PENAKSIRAN PARAMETER PADA *RANDOM EFFECTS*

SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL

AVIDATI

0304010099

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

PENAKSIRAN PARAMETER PADA *RANDOM EFFECTS*

SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

AVIDATI

0304010099

DEPOK
2009

SKRIPSI : PENAKSIRAN PARAMETER PADA *RANDOM EFFECTS SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL*

NAMA : AVIDATI

NPM : 0304010099

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 16 DESEMBER 2009

<u>DR. DIAN LESTARI, DEA</u>	<u>DRA. SITI NURROHMAH, M.SI.</u>
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana: 23 Desember 2009

Penguji I : Dr. Dian Lestari, DEA

Penguji II : Dra. Ida Fithriani, M.Si.

Penguji III : Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc.Tech.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur hanya bagi Allah SWT, yang telah memberikan kemudahan demi kemudahan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam penulis sampaikan kepada suri tauladan manusia, Rasulullah SAW.

Dengan penuh rasa syukur, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada banyak pihak yang telah membantu terselesaikannya tugas akhir ini. Diantaranya :

1. Mamaku tersayang, Mislituroh dan almarhum bapakku, Sukri, yang telah mengajariku banyak hal tentang kehidupan dan mengiringi setiap langkahku dengan doa yang terbaik untuk anaknya ini. Semoga terselesaikannya tugas akhir ini menjadi kebanggaan tersendiri bagi kalian, orang tuaku tersayang.
2. Suamiku tercinta, kakanda Shofwan Al-Banna Choiruzzad, terima kasih atas segala pengorbanan, motivasi, cinta, kasih sayang, kesabaran dan kebersamaan kita selama ini. Semoga kelak kita dapat bersama-sama mengubah dunia.
3. Janin yang saat ini berada dalam rahimku. Terima kasih Nak, telah menemani perjuangan Ibu dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Semoga engkau terlahir dengan sehat dan selamat, dan kelak engkau akan menjadi seorang pejuang yang tangguh dan cerdas, yang bermanfaat bagi orang lain.

4. Ibu Dian Lestari dan Ibu Siti Nurrohmah, sebagai pembimbing skripsi yang selalu memberikan motivasi,arahan, ilmu, dan bersedia menyediakan waktu kepada penulis. Hanya Allah yang dapat membalas jasa-jasa Ibu.
5. Kakak-kakakku, Ka Serly dan Ka Fida, terima kasih karena kalianlah yang memberikanku peluang untuk kuliah. Juga kepada Tuk Am dan Ka Ian, adik-adikku: Jenny dan Nia, kalianlah yang mendorongku untuk terus maju, semoga kelak kalian dapat meraih capaian yang lebih baik dari pencapaian kakakmu ini. Serta dua keponakanku yang lucu dan sangat menghibur di kala suntuk menyelesaikan tugas akhir ini: Zaky dan Almer.
6. Salam takzim teruntuk keluargaku di Yogyakarta: ayahku Muhammad Jazir, ASP, ibuku Sri Amini Yuni Astuti, dan adik-adikku: Difla, Salma, Haidar. Terima kasih atas semuanya, penulis bahagia dapat menjadi bagian dari keluarga besar ini.
7. Ibu Yekti dan Ibu Siti Aminah, selaku pembimbing akademik penulis.
8. Segenap dosen Departemen Matematika FMIPA UI.
9. Seluruh staf dan karyawan Departemen Matematika FMIPA UI.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terutama laskar skripsi yang masih tersisa : Intan, Spina, Leli, dan Nabung. Teman-teman 2004 yang masih berjuang di S2 Math : Dina, Ias, Handhi, Murni, Lismanto. Serta teman-teman 2004 yang telah lebih dulu merambah dunia kerja. Terima kasih atas kebersamaan kita selama di matematika ini.
11. Adik-adik angkatan 2005, terutama yang menjadi teman seperjuangan skripsi penulis : Desti, Nurma, Icha, Miranti, Rani, Mia, Akmal.

