Z}_{|E|}$ dan berbeda maka $\{W(e) | e \in E(G)\} = \mathbb{Z}_{|E|} = \{[0], [1], [2], \dots, [e - 1]\}$. Untuk $|E(G)| < |V(G)|$ label busur $W(xy) = L(x) + L(y)$ boleh berulang sebanyak $|V(G)| - |E(G)| + 1$ kali. Graf yang memiliki pelabelan harmonious disebut graf harmonious.

Pada Gambar 2.8 ditunjukkan contoh dari graf lingkaran dengan banyak simpul 5 yang merupakan graf harmonious. Untuk memudahkan, label pada Gambar akan dituliskan sebagai a , bukan $[a]$. Perhatikan bahwa label dari tiap simpulnya berbeda dan label busurnya adalah $\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.



Gambar 2.8 Pelabelan harmonious pada C_5

Tidak mudah untuk menemukan rumus umum dari pelabelan harmonious. Oleh karena itu beberapa pendekatan dilakukan seperti mencari rumus umum pelabelan harmonious untuk kelas-kelas graf tertentu.

R.E. L. Aldred dan B. D. McKay menemukan bahwa setiap graf pohon dengan jumlah simpul kurang dari 26 adalah graf harmonious (Gallian, 2009). R. L. Graham and N. J. A. Sloane juga menunjukkan bahwa graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil, graf komplit K_n dengan $n \leq 4$, dan Graf n kubus $K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$ merupakan graf harmonious (Graham & Sloane, On Additive Bases and Harmonious Graphs, 1980). M.Z. Youssef menunjukkan bahwa $nG = G \cup G \cup \dots \cup G$ dengan n ganjil dan G harmonious juga merupakan graf harmonious (Youssef, 2003).

BAB III

PELABELAN HARMONIOUS PADA HASIL OPERASI GRAF HARMONIOUS

Dalam bab ini akan diberikan konstruksi pelabelan harmonious untuk graf yang didapat dari operasi graf harmonious dengan graf harmonious atau graf lain. Beberapa operasi yang dibahas adalah gabungan, penjumlahan, dan hasil kali kartesian.

Semua graf hasil operasi yang akan dibahas memiliki jumlah busur kelipatan dari jumlah busur graf awal. Oleh karena itu, label harmonious pada graf hasil konstruksi merupakan anggota \mathbb{Z}_{kn} dimana label harmonious pada graf awal merupakan anggota \mathbb{Z}_n . Untuk itu dibutuhkan suatu pemetaan dari \mathbb{Z}_n ke \mathbb{Z}_{kn} yang injektif untuk membantu pembentukan pelabelan yang baru dari pelabelan yang sudah ada, fungsi ini disebut fungsi transisi. **Fungsi transisi** adalah fungsi yang memetakan \mathbb{Z}_n ke \mathbb{Z}_{kn} yang didefinisikan sebagai $f_i([x]) = \llbracket kx + i \rrbracket$ untuk suatu konstanta $i \in \mathbb{Z}$ dimana $[a]$ melambangkan elemen \mathbb{Z}_n dan $\llbracket a \rrbracket$ melambangkan elemen \mathbb{Z}_{kn} . Pada lema 3.1 sampai dengan lema 3.4 akan diberikan sifat-sifat dari fungsi transisi.

Lema 3.1

Fungsi transisi merupakan fungsi yang terdefinisi dengan baik sesuai aturan fungsi.

Bukti

Misalkan $f_i([x]) = \llbracket kx + i \rrbracket$ merupakan fungsi transisi. Misalkan $[x] = [y]$, berarti $x \in [x]$ dan $x \in [y]$. Dari definisi $x \in [y]$ di \mathbb{Z}_n didapat $x - y = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$ atau dapat ditulis menjadi $x = y + qn$.

Ambil $a \in f_i([x]) = \llbracket kx + i \rrbracket$. Dari definisi $a \in \llbracket kx + i \rrbracket$ di \mathbb{Z}_{kn} didapat $a - (kx + i) = knc_1$ untuk suatu $c_1 \in \mathbb{Z}$ atau dapat ditulis $a = k(nc_1 + x) + i$. Dengan menggantikan nilai x dengan $x = y + qn$ didapat $a = k(nc_1 + nq + y) + i$. Untuk $c_2 = c_1 + q \in \mathbb{Z}$ didapat $a = k(nc_2 + y) + i$ atau dapat ditulis $a - (ky + i) = knc_2$. Dari definisi $\llbracket ky + i \rrbracket$ di \mathbb{Z}_{kn} didapat $a \in \llbracket ky + i \rrbracket = f_i([y])$. Karena $a \in f_i([x])$ maka $a \in f_i([y])$ sehingga didapat $f_i([x]) \subset f_i([y])$. Dengan cara yang serupa dapat diperoleh $f_i([y]) \subset f_i([x])$ sehingga diperoleh $f_i([x]) = f_i([y])$. Karena $[x] = [y]$ mengakibatkan $f_i([x]) = f_i([y])$ maka f_i adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik sesuai aturan fungsi. ■

Lema 3.2

Fungsi transisi f_i merupakan fungsi injektif.

Bukti

Misalkan $f_i([x]) = f_i([y])$, dari definisi f_i didapat untuk $kx + i \in \llbracket kx + i \rrbracket$ mengakibatkan $kx + i \in \llbracket ky + i \rrbracket$. Dari definisi $kx + i \in \llbracket ky + i \rrbracket$ di \mathbb{Z}_{kn} didapat $kx + i - (ky + i) = qkn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$ atau dapat ditulis $kx - ky = qkn$. Karena $k > 0$ maka dengan membagi kedua ruas dengan k didapat $x = y + qn$.

Ambil $a \in [x]$, dari definisi $a \in [x]$ di \mathbb{Z}_n didapat $a - x = c_1n$ untuk suatu $c_1 \in \mathbb{Z}$. Dengan menggantikan nilai x dengan $x = y + qn$ didapat $a - (y + qn) = c_1n$. Untuk $c_2 = c_1 + q$ diperoleh $a - y = c_2n$ yang berarti $a \in [y]$. Karena $[a] \in [x]$ mengakibatkan $a \in [y]$ didapat $[x] \subset [y]$. Dengan cara serupa dapat diperoleh $[y] \subset [x]$ sehingga $[x] = [y]$. Karena $f_i([x]) = f_i([y])$ mengakibatkan $[x] = [y]$ maka f_i adalah fungsi injektif

■

Fungsi transisi memiliki sifat khusus terhadap operasi penjumlahan yang akan berguna dalam pembuktian teorema di subbab selanjutnya

Lema 3.3

Jika f_i adalah fungsi transisi dengan konstanta i dan f_j adalah fungsi transisi dengan konstanta j maka $f_i([x]) + f_j([y]) = f_{i+j}([x] + [y])$.

