PENAKSIRAN PARAMETER PADA *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

RAISA PRATIWI

0305010459

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

PENAKSIRAN PARAMETER PADA *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

Skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh :

RAISA PRATIWI

0305010459

DEPOK

2009

SKRIPSI : PENAKSIRAN PARAMETER PADA *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

NAMA : RAISA PRATIWI

NPM : 0305010459

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 11 DESEMBER 2009

DRA. SITI NURROHMAH, M.SI.	DR. DIAN LESTARI, DEA
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana : 23 Desember 2009

PENGUJI I : Dra. Siti Nurrohmah, M.Si.

PENGUJI II : Sarini, S.Si. , M.Stats.

PENGUJI III : Fevi Novkaniza, S.Si., M.Si.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah SWT atas semua rahmat dan karuniaNya yang terus diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Salawat dan salam kepada teladan seluruh umat manusia, Nabi Muhammad SAW, serta para pengikutnya yang istiqomah hingga akhir zaman.

Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Orang tua yang tercinta yang selalu ada untuk membantu dan menyemangati di semua situasi.
2. Adik penulis , Dwi Riana Aryani dan Hafidz Fadli, yang tidak pernah bosan menyemangati penulis.
3. Ibu Siti Nurrohmah selaku pembimbing I dan pembimbing akademik yang telah banyak memberikan masukan kepada penulis mulai dari pertama masuk kuliah hingga penulis lulus. Terima kasih yang teramat banyak untuk semua nasihat, bantuan, masukan, doa, dan dorongan semangat yang luar biasa yang telah diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

4. Ibu Dian Lestari selaku pembimbing II dan koordinator pendidikan. Terima kasih yang teramat banyak untuk semua nasihat, bantuan, masukan,doa, dan dorongan semangat yang luar biasa yang telah diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Saskya Mary, Ibu Rustina dan Mba Sarini yang telah memberikan masukan-masukan yang membangun untuk perbaikan tugas akhir ini.
6. Seluruh dosen di Departemen Matematika UI atas semua ilmu yang telah diberikan. Doakan penulis agar ilmu ini berguna bagi bangsa dan agama.
7. Seluruh staf di Departemen Matematika UI yang telah banyak membantu penulis dalam berbagai hal.
8. Akmal Fikri yang telah sabar dan baik hati menghadapi penulis serta selalu membantu penulis.
9. Seluruh teman-teman angkatan 2005: Shinta (terima kasih ya shin buat doa dan dukungannya), Tante Rani, Miranti, Neng F a.k.a Fika, Inul si ”dewi matahari”, Dia yang baik hati, Nool, Fia, Om Teha, Memey, Kumel, Meri, Khuri, Nisma, Othe, Yanu, Wicha, Ratih, Iye, Gyo, Syarah, Puji, Maul, Anggie, Desti, Dian, Mia, Rif’ah, Nurma, Yuni, QQ, Shally, Rara, Aya, Hairu, Hamdan, Jessie, Maria, Karlina, Ranti, Udin, Aris, Ridwan, Trian, Andre, Rifkos, Chupz, Vani, Aini, Pute, Ida, Amri, Uun, Asep, Dimas, Feri, terima kasih untuk dukungannya dan semoga angkatan kita semua berhasil menyelesaikan pendidikannya di Matematika.

10. Seluruh teman yang telah memberi semangat, terutama teman-teman di Matematika UI angkatan 2002, 2003, 2004, 2006, 2007, 2008 dan 2009. Serta teman bimbingan: ka Avi ’04 dan ka Intan ’04.
11. Sahabat penulis: Lala, Hero, Iwied, Pjonq, Hanum, yang selalu mendoakan dan memberi semangat kepada penulis.
12. Paman Hasyim yang selalu setia dan sabar mengantar, menunggu, dan menemani penulis sejak sekolah dasar hingga sekarang.
13. Terima kasih khusus kepada Edi ’04 yang telah membantu penulis dalam penulisan tugas akhir ini, dan ka Iif ’04 yang telah memberikan referensi yang sangat berguna.
14. Emily Berg. *I really thankful for your assistance*. *Thank you so much*.
15. Seluruh pihak yang tidak disebutkan namanya, yang secara langsung ataupun tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis mengucapkan terima kasih.

Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya. Akhirnya, Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam tugas akhir ini sehingga penulis mengharapkan masukan dan kritik yang membangun dari berbagai pihak untuk menyempurnakan tugas akhir ini.

Penulis

2009

ABSTRAK

Error in variable model adalah model regresi dimana variabel independennya mengandung *error*. Hal ini dikarenakan nilai sebenarnya dari variabel independen tidak diketahui dan tidak dapat diukur dengan tepat sesuai dengan nilai sebenarnya (disebut dengan variabel independen yang tidak terobservasi), sehingga nilai sebenarnya dari variabel independen ini diwakilkan oleh nilai yang didapat dari suatu proses pengukuran yang belum tentu sesuai dengan nilai sebenarnya. Salah satu jenis *error in variable model* adalah *classical error in variable model*. Pada *classical error in variable model*, terdapat dua jenis variabel independen yang tidak terobservasi, yaitu *fixed* dan *random*. Pada penulisan tugas akhir ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada *classical error in variable model* dimana variabel independen yang tidak terobservasi berdistribusi normal dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

Kata kunci: *classical error in variable model* ; *error in variable model* ; metode maksimum likelihood

x + 139 hlm.; lamp.

Bibliografi : 15 (1950 – 2008)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar | Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel | Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Analisis regresi merupakan suatu metode untuk menyelidiki hubungan fungsional antara variabel-variabel. Variabel yang dipengaruhi oleh variabel lain disebut dengan variabel dependen, sedangkan variabel yang mempengaruhi variabel dependen disebut dengan variabel independen. Hubungan ini dinyatakan dalam bentuk suatu persamaan atau model yang menghubungkan variabel dependen dengan variabel-variabel independen yang disebut dengan model regresi.

Pada model regresi, biasanya seorang peneliti menganggap variabel independen merupakan suatu nilai yang diperhitungkan dengan tepat sehingga variabel independen pada model regresi tidak mengandung komponen *error*. Walaupun sebenarnya pada model regresi tersebut ada *error* yang muncul pada variabel independen, hanya saja *error* yang muncul kecil, sehingga *error* pada kasus tersebut tidak diperhatikan. Tetapi pada kenyataanya, terdapat beberapa situasi yang mengharuskan peneliti untuk memperhatikan *error* yang muncul pada variabel independen karena *error* tersebut berpotensi mempengaruhi analisis yang digunakan dalam perhitungan.

Model regresi dimana variabel independennya mengandung *error* disebut dengan *error in variable model* atau *measurement error model*. *Error* yang muncul pada variabel independen disebut dengan *measurement error*. Munculnya *error* pada variabel independen dikarenakan nilai sebenarnya dari variabel independen tidak diketahui dan tidak dapat diukur dengan tepat sesuai dengan nilai sebenarnya, sehingga nilai sebenarnya dari variabel independen ini diwakilkan oleh suatu nilai yang didapat melalui suatu proses pengukuran yang belum tentu sesuai dengan nilai sebenarnya. Pada *error in variabel model*, nilai sebenarnya dari variabel independen yang tidak diketahui dan tidak dapat diukur dengan tepat sesuai dengan nilai sebenarnya disebut dengan variabel independen yang tidak terobservasi. Sedangkan nilai variabel independen yang didapat dari proses pengukuran disebut dengan variabel independen yang terobservasi.

Berkson dalam jurnalnya yaitu "*Are there two regressions?*" membedakan *error in variable model* menjadi dua jenis, yaitu *classical error in variable model* dan *error in variable model* kasus Berkson. *Classical error in variable model* adalah *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa antara variabel independen yang tidak terobservasi dan *measurement error* saling independen. Sedangkan *error in variable model* kasus Berkson adalah *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa antara variabel independen yang tidak terobservasi dan *measurement error* tidak independen.

Pada *classical error in variable model*, terdapat dua jenis variabel independen yang tidak terobservasi, yaitu *fixed* dan *random.* Variabel independen yang tidak terobservasi akan dianggap suatu nilai yang *fixed* jika variabel independen yang tidak terobservasi berada di bawah kontrol dari peneliti. Sedangkan variabel independen yang tidak terobservasi akan dianggap suatu variabel random jika variabel independen yang tidak terobservasi tidak berada di dalam kontrol dari peneliti. Sehingga berdasarkan variabel independen yang tidak terobservasi, *classical error in variable model* dibagi menjadi dua jenis model yaitu *functional relationship model* dan *structural relationship model*. *Functional relationship model* yaitu *classical error in variable model* dimana variabel independen yang tidak terobservasi diasumsikan sebagai suatu nilai fixed yang tidak diketahui nilainya. Sedangkan *structural relationship model* yaitu *classical error in variable model* dimana variabel independen yang tidak terobservasi diasumsikan sebagai suatu variabel random.

Penaksiran parameter pada *classical error in variable model* tidak dapat diselesaikan dengan metode OLS yang biasanya digunakan untuk menaksir parameter pada model regresi, karena akan menghasilkan taksiran yang *biased*. Oleh karena itu, pada penulisan tugas akhir ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada *classical error in variable model* dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Bagaimana cara mencari taksiran parameter pada *classical error in variable model*.

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah membahas penaksiran parameter pada *classical error in variable model*.

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Pada tugas akhir ini *classical error in variable model* yang dibahas adalah *linear structural relationship model*. Variabel independen yang tidak terobservasi diasumsikan berdistribusi normal. Metode penaksiran yang digunakan adalah metode maksimum likelihood.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan tugas akhir ini, dibagi menjadi lima bab, yaitu :

Bab I membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II membahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam analisis *classical error in variable model*. Diantaranya adalah teori mengenai matriks, *kronecker product*, *vec operator*, *Moore-Penrose inverse*, *commutation matrix*, *vech operator* dan *duplication matrix*, diferensiasi pada vektor dan matriks, variabel random normal, metode maksimum likelihood, model regresi dan penaksiran koefisien model regresi dengan metode OLS.

Bab III membahas metode penaksiran parameter pada *classical error in variable model.*

Bab IV membahas aplikasi dari *classical error in variable model*.

Bab V berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 MATRIKS

2.1.1 Definisi dan Notasi

Suatu matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ merupakan suatu susunan dari skalar yang berbentuk persegi atau persegi panjang yang diberikan oleh

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriks $\mathbf{A}$ juga dapat diidentifikasi dalam bentuk yang sederhana sebagai $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$. Jika $m = n$, maka $\mathbf{A}$ disebut matriks persegi berdimensi m. Suatu matriks $\boldsymbol{a}$ berukuran $m \times 1$ adalah

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

dan matriks $\boldsymbol{a}$ di atas disebut dengan vektor kolom atau vektor. Elemen a_i menunjukkan komponen ke-i dari $\boldsymbol{a}$. Sedangkan matriks yang berukuran

$1 \times m$ disebut dengan vektor baris. Baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks $\mathbf{A}$ terkadang dinotasikan secara berurutan dengan $(\mathbf{A})_{i\bullet}$ dan $(\mathbf{A})_{\bullet j}$.

Elemen diagonal dari matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $m \times m$ adalah $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$. Jika elemen lainnya dari matriks $\mathbf{A}$ adalah 0, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks diagonal dan dapat dinotasikan dengan $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{mm})$. Jika elemen diagonal dari matriks $\mathbf{A}$, yaitu $a_{ii} = 1$ untuk $i = 1, \ldots, m$, sehingga $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks identitas berdimensi m dan dapat ditulis dengan $\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$ atau dapat ditulis dalam bentuk yang sederhana yaitu $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Kolom ke-i dari matriks identitas yang berukuran $m \times m$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{e}_i$; $\boldsymbol{e}_i$ adalah vektor berukuran $m \times 1$ yang komponen ke-i adalah 1 sedangkan komponen lainnya adalah 0.

Vektor yang semua komponennya adalah 0 disebut dengan vektor null, sedangkan matriks yang semua elemennya adalah 0 disebut dengan matriks null dan dinotasikan dengan **0** atau (0).

2.1.2 Penjumlahan dan Perkalian Matriks

Penjumlahan dari dua matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ terdefinisi jika kedua matriks tersebut berukuran sama. Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ dan $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka penjumlahan dari matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$ dan hasil perkalian antara skalar α dengan matriks $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ adalah $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = \{\alpha a_{ij}\}$.

Perkalian antara matriks $\mathbf{A}$ dengan matriks $\mathbf{B}$ terdefinisi jika banyaknya kolom dari matriks $\mathbf{A}$ sama dengan banyaknya baris dari matriks $\mathbf{B}$. Dengan demikian, jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times p$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times n$, maka $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ yang elemen ke (i,j) adalah c_{ij} dimana

$$c_{ij} = (\mathbf{A})_{i\bullet}(\mathbf{B})_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Definisi dari $\mathbf{BA}$ similar dengan definisi $\mathbf{AB}$. Yaitu, $\mathbf{BA}$ terdefinisi jika banyaknya kolom dari matriks $\mathbf{B}$ sama dengan banyaknya baris dari matriks $\mathbf{A}$. Jika matriks $\mathbf{A}$ adalah matriks persegi, maka hasil perkalian $\mathbf{AA}$, atau dalam bentuk sederhana dinotasikan dengan $\mathbf{A}^2$, terdefinisi. Jika $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks idempoten.

2.1.3 Matriks Transpos

Transpos dari matriks $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ yang berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $n \times m$ yang didapat dengan menukarkan baris dengan kolom dari matriks $\mathbf{A}$ dan dinotasikan dengan $\mathbf{A}^T$. Dengan demikian elemen ke (i,j) dari matriks $\mathbf{A}^T$ adalah a_{ji}. Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times p$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times n$, maka elemen ke (i,j) dari $(\mathbf{AB})^T$ adalah

$$\left((\mathbf{AB})^T\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j\bullet}(\mathbf{B})_{\bullet i} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \left(\mathbf{B}^T\right)_{i\bullet}\left(\mathbf{A}^T\right)_{\bullet j} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right)_{ij}$$

Sehingga didapat bahwa $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Teorema 2.1 Misalkan α dan β adalah skalar, serta $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks. Maka

a) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$

b) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$

c) $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{A}^T + \beta\mathbf{B}^T$

d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks persegi yang berukuran $m \times m$, maka $\mathbf{A}^T$ juga merupakan matriks persegi yang berukuran $m \times m$. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, maka $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks simetris. Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ merupakan matriks simetris, maka $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Untuk vektor, transpos dari vektor kolom adalah vektor baris, begitu pula sebaliknya.

2.1.4 *Trace* Matriks

Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ adalah suatu matriks persegi berukuran $m \times m$, maka *trace* dari matriks $\mathbf{A}$, yang dinotasikan dengan $\text{tr}(\mathbf{A})$, didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal pada matriks $\mathbf{A}$, yaitu

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{mm}.$$

Sifat dari *trace* diantaranya adalah sebagai berikut:

a) $\text{tr}(\mathbf{I}_m) = m$

b) $\text{tr}(\alpha) = \alpha$

c) $\text{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\,\text{tr}(\mathbf{A})$

d) $\text{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$

e) $\text{tr}(\mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A})$

dimana α adalah sembarang skalar , sedangkan $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $m \times m$.

Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ suatu matriks persegi berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $n \times m$, maka tr($\mathbf{AB}$) = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$; dimana $\mathbf{AB} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$. Maka berdasarkan sifat dari *trace* yang ke 5 didapat

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T\right) \qquad (2.1.4.a)$$

sehingga dapat diperluas sebagaimana diberikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.1 Untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dan matriks $\mathbf{B}$ berukuran $n \times m$ maka tr($\mathbf{AB}$) = tr($\mathbf{BA}$)

Bukti:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}).$$

Catatan : Berdasarkan (2.1.4.a) dan lemma 2.1, untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dan matriks $\mathbf{B}$ berukuran $n \times m$ maka

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T\right).$$

Bentuk di atas dapat diperluas untuk *trace* dari perkalian matriks $\mathbf{ABC}$ dimana $\mathbf{A}$ matriks berukuran $m \times n$, $\mathbf{B}$ matriks berukuran $n \times p$, dan $\mathbf{C}$ matriks berukuran $p \times m$ sehingga

$$\operatorname{tr}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{tr}(\mathbf{CAB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BCA}). \qquad (2.1.4.b)$$

2.1.5 Invers Matriks

Misalkan $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ adalah suatu matriks persegi berukuran $m\times m$. $\mathbf{A}$ disebut nonsingular jika terdapat matriks $\mathbf{A}^{-1}$ sedemikian sehingga $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$. $\mathbf{A}^{-1}$ disebut dengan invers dari matriks $\mathbf{A}$.

2.1.6 Determinan dan *Adjoint* Matriks

Misalkan $\mathbf{A}=\left\{a_{ij}\right\}$ menyatakan matriks berukuran $m\times m$ dan $\mathbf{A}_{ij}$ menyatakan submatriks dari $\mathbf{A}$ berukuran $(m-1)\times(m-1)$ yang didapat dengan menghilangkan baris serta kolom yang mengandung elemen a_{ij}, yakni baris ke-i dan kolom ke-j. Determinan dari submatriks $\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ disebut minor dari elemen a_{ij}, sedangkan $(-1)^{i+j}\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ disebut kofaktor dari a_{ij}. Misalkan a_{ij} menyatakan elemen ke-ij dari matriks berukuran $m\times m$, dan misalkan α_{ij} menyatakan kofaktor dari a_{ij} dimana $i, j = 1,2,\ldots,m$. Maka, untuk $i = 1,2,\ldots,m$,

$$\left|\mathbf{A}\right|=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_{ij}=a_{i1}\alpha_{i1}+\ldots+a_{im}\alpha_{im}$$

dan untuk $j = 1,2,\ldots,m$,

$$\left|\mathbf{A}\right|=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_{ij}=a_{1j}\alpha_{1j}+\ldots+a_{mj}\alpha_{mj}.$$

Catatan: Transpos matriks kofaktor dari $\mathbf{A}$ disebut matriks *adjoint* dan dinotasikan dengan $adj(\mathbf{A})$, yaitu:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

dimana memenuhi sifat:

1. $\mathbf{A}\, adj(\mathbf{A}) = adj(\mathbf{A})\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{I}_m$
2. $adj(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|\,\mathbf{A}^{-1}$ atau ekivalen dengan $\mathbf{A}^{-1} = \left(1/|\mathbf{A}|\right) adj(\mathbf{A})$

2.1.7 *Rank* Matriks

Definisi 2.1 Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$, maka $r(\mathbf{A}) \leq \min(m,n)$ dimana $r(\mathbf{A})$ adalah notasi dari *rank* $(\mathbf{A})$.

Definisi 2.2 Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full rank* jika $r(\mathbf{A}) = \min(m,n)$. Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full colomn rank* jika $r(\mathbf{A}) = n$. Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full row rank* jika $r(\mathbf{A}) = m$.

2.1.8 *Kronecker Product*

Jika $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times q$, maka *kronecker product* dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $mp \times nq$, yaitu

$$\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \qquad (2.1.8.a)$$

Tidak seperti matriks perkalian yang biasa, *kronecker product* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ dapat didefinisikan tanpa mempedulikan ukuran dari matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$. Bagaimanapun, sama seperti matriks perkalian, *kronecker product* pada umumnya tidak bersifat komutatif sehingga $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$.

Teorema 2.2 Misalkan $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah sembarang matriks. $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah sembarang vektor. Maka

a) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$

b) $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{a}$

(Bukti Teorema 2.2 dapat dilihat pada lampiran 1)

Teorema 2.3 Misalkan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, dan $\mathbf{D}$ adalah matriks berukuran $m \times h$, $p \times k$, $h \times n$, dan $k \times q$, secara berurutan. Maka

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD} \tag{2.1.8.b}$$

Bukti Teorema 2.3. Ruas kiri dari (2.1.8.b) adalah

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1h}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mh}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}\mathbf{D} & \cdots & c_{1n}\mathbf{D} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{h1}\mathbf{D} & \cdots & c_{hn}\mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \cdots & \mathbf{F}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{F}_{m1} & \cdots & \mathbf{F}_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathbf{F}_{ij} = \sum_{l=1}^{h} a_{il} c_{lj} \mathbf{BD} = (\mathbf{A})_{i\cdot} (\mathbf{C})_{\cdot j} \mathbf{BD} = (\mathbf{AC})_{ij} \mathbf{BD}$.

Sehingga

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n} \mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn} \mathbf{BD} \end{bmatrix}$$

Ruas kanan dari (2.1.8.b)

$$\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD} = \begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n} \mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn} \mathbf{BD} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n} \mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1} \mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn} \mathbf{BD} \end{bmatrix} = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

Teorema 2.4 Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times m$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times p$. Maka

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{B}).$$

Bukti Teorema 2.4. Dengan menggunakan (2.1.8.a) dimana $n = m$, dapat dilihat bahwa

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ii} \right) \operatorname{tr}(\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{B}).$$

Teorema 2.5 Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times q$. Maka

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \text{ , jika } m = n,\ p = q \text{ dan } \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \text{ nonsingular .}$$

Bukti Teorema 2.5. Dengan menggunakan **Teorema 2.3**, didapat bahwa

$$\left(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}\right)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\right) = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{mp} .$$

Karena $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{I}_{mp}$, maka **Teorema 2.5** terbukti.