12. Yanu, Akmal, Ajat, Rifkos, Iffatul, Dina, terima kasih atas bantuan yang sangat berharga dalam proses penyelesaian tugas akhir ini.
13. Teman-teman seperjuangan di MII dan Salam UI.
14. Sahabat-sahabatku : Thufeil, Tika, Mia, dan Dian.
15. Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini mungkin jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan dari para pembaca. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak orang.

Penulis

2009

ABSTRAK

Data panel merupakan gabungan dari dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Model regresi linier yang melibatkan data panel disebut dengan model regresi data panel. Pada saat melakukan observasi, sering ditemui bahwa nilai observasi di suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi sekitarnya, yang dikenal dengan spasial dependen. Model regresi data panel yang turut melibatkan aspek ketergantungan lokasi (spasial dependen) dikenal dengan model spasial data panel.

Model spasial lag data panel menunjukkan adanya ketergantungan antara variabel dependen di suatu lokasi dengan variabel dependen di lokasi sekitarnya. Pada tugas akhir ini akan dibahas penaksiran parameter pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* dengan komponen error satu arah menggunakan metode maksimum likelihood.

Kata Kunci : *Spatial Panel Data Model*; Spasial Lag; Spasial Dependen; *Random Effects Model*; Metode Maksimum Likelihood

x + 120 hlm.; gbr.; tab.; lamp.

Bibliografi : 10 (1982 – 2007)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Terdapat dua jenis data yang dikenal pada ilmu stastistika yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Data *cross section* merupakan data yang terdiri dari banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu tertentu. Sedangkan data longitudinal merupakan data yang dikumpulkan dari beberapa waktu untuk satu individu tertentu. Kedua jenis data ini sering digunakan pada model regresi linear. Untuk memperoleh model regresi linear yang baik dibutuhkan beberapa asumsi tentang error, yaitu error berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan (*homoskedastis*), serta error antar observasi saling bebas. Penaksiran parameter untuk model regresi linear biasanya menggunakan *Ordinary Least Square* (OLS).

Dalam analisisnya, para peneliti terkadang tidak cukup hanya dengan menggunakan informasi yang diberikan oleh data *cross section* atau data *longitudinal* saja. Terkadang dibutuhkan data yang melibatkan data *cross* *section* dan data *longitudinal* sekaligus, meskipun waktu dan biaya yang dibutuhkan akan sangat besar. Oleh karena itu muncullah data *panel*, yaitu data yang terdiri dari data *cross section* dan data *longitudinal* sekaligus. Sehingga terdapat pula istilah model regresi data panel, yaitu model regresi linear yang melibatkan data panel.

Data panel dibagi menjadi dua, yaitu data panel lengkap (*complete panel data*) dan data panel tidak lengkap (*incomplete panel data*). Data panel lengkap adalah data dimana setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang sama. Sedangkan data panel tidak lengkap adalah data dimana setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang berbeda-beda dan untuk setiap periode waktu banyaknya individu yang terobservasi berbeda-beda pula. Dalam hal ini data panel lengkap lebih membutuhkan banyak biaya dan waktu dalam pengumpulan data tersebut.

Data panel juga dapat dibedakan berdasarkan komponen errornya, yaitu komponen error satu arah (*one-way error component*) dan komponen error dua arah (*two-way error component*). Komponen error satu arah terdiri dari pengaruh individu yang tidak terobservasi (error untuk individu) dan error yang sebenarnya. Sedangkan komponen error dua arah terdiri dari pengaruh individu yang tidak terobservasi (error untuk individu), pengaruh waktu yang tidak terobservasi (error untuk waktu), serta error yang sebenarnya. Selanjutnya, berdasarkan asumsi yang digunakan pada komponen error data panel tersebut, terdapat dua jenis model regresi komponen error, yaitu *Fixed Effect* dan *Random Effect*. Pada *Fixed Effect* diasumsikan bahwa komponen error dari model regresi tersebut merupakan parameter tetap, yaitu pengaruh individu dan waktu ditentukan oleh peneliti. Sedangkan pada *Random Effect* diasumsikan bahwa komponen errornya merupakan variabel random, yaitu pengaruh individu dan waktu ditentukan secara acak dari populasi yang ada.