Bukti

Dari definisi fungsi transisi didapat $f_i([x]) = \llbracket kx + i \rrbracket$ dan $f_j([y]) = \llbracket ky + j \rrbracket$. Oleh karena itu $f_i([x]) + f_j([y]) = \llbracket kx + i \rrbracket + \llbracket ky + j \rrbracket = \llbracket k(x + y) + (i + j) \rrbracket$. Berdasarkan definisi fungsi transisi $\llbracket k(x + y) + (i + j) \rrbracket = f_{i+j}([x + y]) = f_{i+j}([x] + [y])$. Jadi $f_i([x]) + f_j([y]) = f_{i+j}([x] + [y])$. ■

Karena $|\mathbb{Z}_n| \leq |\mathbb{Z}_{kn}|$ maka peta dari f_i merupakan subset dari \mathbb{Z}_{kn} . Untuk $f_0([x]) = \llbracket kx \rrbracket$ jelas bahwa $f_0([x]) \in \{\llbracket kx \rrbracket | x \in \mathbb{Z}\}$. Untuk itu akan didefinisikan subhimpunan $\mathbb{Z}_{kn|k} = \{\llbracket kx \rrbracket | x \in \mathbb{Z}\}$. Untuk $\llbracket kx \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k}$, $a \in \llbracket kx \rrbracket$ jika dan hanya jika $a - kx = qkn$ atau $a = qkn + kx$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.4

Fungsi transisi $f_i([x])$ memetakan $[x] \in \mathbb{Z}_n$ ke elemen di koset $\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$, untuk suatu $i \in \mathbb{Z}$.

Bukti

Misalkan $[x] \in \mathbb{Z}_n$, maka $f([x]) = \llbracket kx + i \rrbracket = \llbracket kx \rrbracket + \llbracket i \rrbracket$. Dari definisi subhimpunan $\mathbb{Z}_{kn|k}$ didapat bahwa $\llbracket kx \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k}$. Jelas bahwa $\llbracket kx \rrbracket + \llbracket i \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$. ■

3.1 Pelabelan Harmonious dari Gabungan Graf Harmonious

Pelabelan harmonious pada hasil dari gabungan graf harmonious pernah dibahas oleh M.Z. Yousef (Youssef, 2003). Yousef membuktikan bahwa graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonious yang isomorfis (*copies* dari sejumlah ganjil graf harmonious) adalah harmonious. Untuk memperumum hasil tersebut, pada Teorema 3.1 akan ditunjukkan

bahwa graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonious dengan jumlah busur yang sama (tidak harus isomorfik) adalah graf harmonious.

Teorema 3.1

Jika G_1, G_2, \dots, G_k adalah graf-graf harmonious dimana $|E(G_1)| = |E(G_2)| = \dots = |E(G_k)| = n$, $|V(G_i)| \leq |E(G_i)|$, dan k ganjil maka $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ adalah graf harmonious.

Bukti

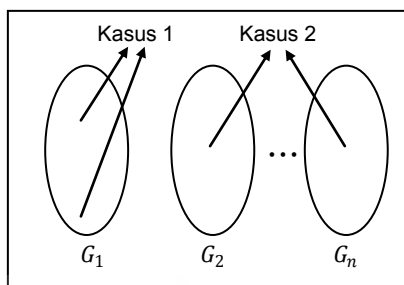
Misalkan $|E(G_1)| = |E(G_2)| = \dots = |E(G_k)| = n$ maka $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + \dots + |E(G_n)| = kn$, sehingga label harmonious dari graf G adalah anggota dari \mathbb{Z}_{kn} .

Misalkan pelabelan harmonious dari G_i adalah L_i . Didefinisikan fungsi $L: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{kn}$ didefinisikan sebagai

$$L(v) = f_i(L_i(v)), \text{ dimana } v \in V(G_i)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Perhatikan bahwa f_i merupakan fungsi transisi dari \mathbb{Z}_n ke \mathbb{Z}_{kn} . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa L adalah pelabelan harmonious dari G . Fungsi L merupakan pelabelan harmonious dari G jika dan hanya jika L adalah fungsi injektif dan ketika setiap busur $xy \in E(G)$ dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda.

Pertama akan dibuktikan bahwa L merupakan fungsi injektif. Artinya untuk sembarang dua simpul $u, v \in V(G)$, jika $u \neq v$ maka $L(u) \neq L(v)$. Pembuktian akan dibagi menjadi 2 kasus. Kasus pertama adalah u, v berasal dari graf pembangun yang sama, yaitu $u, v \in V(G_i)$. Kasus kedua adalah u, v berasal dari graf pembangun yang berbeda, yaitu $u \in V(G_i), v \in V(G_j), i \neq j$. Pembagian kedua kasus tersebut diilustrasikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Ilustrasi kasus pembuktian Teorema 3.1

Untuk kasus pertama, jika $u, v \in V(G_i)$, maka $L_i(u) \neq L_i(v)$ karena L_i merupakan label harmonious. Menurut lema 3.2 fungsi transisi merupakan fungsi injektif sehingga $f_i(L_i(u)) \neq f_i(L_i(v))$ sehingga $L(u) \neq L(v)$.

Untuk kasus kedua, jika $u \in V(G_i)$, $v \in V(G_j)$, $i \neq j$, maka dari Lemma 3.4 diperoleh $L(u) \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$ dan $L(v) \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket$. Anggap $j > i$. Didapat $0 < j - i < k$. Ambil $\llbracket i \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$ dan $\llbracket j \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket$. Diketahui bahwa $\llbracket j \rrbracket - \llbracket i \rrbracket = \llbracket j - i \rrbracket$. Misalkan $a \in \llbracket j - i \rrbracket$, berarti $a - (j - i) = qkn$. Tetapi $a = (j - i) + qkn \neq kx + qkn, \forall x \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu $\llbracket j \rrbracket - \llbracket i \rrbracket \notin \mathbb{Z}_{kn|k}$. Dari Teorema 2.2 didapat bahwa $\llbracket i \rrbracket$ dan $\llbracket j \rrbracket$ tidak berada pada koset yang sama atau dapat ditulis $\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket \neq \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket$. Dari Teorema 2.1 didapat bahwa $(\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket) \cap (\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket) = \emptyset$ yang mengakibatkan $L(u) \neq L(v)$.