2.1.9 *Vec Operator*

Sebuah matriks dapat ditransformasikan menjadi suatu vektor dimana elemennya adalah elemen-elemen dari matriks tersebut. Operator yang mentransformasi suatu matriks menjadi suatu vektor dikenal sebagai *vec operator*. Jika matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ memiliki $\boldsymbol{a}_i$ sebagai vektor kolom ke-i maka $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ adalah vektor $mn \times 1$ yang diberikan oleh

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \quad ;\text{dimana } \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Contoh *vec operator*

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran 2×3 yang diberikan oleh $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

maka $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ adalah vektor berukuran 6×1 yang diberikan oleh $\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.6 Misalkan $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah sembarang vektor, sedangkan $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama. Maka

a) $\mathrm{vec}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T) = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$

b) $\mathrm{vec}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\,\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \beta\,\mathrm{vec}(\mathbf{B})$; dimana α dan β adalah skalar .

Bukti Teorema 2.6

a) Misalkan $\boldsymbol{a}$ adalah vektor berukuran $m \times 1$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor berukuran $n \times 1$ dimana $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, sehingga

$$\boldsymbol{ab}^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_2a_1 & \cdots & b_na_1 \\ b_1a_2 & b_2a_2 & \cdots & b_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1a_m & b_2a_m & \cdots & b_na_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{a} & b_2\boldsymbol{a} & \cdots & b_n\boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

maka, $\mathrm{vec}(\boldsymbol{ab}^T) = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{a} & b_2\boldsymbol{a} & \cdots & b_n\boldsymbol{a} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{a} \\ b_2\boldsymbol{a} \\ \vdots \\ b_n\boldsymbol{a} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$

b) Misalkan matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah dua buah matriks yang keduanya memiliki ukuran $m \times n$, sehingga

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\beta\mathbf{B} = \beta\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta b_{11} & \beta b_{12} & \cdots & \beta b_{1n} \\ \beta b_{21} & \beta b_{22} & & \beta b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta b_{m1} & \beta b_{m2} & \cdots & \beta b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{maka}$$

$$\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}+\beta b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{m1}+\beta b_{m1} & \alpha a_{m2}+\beta b_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}+\beta b_{mn}\end{bmatrix},$$ sehingga

$$\mathrm{vec}(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})=\begin{bmatrix}\alpha a_{11}+\beta b_{11}\\ \vdots\\ \alpha a_{m1}+\beta b_{m1}\\ \alpha a_{12}+\beta b_{12}\\ \vdots\\ \alpha a_{mn}+\beta b_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11}\\ \vdots\\ \alpha a_{m1}\\ \alpha a_{12}\\ \vdots\\ \alpha a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta b_{11}\\ \vdots\\ \beta b_{m1}\\ \beta b_{12}\\ \vdots\\ \beta b_{mn}\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\\ a_{12}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b_{11}\\ \vdots\\ b_{m1}\\ b_{12}\\ \vdots\\ b_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\alpha\,\mathrm{vec}(\mathbf{A})+\beta\,\mathrm{vec}(\mathbf{B})$$

Teorema 2.7 Misalkan $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama, yaitu $m\times n$. Maka

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})=\left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right\}^T\,\mathrm{vec}(\mathbf{B}).$$

Bukti Teorema 2.7. Misalkan $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ menotasikan vektor kolom dari $\mathbf{A}$ dan $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ menotasikan vektor kolom dari $\mathbf{B}$. Maka

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{b}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}=\left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right\}^T\,\mathrm{vec}(\mathbf{B}).$$

Teorema 2.8 Misalkan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, dan $\mathbf{C}$ adalah matriks yang memiliki ukuran $m\times n$, $n\times p$, dan $p\times q$ secara berurutan. Maka

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}).$$

Bukti Teorema 2.8. Jika $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_p$ menotasikan vektor kolom dari $\mathbf{B}$, maka $\mathbf{B}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{e}_i^T$$

dimana $\boldsymbol{e}_i$ adalah vektor kolom ke-i dari matriks $\mathbf{I}_p$. Sehingga

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\mathbf{ABC}) &= \text{vec}\left\{\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{e}_i^T\right)\mathbf{C}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \text{vec}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{e}_i^T \mathbf{C}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \text{vec}\left\{\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}_i\right)\left(\mathbf{C}^T \boldsymbol{e}_i\right)^T\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\mathbf{C}^T \boldsymbol{e}_i \otimes \mathbf{A}\boldsymbol{b}_i\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.6 (a)} \\
&= (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\sum_{i=1}^{p} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{b}_i\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.3} \\
&= (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{vec}\left(\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{e}_i^T\right) = \text{vec}\left(\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{e}_i^T\right) = \text{vec}(\mathbf{B}).$$

Sehingga terbukti bahwa $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$.

Teorema 2.9 Misalkan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ dan $\mathbf{D}$ adalah matriks yang memiliki ukuran $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$, dan $q \times m$ secara berurutan. Maka

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ABCD}) = \left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\right\}^T (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B})\mathrm{vec}(\mathbf{C}).$$

Bukti Teorema 2.9. Dengan menggunakan **Teorema 2.7**, didapat

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ABCD}) = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{A}\left(\mathbf{BCD}\right)\right\} = \left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\right\}^T \mathrm{vec}\left(\mathbf{BCD}\right).$$

Berdasarkan **Teorema 2.8** didapat

$$\mathrm{vec}\left(\mathbf{BCD}\right) = (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B})\mathrm{vec}(\mathbf{C}).$$

Sehingga

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ABCD}) = \left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\right\}^T \mathrm{vec}\left(\mathbf{BCD}\right) = \left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\right\}^T (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B})\mathrm{vec}(\mathbf{C}).$$

2.1.10 *Generalized Inverse* : *Moore-Penrose Inverse*

Invers dari suatu matriks dapat dicari untuk semua matriks persegi yang nonsingular. Tetapi, terdapat situasi dimana suatu matriks persegi panjang atau persegi, sebut $\mathbf{A}$, membutuhkan suatu matriks yang dalam beberapa hal berfungsi seperti invers dari $\mathbf{A}$. Matriks yang berfungsi seperti invers dari $\mathbf{A}$ untuk situasi tersebut disebut dengan *generalized inverse*.

Salah satu *generalized inverse* yang sering digunakan dalam aplikasi statistik adalah yang dikembangkan oleh Moore dan Penrose yang dikenal dengan *Moore-Penrose inverse* (Schott, 1997). *Moore-Penrose inverse* memiliki 4 sifat yang sama dengan invers dari matriks persegi yang nonsingular.

Definisi 2.3 *Moore-Penrose inverse* dari matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $n \times m$, dinotasikan oleh $\mathbf{A}^{+}$, yang memenuhi 4 kondisi sebagai berikut

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{2.3.a}$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+} \tag{2.3.b}$$

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} \tag{2.3.c}$$

$$\left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{T} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} \tag{2.3.d}$$

Definisi 2.4 Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan *full colomn rank*. *Moore-Penrose inverse* dari matriks $\mathbf{A}$ yang dinotasikan oleh $\mathbf{A}^{+}$ diberikan oleh

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}.$$

2.1.11 *Commutation Matrix*

Matriks permutasi berukuran $m \times m$ didefinisikan sebagai sembarang matriks yang didapat dari $\mathbf{I}_m$ dengan merubah posisi kolomnya. Salah satu bentuk khusus dari matriks permutasi adalah *commutation matrix*.

Definisi 2.5 Misalkan $\mathbf{H}_{ij}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ yang elemen *non-zero*nya hanyalah angka 1 dan elemen *non-zero*nya berada pada posisi baris ke-i kolom ke-j. Maka *commutation matrix* yang dinotasikan oleh $\mathbf{K}_{mn}$ adalah matriks berukuran $mn \times mn$ yang diberikan oleh

$$\mathbf{K}_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\right).$$

Matriks $\mathbf{H}_{ij}$ dapat dinyatakan dalam bentuk kolom dari matriks identitas $\mathbf{I}_m$ dan $\mathbf{I}_n$. Jika $e_{i,m}$ adalah kolom ke-i dari $\mathbf{I}_m$ dan $e_{j,n}$ adalah kolom ke-j dari $\mathbf{I}_n$, maka $\mathbf{H}_{ij} = e_{i,m}e_{j,n}^{T}$.

Teorema 2.10 *Commutation matrix* memenuhi sifat-sifat sebagai berikut

a) $\mathbf{K}_{mn}^{T} = \mathbf{K}_{nm}$

b) $\mathbf{K}_{mn}^{-1} = \mathbf{K}_{nm}$

Bukti Teorema 2.10

a) $\mathbf{K}_{mn}^{T} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\right)\right)^{T}$; karena $\mathbf{K}_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\right)$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij}{}^{T} \otimes \mathbf{H}_{ij}\right)$; berdasarkan Teorema 2.2 (a)

$= \mathbf{K}_{nm}$

b) $\mathbf{H}_{ij}\mathbf{H}_{kl}^{T} = \left(e_{i,m}e_{j,n}{}^{T}\right)\left(e_{l,n}e_{k,m}{}^{T}\right) = \begin{cases} e_{i,m}e_{k,m}{}^{T} & \text{jika } j = l \\ (0) & \text{jika } j \neq l \end{cases}$

$$\mathbf{H}_{ij}^{T}\mathbf{H}_{kl} = \left(e_{j,n}e_{i,m}{}^{T}\right)\left(e_{k,m}e_{l,n}{}^{T}\right) = \begin{cases} e_{j,n}e_{l,n}{}^{T} & \text{jika } i = k \\ (0) & \text{jika } i \neq k \end{cases}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{mn}\mathbf{K}_{nm} &= \mathbf{K}_{mn}\mathbf{K}_{mn}^{T} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\right)\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{kl} \otimes \mathbf{H}_{kl}{}^{T}\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij}\mathbf{H}_{kl}{}^{T} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\mathbf{H}_{kl}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(e_{i,m}e_{k,m}{}^{T} \otimes e_{j,n}e_{l,n}{}^{T}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}e_{i,m}e_{k,m}{}^{T} \otimes \sum_{j=1}^{n}e_{j,n}e_{l,n}{}^{T}\right) \\
&= \mathbf{I}_{m} \otimes \mathbf{I}_{n} \\
&= \mathbf{I}_{mn}
\end{aligned}$$

Karena $\mathbf{K}_{mn}\mathbf{K}_{nm} = \mathbf{I}_{mn}$, maka terbukti bahwa $\mathbf{K}_{mn}^{-1} = \mathbf{K}_{nm}$.

Commutation matrix memiliki hubungan penting dengan *vec operator* dan *kronecker product*. Teorema berikut menjelaskan hubungan antara *commutation matrix* dengan $\text{vec}(\mathbf{A})$ dan $\text{vec}\left(\mathbf{A}^{T}\right)$ dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$.

Teorema 2.11 Untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$, maka

$$\mathbf{K}_{mn}\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec}(\mathbf{A}^T).$$

Bukti Teorema 2.11. Misalkan a_{ij} adalah elemen ke (i, j) dari matriks $\mathbf{A}$. Karena $a_{ij}\mathbf{H}_{ij}{}^T$ adalah matriks berukuran $n \times m$ yang elemen *non-zero*nya adalah a_{ij}; dimana elemen *non-zero*nya tersebut (a_{ij}) berada pada posisi (j, i). Didapat

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^T &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{H}_{ij}{}^T \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(e_{i,m}^T \mathbf{A} e_{j,n}\right) e_{j,n} e_{i,m}^T \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} e_{j,n} \left(e_{i,m}^T \mathbf{A} e_{j,n}\right) e_{i,m}^T \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(e_{j,n} e_{i,m}^T\right) \mathbf{A} \left(e_{j,n} e_{i,m}^T\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_{ij}{}^T \mathbf{A} \mathbf{H}_{ij}{}^T
\end{aligned}$$

Lalu, dengan memberikan *vec operator* pada $\mathbf{A}^T$ di atas, didapat

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\mathbf{A}^T) &= \text{vec}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_{ij}{}^T \mathbf{A} \mathbf{H}_{ij}{}^T\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \text{vec}\left(\mathbf{H}_{ij}{}^T \mathbf{A} \mathbf{H}_{ij}{}^T\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{H}_{ij} \otimes \mathbf{H}_{ij}{}^{T}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\right) \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.8}$$

$$= \mathbf{K}_{mn}\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\right).$$

Selanjutnya, teorema berikut menjelaskan hubungan antara *commutation matrix* dengan *kronecker product*.

Teorema 2.12 Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times q$, maka

$$\mathbf{K}_{pm}\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right) = \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}\right)\mathbf{K}_{qn}.$$

Bukti Teorema 2.12

Jika $\mathbf{X}$ adalah matriks berukuran $q \times n$, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{pm}\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbf{K}_{pm}\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A}^{T}\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.8} \\
&= \mathrm{vec}\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A}^{T}\right)^{T}\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.11} \\
&= \mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\mathbf{X}^{T}\mathbf{B}^{T}\right) && \text{; berdasarkan sifat transpos} \\
&= \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}^{T}\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.8} \\
&= \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}\right)\mathbf{K}_{qn}\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right) && \text{; berdasarkan Teorema 2.11}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $\mathbf{X}$ yang dipilih sedemikian sehingga $\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)$ sama dengan kolom ke-i dari $\mathbf{I}_{qn}$ maka dapat dikatakan bahwa kolom ke-i dari

$\mathbf{K}_{pm}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})$ haruslah sama dengan kolom ke-i dari $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{A})\mathbf{K}_{qn}$.

Sehingga $\mathbf{K}_{pm}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\mathbf{B}\otimes\mathbf{A})\mathbf{K}_{qn}$ terbukti.

Didefinisikan $\mathbf{N}_m = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}+\mathbf{K}_{mm}\right)$ dimana $\mathbf{I}_{m^2}$ adalah matris identitas berukuran $mm\times mm$ dan $\mathbf{K}_{mm}$ adalah *commutation matrix* berukuran $mm\times mm$.

Teorema 2.13 Misalkan $\mathbf{N}_m = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}+\mathbf{K}_{mm}\right)$ dan misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m\times m$, maka

a) $\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m{}^T$

b) $\mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm} = \mathbf{K}_{mm}\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m$

c) $\mathbf{N}_m\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\operatorname{vec}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)$

d) $\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})$

Bukti Teorema 2.13

a) Kesimetrisan dari $\mathbf{N}_m$ didapat dari kesimetrisan $\mathbf{I}_{m^2}$ dan $\mathbf{K}_{mm}$, sehingga

$\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m{}^T$.

b) $\mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}+\mathbf{K}_{mm}\right)\mathbf{K}_{mm}$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{mm}{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{mm}{}^2\right) \qquad (*)$$

Berdasarkan teorema 2.10 (b), didapat bahwa $\mathbf{K}_{mm}{}^{-1} = \mathbf{K}_{mm}$, sehingga

$\mathbf{K}_{mm}\mathbf{K}_{mm} = \mathbf{K}_{mm}\mathbf{K}_{mm}{}^{-1} = \mathbf{I}_{m^2}$. Maka (*) menjadi

$$\mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{I}_{m^2}\right)$$

$$= \mathbf{N}_m$$

Hal yang sama

$$\mathbf{K}_{mm}\mathbf{N}_m = \mathbf{K}_{mm}\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{K}_{mm}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{mm}\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{K}_{mm}{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{mm}{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{I}_{m^2}\right)$$

$$= \mathbf{N}_m$$

Karena $\mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm} = \mathbf{N}_m$ dan $\mathbf{K}_{mm}\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m$, maka terbukti bahwa $\mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm} = \mathbf{K}_{mm}\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m$.

c) $\mathbf{N}_m\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{K}_{mm}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{A})$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \mathbf{K}_{mm}\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \mathbf{K}_{mm}\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \mathrm{vec}\left(\mathbf{A}^T\right)\right)$$; berdasarkan teorema 2.11

$$= \frac{1}{2}\mathrm{vec}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$$; berdasarkan teorema 2.6

Terbukti bahwa $\mathbf{N}_m \mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\mathrm{vec}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$.

d) $\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{K}_{mm}\right)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m + \mathbf{K}_{mm}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{K}_{mm}\mathbf{N}_m\right)$$; berdasarkan Teorema 2.12

$$= \frac{1}{2}\left((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m\right)$$; berdasarkan Teorema 2.13 (b)

$$= \frac{1}{2}\left(2(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m\right)$$

$$= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m$$

$\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{K}_{mm}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{K}_{mm}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + \mathbf{N}_m\mathbf{K}_{mm}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\right)$$; berdasarkan Teorema 2.12

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + \mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\right)$$; berdasarkan Teorema 2.13 (b)

$$= \frac{1}{2}\left(2\mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\right)$$

$$= \mathbf{N}_m(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$$

Karena $\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m$ dan $\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m=\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})$, maka terbukti bahwa $\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m=\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})$.

2.1.12 *Vech Operator* dan *Duplication Matrix*

Apabila matriks $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ yang berukuran $m\times m$ merupakan matriks simetris, maka $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ mengandung elemen yang sama karena $a_{ij}=a_{ji}$ untuk $i\neq j$. Oleh karena itu didefinisikan $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ yaitu vektor berukuran $m(m+1)/2\times 1$ yang dibentuk dengan menyusun kolom dari segitiga bawah dari matriks $\mathbf{A}$ yang diberikan oleh

$$\mathrm{vech}(\mathbf{A})=(a_{11},a_{21},\dots,a_{m1},a_{22},a_{32},\dots,a_{m2},a_{33},a_{43},\dots a_{m3},\dots,a_{mm})^T.$$

Matriks yang mentransformasi $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ ke dalam $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ disebut *duplication matrix* yang dinotasikan dengan D_m. Maka untuk matriks simetris $\mathbf{A}$ berukuran $m\times m$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A})=D_m\ \mathrm{vech}(\mathbf{A}). \qquad (2.1.12.a)$$

Elemen dari D_m didapat dengan cara mencocokkan elemen $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ dengan elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$. Elemen dari D_m didefinisikan untuk $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,m$, $k\geq l=1,2,\dots,m$

$$(D_m)_{ij,kl} = \begin{cases} 1 \text{ jika } (i,j)=(k,l) \\ 1 \text{ jika } (i,j)=(l,k) \\ 0 \text{ lainnya.} \end{cases} \quad (2.1.12.b)$$

Elemen pertama dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$, yaitu $(k,l)=(1,1)$ dicocokkan dengan tiap elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, yaitu (i,j). Apabila elemen pertama dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ sama dengan elemen dari $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, maka diberi nilai satu. Bila tidak sama, diberi nilai nol. Hasil pencocokan antara elemen pertama dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ dengan tiap elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ merupakan vektor kolom yang pertama dari D_m. Kemudian, elemen kedua dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$, yaitu $(k,l)=(2,1)$ dicocokkan dengan tiap elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, yaitu (i,j). Hasil pencocokan antara elemen kedua dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ dengan tiap elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ merupakan vektor kolom kedua dari D_m, dst.

Berikut ini akan diberikan contoh bagaimana cara menentukan *duplication matrix*. Misalkan matriks simetris $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran 3×3 yang diberikan oleh $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$. Vec dari matriks $\mathbf{A}$ adalah

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ d \\ e \\ c \\ e \\ f \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow (i,j) = (1,1) \\ \rightarrow (i,j) = (2,1) \\ \rightarrow (i,j) = (3,1) \\ \rightarrow (i,j) = (1,2) \\ \rightarrow (i,j) = (2,2) \\ \rightarrow (i,j) = (3,2) \\ \rightarrow (i,j) = (1,3) \\ \rightarrow (i,j) = (2,3) \\ \rightarrow (i,j) = (3,3) \end{matrix}$$

. Terlihat bahwa elemen b, c, e muncul dua kali. Agar elemen dari matriks $\mathbf{A}$ tidak muncul lebih dari satu kali, akan didefinisikan suatu vektor yang disebut $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ yang elemennya terdiri dari elemen matriks $\mathbf{A}$ dimana elemen dari matriks $\mathbf{A}$ tidak muncul lebih dari satu kali pada vektor tersebut. $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ didapat dengan menyusun kolom dari segitiga bawah dari matriks $\mathbf{A}$, sebut $\mathbf{A}_\Delta$, yaitu $\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} a & & \\ b & d & \\ c & e & f \end{bmatrix}$. Sehingga didapat

$$\mathrm{vech}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow (k,l) = (1,1) \\ \rightarrow \qquad (2,1) \\ \rightarrow \qquad (3,1) \\ \rightarrow \qquad (2,2) \\ \rightarrow \qquad (3,2) \\ \rightarrow \qquad (3,3) \end{matrix}$$

. Kemudian akan dicari *duplication matriks* D_3, yang mentransformasikan $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ ke dalam $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$.

Berdasarkan (2.1.12.b), untuk elemen pertama dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$ adalah $(k,l) = (1,1) = a$, kemudian dicocokkan dengan tiap elemen dari $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$. Didapat bahwa elemen $(k,l) = (1,1) = a$ hanya sama dengan satu elemen dari

$\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, yaitu $(i,j)=(1,1)=a$, sedangkan untuk elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ lainnya berbeda, sehingga didapat vektor kolom yang pertama dari D_3 adalah $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. Kemudian, elemen kedua dari $\mathrm{vech}(\mathbf{A})$, yaitu $(k,l)=(2,1)=b$ dicocokkan dengan tiap elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, yaitu (i,j). Didapat bahwa elemen dari $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$, yaitu $(i,j)=(2,1)=b=(1,2)$ sama dengan elemen $(k,l)=(2,1)=b$, sedangkan untuk elemen $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ lainnya berbeda, sehingga didapat vektor kolom yang pertama dari D_3 adalah $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, dst.