Dalam studi empiris, sering ditemui bahwa nilai observasi pada suatu lokasi dipengaruhi atau bergantung pada nilai observasi di lokasi sekitarnya. Fenomena inilah yang kemudian dikenal dengan spasial dependen. Model spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu model spasial lag yang pada variabel dependennya terdapat korelasi spasial dan model spasial error yang pada variabel errornya terdapat korelasi spasial.

Model regresi data panel yang turut melibatkan aspek spasial dependen disebut dengan model regresi spasial data panel. Model ini juga terdiri dari model regresi spasial lag data panel dan model regresi spasial error data panel. Kedua model ini lebih kompleks daripada model regresi data panel saja atau model spasial dependen saja. Oleh karena itu dibutuhkan suatu teknik untuk menaksir parameter pada kedua model tersebut. Penaksiran parameter untuk model tersebut tidak dapat menggunakan OLS seperti pada model regresi linear umumnya, karena asumsi-asumsi yang diperlukan tidak terpenuhi. Sehingga dibutuhkan metode lain untuk penaksiran parameter pada model tersebut. Dan pada tugas akhir ini akan dibahas bagaimana mencari taksiran parameter pada model regresi spasial lag data panel dengan asumsi *random effect*.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana cara mencari taksiran parameter pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model.*

1.3 TUJUAN

Tujuan dari tugas akhir ini adalah mencari taksiran parameter pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model.*

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Pembatasan yang digunakan pada tugas akhir ini adalah:

1. Data panel yang digunakan merupakan data panel lengkap (*complete panel data*)
2. Model regresi spasial panel data dengan komponen error satu arah (*one-way error component*)
3. Asumsi distribusi yang digunakan adalah distribusi normal.
4. Jenis matriks bobot yang akan digunakan adalah *Queen Contiguity*.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini akan dibagi menjadi lima bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Pada bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang dibutuhkan untuk mendukung pencapaian tujuan dari tugas akhir ini. Teori yang akan digunakan antara lain: teori mengenai variabel *random*, metode maksimum likelihood, metode transformasi variabel, bentuk dan sifat matriks, *kronecker product*, vektor *random* normal, data panel, spasial dependen, dan matriks bobot spasial.

Bab III Membahas *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* dengan komponen error satu arah dan mencari taksiran parameter pada model tersebut.

Bab IV Studi Kasus

Pada bab ini akan dibahas mengenai aplikasi dari *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model*.

Bab V Kesimpulan dan Saran untuk tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan dibahas mengenai teori-teori dasar yang mendukung dan digunakan untuk menaksir parameter pada r*andom effects spatial lag panel data model*. Teori-teori tersebut antara lain mengenai variabel *random*, metode maksimum likelihood, metode transformasi variabel, matriks, *kronecker product*, vektor random normal, regresi data panel, dan spasial dependen.

2.1 VARIABEL *RANDOM*

Misalkan pada percobaan acak pelemparan sebuah koin, kemungkinan hasil pelemparan yang terjadi adalah angka atau gambar. Maka ruang sampel dari percobaan ini adalah C = {c | c adalah angka atau c adalah gambar}. Misalkan X adalah suatu fungsi sedemikian sehingga $X(c)$ = 0 jika c adalah angka dan $X(c)$ = 1 jika c adalah gambar. Maka fungsi X disebut variabel *random* dengan ruang sampel C.

Definisi 1

Misalkan terdapat suatu percobaan acak dengan ruang sampel *C*. Jika terdapat suatu fungsi *X* yang memetakan setiap elemen $c \in C$ ke satu dan hanya satu bilangan riil x yaitu *X(c)* = *x*. Maka fungsi X disebut variabel *random*. Domain dari *X* adalah *C* dan range dari *X* adalah himpunan bilangan A = { *x* | *x* = *X(c), c* $\in$ *C* }.