Dari kedua kasus di atas didapat bahwa untuk sembarang simpul $u, v \in G$, jika $u \neq v$ maka $L(u) \neq L(v)$. Oleh karena itu terbukti bahwa L adalah fungsi injektif. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda. Misalkan W_i adalah label busur dari graf pembangun G_i .

$$\begin{aligned} W(xy) &= L(x) + L(y) \\ &= f_i(L_i(x)) + f_i(L_i(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{2i}(L_i(x) + L_i(y)) \text{ (berdasarkan Lema 3.3)} \\
&= f_{2i}(W_i(xy))
\end{aligned}$$

Untuk sembarang busur $e_1, e_2 \in E(G)$, akan ditunjukkan bahwa jika $e_1 \neq e_2$ maka $W(e_1) \neq W(e_2)$. Pembuktian akan dibagi menjadi 2 kasus. Kasus pertama adalah e_1, e_2 berasal dari graf pembangun yang sama yaitu $e_1, e_2 \in E(G_1)$. Kasus kedua adalah e_1, e_2 berasal dari graf pembangun yang berbeda yaitu $e_1 \in E(G_i), e_2 \in E(G_j), i \neq j$.

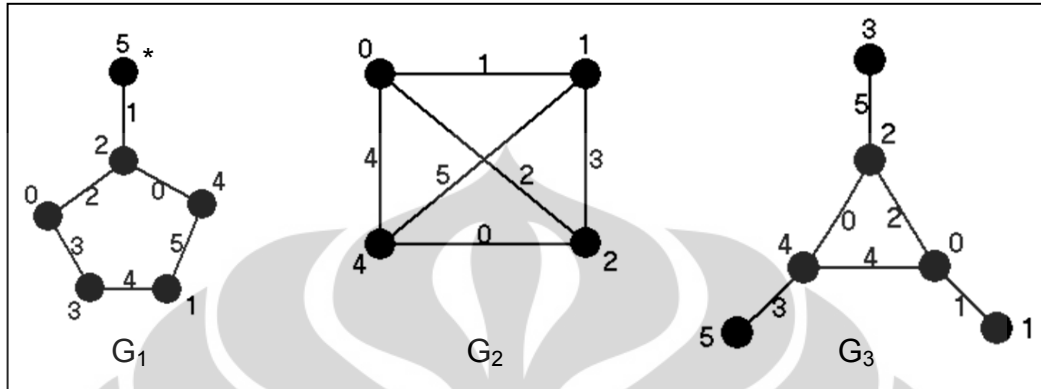
Untuk kasus pertama didapat $W_i(e_1) \neq W_i(e_2)$ karena G_i adalah graf harmonious. Oleh karena itu $W(e_1) = f_{2i}(W_i(e_1)) \neq f_{2i}(W_i(e_2)) = W(e_2)$ karena f_{2i} merupakan fungsi injektif (Lema 3.2). Maka $W(e_1) \neq W(e_2)$.

Untuk kasus kedua, dari Lema 3.4 didapat $W(e_1) \in \mathbb{Z}_{kn|k} \llbracket 2i \rrbracket$ dan $W(e_2) \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2j \rrbracket$. Anggap $j > i$. Didapat $0 < 2j - 2i < 2k$. Ambil $\llbracket 2i \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2i \rrbracket$ dan $\llbracket 2j \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2j \rrbracket$. Diketahui bahwa $\llbracket 2j \rrbracket - \llbracket 2i \rrbracket = \llbracket 2j - 2i \rrbracket$. Misalkan $a \in \llbracket 2j - 2i \rrbracket$ berarti $a - (2j - 2i) = qkn$. $a = qkn + (2j - 2i)$. Karena k ganjil, jelas bahwa $2j - 2i \neq k$ sehingga $a = qkn + (2j - 2i) \neq qkn + kx, \forall x \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu $\llbracket 2j \rrbracket - \llbracket 2i \rrbracket \neq \llbracket kx \rrbracket, \forall x \in \mathbb{Z}$. Dapat disimpulkan bahwa $\llbracket 2j \rrbracket - \llbracket 2i \rrbracket \notin \mathbb{Z}_{kn|k}$. Dari Teorema 2.2 didapat bahwa $\llbracket 2i \rrbracket$ dan $\llbracket 2j \rrbracket$ tidak berada dalam koset yang sama atau dapat ditulis $\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2i \rrbracket \neq \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2j \rrbracket$. Dari Teorema 2.1 didapat bahwa $(\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2i \rrbracket) \cap (\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket 2j \rrbracket) = \emptyset$ yang mengakibatkan $W(e_1) \neq W(e_2)$. Dari kedua kasus tersebut didapatkan bahwa label busur W berbeda.

Karena L adalah fungsi injektif dan ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda maka L adalah label harmonious dari G . ■

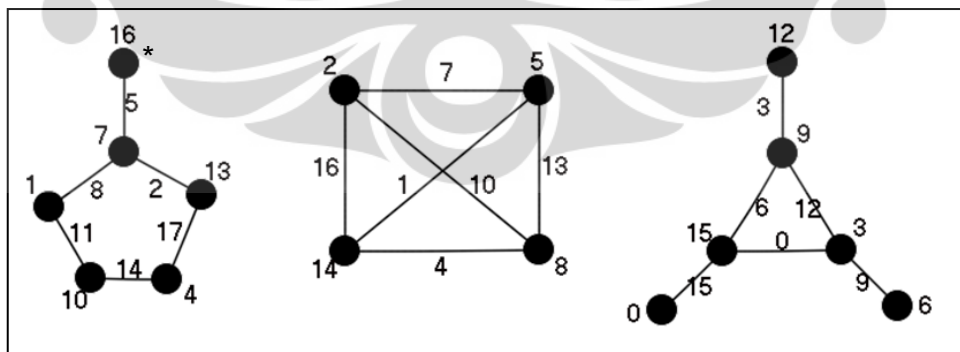
Gambar 3.2 menunjukkan 3 graf harmonious yang memiliki 6 busur. Simpul dari graf-graf di Gambar 3.2 masing-masing diberi label dari 0 sampai

dengan 5 dan setiap busur dari graf-graf tersebut memiliki label yang berbeda.