Maka didapat $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D_m^{+} adalah *Moore-Penrose inverse* dari D_m, diberikan oleh

$$D_m^{+} = \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} D_m^{T}. \qquad (2.1.12.c)$$

Teorema 2.14 Misalkan D_m adalah *duplication matrix* berukuran $m^2 \times m\left(m+1\right)/2$ dan $D_m^{\ +}$ adalah *Moore-Penrose inverse* dari D_m. Maka

a) $D_m^{\ +}D_m = \mathbf{I}_{m(m+1)/2}$

b) $D_m^{\ +}\text{vec}\left(\mathbf{A}\right) = \text{vech}\left(\mathbf{A}\right)$; untuk setiap matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times m$ dan simetris

Bukti Teorema 2.14

a) Berdasarkan definisi dari $D_m^{\ +}$ pada (2.1.12.c) , didapat bahwa

$$D_m^{\ +}D_m = \left(\left(D_m^{\ T}D_m\right)^{-1}D_m^{\ T}\right)D_m = \mathbf{I}_{m(m+1)/2}.$$

b) Untuk setiap matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times m$ dan simetris, maka berdasarkan (2.1.12.a) didapat bahwa $\text{vec}(\mathbf{A}) = D_m\ \text{vech}(\mathbf{A})$. Kemudian dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan tersebut dengan $D_m^{\ +}$ didapat

$$D_m^{\ +}\text{vec}(\mathbf{A}) = D_m^{\ +}D_m\ \text{vech}(\mathbf{A})$$

$$\Leftrightarrow D_m^{\ +}\text{vec}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_{m(m+1)/2}\ \text{vech}(\mathbf{A})$$; berdasarkan Teorema 2.14 (a)

$$\Leftrightarrow D_m^{\ +}\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vech}(\mathbf{A})$$

Teorema 2.15 Misalkan D_m adalah *duplication matrix* yang berukuran $m^2 \times m\left(m+1\right)/2$ dan $D_m^{\ +}$ adalah *Moore-Penrose inverse* dari D_m. Maka

a) $\mathbf{K}_{mm}D_m = \mathbf{N}_m D_m = D_m$

b) $D_m^{+}\mathbf{K}_{mm} = D_m^{+}\mathbf{N}_m = D_m^{+}$

c) $D_m D_m^{+} = \mathbf{N}_m$

Bukti Teorema 2.15

a) Teorema 2.15 (a) akan dibuktikan dengan menunjukkan bahwa untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times m$ dan simetris,

$$\mathbf{K}_{mm} D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}) = D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}) = \mathbf{N}_m D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}).$$

$\mathbf{K}_{mm} D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}_{mm} \operatorname{vec}(\mathbf{A})$; berdasarkan 2.1.12.a

$= \operatorname{vec}(\mathbf{A}^T)$; berdasarkan Teorema 2.11

$= \operatorname{vec}(\mathbf{A})$; karena $\mathbf{A}$ simetris ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), sehingga $\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \operatorname{vec}(\mathbf{A}^T)$

$= D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A})$

Hal yang sama

$\mathbf{N}_m D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}) = \mathbf{N}_m \operatorname{vec}(\mathbf{A})$; berdasarkan 2.1.12.a

$= \frac{1}{2} \operatorname{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$; berdasarkan Teorema 2.13 (c)

$= \frac{1}{2} \operatorname{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{A})$; karena $\mathbf{A}$ simetris ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

$= \frac{1}{2} \operatorname{vec}(2\mathbf{A})$

$= \frac{1}{2}\, 2 \operatorname{vec}(\mathbf{A})$; berdasarkan teorema 2.6 (b)

$= \operatorname{vec}(\mathbf{A})$

$= D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A})$; berdasarkan 2.1.12.a

Sehingga teorema 2.15 (a) terbukti.

b) $D_m^{+}\mathbf{K}_{mm} = \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} D_m^{T}\mathbf{K}_{mm}$; berdasarkan 2.1.12.c

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} D_m^{T}\mathbf{K}_{mm}^{T}$; berdasarkan Teorema 2.10 (a)

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} \left(\mathbf{K}_{mm} D_m\right)^{T}$; berdasarkan sifat transpos

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} \left(D_m\right)^{T}$; berdasarkan Teorema 2.15 (a)

$= D_m^{+}$; berdasarkan 2.1.12.c

$D_m^{+}\mathbf{N}_m = \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} D_m^{T}\mathbf{N}_m$; berdasarkan 2.1.12.c

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} D_m^{T}\mathbf{N}_m^{T}$; berdasarkan Teorema 2.13 (a)

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} \left(\mathbf{N}_m D_m\right)^{T}$; berdasarkan sifat transpos

$= \left(D_m^{T} D_m\right)^{-1} \left(D_m\right)^{T}$; berdasarkan Teorema 2.15 (a)

$= D_m^{+}$; berdasarkan 2.1.12.c

Karena $D_m^{+}\mathbf{K}_{mm} = D_m^{+}$ dan $D_m^{+}\mathbf{N}_m = D_m^{+}$, maka terbukti bahwa

$D_m^{+}\mathbf{K}_{mm} = D_m^{+}\mathbf{N}_m = D_m^{+}$.

c) Teorema 2.15 (c) akan dibuktikan dengan menunjukkan bahwa untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times m$, maka

$$D_m D_m^{+}\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \mathbf{N}_m \operatorname{vec}(\mathbf{A}).$$

Jika didefinisikan $\mathbf{A}_* = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{T}\right)$, maka $\mathbf{A}_*$ merupakan matriks simetris dan

$\mathbf{N}_m \operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\operatorname{vec}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{T}\right)$; berdasarkan Teorema 2.13 (c)

$$= \operatorname{vec}\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\right) \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.6 (a)}$$

$$= \operatorname{vec}\left(\mathbf{A}_*\right)$$

Sehingga

$$D_m D_m^{+}\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = D_m D_m^{+}\mathbf{N}_m \operatorname{vec}(\mathbf{A}) \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.15 (b)}$$

$$= D_m D_m^{+}\operatorname{vec}(\mathbf{A}_*)$$

$$= D_m \operatorname{vech}(\mathbf{A}_*) \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.14 (b)}$$

$$= \operatorname{vec}(\mathbf{A}_*) \qquad \text{; berdasarkan persamaan 2.1.12.a}$$

$$= \mathbf{N}_m \operatorname{vec}(\mathbf{A})$$

Sehingga teorema 2.15 (c) terbukti.

Teorema 2.16 Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks nonsingular yang berukuran $m \times m$, maka $D_m^{\ T}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})D_m$ nonsingular dan invers dari $D_m^{\ T}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})D_m$ diberikan oleh $D_m^{\ +}\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)D_m^{+T}$.

Bukti Teorema 2.16. Teorema ini dibuktikan dengan hanya perlu menunjukkan bahwa hasil perkalian dari $D_m^{\ T}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})D_m$ dan $D_m^{\ +}\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)D_m^{+T}$ akan menghasilkan $\mathbf{I}_{m(m+1)/2}$.

$$\left(D_m^{\ T}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})D_m\right)\left(D_m^{\ +}\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)D_m^{+T}\right) = D_m^{\ T}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_m\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)D_m^{+T}$$

; berdasarkan Teorema 2.15 (c)

$$= D_m^{\ T}\mathbf{N}_m(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)D_m^{+T} \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.13 (d)}$$

$= D_m{}^T \mathbf{N}_m (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} D_m^{+T}$; berdasarkan Teorema 2.5

$= D_m{}^T \mathbf{N}_m D_m^{+T}$

$= \left(\mathbf{N}_m{}^T D_m\right)^T D_m^{+T}$; berdasarkan sifat transpos

$= (\mathbf{N}_m D_m)^T D_m^{+T}$; berdasarkan Teorema 2.13 (a)

$= (D_m)^T D_m^{+T}$; berdasarkan Teorema 2.15 (a)

$= \left(D_m^+ D_m\right)^T$; berdasarkan sifat transpos

$= \left(\mathbf{I}_{m(m+1)/2}\right)^T$; berdasarkan Teorema 2.14 (a)

$= \mathbf{I}_{m(m+1)/2}$

2.1.13 Notasi Bentuk Linier dan Bentuk Kuadratik

Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_m)^T$ adalah vektor kolom berukuran $m \times 1$. Didefinisikan fungsi $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \sum_i a_i x_i$, dengan vektor $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_m)^T$ yang berukuran $m \times 1$. Fungsi $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$ merupakan bentuk linier.

Misalkan matriks $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ berukuran $m \times m$. Didefinisikan pula fungsi

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \qquad (2.1.13.a)$$

dengan vektor $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_m)^T$ yang berukuran $m \times 1$. Fungsi (2.1.13.a) merupakan bentuk kuadratik.

Definisi 2.6 Misalkan $\mathbf{A}$ merupakan suatu matriks yang simetris, maka $\mathbf{A}$ dapat dikatakan

definit positif jika $\boldsymbol{x}^T \mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ untuk semua vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

definit negatif jika $\boldsymbol{x}^T \mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0$ untuk semua vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

Dari definisi 2.6 di atas, terlihat bahwa $\mathbf{A}$ definit negatif jika dan hanya jika $-\mathbf{A}$ definit positif.

2.2 DIFERENSIASI PADA VEKTOR DAN MATRIKS

2.2.1 Definisi dan Notasi

Sebelum membahas lebih jauh mengenai turunan atau diferensiasi pada vektor dan matriks, terlebih dahulu akan dibahas mengenai notasi dasar yang digunakan pada subbab ini. Pada subbab ini akan ditunjukkan perbedaan notasi antara fungsi skalar, vektor fungsi dan matriks fungsi. Klasifikasi dari fungsi yang akan dibahas pada subbab ini dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Klasifikasi Fungsi

	Variabel skalar	Vektor variabel	Matriks variabel
Fungsi skalar	$f(x)$	$f(\boldsymbol{x})$	$f(\boldsymbol{X})$
Vektor fungsi	$\boldsymbol{f}(x)$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$
Matriks fungsi	$\boldsymbol{F}(x)$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$

- Fungsi skalar dari variabel skalar

  Misalkan x adalah variabel skalar, maka $f(x)$ menotasikan fungsi skalar dari variabel skalar. Contoh dari $f(x)$ adalah $f(x) = x + 2$.

- Fungsi skalar dari vektor variabel

  Misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor variabel berukuran $m \times 1$, maka $f(\boldsymbol{x})$ menotasikan fungsi skalar dari vektor variabel. Contoh dari $f(\boldsymbol{x})$ adalah $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$, dimana $\boldsymbol{a}$ adalah vektor berukuran $m \times 1$ dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor berukuran $m \times 1$.

- Fungsi skalar dari matriks variabel

  Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m \times m$, maka $f(\boldsymbol{X})$ menotasikan fungsi skalar dari matriks variabel. Contoh dari $f(\boldsymbol{X})$ adalah $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a}^T \mathbf{X} \boldsymbol{a}$ dimana $\boldsymbol{a}$ adalah vektor konstanta berukuran $m \times 1$ dan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m \times m$.

- Vektor fungsi dari variabel skalar

  Misalkan x adalah variabel skalar, maka $\boldsymbol{f}(x)$ menotasikan vektor fungsi dari variabel skalar, yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{f}(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}.$$

Contoh dari $\boldsymbol{f}(x)$ adalah $\boldsymbol{f}(x)=\begin{bmatrix} x+2 \\ x \end{bmatrix}$.

- Vektor fungsi dari vektor variabel

  Misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor variabel berukuran $m\times 1$, maka $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ menotasikan vektor fungsi dari vektor variabel yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

  Contoh dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks konstanta berukuran $m\times m$ dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor variabel berukuran $m\times 1$.

- Vektor fungsi dari matriks variabel

  Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m\times m$, maka $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ menotasikan vektor fungsi dari matriks variabel yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}.$$

  Contoh dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\mathbf{X}\boldsymbol{a}$ dimana $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m\times m$ dan $\boldsymbol{a}$ adalah vektor konstanta berukuran $m\times 1$.

- Matriks fungsi dari variabel skalar

  Misalkan x adalah variabel skalar, maka $\boldsymbol{F}(x)$ menotasikan matriks fungsi berukuran $p \times q$ dari variabel skalar yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1q}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(x) & \cdots & f_{pq}(x) \end{bmatrix}.$$

  Contoh dari $\boldsymbol{F}(x)$ adalah $\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} x+2 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}$.

- Matriks fungsi dari vektor variabel

  Misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor variabel berukuran $m \times 1$, maka $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ menotasikan matriks fungsi dari vektor variabel yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{1q}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{pq}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

  Contoh dari $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ adalah $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ dimana $\boldsymbol{x}$ adalah vektor variabel berukuran $m \times 1$.

- Matriks fungsi dari matriks variabel

  Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m \times m$, maka $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ menotasikan matriks fungsi dari matriks variabel yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix} f_{11}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{1q}(\boldsymbol{X}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{pq}(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}.$$

Contoh dari $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ adalah $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$ dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks konstanta berukuran $p\times m$, $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel berukuran $m\times m$, dan $\mathbf{B}$ adalah matriks konstanta berukuran $m\times q$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai diferensiasi dari beberapa fungsi yang telah dibahas sebelumnya.

- Diferensiasi dari fungsi skalar $f(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$

Jika f adalah fungsi skalar yang *differentiable* dari vektor $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ yang berukuran $n\times 1$, maka turunan dari f terhadap $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor baris berukuran $1\times n$ yang diberikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^T} f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

- Diferensiasi dari fungsi skalar $f(\boldsymbol{X})$ terhadap $\boldsymbol{X}$

Misalkan $f(\boldsymbol{X})$ adalah suatu fungsi skalar dari matriks $\boldsymbol{X}$ yang berukuran $m\times n$. Maka turunan dari $f(\boldsymbol{X})$ terhadap $\boldsymbol{X}$ merupakan suatu matriks berukuran $m\times n$ yang diberikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} f(\boldsymbol{X}) & \frac{\partial}{\partial x_{12}} f(\boldsymbol{X}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1n}} f(\boldsymbol{X}) \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}} f(\boldsymbol{X}) & \frac{\partial}{\partial x_{22}} f(\boldsymbol{X}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{2n}} f(\boldsymbol{X}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{m1}} f(\boldsymbol{X}) & \frac{\partial}{\partial x_{m2}} f(\boldsymbol{X}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{mn}} f(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}).$$

- Diferensiasi dari vektor fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$

Misalkan $f_1,..., f_m$ adalah suatu fungsi dari vektor $\boldsymbol{x} = (x_1,..., x_n)^T$ yang berukuran $n \times 1$. Fungsi $f_1,..., f_m$ dapat dinyatakan sebagai komponen dari vektor fungsi, yaitu

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

Fungsi $\boldsymbol{f}$ *differentiable* pada $\boldsymbol{x}$ jika dan hanya jika masing-masing komponen dari $\boldsymbol{f}$, yaitu f_i untuk $i = 1,..., m$, *differentiable* pada $\boldsymbol{x}$. Turunan dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$ diberikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

- Diferensiasi dari matriks fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ terhadap $\boldsymbol{X}$

Untuk kasus yang lebih umum yaitu untuk matriks fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ berukuran $p \times q$; dimana $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ adalah matriks fungsi dari matriks $\boldsymbol{X}$ yang berukuran $m \times n$ yang diberikan oleh

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{1q}(\boldsymbol{X}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{pq}(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}.$$

Vektor fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dapat diperluas menjadi matriks fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ dengan menggunakan *vec operator*; yaitu misalkan $\boldsymbol{f}$ adalah vektor fungsi berukuran $pq \times 1$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{f}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))$. Maka turunan dari $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ terhadap $\boldsymbol{X}$ diberikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^T} \mathrm{vec}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})),$$

dimana elemen ke (i, j) dari turunan di atas merupakan turunan parsial dari elemen ke i dari $\mathrm{vec}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))$ terhadap elemen ke j dari $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$.

Matriks fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ merupakan generalisasi dari fungsi $f(\boldsymbol{X})$ yang merupakan fungsi skalar dari matriks $\boldsymbol{X}$. Oleh karena itu, turunan dari $f(\boldsymbol{X})$ terhadap $\boldsymbol{X}$ dapat dicari dengan menggunakan

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^T} f(\boldsymbol{X}).$$

Jika $\boldsymbol{X}$ adalah matriks persegi berukuran $m \times m$ dan simetris dimana $\boldsymbol{X}$ merupakan matriks dari variabel-variabel. Serta $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ adalah vektor fungsi dari matriks $\boldsymbol{X}$, maka turunan dari $\boldsymbol{f}$ diberikan oleh matriks

$$\frac{\partial}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \qquad (2.2.1.a)$$

Turunan pada (2.2.1.a) dapat dicari dengan menggunakan

$$\frac{\partial}{\partial \text{vec}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}),$$

yang pada umumnya digunakan untuk kasus $\boldsymbol{X}$ bukan matriks yang simetris. Dengan menggunakan aturan rantai, maka didapat

$$\frac{\partial}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \text{vec}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \right)}_{(1)} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{X})^T} \text{vec}(\boldsymbol{X}) \right)}_{(2)}.$$

Perlu diperhatikan bahwa (1) dapat dicari tanpa memperhatikan kesimetrisan dari X. Dan untuk (2) dapat dinyatakan dalam bentuk lain, yaitu dengan menggunakan *duplication matrix* D_m. Karena $D_m \ \text{vech}(\mathbf{A}) = \text{vec}(\mathbf{A})$, maka didapat bahwa $D_m \ d\text{vech}(\mathbf{A}) = d\text{vec}(\mathbf{A})$, sehingga

$$\frac{\partial}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{\partial}{\partial \text{vec}(\boldsymbol{X})^T} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \right) D_m .$$

Berikut ini akan diberikan beberapa sifat dasar dari diferensial vektor dan matriks. Jika $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}$ matriks fungsi dan $\mathbf{A}$ adalah matriks konstanta, maka operator diferensial, yaitu d, memenuhi aturan-aturan dasar sebagai berikut

a) $d\mathbf{A} = \mathbf{0}$

b) $d(\alpha\mathbf{X}) = \alpha\, d(\mathbf{X})$

c) $d(\mathbf{X}^T) = (d\mathbf{X})^T$

d) $d(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = d\mathbf{X} + d\mathbf{Y}$

e) $d(\mathbf{XY}) = (d\mathbf{X})\mathbf{Y} + \mathbf{X}(d\mathbf{Y})$

f) $d\text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(d\mathbf{X})$

g) $d\ \text{tr}(\mathbf{X}) = \text{tr}(d\mathbf{X})$

2.2.2 Diferensiasi dari Bentuk Linier dan Bentuk Kuadratik

Diferensiasi dari bentuk linier $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ dan bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ adalah

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}\ ; \qquad (2.2.2.a)$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}^T} = \boldsymbol{a}^T\ ; \qquad (2.2.2.b)$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)\boldsymbol{x}\ . \qquad (2.2.2.c)$$

(Bukti dapat dilihat pada lampiran 2)

2.2.3 Diferensiasi dari *Trace* Matriks

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times m$. Maka

$d\{\mathrm{tr}(\mathbf{X})\} = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T\, d\mathrm{vec}(\mathbf{X})$ dan $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{X})^T}\mathrm{tr}(\mathbf{X}) = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $d\{\mathrm{tr}(\mathbf{X})\} = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T\, d\mathrm{vec}(\mathbf{X})$

$$\begin{aligned} d\mathrm{tr}(\mathbf{X}) &= \mathrm{tr}(d\mathbf{X}) \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{I}_m d\mathbf{X}) \\ &= \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T\, \mathrm{vec}(d\mathbf{X}) && \text{; berdasarkan } \textbf{Teorema 2.7} \\ &= \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T\, d\mathrm{vec}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{X})^T}\mathrm{tr}(\mathbf{X}) = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{X})^T}\mathrm{tr}(\mathbf{X}) = \frac{\mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T\, \partial \mathrm{vec}(\mathbf{X})}{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{X})^T} = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_m)^T.$$

2.2.4 Diferensiasi dari Determinan Matriks

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times m$ dengan m^2 variabel ”independen” (dimana $m \geq 2$). Misalkan ξ_{ij} menyatakan kofaktor dari x_{ij}.