Definisi 2

Misalkan suatu variabel *random X* dengan ruang sampel $\mathcal{A}$ yang merupakan himpunan bilangan riil. Jika suatu fungsi f(x) memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall x \ \in \mathcal{A}$
2. $\int_{\mathcal{A}} f(x)dx = 1$
3. Jika A$\subset \mathcal{A}$, berlaku $P(A) = \Pr(X \in A) = \int_A f(x)dx$

Maka, X disebut variabel *random* kontinu dan f(x) disebut *probability density function* (p.d.f) dari X.

2.2 METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

Metode maksimum likelihood digunakan untuk melakukan penaksiran titik dari suatu parameter dalam suatu fungsi probabilitas.

Definisi 3

Misalkan $X_1,\ldots,X_n$ adalah *n* sample acak yang diambil dari suatu distribusi dengan p.d.f. $f(x;\theta),\theta\in\Omega$ dengan Ω adalah ruang parameter. Fungsi likelihood didefinisikan sebagai p.d.f bersama dari $X_1,\ldots,X_n$:

$$L(\theta;x_1,x_2,...,x_n)=f(\theta;x_1,x_2,...,x_n)$$

$$L(\theta;x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)...f(x_n,\theta),\qquad \theta\in\Omega$$

Jika dapat ditemukan $u(x_1,x_2,...,x_n)$ yang merupakan suatu fungsi nontrivial dari $x_1,x_2,...,x_n$ sedemikian sehingga $L(\theta;x_1,x_2,...,x_n)$ akan mempunyai nilai maksimum pada $\theta=u(x_1,x_2,...,x_n)$. Maka statistik $u(X_1,X_2,...,X_n)$ disebut penaksir maksimum likelihood dari θ.

2.3 METODE TRANSFORMASI VARIABEL

Metode transformasi variabel digunakan untuk menentukan distribusi dari suatu peubah acak yang merupakan fungsi satu-satu dari peubah acak lainnya, dimana peubah acak lain tersebut distribusinya sudah diketahui.

Definisi 4

Misalkan $X_1, \ldots, X_n$ adalah *n* peubah acak kontinu dengan p.d.f bersama $h(x_1, x_2, ..., x_n)$. *A* adalah ruang berdimensi n dari peubah acak *X.* Jika $y_1 = u_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y_2 = u_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_n = u_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ didefinisikan sebagai suatu fungsi satu – satu yang memetakan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dari ruang *A* ke $(y_1, y_2, ..., y_n)$ pada ruang *B,* dan $x_1 = w_1(y_1, y_2, ..., y_n)$, $x_2 = w_2(y_1, y_2, ..., y_n), ...,$ $x_n = w_n(y_1, y_2, ..., y_n)$ merupakan fungsi inversnya,

dan jacobian transformasi dari ruang *A* berdimensi n ke suatu ruang *B* berdimensi n, didefinisikan sebagai berikut :

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

maka, p.d.f bersama dari peubah acak

$$Y_1 = U_1(X_1, X_2, ..., X_n), Y_2 = U_2(X_1, X_2, ..., X_n), ..., Y_n = U_n(X_1, X_2, ..., X_n)$$

adalah :

$$g\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = h\left[w_1(y_1, y_2, ..., y_n), w_2(y_1, y_2, ..., y_n), ..., w_n(y_1, y_2, ..., y_n)\right]\left|J\right|$$

, untuk $\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) \in B$

= 0 , untuk yang lainnya

2.4 BENTUK dan SIFAT MATRIKS

2.4.1 Notasi dan Terminologi Matriks

Matriks merupakan suatu susunan dari bilangan skalar yang berbentuk *rectangular* (segiempat panjang). Bilangan skalar pada matriks disebut entri dari matriks. Matriks terdiri dari baris dan kolom, yang akan menentukan ukuran dari matriks tersebut. Matriks yang terdiri dari *m*- baris dan *n*- kolom disebut matriks berukuran *m x n*. Matriks yang berukuran *1 x m* disebut dengan vektor baris, sedangkan matriks yang berukuran *m x 1* disebut dengan vektor kolom.