Gambar 3.2 Contoh 3 graf harmonious dengan 6 buah busur

Misalkan G_1, G_2 , dan G_3 merupakan graf harmonious dengan jumlah busur 6 seperti pada Gambar 3.2. Pelabelan harmonious untuk $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ yaitu $L(v) = f_i(L_i(v)) = 3\llbracket L_i(v) \rrbracket + \llbracket i \rrbracket$ untuk $v_i \in V(G_i)$. Contohnya pada G_1 , simpul v dengan label 5 (ditandai dengan *) dilabel dengan $L(v) = 3(5) + 1 = 16$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 yang menunjukkan gabungan ketiga graf tersebut serta label harmoniousnya. Simpul dari graf di Gambar 3.3 diberi label dari 0 sampai 17 dan setiap busurnya memiliki label yang berbeda.



Gambar 3.3 Contoh pelabelan harmonious dari hasil gabungan graf

Pada bagian selanjutnya dari Bab 3 ini akan dibahas mengenai pelabelan harmonius dari graf hasil operasi graf yang banyak simpul sama dengan banyak busurnya dengan graf lain. Telah disebutkan pada Bab 2 bahwa kelas-kelas graf *unicycle* seperti lingkaran, matahari, dan korona adalah contoh graf terhubung yang mempunyai banyak simpul sama dengan banyak busur, dan gabungan tak terhubung dari graf-graf *unicycle* adalah contoh graf tidak terhubung yang juga memenuhi persyaratan banyak simpul sama dengan banyak busur.

3.2 Pelabelan Harmonious dari Graf Hasil Penjumlahan

Pada Subbab 2.3 telah dijelaskan mengenai operasi penjumlahan pada graf. Teorema 3.2 menyatakan bahwa graf hasil penjumlahan graf harmonious yang banyak simpul sama dengan banyak busurnya dengan graf yang tidak memiliki busur adalah harmonious.

Teorema 3.2

Jika G' adalah graf harmonious dan $|V(G')| = |E(G')|$. Maka $G = G' + \overline{K_m}$ adalah graf harmonious.

Bukti

Misalkan $|E(G')| = |V(G')| = n$ dan $|V(\overline{K_m})| = m$ maka $|E(G)| = |E(G')| + |E(\overline{K_m})| + |V(G')||V(\overline{K_m})| = n + 0 + nm = n(m + 1)$. Untuk mempermudah dimisalkan $k = m + 1$ maka label harmonious dari graf G merupakan anggota dari \mathbb{Z}_{kn} .

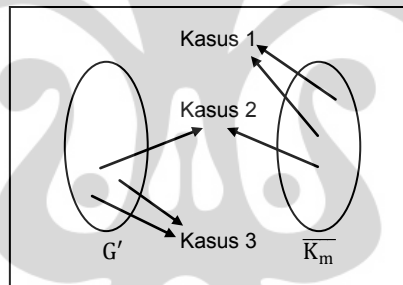
Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+m}\}$ dengan $v_1, v_2, \dots, v_m \in V(\overline{K_m})$ dan $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{n+m} \in V(G')$. Misalkan L' adalah pelabelan harmonious dari G' . Fungsi $L: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{kn}$ didefinisikan sebagai

$$L(v_i) = \begin{cases} [i] & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ f_0(L'(v_i)) & \text{untuk } m + 1 \leq i \leq n + m \end{cases}$$

dengan f_0 adalah fungsi transisi yang memetakan elemen \mathbb{Z}_n ke \mathbb{Z}_{kn} .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa L adalah label harmonious dari G . L merupakan label harmonious dari G jika dan hanya jika L adalah fungsi injektif dan ketika setiap busur $xy \in E(G)$ dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda.

Pertama akan dibuktikan bahwa L adalah fungsi injektif. Untuk sembarang simpul $v_i, v_j \in V(G)$, $i < j$ akan dibuktikan bahwa $L(v_i) \neq L(v_j)$. Pembuktian dibagi menjadi 3 kasus. Kasus pertama untuk $1 \leq i < j \leq m$ atau $v_i, v_j \in V(\overline{K_m})$. Kasus kedua untuk $1 \leq i \leq m < j \leq m+n$ atau $v_i \in V(\overline{K_m})$ dan $v_j \in G'$. Kasus ketiga untuk $m+1 \leq i < j \leq m+n$ atau $v_i, v_j \in V(G')$. Ketiga kasus ini diilustrasikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 simpul untuk ketiga kasus pada pembuktian Teorema 3.2

Untuk kasus pertama jika $1 \leq i < j \leq m$. $L(v_i) = \llbracket i \rrbracket$ dan $L(v_j) = \llbracket j \rrbracket$. Karena $0 < 1 \leq i < j \leq m < kn$ berdasarkan Lema 2.1 maka $L(v_i) \neq L(v_j)$.

Untuk kasus kedua jika $1 \leq i \leq m < j \leq m+n$ maka $L(v_i) = \llbracket i \rrbracket$ dan $L(v_j) = f_0(L'(v_j)) = \llbracket ck \rrbracket = \llbracket c(m+1) \rrbracket$ untuk suatu nilai c . Karena $0 < i < k$ jelas bahwa $L(v_i) \neq L(v_j)$.

Untuk kasus ketiga jika $m+1 \leq i < j \leq m+n$, maka $L'(v_i) \neq L'(v_j)$ karena L' adalah label harmonious. Menurut Lema 3.2 f_0 adalah fungsi injektif sehingga $f_0(L'(v_i)) \neq f_0(L'(v_j))$, artinya $L(v_i) \neq L(v_j)$.