Bentuk $\det(\mathbf{X})$ dapat dijabarkan sebagai $\det(\mathbf{X}) = |\mathbf{X}| = \sum_{t=1}^{m} x_{it}\xi_{it}$ dimana $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{im}$ berupa konstanta sehingga didapat

$$\begin{aligned}\frac{\partial \det(\mathbf{X})}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} |\mathbf{X}| &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_{t=1}^{m} x_{it}\xi_{it} \\ &= \sum_{t=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} x_{it} \right) \xi_{it} \\ &= \xi_{ij} \end{aligned} \qquad (2.2.4.a)$$

Hasil (2.2.4.a) mengindikasikan bahwa turunan dari $\det(\mathbf{X})$ terhadap $\mathbf{X}$ adalah matriks kofaktor dari $\mathbf{X}$ atau ekivalen dengan

$$\frac{\partial \det(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = [adj(\mathbf{X})]^T.$$

Turunan dari $\det(\mathbf{X})$ terhadap $\operatorname{vec}(\mathbf{X})^T$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{\partial \det(\mathbf{X})}{\partial \operatorname{vec}(\mathbf{X})^T} = \operatorname{vec}\left(\operatorname{adj}(\mathbf{X})^T\right)^T. \qquad (2.2.4.b)$$

Dengan menggunakan hubungan antara differensial pertama dan turunan pada (2.2.4.b) serta $\mathbf{X}^{-1} = |\mathbf{X}|^{-1} \operatorname{adj}(\mathbf{X})$, didapat

$$\begin{aligned} d|\mathbf{X}| &= \left\{\operatorname{vec}\left(\operatorname{adj}(\mathbf{X})^T\right)\right\}^T d\operatorname{vec}(\mathbf{X}) \\ &= \left\{\operatorname{vec}\left(\operatorname{adj}(\mathbf{X})^T\right)\right\}^T \operatorname{vec}(d\mathbf{X}) \\ &= \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(\mathbf{X})\, d\mathbf{X}\right) \qquad \text{; berdasarkan Teorema 2.7} \end{aligned}$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left|\mathbf{X}\right|\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X}\right) \qquad \text{; karena } \mathrm{adj}\left(\mathbf{X}\right) = \left|\mathbf{X}\right|\mathbf{X}^{-1}$$

$$= \left|\mathbf{X}\right|\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X}\right) \qquad (2.2.4.c)$$

Sekarang perhatikan fungsi $h(\mathbf{X}) = \ln\left|\mathbf{X}\right|$, dimana $\mathbf{X}$ adalah matriks nonsingular berukuran $m \times m$. Maka

$$dh(\mathbf{X}) = d\ln\left|\boldsymbol{X}\right| = \frac{1}{\left|\boldsymbol{X}\right|}d\left|\boldsymbol{X}\right| = \frac{1}{\left|\boldsymbol{X}\right|}\left|\boldsymbol{X}\right|\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{X}^{-1}d\boldsymbol{X}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{X}^{-1}d\boldsymbol{X}\right) \qquad (2.2.4.d)$$

Hasil (2.2.4.d) mengindikasikan bahwa turunan dari $\ln\left|\mathbf{X}\right|$ terhadap $\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T}\ln\left|\mathbf{X}\right| = \frac{\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}\partial\mathbf{X}\right)}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T} \qquad (2.2.4.e)$$

Selanjutnya, berdasarkan **Teorema 2.7** yaitu $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \left\{\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right\}^T \mathrm{vec}(\mathbf{B})$.

Maka didapat

$$\frac{\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}\partial\mathbf{X}\right)}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T} = \frac{\mathrm{vec}\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T\right)^T \mathrm{vec}\left(\partial\mathbf{X}\right)}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T} \qquad (2.2.4.f)$$

Karena $\mathrm{vec}\left(\partial\mathbf{X}\right) = \partial\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)$, maka (2.2.4.f) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\mathrm{vec}\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T\right)^T \mathrm{vec}\left(\partial\mathbf{X}\right)}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T} = \frac{\mathrm{vec}\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T\right)^T \partial\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)}{\partial \mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T} = \mathrm{vec}\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T\right)^T \qquad (2.2.4.g)$$

Sehingga berdasarkan (2.2.4.e), (2.2.4.f), dan (2.2.4.g) didapat bahwa turunan dari $\ln|\mathbf{X}|$ terhadap $\text{vec}(\mathbf{X})^T$ adalah

$$\frac{\partial}{\partial \text{vec}(\mathbf{X})} \ln|\mathbf{X}| = \text{vec}\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T\right)^T \tag{2.2.4.h}$$

2.2.5 Diferensiasi dari Matriks Invers

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks nonsingular berukuran $m \times m$. Maka

$$d\mathbf{X}^{-1} = -\mathbf{X}^{-1}(d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1} \tag{2.2.5.a}$$

Untuk membuktikan (2.2.5.a), perhatikan persamaan $\mathbf{I}_m = \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}$. Kemudian dengan mendifferensialkan kedua ruas dari persamaan tersebut, akan didapat

$$(0) = d\mathbf{I}_m = d\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\right) = (d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\left(d\mathbf{X}^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow (0) = (d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\left(d\mathbf{X}^{-1}\right) \tag{2.2.5.b}$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan kedua ruas dari (2.2.5.b) dengan $-\mathbf{X}\left(d\mathbf{X}^{-1}\right)$, sehingga didapat

$$-\mathbf{X}\left(d\mathbf{X}^{-1}\right) = (d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$$

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan di atas dengan $-\mathbf{X}^{-1}$ didapat

$$\left(d\mathbf{X}^{-1}\right) = -\mathbf{X}^{-1}\left(d\mathbf{X}\right)\mathbf{X}^{-1} \qquad (2.2.5.c)$$

Dari hasil (2.2.5.c), dapat dicari differensial dari $\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\right)$, yaitu

$$d\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\right) = \text{vec}\left(d\mathbf{X}^{-1}\right) = \text{vec}\left(-\mathbf{X}^{-1}\left(d\mathbf{X}\right)\mathbf{X}^{-1}\right) = -\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\left(d\mathbf{X}\right)\mathbf{X}^{-1}\right). \qquad (2.2.5.d)$$

Berdasarkan **Teorema 2.8**, yaitu $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{B})\text{vec}(\mathbf{B})$, maka didapat bahwa

$$-\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\left(d\mathbf{X}\right)\mathbf{X}^{-1}\right) = -\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T \otimes \mathbf{X}^{-1}\right)\text{vec}\left(d\mathbf{X}\right).$$

Karena $\text{vec}\left(d\mathbf{X}\right) = d\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)$, maka persamaan di atas menjadi

$$-\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T \otimes \mathbf{X}^{-1}\right)\text{vec}\left(d\mathbf{X}\right) = -\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T \otimes \mathbf{X}^{-1}\right)d\text{vec}\left(\mathbf{X}\right). \qquad (2.2.5.e)$$

Hasil (2.2.5.e) mengindikasikan bahwa turunan dari $\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\right)$ terhadap $\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T$ adalah

$$\frac{\partial}{\partial\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T}\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\right) = \frac{-\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T \otimes \mathbf{X}^{-1}\right)\partial\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)}{\partial\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\text{vec}\left(\mathbf{X}\right)^T}\text{vec}\left(\mathbf{X}^{-1}\right) = -\left(\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^T \otimes \mathbf{X}^{-1}\right) \qquad (2.2.5.f)$$

2.3 VARIABEL RANDOM NORMAL

Variabel random X dinyatakan berdistribusi normal dengan *probability density function* (pdf)-nya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$$

dimana mean dari X adalah μ dan variansi dari X adalah σ^2.

X berdistribusi normal biasanya direpresentasikan dengan

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

dimana

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$;

$\sigma^2 = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu\right)^2 f(x) dx$.

Vektor random $\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_m\right)^T$ berdistribusi normal multivariat jika pdf-nya adalah sebagai berikut:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m \left|\boldsymbol{\Sigma}_X\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_X)^T \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_X)\right]$$

dimana

$\boldsymbol{\mu}_X = E(\boldsymbol{X})$ adalah vektor mean dari vektor random $\boldsymbol{X}$;

$\boldsymbol{\Sigma}_X = E\left[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)^T\right]$ adalah matriks varians-kovarians, dan $m = \dim \boldsymbol{X}$ adalah dimensi dari vektor random $\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{X}$ berdistribusi normal multivariat biasanya dinyatakan sebagai $\boldsymbol{X} \sim N_m\left(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X\right)$;

dimana

$$\boldsymbol{\mu}_X = E\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_m} \end{pmatrix};$$

dan

$$\boldsymbol{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} E\left[(X_1-\mu_{X_1})^2\right] & E\left[(X_1-\mu_{X_1})(X_2-\mu_{X_2})^T\right] & \cdots & E\left[(X_1-\mu_{X_1})(X_m-\mu_{X_m})^T\right] \\ E\left[(X_2-\mu_{X_2})(X_1-\mu_{X_1})^T\right] & E\left[(X_2-\mu_{X_2})^2\right] & \cdots & E\left[(X_2-\mu_{X_2})(X_m-\mu_{X_m})^T\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left[(X_m-\mu_{X_m})(X_1-\mu_{X_1})^T\right] & E\left[(X_m-\mu_{X_m})(X_2-\mu_{X_2})^T\right] & \cdots & E\left[(X_m-\mu_{X_m})^2\right] \end{pmatrix}.$$

Catatan: $\boldsymbol{\Sigma}_X = \boldsymbol{\Sigma}_X^{\ T}$.

2.4 METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD (ML)

Misal $\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_m\right)^T$ adalah vektor *random* dengan $f\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}\right)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \in \Re^p$ dimana $\boldsymbol{\theta}$ merupakan suatu vektor dari *p*-parameter yang tidak diketahui. Langkah-langkah dalam melakukan penaksiran ML adalah

1. Mencari *joint* pdf dari $X_1, X_2, ..., X_m$, yaitu $f(x_1, x_2, ..., x_m; \boldsymbol{\theta})$. Oleh karena $\boldsymbol{X}$ adalah vektor *random* dari $X_1, X_2, ..., X_m$ maka $f(x_1, x_2, ..., x_m; \boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$.
2. Mencari fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai *joint* pdf dari $X_1, X_2, ..., X_m$ dan dapat dianggap sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\theta}$. Misalkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}; x_1, x_2, ..., x_m) = L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$, maka $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$.
3. Mencari taksiran dari $\boldsymbol{\theta}$ ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ini disebut taksiran ML dari $\boldsymbol{\theta}$.

Mencari nilai taksiran $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai taksiran $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ (Bukti dapat dilihat pada lampiran 3). Maka baik $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ maupun $\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ dapat diperoleh dengan mencari solusi simultan dari persamaan

$$
\begin{aligned}
S_j(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) \qquad \text{,untuk } j = 1, 2, ..., p \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2.5 MODEL REGRESI DAN PENAKSIRAN KOEFISIEN MODEL REGRESI DENGAN METODE OLS

Analisis regresi merupakan suatu metode untuk menyelidiki hubungan fungsional antara variabel dependen dengan variabel-variabel independen. Hubungan ini dinyatakan dalam bentuk suatu persamaan atau model yang menghubungkan variabel dependen dengan variabel-variabel independen yang disebut dengan model regresi. Salah satu bentuk model regresi adalah model regresi linear, yaitu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e . \qquad (2.6.a)$$

Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi koefisien dari model regresi linear adalah metode *Ordinary Least Square* (OLS). Berikut ini akan dibahas mengenai penaksiran koefisien regresi dengan menggunakan metode OLS.

Misalkan bahwa terdapat n observasi, dan misalkan y_i menotasikan variabel dependen ke-i yang terobservasi dan x_i menotasikan observasi ke i dari variabel independen x. Diasumsikan bahwa komponen *error* e pada model memiliki $E(e) = 0$ dan $\text{var}(e) = \sigma^2$, serta antar *error*nya tidak berkorelasi.

Model (2.6.a) dapat ditulis dalam bentuk

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.6.b)$$

Fungsi *least square* adalah

$$\begin{aligned} S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \end{aligned} \qquad (2.6.c)$$

Taksiran *least square* dari β_0 dan β_1, sebut $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, harus memenuhi

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial S}{\partial \beta_0}\right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \\ \left.\frac{\partial S}{\partial \beta_1}\right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) x_i = 0 \end{aligned} \qquad (2.6.d)$$

Dengan menyederhanakan persamaan (2.6.d), didapat persamaan normal *least square*, yaitu

$$\begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \qquad (2.6.e)$$

Solusi dari persamaan normal (2.6.e) adalah

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{dan} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

BAB III

PENAKSIRAN PARAMETER PADA *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

Error in variable model adalah suatu model regresi dimana beberapa variabel independennya mengandung *error*. *Error in variable model* berbeda dengan model regresi dimana variabel independen pada model regresi diperhitungkan dengan tepat sehingga variabel independen tidak mengandung *error* dan *error* hanya muncul pada variabel dependennya.

Error yang muncul pada variabel independen disebut dengan *measurement error*. Munculnya *error* pada variabel independen disebabkan nilai sebenarnya dari variabel independen tidak diketahui dan tidak dapat diukur dengan tepat sesuai dengan nilai sebenarnya, sehingga nilai sebenarnya dari variabel independen ini diwakilkan oleh suatu nilai yang didapat melalui suatu proses pengukuran yang belum tentu sesuai dengan nilai sebenarnya.

Pada *error in variabel model*, nilai sebenarnya dari variabel independen yang tidak diketahui dan tidak dapat diukur dengan tepat sesuai dengan nilai sebenarnya disebut dengan variabel independen yang tidak terobservasi. Sedangkan nilai variabel independen yang didapat dari proses pengukuran disebut dengan variabel independen yang terobservasi.

3.1 *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL* UNTUK SATU VARIABEL INDEPENDEN

Error in variable model untuk satu variabel independen dinyatakan oleh persamaan berikut

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + e \qquad x = u + d \tag{3.1}$$

dimana

y adalah variabel dependen;

u adalah variabel independen yang tidak terobservasi;

x adalah variabel independen yang terobservasi;

β_0 dan β_1 adalah koefisien atau parameter dari model;

e adalah *error* dimana $e \sim \text{NIID}(0, \sigma_{ee})$;

d adalah *measurement error* dimana $d \sim \text{NIID}(0, \sigma_{dd})$.

Error in variable model dibagi menjadi dua tipe, yaitu :

1. *Classical error in variable model*

   Classical error in variable model yaitu *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa variabel independen yang tidak terobservasi (u) independen terhadap *measurement error* (d). Pada *classical error in variable model*, peneliti tidak mengontrol nilai variabel independen yang terobservasi. Selisih antara nilai terobservasi dengan nilai sebenarnya disebut dengan *measurement error*.

2. *Error in variable model* kasus Berkson

   Error in variable model kasus Berkson yaitu *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa variabel independen yang tidak terobservasi (u) dependen terhadap *measurement error* (d). Pada *error in variable model* kasus Berkson, nilai variabel independen yang terobservasi telah dikontrol (ditargetkan) secara langsung oleh peneliti sedangkan nilai variabel independen sebenarnya yang tidak terobservasi bervariasi untuk masing-masing observasi. Selisih antara nilai terobservasi dengan nilai sebenarnya disebut dengan *measurement error*.

Berikut ini diberikan contoh kasus *classical error in variable model* untuk satu variabel independen. Misalkan seorang peneliti ingin melihat hubungan antara panen jagung (y) dan ketersediaan kadar nitrogen pada tanah (u). Untuk mengukur kadar nitrogen pada tanah, dilakukan pengambilan sampel tanah, kemudian dilakukan analisis laboratorium pada sampel yang dipilih tersebut untuk melihat kadar nitrogen pada tanah. Sebagai hasil dari pengukuran laboratorium, didapat kadar nitrogen pada tanah yang diobservasi yaitu sebesar $x_1 = 72\%$. Pengukuran kadar nitrogen pada sampel tanah tersebut dilakukan lebih dari satu kali di bawah kondisi yang menurut peneliti identik dengan analisis laboratorium sebelumnya. Hasil laboratorium kedua diperoleh dari sampel tanah yang sama adalah sebesar $x_2 = 73\%$, dan seterusnya. Padahal kadar nitrogen pada sampel tanah yang sebenarnya adalah misalkan sebesar $u = 70\%$. Sehingga timbul *error* dalam proses pengukuran kadar nitrogen pada tanah yang disebut dengan *measurement error* sebesar d_r, $r = 1, 2, ..., p$. Karena kadar nitrogen yang sebenarnya (u) tidak dapat diukur dengan tepat, maka hubungan antara x dan u memenuhi model $x = u + d$, dimana d adalah *measurement error* yang didapat dari pengukuran kadar nitrogen. Dalam pengukuran kadar nitrogen pada laboratorium pertama, didapat *error* dalam pengukuran sebesar $d_1 = x_1 - u = 72\% - 70\% = 2\%$, sedangkan dalam pengukuran kadar nitrogen pada laboratorium kedua didapat *error* sebesar $d_2 = x_2 - u = 73\% - 70\% = 3\%$, dan seterusnya. Hasil pengukuran kadar nitrogen pada tanah ditampilkan pada tabel 2.

Tabel 2. Hasil Pengukuran Kadar Nitrogen

Pengukuran	Laboratorium			
	1	2	…………..	P
u	$u_1 = 70\%$	$u_2 = 70\%$	…………..	$u_p = 70\%$
x	$x_1 = 72\%$	$x_2 = 73\%$	…………..	x_p
d	$d_1 = x_1 - u = 2\%$	$d_2 = x_2 - u = 3\%$	…………..	$d_p = x_p - u$

Dari tabel 2 terlihat bahwa *error* yang dihasilkan, yaitu d tidak bergantung terhadap u (besarnya d tidak dipengaruhi oleh besarnya u, melainkan oleh x). Diasumsikan model $y = \beta_0 + \beta_1 u + e$ merupakan suatu aproksimasi yang sesuai untuk hubungan hasil panen dan kadar nitrogen. Sehingga model regresi linear untuk kasus ini merupakan *classical error in variable model* yang dinyatakan oleh

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + e \qquad x = u + d$$

y adalah banyaknya hasil panen jagung ;

u adalah kadar nitrogen dalam tanah yang nilainya sulit untuk diukur dengan tepat sesuai nilai sebenarnya, sehingga diwakili dengan x yang merupakan kadar nitrogen yang didapat dari hasil observasi.

3.1.1 Jenis *Classical Error in Variable Model*

Classical error in variable model untuk satu variabel independen dinyatakan oleh persamaan berikut

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + e \qquad x = u + d \tag{3.2}$$

dimana

y adalah variabel dependen;

u adalah variabel independen yang tidak terobservasi;

x adalah variabel independen yang terobservasi;

β_0 dan β_1 adalah koefisien atau parameter dari model;

e adalah *error* dimana $e \sim \mathrm{NIID}(0, \sigma_{ee})$;

d adalah *measurement error* dimana $d \sim \mathrm{NIID}(0, \sigma_{dd})$;

u dan d independen.

Pada *classical error in variable model*, terdapat dua jenis variabel independen yang tidak terobservasi (u), yaitu *fixed* dan *random*. Variabel independen yang tidak terobservasi (u) akan dianggap suatu nilai yang *fixed* jika variabel independen yang tidak terobservasi (u) berada di bawah kontrol dari peneliti. Sehingga dapat dikatakan bahwa u akan memiliki nilai yang sama jika sampel yang lainnya diambil. Sedangkan variabel independen yang tidak terobservasi (u) akan dianggap suatu variabel random jika variabel independen yang tidak terobservasi (u) tidak berada di dalam kontrol dari peneliti.

Berikut ini akan diberikan contoh kasus yang menunjukkan kapan harus menganggap u sebagai nilai yang *fixed* dan kapan harus menganggap u sebagai variabel random. Dengan menggunakan contoh sebelumnya yaitu kasus mengenai kadar nitrogen pada tanah, pengumpulan data kadar nitrogen pada tanah memungkinkan dua interpretasi dari nilai-nilai sebenarnya (u). Pertama, yaitu dengan menganggap bahwa sampel tanah diambil dari ladang yang telah ditetapkan oleh si peneliti sehingga ladang yang telah ditetapkan tersebut dikontrol oleh peneliti dan keadaan tanah yang ada pada ladang tersebut dibuat homogen. Sehingga dengan kondisi seperti ini dapat menghasilkan kadar nitrogen yang sama untuk tiap sampel tanah yang diambil dari ladang yang telah ditentukan. Untuk situasi yang seperti ini, nilai sebenarnya (yang tidak diketahui) dari kadar nitrogen dalam ladang diasumsikan sebagai suatu nilai yang *fixed*.

Sebaliknya, jika ladang-ladang yang diteliti tidak ditetapkan terlebih dahulu oleh peneliti dan ladang yang diteliti tersebut diambil secara acak dari suatu populasi ladang di suatu daerah maka akan didapat nilai u yang *random*. Nilai u yang *random* disebabkan ladang tidak dikontrol oleh peneliti sehingga mengakibatkan kondisi tanah pada ladang yang diambil secara acak tersebut belum tentu homogen. Sehingga nilai sebenarnya dari kadar nitrogen pada tanah (u) dapat berubah-ubah apabila diambil sampel tanah yang berbeda pada ladang tersebut. Untuk situasi seperti ini, nilai-nilai sebenarnya dari nitrogen pada tanah (u) dianggap sebagai variabel random.

Berdasarkan variabel independen yang tidak terobservasi, *classical error in variable model* dibagi menjadi dua jenis model yaitu

1. *Functional relationship model*

Functional relationship model adalah *classical error in variable model* yang bentuk modelnya seperti yang telah direpresentasikan pada model (3.2) dimana u (variabel independen yang tidak diobservasi) diasumsikan sebagai suatu vektor konstanta yang tidak diketahui nilainya. Fuller dalam bukunya, "*Measurement Error Models*", menyebut model ini sebagai model fungsional.

2. *Structural relationship model*

Structural relationship model adalah *classical error in variable model* yang bentuk modelnya seperti yang telah direpresentasikan pada model (3.2) dimana u (variabel independen yang tidak diobservasi) diasumsikan sebagai suatu variabel random. Fuller dalam bukunya, "*Measurement Error Models*", menyebut model ini sebagai model struktural.

3.1.2 Metode OLS pada *Classical Error in Variable Model* untuk *Structural Relationship Model*

Classical error in variable model (3.2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 u_i + e_i \qquad x_i = u_i + d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3}$$

y_i merupakan variabel dependen untuk observasi ke-i ;

u_i merupakan variabel independen yang tidak terobservasi untuk observasi ke-i ; u_i diasumsikan merupakan variabel random berdistribusi normal dengan mean μ_u dan variansi σ_{uu} ;

x_i merupakan variabel independen yang terobservasi untuk observasi ke- i ;

β_0 dan β_1 adalah koefisien atau parameter dari *classical error in variable model* ;

e_i adalah *error* untuk observasi ke- i dimana $e_i \sim \mathrm{NIID}(0, \sigma_{ee})$;

d_i adalah *measurement error* untuk observasi ke- i dimana $d_i \sim \text{NIID}(0, \sigma_{dd})$; u_i dan d_i independen.