Pada tugas akhir ini, matriks dan vektor akan dinotasikan dengan huruf tebal, sedangkan elemen dari matriks dinotasikan dengan huruf tipis. Berikut adalah beberapa definisi dari bentuk-bentuk matriks:

Definisi 2.4.1.a

Matriks **A** berukuran *mxm* dikatakan matriks simetri jika **A** = **A'.**

Definisi 2.4.1.b

Matriks **A** berukuran *mxm* dikatakan matriks *idempotent* jika **A** = **AA,** dan jika **A** merupakan matriks simetris maka **A** disebut *symmetric idempotent.*

Definisi 2.4.1.c

Matriks **A** berukuran *mxm* dikatakan matriks ortogonal, jika **AA'** = **I** dan dapat dinyatakan bahwa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$.

Definisi 2.4.1.d

Vektor yang tiap elemennya hanya bernilai 1 disebut *summing vectors* dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{\iota}$.

Contoh bentuk *summing vectors* adalah $\boldsymbol{\iota}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bentuk perkalian *summing vectors* adalah

$$\boldsymbol{\iota}_n \boldsymbol{\iota}_n' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.2 *Transpose* Matriks

Transpose dari suatu matriks **A** didapat dengan cara menukarkan baris dengan kolom dari matriks **A** tersebut ataupun sebaliknya. Notasi dari transpose matriks **A** adalah $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ atau $\mathbf{A}'$. Sehingga, jika matriks **A** berukuran *m x n*, yang entri-entrinya dinotasikan dengan a_{ij}, maka $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ adalah matriks yang berukuran *n x m*, dan entri ke (*i,j*) dari $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ adalah a_{ji}.

Teorema 2.4.2.1

Misalkan α dan β adalah sebarang skalar, **A** dan **B** adalah matriks.

Maka:

1. $(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
2. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
3. $(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\beta\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
4. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

2.4.3 Invers Matriks

Definisi 2.4.3.1

Suatu matriks **B** berukuran *m x m* dikatakan invers dari matriks **A** yang juga berukuran *m x m* jika $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ terpenuhi. Jika matriks **B** ada, maka matriks **B** dapat dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$(invers dari **A**). Matriks $\mathbf{A}^{-1}$ ada jika dan hanya jika matriks **A** *nonsingular*. Jika matriks $\mathbf{A}^{-1}$ ada, maka berlaku $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Catatan: Invers dari suatu matriks persegi adalah tunggal.

2.4.4 Determinan Matriks

Definisi 2.4.4.1

Suatu permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat ini ke dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Definisi 2.4.4.2

Suatu permutasi disebut genap jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat genap dan disebut ganjil jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat ganjil.

Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, determinan dari matriks A, dinotasikan dengan $|A|$ atau $\det(A)$, didefinisikan sebagai

$$|A| = \sum \pm\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

di mana $\sum$ menunjukan bahwa suku-suku dijumlahkan atas semua permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, dan + serta – dipilih pada setiap suku, tergantung pada apakah permutasi tersebut genap atau ganjil.

Beberapa sifat determinan, di antaranya:

1. $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$.
2. $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$.
3. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
4. $|\mathbf{A}^T\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2$.

Untuk sembarang matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ berukuran $n \times n$ serta skalar k.