Dari ketiga kasus di atas didapat bahwa untuk sembarang simpul $v_i, v_j \in V(G)$, $i \neq j$ maka $L(v_i) \neq L(v_j)$. Oleh karena itu terbukti bahwa L adalah fungsi injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda. Jika W' adalah label busur dari G' maka untuk $v_i v_j \in E(G')$ diperoleh

$$\begin{aligned} W(v_i v_j) &= L(v_i) + L(v_j) \\ &= f_0(L'(v_i)) + f_0(L'(v_j)) \\ &= f_0(L'(v_i) + L'(v_j)) \text{ berdasarkan Lema 3.3} \\ &= f_0(W'(v_i v_j)) \end{aligned}$$

Jika $v_i v_j \notin E(G')$ dengan $i < j$ maka $v_i \in V(\overline{K_m})$ dan $v_j \in V(G')$ sehingga

$$\begin{aligned} W(v_i v_j) &= L(v_i) + L(v_j) \\ &= [i] + f_0(L'(v_j)) \\ &= f_i([0]) + f_0(L'(v_j)) \\ &= f_i(L'(v_j)) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lema 3.4 selanjutnya busur-busur di G akan dikelompokkan sebagai berikut:

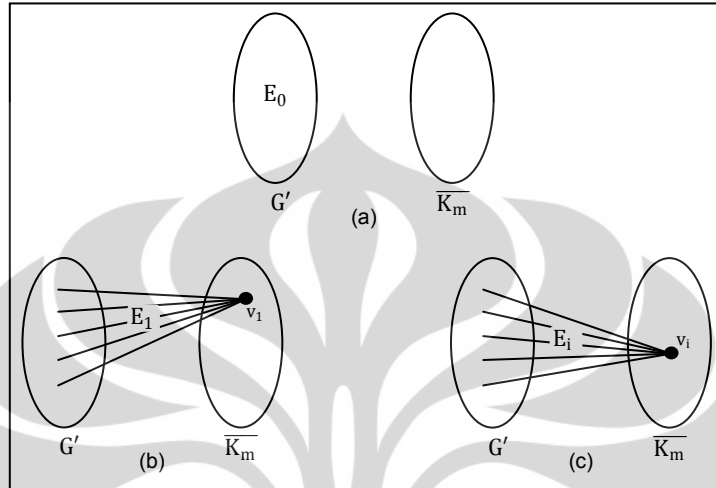
$$E_0 = \{xy | x, y \in V(G')\}$$

$$E_1 = \{xv_1 | x \in V(G'), v_1 \in V(\overline{K_m})\}$$

⋮

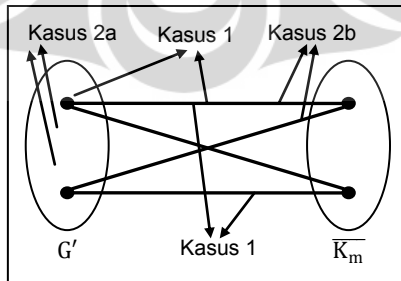
$$E_m = \{xv_m \mid x \in V(G'), v_m \in V(\overline{K_m})\}$$

Pengelompokan ini diilustrasikan pada Gambar 3.5



Gambar 3.5 Ilustrasi pengelompokan busur (a) E_0 (b) E_1 (c) E_i

Dari penjabaran label busur W diatas didapat untuk $xy \in E_0$ label busur $W(xy) \in \mathbb{Z}_{kn|k}$ (berdasarkan Lema 3.4) dan untuk $xy \in E_i, i \neq 0$ label busur $W(xy) \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$ (berdasarkan Lema 3.4). Untuk sembarang $e_1, e_2 \in E(G)$, $e_1 \neq e_2$ dan $e_1 \in E_i, e_2 \in E_j$ terdapat 2 kasus yaitu pertama $i \neq j$ dan kedua $i = j$. Lebih lanjut lagi kasus kedua dibagi menjadi 2 kasus yaitu kasus 2a dimana $i = j = 0$ dan kasus 2b dimana $i = j \neq 0$. Gambar 3.6 menunjukkan ilustrasi dari ketiga kasus tersebut.



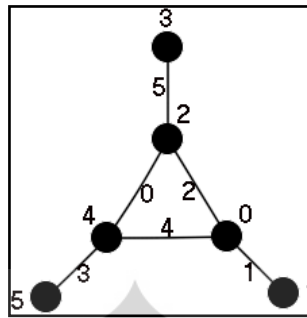
Gambar 3.6 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 busur untuk ketiga kasus pada pembuktian Teorema 3.2

Kasus pertama adalah $i \neq j$. Anggap $j > i$. Didapat $0 < j - i < k$. Ambil $\llbracket i \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket$ dan $\llbracket j \rrbracket \in \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket$. Diketahui $\llbracket j \rrbracket - \llbracket i \rrbracket = \llbracket j - i \rrbracket$. Misalkan $a \in \llbracket j - i \rrbracket$, berarti $a - (j - i) = qkn$ tetapi $a = (j - i) + qkn \neq kx + qkn, \forall x \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu $\llbracket j \rrbracket - \llbracket i \rrbracket \neq \llbracket kx \rrbracket, \forall x \in \mathbb{Z}$ yang berarti $\llbracket j \rrbracket - \llbracket i \rrbracket \notin \mathbb{Z}_{kn|k}$. Dari Teorema 2.2 didapat bahwa $\llbracket i \rrbracket$ dan $\llbracket j \rrbracket$ tidak berada pada koset yang sama atau dapat ditulis $\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket \neq \mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket$. Dari Teorema 2.1 didapat bahwa $(\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket i \rrbracket) \cap (\mathbb{Z}_{kn|k} + \llbracket j \rrbracket) = \emptyset$ yang mengakibatkan $W(e_1) \neq W(e_2)$.