Model (3.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 u_i + e_i$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 (x_i - d_i) + e_i$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i - \beta_1 d_i + e_i$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + v_i \qquad \text{dimana } v_i = -\beta_1 d_i + e_i \tag{3.4}$$

Dari model (3.4) terlihat bahwa *classical error in variable model* memiliki bentuk yang similar dengan model regresi. Sehingga, akan dicari taksiran parameter *classical error in variable model* (3.4) dengan menggunakan metode OLS yang biasanya digunakan untuk menaksir parameter pada model regresi.

Dengan metode OLS, didapat taksiran β_0 dan β_1 dari *classical error in variable model* (3.4) , yaitu

$$\hat{\beta}_{0\,(\text{OLS})} = \bar{y} - \hat{\beta}_{1\,(\text{OLS})}\bar{x} \quad \text{dan} \quad \hat{\beta}_{1\,(\text{OLS})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Richardson dan Wu (1970) menunjukkan bahwa

$$E\left(\hat{\beta}_{1\,(\text{OLS})}\right) = \beta_1 \left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

dimana $\theta = \dfrac{\sigma_{dd}}{\sigma_{uu}}$.

Karena $E\left(\hat{\beta}_{1\,(\mathrm{OLS})}\right) \neq \beta_1$, maka $\hat{\beta}_{1\,(\mathrm{OLS})}$ bukan merupakan taksiran yang *unbiased*. Sehingga disimpulkan bahwa dengan menggunakan metode OLS didapat taksiran parameter *classical error in variable model* yang *biased*.

3.2 *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL* UNTUK $k-1$ VARIABEL INDEPENDEN

Classical error in variable model untuk $k-1$ variabel independen dinyatakan pada persamaan berikut

$$y = \beta_0 + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\beta} + e \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \tag{3.5}$$

dimana

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{k-1} \end{bmatrix}.$$

y adalah variabel dependen;

$\boldsymbol{u}$ adalah variabel independen yang tidak terobservasi;

$\boldsymbol{x}$ adalah variabel independen yang terobservasi;

β_0 adalah intercept ;

$\boldsymbol{\beta}$ adalah koefisien atau parameter dari model;

e adalah *error* dimana $e \sim \text{NIID}(0, \sigma_{ee})$;

$\boldsymbol{d}$ adalah *measurement error* dimana $\boldsymbol{d} \sim \text{NIID}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{dd})$;

$\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{d}$ independen.

Karena hasil taksiran parameter dari *classical error in variable model* dengan metode OLS menghasilkan taksiran yang *biased*, maka pada subbab berikut ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada *classical error in variable model* dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

3.2.1 Taksiran Parameter pada *Classical Error in Variable Model* dengan Metode Maksimum Likelihood

Classical error in variable model (3.5) dapat dinyatakan oleh

$$y_i = \beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i \qquad \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i \tag{3.6}$$

dimana $\boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{i(k-1)} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{i(k-1)} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{i(k-1)} \end{bmatrix}$; $i = 1, 2, \ldots, n$

n adalah banyaknya sampel;

y_i merupakan variabel dependen untuk observasi ke i;

$\boldsymbol{u}_i$ merupakan vektor dari variabel independen yang tidak terobservasi berukuran $(k-1)\times 1$ untuk observasi ke i ;

$\boldsymbol{x}_i$ merupakan vektor dari variabel independen yang terobservasi berukuran $(k-1)\times 1$ untuk observasi ke i ;

β_0 adalah intercept ;

$\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor koefisien atau parameter dari model berukuran $(k-1)\times 1$;

e_i adalah *error* observasi ke i dimana $e \sim \mathrm{NIID}(0, \sigma_{ee})$;

$\boldsymbol{d}_i$ adalah vektor dari *measurement error* berukuran $(k-1)\times 1$ untuk observasi ke i dimana $\boldsymbol{d} \sim \mathrm{NIID}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{dd})$;

$\boldsymbol{u}_i$ dan $\boldsymbol{d}_i$ independen.

Asumsi pada *classical error in variable model* adalah

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ e_i \\ \boldsymbol{d}_i \end{bmatrix} \sim NI\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u \\ 0 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \sigma_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix} \right)$$

serta diasumsikan $\boldsymbol{\Sigma}_{dd}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{ed}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{de}$ diketahui.

Didefinisikan vektor $\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ \hdashline x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{i(k-1)} \end{bmatrix}$. Berdasarkan distribusi dari y_i dan $\mathbf{x}_i$, didapat bahwa $\mathbf{z}_i \sim N_k\left(\boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$. $\boldsymbol{\mu}_z$ merupakan vektor mean dari $\mathbf{z}_i$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ merupakan matriks varians-kovarians dari $\mathbf{z}_i$ dimana

$$\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I})^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$$

dan

$$\boldsymbol{\mu}_z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u \\ \boldsymbol{\mu}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u .$$ (bukti dapat dilihat pada lampiran 4).

Berdasarkan (3.6) diketahui bahwa banyaknya observasi adalah n dari vektor $\mathbf{z}_i$. Dan didefinisikan statistik sebagai berikut

$$\overline{\mathbf{z}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} y_i \\ \hdashline x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{i(k-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \hdashline x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 \\ \hdashline x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2(k-1)} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} y_n \\ \hdashline x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{n(k-1)} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\ \hdashline x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} \\ \vdots \\ x_{1(k-1)} + x_{2(k-1)} + \ldots + x_{n(k-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hdashline \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i(k-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{x}_i}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{zz} &= \frac{1}{n-1}\sum\nolimits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\bar{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum\nolimits_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}(y_i-\bar{y})\\(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(y_i-\bar{y})^T & (\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})^T\end{bmatrix}\right] \qquad ; \\
&= \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(y_i-\bar{y})^T & \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})^T \\ \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})(y_i-\bar{y})^T & \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yx}\\ \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xx}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dimana $\mathbf{m}_{zz} = \begin{bmatrix}\underset{1\times 1}{\mathbf{m}_{yy}} & \underset{1\times(k-1)}{\mathbf{m}_{yx}} \\ \underset{(k-1)\times 1}{\mathbf{m}_{xy}} & \underset{(k-1)\times(k-1)}{\mathbf{m}_{xx}}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} \mathrm{m}_{yy} & \mathrm{m}_{x_1y} & \mathrm{m}_{x_2y} & \cdots & \mathrm{m}_{x_{k-1}y} \\ \hline \mathrm{m}_{x_1y} & \mathrm{m}_{x_1x_1} & \mathrm{m}_{x_1x_2} & \cdots & \mathrm{m}_{x_1x_{k-1}} \\ \mathrm{m}_{x_2y} & \mathrm{m}_{x_1x_2} & \mathrm{m}_{x_2x_2} & & \mathrm{m}_{x_2x_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathrm{m}_{x_{k-1}y} & \mathrm{m}_{x_1x_{k-1}} & \mathrm{m}_{x_2x_{k-1}} & \cdots & \mathrm{m}_{x_{k-1}x_{k-1}}\end{array}\right]$.

Kemudian pdf dari $\boldsymbol{z}_i$ adalah

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^k|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)\right\}. \qquad (3.7)$$

Selanjutnya akan dicari fungsi likelihood dari $\boldsymbol{z}_i$. Karena $\boldsymbol{z}_i$ saling independen, maka fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai *joint* pdf dari $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, ..., \boldsymbol{z}_n$ yang merupakan hasil perkalian pdf dari $\boldsymbol{z}_i$ dimana $i = 1, 2, ..., n$, yaitu

$$L(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz}) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{z}_i;\boldsymbol{\mu}_z,\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{k} \left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)\right\}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{kn} \left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|^{n/2}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{kn/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)}_{(3.7.1)}\right\}$$

Hasil dari $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)$ adalah matriks berukuran 1×1 , sehingga bentuk (3.7.1) di atas dapat dijabarkan menjadi

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T}_{(3.7.2)}\right];\ \text{berdasarkan (2.1.4.b)}$$

Persamaan (3.7.2) di atas dapat dijabarkan menjadi

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\mu}_z)^T = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}} + \overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}} + \overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left((\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}}) + (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)\right)\left((\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}}) + (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)\right)^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T + (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T + (\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})(\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T \\ + (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T}_{3.7.2a} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})(\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T}_{3.7.2b}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T}_{3.7.2c}$$

Kemudian (3.7.2a), (3.7.2b), dan (3.7.2c) dapat dijabarkan menjadi sebagai berikut

(3.7.2a) $\sum_{i=1}^{n} (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T = (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z) \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}_i - \overline{\boldsymbol{z}})^T$

$$= (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z) \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{z}} \right)^T$$

$$= (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z) \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i - n\overline{\boldsymbol{z}} \right)^T$$

$$= (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z) \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i - n\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i \right)^T$$

$$= (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z) \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i \right)^T$$

$$= (\overline{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{0})^T = \boldsymbol{0}$$

(3.7.2b) $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T = \left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})\right)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{\boldsymbol{z}}\right)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i-n\overline{\boldsymbol{z}}\right)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i-n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\right)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\right)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= (\boldsymbol{0})(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T = \boldsymbol{0}$$

(3.7.2c) $\sum_{i=1}^{n}(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T = \underbrace{(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T+\ldots+(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$

$$= n(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

Dengan mengsubtitusi (3.7.2a), (3.7.2b), dan (3.7.2c) ke bentuk (3.7.2), didapat hasil penjabaran dari bentuk (3.7.2) adalah

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)^T = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T+\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}+n(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T+n(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T$$

Dan bentuk (3.7.1) dijabarkan menjadi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z) &= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)(\mathbf{z}_i-\boldsymbol{\mu}_z)^T\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{z}_i-\overline{\mathbf{z}})(\mathbf{z}_i-\overline{\mathbf{z}})^T+n(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\right)\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left((n-1)\mathbf{m}_{zz}+n(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\right)\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[(n-1)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}+n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[(n-1)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\right]+\operatorname{tr}\left[n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[(n-1)\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]+\operatorname{tr}\left[n(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right] \\
&= (n-1)\operatorname{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]+n\operatorname{tr}\left[(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]
\end{aligned}
$$

Dengan mensubtitusi (3.7.1) ke fungsi likelihood, maka didapat fungsi likelihood sebagai berikut

$$
L(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})=\frac{1}{(2\pi)^{kn/2}|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left((n-1)\operatorname{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]+n\operatorname{tr}\left[(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)\right\}
$$

Ln-likelihood dari fungsi likelihood di atas adalah

$$
\ln L(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})=\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{kn/2}|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left((n-1)\operatorname{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]+n\operatorname{tr}\left[(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)\right\}\right)
$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{kn/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|^{n/2}}\right)+\left\{-\frac{1}{2}\left((n-1)\,\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]+n\,\mathrm{tr}\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)\right\}$$

$$= \ln(2\pi)^{-kn/2}+\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|^{-n/2}-\frac{1}{2}(n-1)\,\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]-\frac{1}{2}n\,\mathrm{tr}\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]$$

$$= -\frac{kn}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-\frac{1}{2}(n-1)\,\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]-\frac{1}{2}n\,\mathrm{tr}\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-kn\ln(2\pi)-n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-(n-1)\;\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]-n\,\mathrm{tr}\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-kn\ln(2\pi)-n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-(n-1)\;\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]-n\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)$$

Penaksir dari variansi dengan memaksimalkan $\ln L(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$ menghasilkan penaksir yang *biased* (bukti dapat dilihat pada lampiran 5). Sehingga untuk mendapatkan penaksir yang *unbiased*, $n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|$ pada $\ln L(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$ diganti dengan $(n-1)\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|$, sehingga menghasilkan *ln likelihood adjusted for degrees of freedom* yang dinyatakan oleh $\ln L_c(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$.

Ln likelihood adjusted for degrees of freedom dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\ln L_c(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz})=\frac{1}{2}\left(-kn\;\ln(2\pi)-(n-1)\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-(n\text{-}1)\;\mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right]-n\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\,\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)$$

(3.8).

$\boldsymbol{\mu}_z$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ merupakan vektor yang mengandung parameter β_0 , $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\mu}_u$, $\boldsymbol{\Sigma}_{uu}$, serta σ_{ee} . Sehingga taksiran dari parameter-parameter tersebut dapat dicari dari taksiran $\boldsymbol{\mu}_z$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$.

Taksiran μ_z dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom* pada persamaan (3.8) secara simultan, yaitu

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \mathbf{0}.$$

- Taksiran untuk $\boldsymbol{\mu}_Z$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \ .$$

Bukti:

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(-kn\ln(2\pi)-(n-1)\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-(n-1)\ \text{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]-n\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial\left(-kn\ln(2\pi)-(n-1)\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-(n-1)\ \text{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]-n\left[(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right]\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\underbrace{\frac{\partial\left(-kn\ln\left(2\pi\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*1}+\underbrace{\frac{\partial\left(-\left(n-1\right)\ \ln\ \left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*2}+\underbrace{\frac{\partial\left(-\left(n-1\right)\ \mathrm{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*3}\\ +\underbrace{\frac{\partial\left(-n\left(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*4}\end{array}\right) \qquad (*)$$

Berikut ini diberikan penjabaran dari (*)

Pada bentuk (*1),(*2),(*3) dan (*4) di atas, hanya (*4) yang merupakan fungsi dari matriks μ_z, sehingga (*1) ,(*2),(*3) dapat diabaikan karena (*1),(*2),(*3) menghasilkan vektor null.

$$\frac{\partial\left(-kn\ \ln\ \left(2\pi\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z^{\ T}}=\mathbf{0} \qquad (*1)$$

$$\frac{\partial\left(-\left(n-1\right)\ \ln\ \left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\mathbf{0} \qquad (*2)$$

$$\frac{\partial\left(-\left(n-1\right)\ \mathrm{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\mathbf{0} \qquad (*3)$$

Kemudian, akan dicari penjabaran dari (*4)

$$\frac{\partial\left(-n\left(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\bar{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=-n\frac{\partial\left(\bar{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\bar{\mathbf{z}}-\bar{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z-\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\bar{\mathbf{z}}+\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= -n\left[\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}+\frac{\partial\left(-\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}+\frac{\partial\left(-\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}+\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}\right]$$

$$= -n\left[\underbrace{\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*4a}-\underbrace{\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*4b}-\underbrace{\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*4c}+\underbrace{\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}}_{*4d}\right]$$

$(*4a)$ $$\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\mathbf{0}$$

$(*4b)$ $$\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)^T=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)$$ (berdasarkan 2.2.2.a)

$(*4c)$ $$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\frac{\partial\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)^T\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$ (berdasarkan 2.2.2.a)

$(*4d)$ $$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\boldsymbol{\mu}_z$$ (berdasarkan 2.2.2.c)

Subtitusi persamaan $(*4a)$, $(*4b)$, $(*4c)$, dan $(*4d)$ ke dalam bentuk (*4), sehingga didapat

$$\frac{\partial\left(-n\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z} = -n\left[\mathbf{0}-\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)-\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)+\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\boldsymbol{\mu}_z\right)\right]$$

$$= -n\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + (\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)$$

Sehingga (*) menjadi

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+-n\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + (\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-n\left(-\Sigma_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \Sigma_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + (\Sigma_{zz}{}^{-1} + \Sigma_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + (\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right) \qquad (3.9)$$

Taksiran dari $\boldsymbol{\mu}_z$ yang memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom* merupakan solusi dari $\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \mathbf{0}$. Berdasarkan **(3.9)** didapat

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = -\frac{n}{2}\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right) = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right) = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \overline{\mathbf{z}} \qquad (3.10)$$

- Taksiran untuk $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{z}_i - \overline{\mathbf{z}})(\mathbf{z}_i - \overline{\mathbf{z}})^T$$

Bukti:

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left\{-kn \ln (2\pi) - (n-1) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}| - (n-1) \text{ tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\} - n(\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\mu}_z)\right\}\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

Untuk mempermudah pencarian penaksiran dari $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$, akan disubtitusi $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z$ yang sudah didapatkan ke dalam persamaan di atas. Maka didapat $(\overline{\mathbf{z}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\overline{\mathbf{z}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z) = \mathbf{0}$ sehingga persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(-kn \ln (2\pi) - (n-1) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}| - (n-1) \text{ tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(-kn \ln (2\pi)\right) + \partial\left(-(n-1) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right) + \partial\left(-(n-1) \text{ tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial\left(-kn \ln (2\pi)\right) - (n-1)\partial\left(\ln |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right) - (n-1)\partial\left(\text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(-kn \ln (2\pi)\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} + \frac{-(n-1)\partial\left(\ln |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right) - (n-1)\partial\left(\text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{0} + \frac{-(n-1)\partial\left(\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)-(n-1)\partial\left(\operatorname{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(n-1)\partial\left(\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)-(n-1)\partial\left(\operatorname{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right]$$

Berdasarkan **(2.2.4.d)**, $\partial\left(\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$. Sehingga didapat bahwa

$$\frac{\partial\ln L_c}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\partial\left(\operatorname{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\operatorname{tr}\left\{\partial\left(\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

Berdasarkan sifat dari operator differensial, d , yaitu $d(\mathbf{XY})=(d\mathbf{X})\mathbf{Y}+\mathbf{X}(d\mathbf{Y})$.

Dengan memisalkan $\mathbf{X}=\mathbf{m}_{zz}$ dan $\mathbf{Y}=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$, maka didapat

$\partial\left(\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)=(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}+\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)$. Sehingga

$$\frac{\partial\ln L_c}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}+\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\left\{\operatorname{tr}\left((\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)+\operatorname{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}-(n-1)\operatorname{tr}\left\{\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

Berdasarkan **(2.2.5.c)**, $\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} = -\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$. Sehingga

$-(n-1)\operatorname{tr}\left\{\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right\} = (n-1)\operatorname{tr}\left\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}$.

Maka

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}+(n-1)\operatorname{tr}\left\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)+(n-1)\operatorname{tr}\left\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}-(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left((\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)+(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}-(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(n-1)\operatorname{tr}\left((\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)+(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}-\frac{(n-1)\operatorname{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\operatorname{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right]$$

Perhatikan suku terakhir dari persamaan di atas. Berdasarkan **Teorema 2.7** didapat $\operatorname{tr}\left((\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) = \left\{\operatorname{vec}\left(\partial\mathbf{m}_{zz}\right)^T\right\}^T \operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) = \left\{\partial\operatorname{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^T \operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)$,

sehingga

$$\frac{(n-1)\,\mathrm{tr}\left\{(\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{(n-1)\left\{\partial\mathrm{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^T \mathrm{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \mathbf{0}\,.$$

Hasil di atas didapat karena fungsi yang diturunkan tidak mengandung $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$.

Sehingga

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\left[\frac{-(n-1)\,\mathrm{tr}\left((\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)+(n-1)\,\mathrm{tr}\left\{(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\right]$$

Dengan memisalkan $\mathbf{A}=(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$ dan $\mathbf{B}=(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$, maka

$$-(n-1)\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})+(n-1)\,\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = -(n-1)\left(\mathrm{tr}(\mathbf{A})-\mathrm{tr}(\mathbf{B})\right) = -(n-1)\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\,.$$

$(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$ dapat ditulis dalam bentuk $(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{I}_k$ dimana $\mathbf{I}_k$ adalah matriks identitas berukuran $k\times k$ dan $\mathbf{I}_k=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$, sehingga $\mathbf{A}=(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}=(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$. Maka

$$\begin{aligned}-(n-1)\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= -(n-1)\,\mathrm{tr}\left((\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}-(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\\ &= -(n-1)\,\mathrm{tr}\left((\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\,\mathrm{tr}\left\{(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\}}{\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

Berdasarkan **Teorema 2.9**, dengan memisalkan bahwa $\mathbf{A} = (\partial \mathbf{\Sigma}_{zz})$, $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}$,

serta $\mathbf{C} = (\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})$, maka didapat bahwa

$$\mathrm{tr}\left\{(\partial \mathbf{\Sigma}_{zz})\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right\} = \left(\mathrm{vec}(\partial \mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T \left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz}).$$

Sehingga,

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\left(\mathrm{vec}(\partial \mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T \left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(n-1)\left(\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T \left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(n-1)\left(\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T \left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(n-1)\left(\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T \left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz})}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

Berdasarkan **(2.1.11.a)** yaitu $\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz}) = D_m \ \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})$. Sehingga

$$\begin{aligned}\left(\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T &= \left(\partial\left(D_m \ \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)\right)^T \\ &= \left(D_m \ \left(\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)\right)^T \\ &= \left(\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\right)^T D_m^{\ T}\end{aligned}$$

Maka didapat

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = -\frac{1}{2}(n-1)\frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)^T\right)D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}(n-1)D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right) \qquad (3.11)$$

Taksiran dari $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ yang memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted degrees of freedom* merupakan solusi dari $\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \mathbf{0}$. Berdasarkan **(3.11)** didapat

$$-\frac{1}{2}(n-1)D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right) = \mathbf{0}$$

$$D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right) = \mathbf{0} \qquad (3.12)$$

Berdasarkan **Teorema 2.16**, $D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m$ *invertible* dimana invers dari $D_m^{\ T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{\ -1}\right)D_m$ adalah $D_m^{\ +}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)D_m^{+T}$. Dengan mengalikan kedua ruas dari **(3.12)** dengan $D_m^{\ +}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)D_m^{+T}$ maka didapat $\text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right)=\mathbf{0}$. Karena $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ dan $\mathbf{m}_{zz}$ merupakan matriks simetris, maka $\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right)=\mathbf{0}$. Sehingga didapat bahwa $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz}=\mathbf{m}_{zz}$.