2.5 *KRONECKER PRODUCT*

Definisi 2.5.1

Misalkan **A** adalah matriks berukuran *p x q* dan **B** adalah matriks berukuran *m x n*. Maka *kronecker product* dari matriks **A** dan **B**, adalah sebuah matriks berukuran *pm x qn*, yang dinotasikan sebagai $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{A}_{p\times q} \otimes \mathbf{B}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1q}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2q}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}\mathbf{B} & a_{p2}\mathbf{B} & \cdots & a_{pq}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Misalkan matriks **A** berukuran 2x3 dan matriks **B** berukuran 2x1, yaitu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

Maka, $$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{13}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \\ a_{21}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{23}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{13}b_{11} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{13}b_{21} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{23}b_{11} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{23}b_{21} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.5.2

Misalkan **A**, **B**, dan **C** adalah sebarang matriks. ***a*** dan ***b*** adalah sebarang vektor. Maka:

1. $\alpha \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \alpha$; untuk α adalah sebarang skalar
2. $(\alpha \mathbf{A}) \otimes (\beta \mathbf{B}) = \alpha\beta(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$; untuk α dan β adalah sebarang skalar
3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$; jika **A** dan **B** memiliki ukuran yang sama
5. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$; jika **B** dan **C** memiliki ukuran yang sama
6. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$
7. $\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{a}$

Teorema 2.5.3

Misalkan **A**, **B**, **C,** dan **D** adalah matriks berukuran *m x h, p x k, h x n,* dan *k x q*, secara berurutan, maka:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}) \qquad (2.5.2.a)$$

Bukti.

Ruas kiri dari persamaan (2.5.2.a) bila dijabarkan adalah sebagai berikut:

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1h}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mh}\mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}\mathbf{D} & \cdots & c_{1n}\mathbf{D} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{h1}\mathbf{D} & \cdots & c_{hn}\mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \cdots & \mathbf{F}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{F}_{m1} & \cdots & \mathbf{F}_{mn}\end{bmatrix}$$

dimana

$$\mathbf{F}_{ij}=\sum_{r=1}^{h} a_{ir}c_{rj}\mathbf{BD}=(\mathbf{A})_{i.}(\mathbf{C})_{.j}\mathbf{BD}=(\mathbf{AC})_{ij}\mathbf{BD}$$

Sehingga

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=\begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n}\mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn}\mathbf{BD}\end{bmatrix}$$

Ruas kanan dari persamaan (2.5.2.a) adalah:

$$\mathbf{AC}\otimes\mathbf{BD}=\begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n}\mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn}\mathbf{BD}\end{bmatrix}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=\begin{bmatrix} (\mathbf{AC})_{11}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{1n}\mathbf{BD} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{AC})_{m1}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{mn}\mathbf{BD}\end{bmatrix}=\mathbf{AC}\otimes\mathbf{BD}$$

Teorema 2.5.4

Misalkan **A** adalah matriks berukuran *m x n* dan **B** adalah matriks berukuran *p x q*. Maka:

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}$$, jika *m=n, p=q*, dan $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ nonsingular.

Bukti.

Dengan menggunakan Teorema 2.5.2,

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}\right)(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\right)=\mathbf{I_m}\otimes\mathbf{I_p}=\mathbf{I_{mp}}$$

Karena $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\mathbf{I_{mp}}$,maka Teorema 2.5.3 terbukti.

Definisi 2.5.5

Misalkan **A** dan **B** adalah suatu matriks bujur sangkar yang berukuran *n* dan *q*. jika $\lambda_1, ..., \lambda_n$ adalah nilai eigen dari **A** dan $\mu_1, ..., \mu_q$ adalah nilai eigen dari **B** maka nilai eigen dari $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ adalah :

$$\lambda_i\mu_j, \qquad i=1,...,n, \qquad j=1,...,q$$

Selanjutnya jika ingin mencari <u>*trace*</u> dan *determinan* dari $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ adalah :

a. $tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=tr\mathbf{A}\; tr\mathbf{B}$

b. $\det(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\det(\mathbf{A})^q\det(\mathbf{B})^n$

2.6 DIAGONALISASI

Definisi 2.6.1

Suatu matriks bujur sangkar **A** yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ .dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks **P** sedemikian sehingga $\mathbf{P^{-1}AP}$ adalah suatu matriks diagonal (**D**).