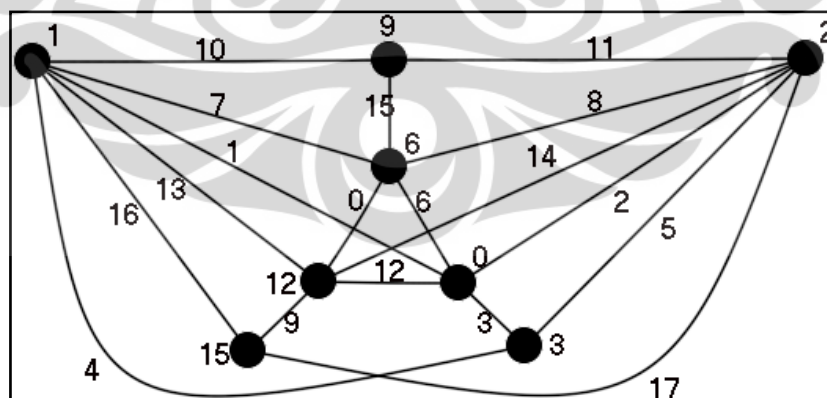
Kasus kedua adalah $i = j$. Kasus 2a adalah $i = j = 0$ atau $e_1, e_2 \in E(G')$. Karena G' adalah graf harmonious maka $W'(e_1) \neq W'(e_2)$. Karena f_0 adalah fungsi injektif (Lema 3.2) maka $W(e_1) \neq W(e_2)$. Kasus 2b adalah $i = j \neq 0$ atau $e_1, e_2 \notin E(G')$. Misalkan $e_1 = u_1 v_i$ dan $e_2 = u_2 v_j = u_2 v_i$. Maka $W(e_1) = f_i(L'(u_1))$ dan $W(e_2) = f_i(L'(u_2))$. Diketahui $L'(u_1) \neq L'(u_2)$ karena L' adalah label harmonious. Karena f_i adalah fungsi injektif (Lema 3.2) maka $W(e_1) \neq W(e_2)$. Dari kasus-kasus tersebut didapatkan bahwa label busur W berbeda.

Karena L adalah fungsi injektif dan ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda maka L adalah label harmonious dari G . ■

Gambar 3.7 menunjukkan Pelabelan harmonious dari graf korona $C_3.K_1$ dan Gambar 3.8 menunjukkan pelabelan harmonious dari hasil operasi penjumlahan graf tersebut dengan $\overline{K_2}$.

Gambar 3.7 Pelabelan harmonious pada $C_3 \circ K_1$

$C_3 \circ K_1$ merupakan graf harmonious dengan pelabelan harmonious seperti yang diberikan pada Gambar 3.7. Simpul-simpul dari $\overline{K_2}$ pada graf $(C_3 \circ K_1) + \overline{K_2}$ dilabel dengan 1 dan 2. Simpul-simpul dari $C_3 \circ K_1$ akan dilabel dengan $L(v) = f_0(L'(v)) = 3L'(v)$. Contohnya untuk simpul v dengan label 3 Pada Gambar 3.7 dilabel dengan $L(v) = 3(3) = 9$ pada graf hasil operasi penjumlahan (Gambar 3.8). Dengan mengikuti rumus pelabelan pada bukti Teorema 3.2, maka dapat diperoleh pelabelan untuk $((C_3 \circ K_1) + \overline{K_2})$ pada Gambar 3.8 berikut.

Gambar 3.8 Pelabelan harmonious pada $C_3 \circ K_1 + \overline{K_2}$

3.3 Pelabelan Harmonious dari Graf Hasil Kali Kartesian

Pada Subbab 2.3 juga telah dijelaskan tentang operasi perkalian kartesian pada graf. Teorema 3.3 menyatakan bahwa graf hasil kali kartesian dari graf harmonious yang banyak simpul sama dengan banyak busurnya dengan graf path dengan panjang 2 (atau P_2) adalah harmonious. Lema 3.5 berikut dibutuhkan untuk membantu pembuktian Teorema 3.3.

Lema 3.5

Misalkan $[i], [j] \in \mathbb{Z}_n$ dengan n ganjil. Jika $[i] \neq [j]$ maka $[2i] \neq [2j]$.

Bukti

Misalkan $[2i] = [2j]$ maka berlaku $2i \in [2j]$ yang berarti $2i - 2j = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Karena n ganjil maka q genap, maka diperoleh $i - j = q'n$ untuk $q' = q/2$, atau dapat ditulis $i = j + q'n$. Untuk sembarang $a \in [i]$ berarti $a - i = q_1n$ untuk suatu $q_1 \in \mathbb{Z}$. Dengan menggantikan nilai i didapat $a - j - q'n = q_1n$ atau dapat ditulis $a - j = q_2n$ dengan $q_2 = q_1 + q'$. Didapat bahwa $[i] \subset [j]$ dan dengan cara serupa juga dapat diperoleh $[j] \subset [i]$ sehingga $[i] = [j]$. Akibatnya didapat jika $[i] \neq [j]$ maka $[2i] \neq [2j]$. ■

Teorema 3.3

Jika G' adalah graf harmonious dengan $|V(G')| = |E(G')| = n$ dengan n ganjil maka $G = G' \times P_2$ adalah graf harmonious.

Bukti

Misalkan $V(G') = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $V(P_2) = \{p_1, p_2\}$. Berdasarkan definisi operasi hasil kali kartesian maka $V(G) = \{v_1p_1, v_1p_2, v_2p_1, v_2p_2, \dots, v_np_1, v_np_2\}$. dan $E(G) = \{v_ip_1, v_jp_1 \mid (v_i, v_j) \in E(G')\} \cup \{v_ip_2, v_jp_2 \mid (v_i, v_j) \in E(G')\} \cup \{(v_ip_1, v_ip_2) \mid v_i \in V(G')\}$. Untuk memudahkan

pembacaan maka $v_i p_j$ akan ditulis sebagai v_{ij} . Karena $|E(G)| = |E(G')| + |E(G')| + |V(G')| = 3n$. maka label harmonious pada G merupakan elemen dari \mathbb{Z}_{3n} .

Jika L' adalah pelabelan harmonious dari G' didefinisikan fungsi $L: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{3n}$ sebagai berikut:

$$L(v_{ij}) = f_j(L'(v_i))$$

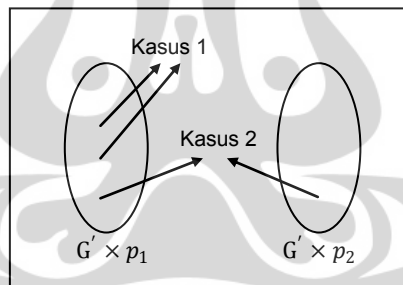
dengan f_j adalah fungsi transisi yang memetakan elemen \mathbb{Z}_n ke \mathbb{Z}_{3n} .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa L adalah pelabelan harmonious pada G .

Pertama akan dibuktikan bahwa L adalah fungsi injektif, artinya untuk sembarang 2 simpul dari G yaitu $v_{i_1 j_1}$ dan $v_{i_2 j_2}$ maka $L(v_{i_1 j_1}) \neq L(v_{i_2 j_2})$.

Pembuktian terbagi menjadi 2 kasus. Pertama $j_1 = j_2$ dan kedua $j_1 \neq j_2$.