Sebelum mendapatkan taksiran parameter β_0 , $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\mu}_u$, $\boldsymbol{\Sigma}_{uu}$, serta σ_{ee}, terlebih dahulu perlu diperhatikan *invariance property* dari penaksir maksimum likelihood. *Invariance property* dari penaksir maksimum likelihood menyatakan bahwa taksiran maksimum likelihood dari suatu fungsi dari satu atau lebih parameter ekivalen dengan fungsi dari taksiran parameter yang bersesuaian tersebut. Yaitu, jika $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah taksiran maksimum likelihood dari matriks atau vektor parameter, yaitu $\boldsymbol{\theta}$, maka $f\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ adalah taksiran maksimum likelihood dari $f\left(\boldsymbol{\theta}\right)$.

Sehingga didapat taksiran parameter pada *classical error in variable model* sebagai berikut:

- $\hat{\beta}_0 = \overline{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \overline{\boldsymbol{x}}$
- $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd})^{-1}(\mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de})$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u = \overline{\boldsymbol{x}}$
- $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} = \mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd} = \left(\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)^T\right) - \boldsymbol{\Sigma}_{dd}$
- $\hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - 2\,\mathbf{m}_{yx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ed}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

- **Bukti** $\hat{\beta}_0 = \bar{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \bar{\boldsymbol{x}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u = \bar{\boldsymbol{x}}$:

Karena $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \bar{\boldsymbol{z}}$ maka dapat dijabarkan menjadi $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}}_y \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_u \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{y}} \\ \bar{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{z}}$;

Sehingga didapat

- $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u = \bar{\boldsymbol{x}}$
- $\hat{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_u = \bar{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \hat{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\beta}_0 = \bar{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \bar{\boldsymbol{x}}$

- **Bukti** $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd})^{-1}(\mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de})$:

Karena $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz}$ dimana $\mathbf{m}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yx} \\ \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xx} \end{bmatrix}$, serta $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$

maka

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz}$$

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) + \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yx} \\ \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xx} \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yx} \\ \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xx} \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\varepsilon\varepsilon}$$

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yx} \\ \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xx} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} \hat{\boldsymbol{\beta}} & \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} \hat{\boldsymbol{\beta}} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{yy} - \hat{\sigma}_{ee} & \mathbf{m}_{yx} - \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

Dari **(3.13)** didapat $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}_{xy} - \mathbf{\Sigma}_{de}$ dan $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu} = \mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd}$ sehingga

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}_{xy} - \mathbf{\Sigma}_{de}$$

$$(\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{m}_{xy} - \mathbf{\Sigma}_{de})$$

$$(\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})^{-1}(\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})^{-1}(\mathbf{m}_{xy} - \mathbf{\Sigma}_{de})$$

$$\underset{(k-1)\times 1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \underset{(k-1)\times(k-1)}{(\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})^{-1}}\underset{(k-1)\times 1}{(\mathbf{m}_{xy} - \mathbf{\Sigma}_{de})} \tag{3.14}$$

- **Bukti** $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu} = \mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd} = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^T\right) - \mathbf{\Sigma}_{dd}$ dan

$\hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - 2\,\mathbf{m}_{yx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + 2\mathbf{\Sigma}_{ed}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

Dari **(3.13)** didapat pula

- $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu} = \mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd} = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^T\right) - \mathbf{\Sigma}_{dd}$;
- $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}_{yy} - \hat{\sigma}_{ee} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu}\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

$\hat{\sigma}_{ee}$ juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain, yaitu sebagai berikut

$$\hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd})\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dengan mensubtitusi $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{uu} = \mathbf{m}_{xx} - \mathbf{\Sigma}_{dd}$ maka

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ee} &= \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{m}_{xx}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{\Sigma}_{dd}\hat{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned}$$

$$= \mathbf{m}_{yy} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \mathbf{m}_{yy} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} + 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \mathbf{m}_{yy} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \left(\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd}\right) \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dengan mengsubtitusi (3.14), yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd}\right)^{-1} \left(\mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de}\right)$ didapat

$$\hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \left(\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd}\right) \left(\mathbf{m}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{dd}\right)^{-1} \left(\mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de}\right) + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \mathbf{m}_{yy} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \left(\mathbf{m}_{xy} - \boldsymbol{\Sigma}_{de}\right) + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \mathbf{m}_{yy} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xy} + 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{de} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

karena $\boldsymbol{\Sigma}_{ed} = \boldsymbol{\Sigma}_{de}^{\ T}$ dan $\mathbf{m}_{yx} = \mathbf{m}_{xy}^{\ T}$

$$\hat{\sigma}_{ee} = \mathbf{m}_{yy} - 2\,\mathbf{m}_{yx} \hat{\boldsymbol{\beta}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ed} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{m}_{xx} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \hat{\boldsymbol{\beta}} \ .$$

Taksiran dari β_0 dan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan taksiran yang *unbiased* (Fuller, 1987).

BAB IV

APLIKASI *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

Pada bab ini akan dibahas contoh dari penaksiran parameter *classical error in variable model*. Penaksiran parameter *classical error in variable model* ini akan dilakukan dengan menggunakan bantuan *software SPSS 16* dan *Matlab* R2009a.

Pada contoh kasus ini, hanya satu variabel independen yang digunakan untuk dilihat hubungannya dengan variabel dependen. Data yang dipakai adalah data yang diambil dari buku "*Measurement Error Models*" (Fuller, 1987). Data diberikan pada tabel 3, yaitu data dari banyaknya panen jagung dan kadar nitrogen pada tanah yang dikumpulkan pada 11 ladang di Iowa. Tujuan dari penelitian yaitu untuk melihat hubungan antara panen jagung (y) dan ketersediaan kadar nitrogen pada tanah (u). Untuk menentukan nilai sebenarnya dari kadar nitrogen pada tanah (u) harus melalui suatu analisis laboratorium. Sehingga nilai kadar nitrogen pada tanah yang didapat dari hasil laboratorium (x) bukanlah suatu nilai yang tepat sesuai dengan nilai sebenarnya dari kadar nitrogen pada tanah. Oleh karena itu, nilai kadar nitrogen pada tanah yang ada pada data merupakan kadar nitrogen pada tanah yang didapat dari hasil laboratorium (x).

Tabel 3. Data Panen Jagung dan Kadar Nitrogen pada Ladang di Iowa

ladang	Banyaknya panen jagung (y)	Kadar nitrogen pada tanah (x)
1	86	70
2	115	97
3	90	53
4	86	64
5	110	95
6	91	64
7	99	50
8	96	70
9	99	94
10	104	69
11	96	51

Variabel yang digunakan adalah :

- Variabel dependen pada contoh kasus ini adalah banyaknya panen jagung (y).
- Variabel independen pada contoh kasus ini adalah kadar nitrogen pada tanah (u).

Diasumsikan bahwa σ_{dd} diketahui yaitu sebesar 57 dan $\sigma_{de} = \sigma_{ed} = 0$, serta diasumsikan pula model $y = \beta_0 + \beta_1 u + e$ merupakan suatu aproksimasi yang sesuai untuk hubungan hasil panen dan kadar nitrogen.

4.1 TAKSIRAN PARAMETER PADA *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL*

Classical error in variable model untuk satu variabel independen adalah

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 u_i + e_i \\ u_i &= x_i + d_i \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Berdasarkan hasil yang terdapat pada lampiran 8 yang didapatkan dari program Matlab R2009a (algoritma untuk mencari taksiran parameter pada *classical error in variable model* dapat dilihat pada lampiran 8), maka statistik yang berhubungan dengan tabel 3 adalah

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97.4545 \\ 70.6364 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{m}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_{yy} & \mathrm{m}_{yx} \\ \mathrm{m}_{xy} & \mathrm{m}_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87.6727 & 104.8818 \\ 104.8818 & 304.8545 \end{bmatrix}.$$

Maka taksiran maksimum *likelihood adjusted for degrees of freedom* dari parameter pada *classical error in variable model* adalah sebagai berikut

- $\hat{\mu}_u = \bar{x} = 70.6364$

- $\hat{\sigma}_{uu} = \mathrm{m}_{xx} - \sigma_{dd} = 304.8545 - 57 = 247.8545$
- $\hat{\beta}_1 = (\mathrm{m}_{xx} - \sigma_{dd})^{-1}(\mathrm{m}_{xy} - \sigma_{de}) = \left(247.8545\right)^{-1} 104.8818 = 0.4232$
- $\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 97.4545 - (0.4232)(70.6364) = 67.5613$
- $\hat{\sigma}_{ee} = \mathrm{m}_{yy} - \hat{\beta}_1^2 \hat{\sigma}_{uu} = 87.6727 - \left(0.4232\right)^2 \left(247.8545\right) = 43.2910$

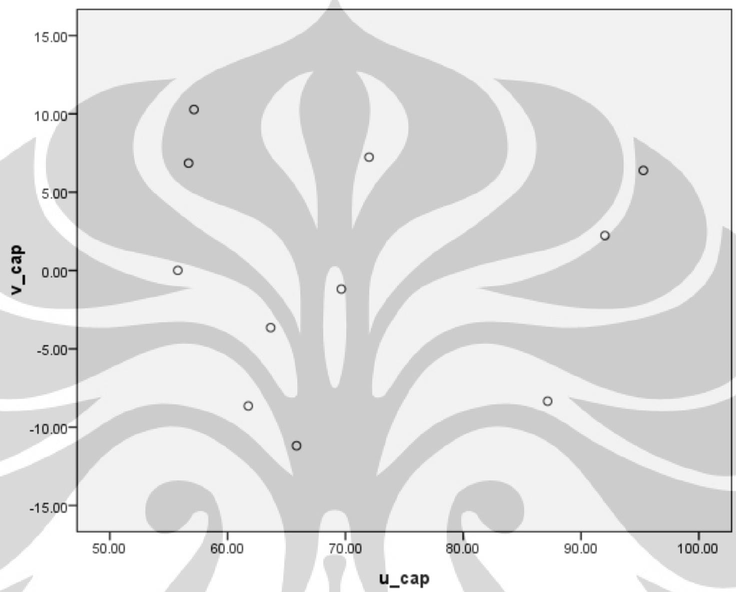
Maka taksiran *classical error in variable model* adalah sebagai berikut

$$\hat{y}_i = 67.5613 + 0.4232 u_i$$

4.2 PEMERIKSAAN ASUMSI

Pada model regresi, salah satu cara yang digunakan untuk memeriksa asumsi adalah dengan membuat plot dari residual terhadap variabel independen. Begitu pula pada *classical error in variable model,* yang dilakukan untuk memeriksa asumsi yaitu dengan membentuk plot. Pada *classical error in variable model,* kuantitas yang bersesuaian dengan residual dan variabel independen pada model regresi adalah $\hat{v}_i = \hat{e}_i - \hat{\beta}\hat{d}_i$ dan $\hat{u}_i$. Pada *classical error in variable model,* diasumsikan bahwa variansi dari e_i dan u_i konstan. Oleh karena itu, variansi dari $v_i = e_i - \beta d_i$ juga diasumsikan konstan.

Untuk memeriksa asumsi bahwa variansi konstan (*homoskedastisitas*) dibuat plot antara $\hat{v}_i$ dan $\hat{u}_i$. Sedangkan asumsi kenormalan dapat diperiksa dengan menggunakan pengujian Kolmogorov-Smirnov.



Gambar 1. *Scatter plot* antara $\hat{u}$ terhadap $\hat{v}$

Berdasarkan gambar 1 diatas terlihat $\hat{u}$ terhadap $\hat{v}$ tidak membentuk pola tertentu, maka asumsi variansi konstan (*homoskedastisitas*) dianggap terpenuhi.

Tabel 4. *Descriptive Statistics*

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
v_cap	11	.0000	7.31435	-11.19	10.28

Pada tabel 4 terlihat bahwa *mean dari* $\hat{v}$ adalah nol, yang dengan kata lain menunjukkan bahwa $E(v_i)=0$.

Selanjutnya akan diperiksa apakah v_i berdistribusi normal. Asumsi v_i berdistribusi normal akan diuji dengan uji Kolmogorov-Smirnov.

Tabel 5. *One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test*

		v_cap
N		11
Normal Parameters[a]	Mean	.0000
	Std. Deviation	7.31435
Most Extreme Differences	Absolute	.172
	Positive	.146
	Negative	-.172
Kolmogorov-Smirnov Z		.572
Asymp. Sig. (2-tailed)		.899

a. Test distribution is Normal.

Berdasarkan uji Kolmogorov-Smirnov di atas, dengan Hipotesis :

H0 : v_i berdistribusi normal

H1 : v_i tidak berdistribusi normal

Aturan keputusan: H0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha$

Kesimpulan : Dengan tingkat signifikasi 5 % didapatkan bahwa v_i berdistribusi normal.

4.3 PERBANDINGAN *CLASSICAL ERROR IN VARIABLE MODEL* DENGAN METODE OLS DAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

Dengan menggunakan metode OLS, didapat

- $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0.344$

- $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 73.153$

Kemudian, akan dilihat perbandingan antara hasil penaksiran parameter dengan OLS dengan hasil penaksiran parameter dengan metode maksimum likelihood yaitu melalui SSE.

Didapat

$$\mathrm{SSE}_{\mathrm{OLS}} = 402.423$$
$$\mathrm{SSE}_{\mathrm{ML}} = 363.263$$

Karena $\mathrm{SSE}_{\mathrm{OLS}} > \mathrm{SSE}_{\mathrm{ML}}$, maka untuk kasus ini dapat dikatakan bahwa metode maksimum likelihood lebih baik dalam menaksir parameter *classical error in variable model*.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Model regresi dimana beberapa variabel independennya mengandung *error* disebut dengan *error in variable model*. *Error* yang muncul pada variabel independen sering disebut dengan *measurement error*. *Error in variable model* dibagi menjadi dua jenis, yaitu *classical error in variable model* dan *error in variable model* kasus Berkson. *Classical error in variable model* adalah *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa antara variabel independen yang tidak terobservasi dan *measurement error* saling independen. Sedangkan *error in variable model* kasus Berkson adalah *error in variable model* yang mengasumsikan bahwa antara variabel independen yang tidak terobservasi dan *measurement error* tidak independen.

Pada *classical error in variable model*, terdapat dua jenis variabel independen yang tidak terobservasi, yaitu *fixed* dan *random. Classical error in variable model* dimana variabel independen yang tidak terobservasi diasumsikan sebagai suatu nilai *fixed* yang tidak diketahui nilainya disebut dengan *functional relationship model*. Sedangkan *classical error in variable* *model* dimana variabel independen yang tidak terobservasi diasumsikan sebagai suatu variabel random disebut dengan *structural relationship model*.

Pada tugas akhir ini, *classical error in variable model* yang digunakan adalah *structural relationship model*. Penaksiran parameter pada *classical error in variable model* tidak dapat diselesaikan dengan metode OLS karena menghasilkan taksiran yang *biased*. Dengan menggunakan metode maksimum likelihood diperoleh taksiran parameter yang *unbiased*.

5.2 SARAN

Selain dengan menggunakan metode maksimum likelihood, masih terdapat metode lain yang dapat digunakan untuk mencari taksiran parameter pada *classical error in variable model,* salah satunya adalah *instrumental variable*.

DAFTAR PUSTAKA

Amemiya, Yasuo & Wayne A. Fuller. 1984. *Estimation for the Multivariate Errors-in-variables Model with Estimated Error Covariance Matrix*. The Annals of Statistics, **2**(2): 497-509.

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra*, oleh Ir. Hari Suminto. Interaksara, Batam.

Berkson, Joseph. 1950. *Are There Two Regression?*. Journal of the American Statistical Association, **45**(250): 164- 180.

Davidov, Ori. 2005. *Estimating the slope in measurement error models—a different perspective*. *Statistics & Probability Letters 71*: 215–223.

Fuller, W.A. 1987. *Measurement Error Models.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Harville, David A. 1997. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer-Verlag New York, Inc.

Hocking, Ronald R. 2003. *Methods and Applications of Linear Models. 2nd ed.* John Wiley & Sons Ltd, New Jersey.

Hogg, Robert V. & Allen T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics . 5th ed.* Prentice-Hall, New Jersey.

Magnus, Jan R. & Heinz Neudecker. 2007. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics* . 3rd ed. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

Montgomery, Douglas C. & Peck, Elizabeth A. 1992. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Rencher, Alvin C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis. 2nd ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Rencher, Alvin C. & G. Bruce Schaalje. 2008. *Linear Models in Statistics. 2nd ed.* John Wiley & Sons Ltd, New Jersey.

Richardson, David H. & De-Min Wu. 1970. *Least Squares and Grouping Method Estimators in the Errors in Variables Model*. Journal of the American Statistical Association, **65**(330): 724-748.

Schott, James R. 1997. *Matrix Analysis for Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Werner, Stephen. 1969. *The Error in Variables Model: Estimation of the Linear Structural Relation*. Thesis. Simon Fraser University.

LAMPIRAN 1

Bukti Teorema 2.2

a) $$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^T=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B}^T & a_{21}\mathbf{B}^T & \cdots & a_{m1}\mathbf{B}^T \\ a_{12}\mathbf{B}^T & a_{22}\mathbf{B}^T & \cdots & a_{m2}\mathbf{B}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}\mathbf{B}^T & a_{2n}\mathbf{B}^T & \cdots & a_{mn}\mathbf{B}^T \end{bmatrix}=\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{B}^T$$

b) Misalkan $\boldsymbol{a}$ adalah vektor berukuran $m\times 1$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor berukuran $n\times 1$

dimana $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, sehingga

$$\boldsymbol{ab}^T=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_2a_1 & \cdots & b_na_1 \\ b_1a_2 & b_2a_2 & \cdots & b_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1a_m & b_2a_m & \cdots & b_na_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{a} & b_2\boldsymbol{a} & \cdots & b_n\boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{b}^T\otimes\boldsymbol{a}$$

LAMPIRAN 2

Bukti (2.2.2.a), (2.2.2.b), dan (2.2.2.c).

Misalkan a_i menyatakan entri ke-i dari $\boldsymbol{a}$ dan x_i adalah entri ke- i dari $\boldsymbol{x}$, serta a_{ij} menyatakan entri ke (i,j) dari $\mathbf{A}$. Maka

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = a_1x_1 + \ldots + a_m x_m \text{ dan } \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = \sum_i a_i x_i^2 + \sum_{i,j\neq i} a_{ij}x_i x_j \, .$$

Didefinisikan

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = k \\ 0, & \text{jika } i \neq k \end{cases}$$

$$\frac{\partial\left(x_i x_j\right)}{\partial x_k} = \begin{cases} 2x_k, & \text{jika } i = j = k \\ x_i, & \text{jika } j = k \text{ tetapi } i \neq k \\ x_j, & \text{jika } i = k \text{ tetapi } j \neq k \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Sehingga didapat bahwa

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)}{\partial x_k} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = a_k \qquad \text{(L2.1)}$$

dan

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_k}=\frac{\partial\left(\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j\right)}{\partial x_k}$$

$$=\frac{\partial\left(a_{kk}{x_k}^2+\sum_{i\neq k} a_{ik}x_ix_k+\sum_{j\neq k} a_{kj}x_kx_j+\sum_{i\neq k,\, j\neq k} a_{ij}x_ix_j\right)}{\partial x_k}$$

$$= a_{kk}\frac{\partial {x_k}^2}{\partial x_k}+\sum_{i\neq k} a_{ik}\frac{\partial\left(x_ix_k\right)}{\partial x_k}+\sum_{j\neq k} a_{kj}\frac{\partial\left(x_kx_j\right)}{\partial x_k}+\sum_{i\neq k,\, j\neq k} a_{ij}\frac{\partial\left(x_ix_j\right)}{\partial x_k}$$

$$= 2a_{kk}x_k+\sum_{i\neq k} a_{ik}x_i+\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j+0$$

$$= \sum_i a_{ik}x_i+\sum_j a_{kj}x_j \qquad \text{(L2.2)}$$

Persamaan (L2.1) dapat disusun dalam notasi vektor sebagai

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{a} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}^T}=\boldsymbol{a}^T$$

Sedangkan persamaan (L2.2) dapat disusun dalam notasi matriks sebagai

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\boldsymbol{x}$$

Dimana $\sum_j a_{kj}x_j$ adalah entri ke-k dari vektor kolom $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ dan $\sum_i a_{ik}x_i$ adalah entri ke- k dari $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x}$.

LAMPIRAN 3

Bukti θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Dimana $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$.