Jadi $\mathbf{D = P^{-1}AP}$

Jika terdapat suatu matriks bujur sangkar **A** yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Maka determinan dari matriks **A** merupakan perkalian dari nilai-nilai eigennya.

Bukti :

$\mathbf{A = PDP^{-1}}$

Maka :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \det\left(\mathbf{PDP^{-1}}\right) \\
&= \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\det\left(\mathbf{P}^{-1}\right) \\
&= \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\frac{1}{\det(\mathbf{P})} \\
&= \det(\mathbf{D}) \\
&= \prod_i \lambda_i
\end{aligned}$$

Misalkan $\mathbf{I_N}$ adalah matriks identitas berukuran $N \times N$ dan **A** suatu matriks bujur sangkar berukuran $N \times N$ dan mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

$$\det\left(\mathbf{I_N} - \mathbf{A}\right) = \prod_i 1 - \lambda_i$$

Bukti :

Karena **A** suatu matriks bujur sangkar berukuran $N \times N$ dan mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ maka :

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}$$

$$\left(\mathbf{I_N} - \mathbf{A}\right)\mathbf{x} = \left(1 - \lambda\right)\mathbf{x}$$

2.7 VEKTOR *RANDOM* NORMAL

Variabel *random* X dimisalkan berdistribusi normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2. *Probability density function* (pdf) dari X adalah sebagai berikut:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],-\infty<x<\infty$$

$f_X(x)$ biasanya disederhanakan menjadi $f(x)$.

X berdistribusi normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2 biasanya dinotasikan dengan :

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

di mana

$$\mu = E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Vektor *random* $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Re^n$ berdistribusi multivariat normal dengan pdf-nya adalah sebagai berikut:

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})\right\}$$

di mana

$m_{\mathbf{x}}=E(\mathbf{x})$ adalah *mean* vektor dari vektor *random* $\mathbf{x}$.

$\Sigma_{\mathbf{x}}=E\left[(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})'\right]$ adalah matriks kovarian dari vektor *random* $\mathbf{x}$.

$n=\dim\mathbf{x}$ adalah dimensi dari vektor *random* $\mathbf{x}$.

Vektor *random* $\mathbf{x}$ yang berdistribusi multivariat normal dengan mean $m_{\mathbf{x}}$ dan var $\sum_{\mathbf{x}}$ biasanya dinotasikan dengan :

$$\mathbf{x} \sim N\left(m_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}}\right)$$

di mana

$$m_{\mathbf{x}} = E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \vdots \\ m_{x_n} \end{pmatrix}$$

dan

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \Sigma_{\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} E\left[\left(x_1 - m_{x_1}\right)^2\right] & E\left[\left(x_1 - m_{x_1}\right)\left(x_2 - m_{x_2}\right)^T\right] & \cdots & E\left[\left(x_1 - m_{x_1}\right)\left(x_n - m_{x_n}\right)^T\right] \\ E\left[\left(x_2 - m_{x_2}\right)\left(x_1 - m_{x_1}\right)^T\right] & E\left[\left(x_2 - m_{x_2}\right)^2\right] & \cdots & E\left[\left(x_2 - m_{x_2}\right)\left(x_n - m_{x_n}\right)^T\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left[\left(x_n - m_{x_n}\right)\left(x_1 - m_{x_1}\right)^T\right] & E\left[\left(x_n - m_{x_n}\right)\left(x_2 - m_{x_2}\right)^T\right] & \cdots & E\left[\left(x_n - m_{x_n}\right)^2\right] \end{bmatrix}$$

2.8 REGRESI DATA PANEL

Regresi data panel merupakan suatu regresi yang menggunakan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*. Dimana data *cross section* merupakan data banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu.

Sedangkan data *longitudinal* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu dari satu individu. Jadi data panel merupakan data dari beberapa individu yang dikumpulkan dari waktu ke waktu.

Ditinjau dari kelengkapan data, data panel dibagi menjadi dua jenis:

- Data panel lengkap :

  Data dimana setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang sama.