Gambar 3.9 menunjukkan ilustrasi dari kedua kasus ini.



Gambar 3.9 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 simpul untuk ketiga kasus pada pembuktian Teorema 3.3

Pada kasus pertama, karena $j_1 = j_2$, jelas bahwa $i_1 \neq i_2$. Karena L' adalah label harmonious dari G' maka $L'(v_{i_1 j_1}) \neq L'(v_{i_2 j_2})$. Karena f_j merupakan fungsi injektif maka $L(v_{i_1 j_1}) \neq L(v_{i_2 j_2})$.

Pada kasus kedua, karena $j_1 \neq j_2$, maka menurut Lema 3.4 berlaku $L(v_{i_1 j_1}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j_1 \rrbracket$ dan $L(v_{i_2 j_2}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j_2 \rrbracket$. Jelas bahwa $\llbracket j_1 \rrbracket$ tidak

berada pada koset yang sama dengan $\llbracket j_2 \rrbracket$ sehingga $(\mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j_1 \rrbracket) \cap (\mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j_2 \rrbracket) = \emptyset$ yang mengakibatkan $L(v_{i_1j_1}) \neq L(v_{i_2j_2})$.

Dari kedua kasus tersebut didapat bahwa L merupakan fungsi injektif. Selanjutnya akan dibuktikan jika setiap busur $xy \in E(G)$ dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ akan menghasilkan label yang berbeda.

Untuk sembarang busur dari G yaitu $v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}$ label busur

$$\begin{aligned} W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) &= L(v_{i_1j_1}) + L(v_{i_2j_2}) \\ &= f_{j_1}(L'(v_{i_1})) + f_{j_2}(L'(v_{i_2})) \\ &= f_{j_1+j_2}(L'(v_{i_1} + v_{i_2})) \quad (\text{dari Lema 3.3}) \end{aligned}$$

Jika $v_{i_1} \neq v_{i_2}$ sesuai dengan definisi hasil kali kartesian jelas bahwa $j_1 = j_2$ maka

$$\begin{aligned} W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) &= f_{j_1+j_1}(L'(v_{i_1}) + L'(v_{i_2})) \\ &= f_{2j_1}(W'(v_{i_1}v_{i_2})). \end{aligned}$$

Lebih lanjut lagi, karena j_1 hanya mungkin bernilai 1 atau 2 maka jika $j_1 = 1$ maka $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) = f_{2(1)}(W'(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2})) = f_2(W'(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}))$, artinya untuk $j_1 = 1$, $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 2 \rrbracket$. Jika $j_1 = 2$ maka $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) = f_{2(2)}(W'(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2})) = f_1(W'(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}))$, artinya untuk $j_1 = 2$, $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 1 \rrbracket$.

Jika $v_{i_1} = v_{i_2}$ maka jelas bahwa $j_1 \neq j_2$, sehingga didapat $j_1 + j_2 = 3$. Maka

$$\begin{aligned} W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) &= f_{j_1+j_2}(L'(v_{i_1}) + L'(v_{i_1})) \\ &= f_3(2L'(v_{i_1})) \end{aligned}$$

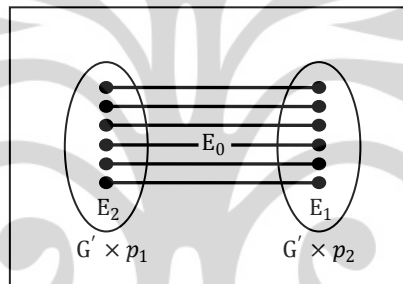
Dari Lema 3.4 didapat bahwa $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 3 \rrbracket$. Maka jelas bahwa $W(v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 0 \rrbracket$. Untuk memudahkan, busur-busur di G akan dikelompokkan sebagai berikut

$$E_0 = \{e | W(e) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 0 \rrbracket\}$$

$$E_1 = \{e | W(e) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 1 \rrbracket\}$$

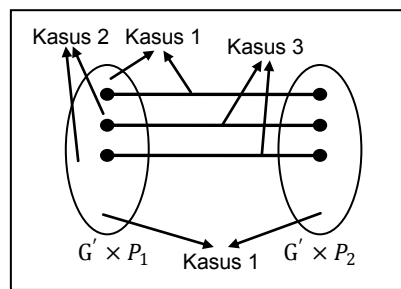
$$E_2 = \{e | W(e) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 2 \rrbracket\}$$

Pengelompokan ini diilustrasikan pada Gambar 3.10



Gambar 3.10 Ilustrasi pengelompokan busur pada $G' \times P_2$

Untuk sembarang 2 busur dari G yaitu $e_1 = v_{i_1j_1}v_{i_2j_2}$ dan $e_2 = v_{i_3j_3}v_{i_4j_4}$ akan dibuktikan jika $e_1 \neq e_2$ maka $W(e_1) \neq W(e_2)$. Pembuktian dibagi menjadi 3 kasus. Kasus pertama $e_1 \in E_i$ dan $e_2 \in E_j$ dimana $\llbracket i \rrbracket \neq \llbracket j \rrbracket$. Kasus kedua $e_1 \in E_i$ dan $e_2 \in E_j$ dimana $\llbracket i \rrbracket = \llbracket j \rrbracket \neq \llbracket 0 \rrbracket$. Kasus ketiga $e_1 \in E_i$ dan $e_2 \in E_j$ dimana $\llbracket i \rrbracket = \llbracket j \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$. Gambar 3.11 menunjukkan ilustrasi dari ketiga kasus tersebut.



Gambar 3.11 Ilustrasi pengambilan sembarang 2 busur untuk ketiga kasus pada pembuktian Teorema 3.3

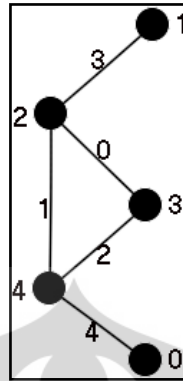
Untuk kasus pertama karena $\llbracket i \rrbracket \neq \llbracket j \rrbracket$, jelas bahwa $\mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket i \rrbracket \cap \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j \rrbracket = \emptyset$. Maka $W(e_1) \neq W(e_2)$.