Bukti:

$(\rightarrow)$ Oleh karena θ memaksimumkan $L(\theta)$, maka:

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$,
- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$,

  $\vdots$
- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, ..., m$,
- $D = \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0, \quad i = 1, 2, ..., m \ ; \ \ j = 1, 2, ..., m \ ; \ i \neq j.$

Akan ditunjukkan bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$, yaitu:

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$,

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 = 0$$

Sehingga $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 = 0$$

Sehingga $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

$\vdots$

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_m} = 0$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_m} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_m} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 = 0$$

Sehingga $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_m} = 0$

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, ..., m$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot 0\right) + \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \cdot \frac{1}{L(\theta)} = 0$$

Sehingga $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

- $D = \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^{\,2}} - \left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, m \ ; i \neq j.$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}}{L(\theta)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}}{L(\theta)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^{\,2}} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_j}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}}{L(\theta)}\right), \quad i = 1, 2, ..., m \; ; \; j = 1, 2, ..., m$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}}{L^2(\theta)}$$

Maka,

$$D = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}}{L^2(\theta)}\right) \cdot \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}}{L^2(\theta)}\right)$$

$$- \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \cdot L(\theta) - \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}}{L^2(\theta)}\right)^2 \qquad i = 1, 2, ..., m \; ; \; j = 1, 2, ..., m \; ; i \neq j.$$

$$= \frac{1}{L^4(\theta)}\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}} \cdot L^2(\theta) + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2} \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 \cdot L(\theta) \\ - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}} \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2 \cdot L(\theta) \end{array}\right]$$

$$- \frac{1}{L^4(\theta)}\left[\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right)^2 L^2(\theta) + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \cdot L(\theta) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right]$$

$$=\frac{L^2(\theta)}{L^4(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$+\frac{L(\theta)}{L^4(\theta)}\left[2\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\right]$$

$$=\frac{L(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$+\frac{1}{L^3(\theta)}\left[2\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot 0\cdot 0-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot(0)^2-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}\cdot(0)^2\right]$$

$$=\frac{L(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\right]>\frac{1}{L^2(\theta)}\cdot 0=0$$

Sehingga didapat

$$D=\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^{\,2}}-\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2>0,\quad i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,m\ ;\ i\neq j.$$

Sehingga, terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

$(\leftarrow)$ Karena θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$, maka

- $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_1}=0$,
- $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_2}=0$,

  $\vdots$
- $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_m}=0$,

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$,

- $D = \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^{\,2}} - \left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, m \; ; i \neq j.$

Akan ditunjukkan bahwa θ juga memaksimumkan $L(\theta)$, yaitu:

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$,

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

  Sehingga $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

  Sehingga $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

  $\vdots$

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_m} = 0$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_m} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_m} = L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_m} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

  Sehingga $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_m} = 0$

- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(L(\theta)\cdot\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) + \left(L(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right)$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + \left(L(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right)$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\cdot\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\cdot\left[(0)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= L(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < L(\theta)\cdot 0 = 0$$

Sehingga $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

- $D = \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\cdot\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ \ j = 1, 2, \ldots, m\ ;\ i \neq j.$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}}{L(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2}}{L(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right), \quad i=1,2,...,m \; ; \; j=1,2,...,m$$

$$= \frac{\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j} + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}}{L(\theta)}$$

$$D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}}{L(\theta)}\right)\cdot\left(\frac{\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}}{L(\theta)}\right)$$

$$-\left(\frac{\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j} + L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}}{L(\theta)}\right)^2 \qquad i=1,2,...,m\; ; \; j=1,2,...,m\; ; \; i\neq j.$$

$$= \frac{1}{L^2(\theta)}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^4(\theta)\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} \\ +L^2(\theta)\cdot\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2} + L^2(\theta)\cdot\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2 + L^4(\theta)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2 \\ +2\cdot L^2(\theta)\cdot\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\end{array}\right]$$

$$= \frac{L^4(\theta)}{L^2(\theta)} \left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{L^2(\theta)}{L^2(\theta)} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \\ -2 \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \end{array} \right]$$

$$= L^2(\theta) \left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)^2 \right]$$

$$+1 \cdot \left[(0)^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} + (0)^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} - 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

$$= L^2(\theta) \left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} \right)^2 \right] > L^2(\theta) \cdot 0 = 0$$

Sehingga didapat

$$D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0, \quad i = 1, 2, ..., m \ ; \ j = 1, 2, ..., m \ ; i \neq j.$$

Dengan perkataan lain, terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $L(\theta)$.

Sehingga terbukti bahwa θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$, dimana $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$.

LAMPIRAN 4

Bukti $\boldsymbol{z}_i \sim N_k\left(\boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$

Didefinisikan vektor $\boldsymbol{z}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \boldsymbol{x}_i \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{z}_i \sim N_k\left(\boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$

dimana $\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I})^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ dan $\boldsymbol{\mu}_z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u \\ \boldsymbol{\mu}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u$.

Diketahui bahwa *classical error in variable model* adalah

$$y_i = \beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i \qquad \text{(L4.1)}$$

dimana $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i$ (L4.2)

dan asumsi pada *classical error in variable model* adalah

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ e_i \\ \boldsymbol{d}_i \end{bmatrix} \sim NI\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix} \right) \qquad \text{(L4.3).}$$

Sebagai langkah awal, akan dibuktikan bahwa

$$\boldsymbol{\mu}_z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u \\ \boldsymbol{\mu}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u .$$

Ekspektasi dari (L4.1) adalah

$$E(y_i) = E(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i) = E\left(\beta_0\right) + E(\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta}) + E(e_i) = \beta_0 + E(\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{\beta} + E(e_i)$$

$$= \beta_0 + E(\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{\beta} + 0 = \beta_0 + \boldsymbol{\mu}_u^T \boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u$$

Ekspektasi dari (L4.2) adalah

$$E(\boldsymbol{x}_i) = E(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i) = E(\boldsymbol{u}_i) + E(\boldsymbol{d}_i) = \boldsymbol{\mu}_u + \mathbf{0} = \boldsymbol{\mu}_u$$

Sehingga ekspektasi dari $\boldsymbol{z}_i$ adalah

$$\boldsymbol{\mu}_z = E(\boldsymbol{z}_i) = \begin{bmatrix} E(y_i) \\ E(\boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u \\ \boldsymbol{\mu}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u .$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I})^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ dimana $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ merupakan matriks varians-kovarians dari $\boldsymbol{z}_i$. Sehingga akan dicari variansi dari y_i, variansi $\boldsymbol{x}_i$, serta covariansi dari y_i dan $\boldsymbol{x}_i$.

$$\begin{aligned} \text{var}(y_i) &= \text{var}(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i) = \text{var}(\beta_0) + \text{var}(\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \text{var}(e_i) \\ &= 0 + \boldsymbol{\beta}^T \text{var}(\boldsymbol{u}_i) \boldsymbol{\beta} + \text{var}(e_i) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} \boldsymbol{\beta} + \sigma_{ee} \end{aligned}$$

$$\text{var}(\boldsymbol{x}_i) = \text{var}(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i) = \text{var}(\boldsymbol{u}_i) + \text{var}(\boldsymbol{d}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\Sigma}_{dd}$$

Selanjutnya akan dicari $\text{cov}(y_i, \boldsymbol{x}_i)$

$$\text{cov}(y_i, \boldsymbol{x}_i) = E[(y_i - E(y_i))\, (\boldsymbol{x}_i - E(\boldsymbol{x}_i))^T]$$

$$= E[\{(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i) - (\beta_0 + \boldsymbol{\mu}_u^T \boldsymbol{\beta})\}\, \{(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i) - \boldsymbol{\mu}_u\}^T]$$

$$= E[\{(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i) - (\beta_0 + E(\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{\beta})\}\, \{(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i)^T - E(\boldsymbol{u}_i)^T\}]$$

$$= E[\{\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i - \beta_0 - E(\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{\beta}\}\, \{\boldsymbol{u}_i^T + \boldsymbol{d}_i^T - E(\boldsymbol{u}_i)^T\}]$$

$$= E[\{\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{\beta} + e_i - E(\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{\beta}\}\, \{\boldsymbol{u}_i^T - E(\boldsymbol{u}_i)^T + \boldsymbol{d}_i^T\}]$$

$$= E\left[\left(\left(\boldsymbol{u}_i^T - E\left(\boldsymbol{u}_i\right)^T\right)\boldsymbol{\beta} + e_i\right)\ \left(\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T + \boldsymbol{d}_i^T\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{u}_i - E\left(\boldsymbol{u}_i\right)\right) + e_i\right)\ \left(\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T + \boldsymbol{d}_i^T\right)\right]$$

$$= E[\boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T + \boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\boldsymbol{d}_i^T + e_i(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T + e_i\boldsymbol{d}_i^T)]$$

$$= E[\boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T - e_i E(\boldsymbol{u}_i)^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T - E(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] - E[e_i\ E(\boldsymbol{u}_i)^T]\ + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] - \boldsymbol{\beta}^T E[E(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] - E[e_i E(\boldsymbol{u}_i)^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] - \boldsymbol{\beta}^T E(\boldsymbol{u}_i)E[\boldsymbol{d}_i]^T + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] - E[e_i]E(\boldsymbol{u}_i)^T + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] - \boldsymbol{\beta}^T E(\boldsymbol{u}_i)\left(\boldsymbol{0}\right)^T + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T]\ - 0.E(\boldsymbol{u}_i)^T + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T] + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T\ \mathrm{var}[\boldsymbol{u}_i] + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T\ \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T] \qquad (**)$$

Dari (L4.3) didapat bahwa $\mathrm{cov}(\boldsymbol{u}_i, e_i) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{cov}(e_i, \boldsymbol{u}_i^T) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{cov}(\boldsymbol{u}_i^T, \boldsymbol{d}_i) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{cov}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{d}_i^T) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{cov}(e_i, \boldsymbol{d}_i^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{ed}$, dan $\mathrm{cov}(\boldsymbol{d}_i, e_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{de}$. Sehingga didapat

- $E[\boldsymbol{u}_i e_i]$ = $\mathrm{cov}(\boldsymbol{u}_i, e_i)$ - $E[\boldsymbol{u}_t]\ E[e_t]$ = $\boldsymbol{0}$ - $E[\boldsymbol{u}_t].\boldsymbol{0}$ = $\boldsymbol{0}$
- $E[e_i\boldsymbol{u}_i^T]$ = $\mathrm{cov}(e_i, \boldsymbol{u}_i^T)$ - $E[e_t]E[\boldsymbol{u}_i^T]$ = $\boldsymbol{0}$ - $0 \cdot E[\boldsymbol{u}_i^T]$ = $\boldsymbol{0}$
- $E[\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{d}_i]$ = $\mathrm{cov}(\boldsymbol{u}_i^T, \boldsymbol{d}_i)$ - $E[\boldsymbol{u}_i^T]\ E[\boldsymbol{d}_i]$ = $\boldsymbol{0}$ - $E[\boldsymbol{u}_i^T].\boldsymbol{0}$ = $\boldsymbol{0}$

- $E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] = \text{cov}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{d}_i^T) - E[\boldsymbol{u}_i]\, E[\boldsymbol{d}_i^T] = \mathbf{0} - E[\boldsymbol{u}_i].\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $E[e_i\boldsymbol{d}_i^T] = \text{cov}(e_i, \boldsymbol{d}_i^T) - E[e_i]\, E[\boldsymbol{d}_i^T] = \boldsymbol{\Sigma}_{ed} - 0.\mathbf{0} = \boldsymbol{\Sigma}_{ed}$
- $E[\boldsymbol{d}_i e_i] = \text{cov}(\boldsymbol{d}_i, e_i) - E[\boldsymbol{d}_i]E[e_i] = \boldsymbol{\Sigma}_{de} - \mathbf{0}.0 = \boldsymbol{\Sigma}_{de}$

Sehingga (**)

$$\text{cov}(y_i, \boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\beta}^T E[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{u}_i^T] + E[e_i\boldsymbol{d}_i^T]$$

$$= \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\Sigma}_{ed} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\Sigma}_{ed}$$

Selanjutnya akan dicari $\text{cov}(\boldsymbol{x}_i, y_i)$

$$\text{cov}(\boldsymbol{x}_i, y_i) = E[\,(\boldsymbol{x}_i - E(\boldsymbol{x}_i))\,(y_i - E(y_i))]$$

$$= E[\{(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i) - \boldsymbol{\mu}_u\}\,\{(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{\beta} + e_i) - (\beta_0 + \boldsymbol{\mu}_u^T\boldsymbol{\beta})\}]$$

$$= E[\{(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i) - E(\boldsymbol{u}_i)\}\,\{(\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{\beta} + e_i) - (\beta_0 + E(\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\beta})\}\,]$$

$$= E[\{\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\}\,\{\beta_0 + \boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{\beta} + e_i - \beta_0 - E(\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\beta}\}\,]$$

$$= E[\{\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\}\,\{\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{\beta} + e_i - E(\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\beta}\}\,]$$

$$= E\left[\left((\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)) + \boldsymbol{d}_i\right)\,\left(\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta} + e_i\right)\right]$$

$$= E\left[\left((\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)) + \boldsymbol{d}_i\right)\,\left(\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta} + e_i\right)\right]$$

$$= E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{d}_i\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))e_i + \boldsymbol{d}_i e_i)]$$

$$= E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta}] + E[\boldsymbol{d}_i\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T\boldsymbol{\beta}] + E[(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\left(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i)\right)^T]\,\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i - E(\boldsymbol{u}_i)e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T]\boldsymbol{\beta} + E[(\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T - \boldsymbol{d}_i E(\boldsymbol{u}_i)^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] - E[E(\boldsymbol{u}_i)e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} - E[\boldsymbol{d}_i E(\boldsymbol{u}_i)^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] - E[E(\boldsymbol{u}_i)e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} - E[\boldsymbol{d}_i]E(\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] - E(\boldsymbol{u}_i)E[e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[(\boldsymbol{u}_t - E(\boldsymbol{u}_i))(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{0})E(\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] - E(\boldsymbol{u}_i).0 + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= E[(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))(\boldsymbol{u}_i - E(\boldsymbol{u}_i))^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= \operatorname{var}[\boldsymbol{u}_i]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{u}_i^T]\boldsymbol{\beta} + E[\boldsymbol{u}_i e_i] + E[\boldsymbol{d}_i e_i]$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\beta} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\Sigma}_{de}$$

Didapat bahwa $\operatorname{cov}(\boldsymbol{x}_i, y_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}_{de}$

Jadi didapat matriks varians-kovarians dari $\boldsymbol{z}_i$ yaitu

$$\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(y_i) & \operatorname{cov}(y_i, \boldsymbol{x}_i) \\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{x}_i, y_i) & \operatorname{var}(\boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + \sigma_{ee} & \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu}\,\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{uu}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\Sigma}_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{uu}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I})^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I})^T\boldsymbol{\Sigma}_{uu}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{I}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ dimana $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ed} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{de} & \boldsymbol{\Sigma}_{dd} \end{bmatrix}$.

Pada *classical error in variable model* diasumsikan bahwa $e_i \sim \text{NIID}(0, \sigma_{ee})$ dan $\boldsymbol{d}_i \sim \text{NIID}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{dd})$, sehingga didapat $y_i \sim N\left(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Sigma}_{uu} \boldsymbol{\beta} + \sigma_{ee}\right)$ dan $\boldsymbol{x}_i \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\Sigma}_{uu} + \boldsymbol{\Sigma}_{dd}\right)$

Berdasarkan distribusi dari y_i dan $\boldsymbol{x}_i$ didapat bahwa $\boldsymbol{z}_i \sim N_k\left(\boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$.

LAMPIRAN 5

Bukti taksiran variansi yang didapat dengan memaksimalkan $\ln L\left(\boldsymbol{\mu}_z;\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$ merupakan taksiran yang *biased*

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(-kn\ln\left(2\pi\right)-n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|-\left(n-1\right)\ \mathrm{tr}\left[\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right]-n\left[\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right]\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

Pada fungsi *ln likelihood* di atas, hanya suku terakhir saja yang merupakan fungsi dari matriks $\boldsymbol{\mu}_z$, sehingga suku awalnya dapat diabaikan karena turunan dari suku-suku awalnya adalah vektor null.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{2}n\left[\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right]\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}=-\frac{1}{2}n\frac{\partial\left(\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

Kemudian, akan dicari penjabaran dari $\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)$

$$\frac{\partial\left(\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}=\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z-\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$=\underbrace{\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}}_{*4a}-\underbrace{\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}}_{*4b}-\underbrace{\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}}_{*4c}+\underbrace{\frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}}_{*4d}$$

$$(*4a)\quad \frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\mathbf{0}$$

$$(*4b)\quad \frac{\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)^T=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)$$ (berdasarkan 2.2.2.a)

$$(*4c)\quad \frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\frac{\partial\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}\right)^T\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$ (berdasarkan 2.2.2.a)

$$(*4d)\quad \frac{\partial\left(\boldsymbol{\mu}_z{}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\boldsymbol{\mu}_z$$ (berdasarkan 2.2.2.c)

sehingga didapat

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=-\frac{1}{2}n\frac{\partial\left(\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=-\frac{1}{2}n\left(\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})\boldsymbol{\mu}_z\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)$$ (L5.1)

Taksiran dari μ_z yang memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* merupakan solusi dari $\frac{\partial\ln L_c}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=\mathbf{0}$. Berdasarkan **(L5.1)** didapat

$$\frac{\partial\ln L_c}{\partial\boldsymbol{\mu}_z}=-\frac{n}{2}\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow\qquad\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}+2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = \boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z = \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\overline{\mathbf{z}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \overline{\mathbf{z}} \qquad \text{(L5.2)}$$

Akan dibuktikan bahwa dengan menurunkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom* terhadap $\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$ akan didapat $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz}$.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left\{-kn\ln(2\pi) - n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right| - (n-1)\ \mathrm{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\} - n(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\boldsymbol{\mu}_z)\right\}\right)}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

Untuk mempermudah pencarian penaksiran dari $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$, akan disubtitusi $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z$ yang sudah didapatkan ke dalam persamaan di atas. Maka didapat $(\overline{\mathbf{z}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_z)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}(\overline{\mathbf{z}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_z) = \mathbf{0}$ sehingga persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(-kn\ln(2\pi) - n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right| - (n-1)\ \mathrm{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\}\right)}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\partial\left(-kn\ln(2\pi)\right)}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}}_{L1} - \underbrace{\frac{\partial\left(n\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right|\right)}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}}_{L2} - \underbrace{\frac{\partial\left((n-1)\ \mathrm{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\}\right)}{\partial \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}}_{L3}\right] \qquad \textbf{(*)}$$

(L1) $\dfrac{\partial\left(-kn\ \ln\ (2\pi)\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$ = **0** ; karena fungsi $-kn\ \ln\ (2\pi)$ bukan merupakan fungsi dari $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$, sehingga turunannya adalah vektor null.

(L2) $\dfrac{\partial\left(n\ \ln\ |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \left(\dfrac{\partial\left(n\ \ln\ |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right)}{\partial \text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}\right) D_m = \left(n \dfrac{\partial\left(\ln\ |\boldsymbol{\Sigma}_{zz}|\right)}{\partial \text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}\right) D_m$

$$= n\ \text{vec}\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\right)^T D_m = n\ \text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T D_m$$

(L3) $\dfrac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \dfrac{(n-1)\partial\left(\text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \dfrac{(n-1)\,\text{tr}\left(\partial\left(\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$

Berdasarkan sifat dari operator differensial, d , yaitu $d\left(\mathbf{XY}\right)=\left(d\mathbf{X}\right)\mathbf{Y}+\mathbf{X}\left(d\mathbf{Y}\right)$. Dengan memisalkan $\mathbf{X}=\mathbf{m}_{zz}$ dan $\mathbf{Y}=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$, maka didapat $\partial\left(\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)=\left(\partial\mathbf{m}_{zz}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}+\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)$. Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} &= \frac{(n-1)\,\text{tr}\left(\left(\partial\mathbf{m}_{zz}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}+\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} \\
&= \frac{(n-1)\left[\text{tr}\left(\left(\partial\mathbf{m}_{zz}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)+\text{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)\right]}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} \\
&= \frac{(n-1)\,\text{tr}\left(\left(\partial\mathbf{m}_{zz}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} + \frac{(n-1)\,\text{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}
\end{aligned}$$

Pada suku pertama dari persamaan di atas, yang dicari adalah turunan

dari $\mathbf{m}_{zz}$ terhadap $\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})$, sehingga $\dfrac{(n-1)\,\text{tr}\left((\partial\mathbf{m}_{zz})\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}$ = **0**.

Maka

$$\frac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{(n-1)\,\text{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = \frac{(n-1)\,\text{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\ D_m$$

Berdasarkan **Teorema 2.8 ,** didapat bahwa

$$\text{tr}\left(\mathbf{m}_{zz}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right) = \left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz}^{T})\right\}^{T}\ \text{vec}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}) = \left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^{T}\ \text{vec}(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1})\ .$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} &= \frac{(n-1)\left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^{T}\ \text{vec}\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\ D_m \\ &= \frac{(n-1)\left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^{T}\ \partial\text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\ D_m\end{aligned}$$

Berdasarkan **(2.2.5.f)** $\dfrac{\partial}{\partial\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})^{T}}\text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) = -\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^{T}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) = -\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)$,

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} &= (n-1)\left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^{T}\ \frac{\partial\text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})}\ D_m \\ &= -(n-1)\left\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\right\}^{T}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m\end{aligned}$$

Sehingga didapat (*)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\partial\left(-kn\ \ln\ (2\pi)\right)}{\partial \text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}}_{L1} - \underbrace{\frac{\partial\left(n\ \ln\ |\mathbf{\Sigma}_{zz}|\right)}{\partial \text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}}_{L2} - \underbrace{\frac{\partial\left((n-1)\ \text{tr}\{\mathbf{m}_{zz}\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\}\right)}{\partial \text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}}_{L3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{0} - n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m - \left(-(n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m + (n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m\right] \qquad \text{(L5.3)}$$

Taksiran dari $\mathbf{\Sigma}_{zz}$ yang memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* merupakan solusi dari $\frac{\partial \ln L}{\partial \text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})} = \mathbf{0}$. Berdasarkan **(L5.3)** didapat

$$\frac{1}{2}\left[-n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m + (n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m\right] = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m + (n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m = -(n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\ D_m D_m^{+} = -(n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\ D_m D_m^{+}$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\ \text{vec}\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T = -(n-1)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.9** ,

$$\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) = \left(\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)^T\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}\right)^T = \left(\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\{\text{vec}(\mathbf{m}_{zz})\}\right)^T$$

$$= \text{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\mathbf{\Sigma}_{zz}^{-1})^T$$

Sehingga

$$-n\ \mathrm{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)^{T} = -\left(n-1\right)\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})^{T}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)^{T} = \frac{\left(n-1\right)}{n}\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1})^{T} = \mathrm{vec}\left(\frac{\left(n-1\right)}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)^{T}$$

Karena $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ dan $\mathbf{m}_{zz}$ merupakan matriks simetris, maka

$$\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1} = \frac{\left(n-1\right)}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = \frac{\left(n-1\right)}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\mathbf{m}_{zz}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\ .$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \frac{\left(n-1\right)}{n}\mathbf{m}_{zz}$$

Kemudian akan dibuktikan bahwa $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \frac{\left(n-1\right)}{n}\mathbf{m}_{zz}$ merupakan taksiran yang *biased*.

$$\mathbf{m}_{zz} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}})\left(\boldsymbol{z}_i-\overline{\boldsymbol{z}}\right)^{T} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-\boldsymbol{z}_i\overline{\boldsymbol{z}}^{T}-\overline{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{z}_i{}^{T}+\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T})$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\overline{\boldsymbol{z}}^{T}-\sum_{i=1}^{n}\overline{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{z}_i{}^{T}+\sum_{i=1}^{n}\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\right)\overline{\boldsymbol{z}}^{T}-\overline{\boldsymbol{z}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i{}^{T}+n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}-\overline{\boldsymbol{z}}n\overline{\boldsymbol{z}}^{T}+n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}-n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}+n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i{}^{T}-n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^{T}\right)$$

Kemudian dengan mencari nilai ekspektasi dari $\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}$, akan ditunjukkan bahwa $\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}$ bukan merupakan taksiran yang *unbiased* dari $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$.

$$E\left(\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}\right) = E\left[\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T - n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^T\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T - n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^T\right] = \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - E\left[n\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^T\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - nE\left[\overline{\boldsymbol{z}}\,\overline{\boldsymbol{z}}^T\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(E\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]E\left[\overline{\boldsymbol{z}}^T\right] + \operatorname{var}\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\boldsymbol{z}_i\right]\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\boldsymbol{z}_i^T\right]\right) + \operatorname{var}\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\boldsymbol{z}_i\right]\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\boldsymbol{z}_i^T\right]\right) + \operatorname{var}\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\left(\frac{1}{n}n\boldsymbol{\mu}_z\right)\left(\frac{1}{n}n\boldsymbol{\mu}_z^T\right) + \operatorname{var}\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\boldsymbol{\mu}_z\boldsymbol{\mu}_z^T + \operatorname{var}\left[\overline{\boldsymbol{z}}\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\boldsymbol{\mu}_z\boldsymbol{\mu}_z^T + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}\left[\boldsymbol{z}_i\right]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\boldsymbol{\mu}_z\boldsymbol{\mu}_z^T + \frac{1}{n^2}n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\right] - n\left(\boldsymbol{\mu}_z\boldsymbol{\mu}_z^T + \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T\right] - n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} E\left[\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T\right]\right) - n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{var}\left[\mathbf{z}_i\right] + E\left[\mathbf{z}_i\right] E\left[\mathbf{z}_i^T\right]\right)\right) - n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz} + \boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T\right)\right) - n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\boldsymbol{\Sigma}_{zz} + n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - n\boldsymbol{\mu}_z \boldsymbol{\mu}_z^T - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\boldsymbol{\Sigma}_{zz} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right) = \frac{1}{n}(n-1)\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = \frac{n-1}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$$

Karena $E\left(\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}\right) \neq \boldsymbol{\Sigma}_{zz}$, maka $\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}$ bukanlah penaksir yang *unbiased* untuk $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$.

LAMPIRAN 6

Bukti $\mathbf{m}_{zz}$ merupakan taksiran yang *unbiased* untuk $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$

Pada lampiran 5, telah dibuktikan bahwa $E\left(\frac{n-1}{n}\mathbf{m}_{zz}\right)=\frac{n-1}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$,

sehingga

$$E\left(\mathbf{m}_{zz}\right)=E\left(\frac{n}{(n-1)}\frac{(n-1)}{n}\mathbf{m}_{zz}\right)=\frac{n}{(n-1)}E\left(\frac{(n-1)}{n}\mathbf{m}_{zz}\right)=\frac{n}{(n-1)}\left(\frac{n-1}{n}\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)$$

$$=\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbf{m}_{zz}$ merupakan taksiran yang *unbiased* untuk $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$.

LAMPIRAN 7

Bukti taksiran $\boldsymbol{\mu}_z$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom*

Selanjutnya akan diperiksa apakah taksiran $\boldsymbol{\mu}_z$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom* dengan melihat apakah matriks hessian yang didapat merupakan definit negatif atau tidak. Jika matriks hessian yang didapat merupakan definit negatif, maka dapat disimpulkan bahwa taksiran yang didapat memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom*.

Didefinisikan matriks hessian $\boldsymbol{H}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \boldsymbol{\mu}_z^T} & \dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}) \partial \boldsymbol{\mu}_z^T} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})^T} & \dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}) \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})^T} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan (3.9) pada bab 3, didapat

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = -\frac{n}{2}\left(-2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right) = n\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right),$$

serta berdasarkan (3.11) pada bab 3, didapat

$$\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{zz})} = -\frac{1}{2}(n-1) D_m^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) D_m \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz}\right).$$

- Akan dicari $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \boldsymbol{\mu}_z^T}$

$$\frac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \boldsymbol{\mu}_z^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}\left(\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}\right)^T = \frac{\partial n\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)^T}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \frac{n\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} - \boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= \frac{n\left(\partial\left(\overline{\mathbf{z}}^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) - \partial\left(\boldsymbol{\mu}_z^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= \frac{n\left(\left(\partial\overline{\mathbf{z}}^T\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} + \overline{\mathbf{z}}^T\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right) - \left(\left(\partial\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} + \boldsymbol{\mu}_z^T\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= \frac{n\left(\partial\overline{\mathbf{z}}^T\right)\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} + \frac{n\overline{\mathbf{z}}^T\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} - \frac{n\left(\partial\boldsymbol{\mu}_z\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} - \frac{n\boldsymbol{\mu}_z^T\left(\partial\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} - n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} - \mathbf{0} = -n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}$$

- Akan dicari $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\partial \boldsymbol{\mu}_z^T}$

$$\frac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\partial \boldsymbol{\mu}_z^T} = \frac{\partial}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}\left(\frac{\partial \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}\right)^T = \frac{\partial n\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z\right)^T}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \frac{\partial n\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\left(\overline{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\mu}_z\right)\right)^T}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

Untuk mempermudah, subtitusi $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \overline{\mathbf{z}}$ ke dalam persamaan di atas. Sehingga persamaan di atas menjadi $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\partial \boldsymbol{\mu}_z^T} = \dfrac{\partial n\left(\mathbf{0}\right)^T}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \mathbf{0}$.

- Akan dicari $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)^T}$

$$\frac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \boldsymbol{\mu}_z \partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_z}\left(\frac{\partial \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}\right)^T = \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}(n-1)D_m^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1}\right)D_m\text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz} - \mathbf{m}_{zz}\right)\right)^T}{\partial \boldsymbol{\mu}_z} = \mathbf{0}$$

- Akan dicari $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})^T}$

$$\frac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})^T} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}\left(\frac{\partial \ln L_c}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}\right)^T$$

$$= \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}(n-1)D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\right)^T}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= -\frac{1}{2}(n-1)\frac{\partial\left(\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})^T D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m\right)}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= -\frac{1}{2}(n-1)\frac{\left(\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\right)D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m + \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\left(\partial\left(D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m\right)\right)}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= -\frac{1}{2}(n-1)\left\{\frac{\left(\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\right)D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})} + \frac{\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})D_m{}^T\left(\partial\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}\right\}$$

Dengan mengsubtitusi $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz}$ pada suku kedua dari persamaan di atas, maka akan didapat

$$\frac{\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})D_m{}^T\left(\partial\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})} = \frac{\mathrm{vech}(\mathbf{0})D_m{}^T\left(\partial\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \frac{\mathbf{0}\cdot D_m{}^T\left(\partial\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}$$

$$= \mathbf{0}$$

Sehingga

$$\frac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})^T} = -\frac{1}{2}(n-1)\left\{\frac{\left(\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz})\right)D_m{}^T\left(\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}_{zz})}\right\}$$

Selanjunya akan dicari $\dfrac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$.

$$\frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}-\mathbf{m}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} = \frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)-\partial \text{vech}\left(\mathbf{m}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

$$= \frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m - \left(\partial \text{vech}\left(\mathbf{m}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

$$= \frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)} - \frac{\left(\partial \text{vech}\left(\mathbf{m}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

$$= \frac{\left(\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\right) D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)}$$

$$= D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m$$

Sehingga didapat $\dfrac{\partial^2 \ln L_c}{\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)\partial \text{vech}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}\right)^T} = -\dfrac{1}{2}(n-1)D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m$.

Matriks Hessian yang didapat adalah

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\dfrac{(n-1)}{2}D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah matriks hessian $\boldsymbol{H}$ merupakan definit negatif. $\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}$ merupakan matriks definit positif, serta $D_m{}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{zz}{}^{-1}\right)D_m$

merupakan matriks definit positif, sehingga untuk sembarang vektor $\boldsymbol{x}_1$ dan vektor $\boldsymbol{x}_2$ berlaku hubungan berikut

$$\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \boldsymbol{x}_1 > 0 \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{x}_2^T D_m^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) D_m \boldsymbol{x}_2 > 0$$

sehingga didapat bahwa

$$\boldsymbol{x}_1^T \left(-n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) \boldsymbol{x}_1 < 0 \quad \text{serta} \quad \boldsymbol{x}_2^T \left(-\frac{(n-1)}{2} D_m^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) D_m \right) \boldsymbol{x}_2 < 0.$$

Untuk sembarang matriks $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$ berukuran $\left(k + \frac{k(k+1)}{2} \right) \times 1$, maka

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\frac{(n-1)}{2} D_m^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{x}_1^T \left(-n\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) \boldsymbol{x}_1}_{<0} + \underbrace{\boldsymbol{x}_2^T \left(-\frac{(n-1)}{2} D_m^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{zz}^{-1} \right) D_m \right) \boldsymbol{x}_2}_{<0}$$

$$< 0$$

Karena untuk sembarang vektor $\boldsymbol{x}$ berlaku $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{x} < 0$, sehingga $\boldsymbol{H}$ definit negatif. Maka terbukti bahwa $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \bar{\boldsymbol{z}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zz} = \mathbf{m}_{zz}$ memaksimumkan fungsi *ln-likelihood adjusted for degrees of freedom*.

LAMPIRAN 8

Program untuk mencari taksiran *classical error in variable model*

```
clear all;
clc;

A=xlsread('data.xls')
sigma_dd=input('Masukkan nilai sigma dd: ');
sigma_de=input('\nMasukkan nilai sigma de: ');
sigma_ed=sigma_de';
kolom_y=input('\nMasukkan kolom data variabel dependen: ');
y =A(:,kolom_y)';
i=1;
kondisi=1;
while kondisi==1
    fprintf('\nData independen ke %d',i);
    kolom=input(' kolom ke?: ');
    X(i,:)=A(:,kolom)';
    fprintf('\nApakah ada variabel Independen yang lain?');
    temp=input('\nMasukkan 1 jika ada, atau masukkan yang
lain jika tidak:);
    if temp==1
        kondisi=1;
        i=i+1;
    else
        kondisi =0;
    end
end
z=[y;X];
[a b]=size(X);
z_bar=mean(z')
y_m=y-mean(y);
for i=1:a
    x_m(i,:)=X(i,:)-mean(X(i,:));
end
myy=1/(b-1)*(y_m*y_m');
myx=1/(b-1)*(y_m*x_m');
mxy=1/(b-1)*(x_m*y_m');
mxx=1/(b-1)*(x_m*x_m');
mzz=[myy myx;mxy mxx]
beta_cap=inv(mxx-sigma_dd)*(mxy-sigma_de)
```

```
beta_nolcap=mean(y)-(beta_cap'*mean(X')')
miu_cap=mean(X')
sigma_uucap=mxx-sigma_dd
sigma_eecap=myy-(beta_cap'*sigma_uucap*beta_cap)
if i==1
mzz_inv=inv(mzz);
mzx=[myx';mxx];
SX=mzz_inv*(mzx-[0;sigma_dd]);
gama1_cap=SX(1)
gama2_cap=SX(2)
gama_nolcap=(1-gama2_cap)*mean(X)-(gama1_cap*(mean(y)))
for i=1:b
    u_cap(i)=gama_nolcap+gama1_cap*y(i)+gama2_cap*X(i);
    d(i)=X(i)-u_cap(i);
    e(i)=y(i)-(beta_nolcap+beta_cap*u_cap(i));
end

fprintf('\n==============================================
=============');
fprintf('\n||\ti\t|\tyi\t|\txi\t|\tui_cap\t|\tdi_cap\t|\t
ei_cap\t||');
fprintf('\n==============================================
=============');

for i=1:b

fprintf('\n||\t%d\t|\t%d\t|\t%d\t|\t%2.3f\t|\t%2.3f\t|\t%
2.3f\t|| ',i,y(i),X(i),u_cap(i),d(i),e(i));
    save_data(i,:)=[i y(i) X(i) u_cap(i) d(i) e(i)];
end
fprintf('\n\n');
xlswrite('hasil.xls',save_data);
else
    continue;
end
```

Hasil program

Masukkan nilai sigma dd: 57

Masukkan nilai sigma de: 0

Masukkan kolom data variabel dependen: 1

Data independen ke 1 kolom ke?: 2

Apakah ada variabel Independen yang lain?

Masukkan 1 jika ada, atau masukkan yang lain jika tidak: 3

z_bar = 97.4545 70.6364

mzz =

87.6727 104.8818

104.8818 304.8545

beta_cap = 0.4232

beta_nolcap = 67.5613

miu_cap = 70.6364

sigma_uucap = 247.8545

sigma_eecap = 43.2910

Program pada halaman 135 merupakan program yang dibuat untuk mencari taksiran parameter pada *classical error in variable model*, tetapi terdapat tambahan yaitu jika hanya ada satu variabel independen maka program di atas juga dapat menghasilkan nilai prediksi dari u (variabel independen yang tidak terobservasi). Prediksi dari u dimana u diasumsikan *random* adalah

$$\hat{u}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 y_i + \hat{\gamma}_2 x_i$$

dimana

$$\hat{\gamma}_0 = \left(1 - \hat{\gamma}_2\right) \bar{x} - \hat{\gamma}_1 \bar{y}$$

$$\left[\hat{\gamma}_1 \quad \hat{\gamma}_2\right] = \mathrm{m}_{zz}^{-1}\left[\mathrm{m}_{xz}^{T} - \left(\sigma_{eu}, \sigma_{uu}\right)^T\right] = \mathrm{m}_{zz}^{-1}\left[\mathrm{m}_{zx} - \left(\sigma_{eu}, \sigma_{uu}\right)^T\right]$$

Bukti:

Pada pembuktian ini dibatasi bahwa hanya ada satu variabel independen yang digunakan dan σ_{uu} merupakan variansi dari u_i, σ_{dd} merupakan variansi dari d_i serta $\sigma_{de} = \sigma_{ed}$ merupakan kovariansi antara e_i dengan d_i. Pada lampiran 4 telah didapat matriks kovarians dari (y_i, x_i) yaitu

$$\begin{bmatrix} \beta^2\sigma_{uu}+\sigma_{ee} & \beta\sigma_{uu}+\sigma_{ed} \\ \beta\sigma_{uu}+\sigma_{ed} & \sigma_{uu}+\sigma_{dd} \end{bmatrix},\ E(e_iu_i)=0 \text{ dan } E(d_iu_i)=0.$$

Kemudian akan dicari $\text{cov}(y_i, u_i)$ dan $\text{cov}(x_i, u_i)$.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(y_i,u_i) &= E\big[\big(y_i-E[y_i]\big)\big(u_i-E[u_i]\big)\big] = E\big[\big(\beta_0+\beta_1u_i+e_i-(\beta_0+\beta_1\mu_u)\big)(u_i-\mu_u)\big] \\
&= E\big[\big(\beta_1(u_i-\mu_u)+e_i\big)(u_i-\mu_u)\big] = E\left[\beta_1(u_i-\mu_u)^2+e_iu_i-e_i\mu_u\right] \\
&= \beta_1E\left[(u_i-\mu_u)^2\right]+E[e_iu_i]-E[e_i]\mu_u = \beta_1\sigma_{uu}+0-0.\mu_u \\
&= \beta_1\sigma_{uu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(x_i,u_i) &= E\big[\big(x_i-E[x_i]\big)\big(u_i-E[u_i]\big)\big] = E\big[\big(u_i+d_i-(\mu_u)\big)(u_i-\mu_u)\big] \\
&= E\big[\big((u_i-\mu_u)+d_i\big)(u_i-\mu_u)\big] = E\left[(u_i-\mu_u)^2+d_iu_i-d_i\mu_u\right] \\
&= E\left[(u_i-\mu_u)^2\right]+E[d_iu_i]-E[d_i]\mu_u = \sigma_{uu}+0-0.\mu_u \\
&= \sigma_{uu}
\end{aligned}$$

Sehingga didapat matriks kovarians dari (y_i, x_i, u_i) yaitu

$$\begin{bmatrix} \beta^2\sigma_{uu}+\sigma_{ee} & \beta\sigma_{uu}+\sigma_{ed} & \beta\sigma_{uu} \\ \beta\sigma_{uu}+\sigma_{ed} & \sigma_{uu}+\sigma_{dd} & \sigma_{uu} \\ \beta\sigma_{uu} & \sigma_{uu} & \sigma_{uu} \end{bmatrix}.$$

Nilai prediksi dari u_i diberikan $z_i=(y_i, x_i)^T$ adalah

$$\begin{aligned}
E[u_i \mid z_i] &= \mu_u+\Sigma_{uz}\Sigma_{zz}^{-1}(z_i-\mu_z) \\
&= \mu_u+\Sigma_{uz}\Sigma_{zz}^{-1}\begin{bmatrix} y_i-\mu_y \\ x_i-\mu_u \end{bmatrix} \\
&= \mu_u+[\gamma_1 \quad \gamma_2]\begin{bmatrix} y_i-\mu_y \\ x_i-\mu_u \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \mu_u + \gamma_1 \left(y_i - \mu_y \right) + \gamma_2 \left(x_i - \mu_u \right)$$

$$= \mu_u + \gamma_1 y_i - \gamma_1 \mu_y + \gamma_2 x_i - \gamma_2 \mu_u$$

$$= \mu_u - \gamma_2 \mu_u - \gamma_1 \mu_y + \gamma_1 y_i + \gamma_2 x_i$$

$$= \gamma_0 + \gamma_1 y_i + \gamma_2 x_i$$

dimana $\gamma_0 = \mu_u - \gamma_2 \mu_u - \gamma_1 \mu_y$; $\mu_y = \beta_0 + \beta \mu_u$; $z_i = \left(y_i, x_i \right)^T$; dan $\left[\gamma_1 \quad \gamma_2 \right] = \Sigma_{uz} \Sigma_{zz}^{-1} = \Sigma_{zz}^{-1} \Sigma_{uz}^{T}$, $\Sigma_{uz} = \left[\beta \sigma_{uu} \quad \sigma_{uu} \right]$.

Sehingga prediksi dari u adalah

$$\hat{u}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 y_i + \hat{\gamma}_2 x_i$$

dimana

$\hat{\gamma}_0 = \left(1 - \hat{\gamma}_2 \right) \overline{x} - \hat{\gamma}_1 \overline{y}$

$\left[\hat{\gamma}_1 \quad \hat{\gamma}_2 \right] = \hat{\Sigma}_{zz}^{-1} \hat{\Sigma}_{uz}^{T} = \mathrm{m}_{zz}^{-1} \left[\mathrm{m}_{xz}^{T} - \left(\sigma_{eu}, \sigma_{uu} \right)^T \right] = \mathrm{m}_{zz}^{-1} \left[\mathrm{m}_{zx} - \left(\sigma_{eu}, \sigma_{uu} \right)^T \right]$

Sehingga dari program pada halaman 135 didapat pula hasil sebagai berikut :

gama1_cap = 0.3801

gama2_cap = 0.6822

gama_nolcap = -14.5998

i	yi	xi	ui_cap	di_cap	ei_cap
1	86	70	65.848	4.152	-9.428
2	115	97	95.292	1.708	7.112
3	90	53	55.770	-2.770	-1.164
4	86	64	61.755	2.245	-7.696
5	110	95	92.027	2.973	3.494
6	91	64	63.655	0.345	-3.500
7	99	50	57.145	-7.145	7.255
8	96	70	69.649	0.351	-1.037
9	99	94	87.164	6.836	-5.448
10	104	69	72.008	-3.008	5.965
11	96	51	56.687	-5.687	4.448