Untuk kasus kedua, $W(e_1) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket i \rrbracket$ dan $W(e_2) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j \rrbracket$ dimana $\llbracket i \rrbracket = \llbracket j \rrbracket \neq \llbracket 0 \rrbracket$. Dari pengelompokan busur didapat bahwa $j_1 = j_2$ dan $j_3 = j_4$ dengan label busur $W(e_1) = f_{2j_1}(W'(e_1))$ atau $W(e_1) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 2j_1 \rrbracket$ dan $W(e_2) = f_{2j_3}(W'(e_2))$ atau $W(e_2) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket 2j_3 \rrbracket$. Karena $\llbracket i \rrbracket = \llbracket j \rrbracket$ maka $j_1 = j_3$. Karena $e_1 \neq e_2$ didapat $v_{i_1}v_{i_2} \neq v_{i_3}v_{i_4}$. Karena G' adalah graf harmonious maka $W'(v_{i_1}v_{i_2}) \neq W'(v_{i_3}v_{i_4})$. Karena f_{2j_1} adalah fungsi injektif maka didapat $W(e_1) \neq W(e_2)$.

Untuk kasus ketiga, $W(e_1) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket i \rrbracket$ dan $W(e_2) \in \mathbb{Z}_{3n|3} + \llbracket j \rrbracket$ dimana $\llbracket i \rrbracket = \llbracket j \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$. Dari pengelompokan busur didapat $v_{i_1} = v_{i_2}$ dan $v_{i_3} = v_{i_4}$ dengan label busur $W(e_1) = f_3(2L'(v_{i_1}))$ dan $W(e_2) = f_3(2L'(v_{i_3}))$. Karena $e_1 \neq e_2$ jelas bahwa $v_{i_1} \neq v_{i_3}$. Karena G' merupakan graf harmonious maka $L'(v_{i_1}) \neq L'(v_{i_3})$. Dari Lema 3.5 diperoleh $2L'(v_{i_1}) \neq 2L'(v_{i_2})$. Karena f_3 merupakan fungsi injektif maka $f_3(L'(v_{i_1})) \neq f_3(L'(v_{i_2}))$. Maka diperoleh $W(e_1) \neq W(e_2)$.

Dari ketiga kasus tersebut diperoleh G memiliki label busur yang berbeda. Karena L adalah fungsi injektif dan menghasilkan label busur yang berbeda maka L adalah label harmonious dari G . ■

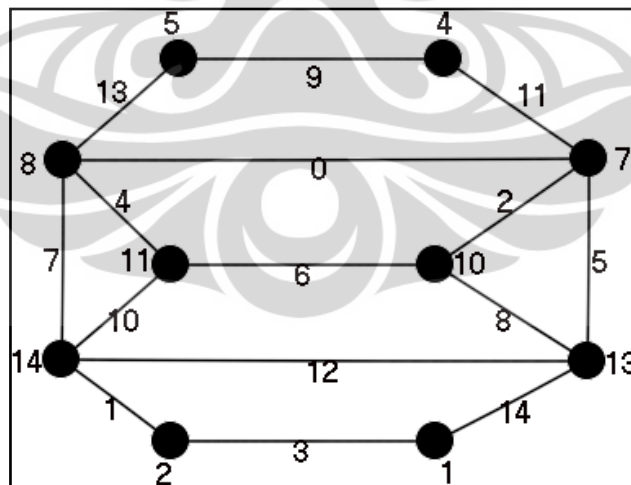
Gambar 3.12 menunjukkan pelabelan harmonious sebuah graf *unicyclic* G dan Gambar 3.13 menunjukkan pelabelan harmonious dari hasil operasi perkalian kartesian graf G tersebut dengan graf lintasan P_2 dengan panjang 2.



Gambar 3.12 Pelabelan harmonious pada sebuah graf *unicyclic*

Misalkan $V(P_2) = \{p_1, p_2\}$ dan $V(G) = \{v_1, \dots, v_5\}$. Simpul-simpul dari $G \times P_2$ akan dilabel dengan $L(vp_j) = f_j(L'(v_i)) = 3L'(v_i) + j$.

Perhatikan simpul v dengan label 3 pada Gambar 3.12. Simpul vp_1 pada Gambar 3.13 akan dilabel dengan $L(vp_1) = 3(3) + 1 = 10$ dan simpul vp_2 akan dilabel dengan $L(vp_2) = 3(3) + 2 = 11$. Dengan mengikuti rumus pelabelan pada bukti Teorema 3.3, maka dapat diperoleh pelabelan untuk $G \times P_2$ pada Gambar 3.13 berikut.



Gambar 3.13 Contoh pelabelan harmonious pada graf hasil kali kartesian

KESIMPULAN

Pelabelan harmonious L pada graf $G(V, E)$ dimana $|E(G)| \geq |V(G)|$ adalah pemetaan injektif dari V ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $W(xy) = L(x) + L(y)$ menghasilkan label busur yang berbeda.

Dengan pelabelan harmonious dari kelas-kelas graf yang telah diketahui dimungkinkan membangun graf harmonious baru dengan menggunakan pelabelan yang telah diketahui tersebut.

Dalam skripsi ini telah dibuktikan bahwa dapat ditemukan beberapa kelas graf harmonious yang dihasilkan dari operasi gabungan graf harmonious yang memiliki jumlah busur yang sama, operasi penjumlahan graf harmonious dengan graf tanpa busur, dan operasi perkalian kartesian graf harmonious dengan jumlah busur ganjil dengan graf lintasan P_2 .

Pembangunan graf harmonious baru dari kelas-kelas graf harmonious yang telah diketahui sebelumnya masih mungkin untuk dikembangkan lebih lanjut lagi untuk bahan penelitian yang akan datang.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A. (2001). *Aljabar Linier*. Bandung: Penerbit ITB.

Gallian, J. (2009). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 6, #DS(6) .

Graham, R. L., & Sloane, N. J. (1980). On Additive Bases and Harmonious Graphs. *SIAM J. Alg. Discrete Meth.*

Harary, F. (1994). *Graph Theory*. Reading: Addison-Wesley.

Weisstein, E. W. (t.thn.). *Graph Cartesian Product -- From Wolfram Mathworld*. Dipetik 5 11, 2009, dari MathWorld--A Wolfram Web Resource: <http://mathworld.wolfram.com/GraphCartesianProduct.html>

Youssef, M. Z. (2003). Two General Results on Harmonious Labelings. *Ars Combin* , 225-230.