  Model regresi data panel lengkap :

$$Y_{it} = \beta_0 + \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k + U_{it}$$

dimana *i* = 1,2,..,N ; *t* = 1,2,…,T ; dan *k* = 1,2,…,K

i adalah banyaknya individu yang terobservasi

t adalah banyaknya waktu

Y_{it} adalah variabel dependen

x_{itk} adalah variabel independen ke-*k*

β_0 dan β_k merupakan parameter pada model

U_{it} merupakan komponen error model.

- Data panel tidak lengkap :

  Data dimana setiap individu yang terobservasi berada pada kurun waktu yang berbeda-beda, atau untuk setiap periode waktu banyaknya individu yang terobservasi berbeda-beda pula.

  Model regresi data panel tidak lengkap :

$$Y_{it} = \beta_0 + \sum_{k=1}^{K} x_{itk}\beta_k + U_{it}$$

dimana i = 1,2,..,N_t ; t = 1,2,…,T

atau t = 1,2,…, T_i ; i = 1,2,..,N

dan k = 1,2,…,K

i adalah banyaknya individu yang terobservasi

t adalah banyaknya waktu

Y_{it} adalah variabel dependen

x_{itk} adalah variabel independen ke-k

β_0 dan β_k merupakan parameter pada model

U_{it} merupakan komponen error model.

Sehingga, Model Regresi Data Panel adalah:

$$y_{it} = x_{it}\beta + u_{it} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, N \\ t = 1, \ldots, T \end{array}$$

dimana *i* menyatakan banyak individu yang terobservasi dan *t* menyatakan waktu.

Berdasarkan komponen error-nya, Model Regresi Data Panel dibagi menjadi:

- Model Regresi Komponen Error Satu Arah

$$u_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it} \qquad i = 1, \ldots, N ;\ t = 1, \ldots, T$$

- Model Regresi Komponen Error Dua Arah

$$u_{it} = \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it} \qquad i = 1, \ldots, N ;\ t = 1, \ldots, T$$

μ_i merupakan pengaruh yang tidak terobservasi dari individu ke-i.

λ_t merupakan pengaruh yang tidak terobsevasi dari waktu ke-t.

ε_{it} merupakan error yang benar-benar tidak dapat dijelaskan.

Berdasarkan Asumsi Pengaruh atau *Effects* yang digunakan pada Model Regresi Data Panel. Model regresi data panel dibagi menjadi dua :

- *Fixed Effects Model*

Suatu *effects* dikatakan *fixed effects* jika level dari faktor-faktornya ditentukan berdasarkan keinginan peneliti dari populasi level yang ada, dan kesimpulan statistiknya hanya terbatas pada level-level yang ditentukan tersebut. Model yang hanya mempunyai *fixed effects* disebut *fixed effects models*. Berarti pada situasi ini akan dilihat *effects* dari level-level tersebut pada model.

Pada model untuk data panel, *effects* dari level-level antara lain berasal dari individu dan waktu. Oleh karena individu dan waktu ditentukan secara *fixed* oleh peneliti, maka *effects* hanya terbatas pada individu dan waktu yang ditentukan tersebut. Dengan demikian, *effects* dari individu dan waktu diasumsikan sebagai *fixed parameter*, sehingga pada saat penaksiran parameter, pengaruh dari individu dan waktu ini akan dapat ditaksir dan hasil taksirannya berupa suatu nilai atau konstanta.

- *Random Effect Model*

Suatu *effects* disebut sebagai *random effects* jika level dari faktor-faktornya dipilih secara acak dari populasi level yang ada, dan kesimpulan statistiknya akan mencakup populasi level dari faktor-faktor tersebut. Model yang hanya mempunyai *random effects* disebut *random effects models*. Berarti pada situasi ini akan dilihat *effects* dari level-level tersebut pada model.

Pada model untuk data panel, *effects* dari level-level antara lain berasal dari individu dan waktu. Oleh karena individu dan waktu dipilih secara *random* dari populasi yang ada, maka *effects* dari individu dan waktu diasumsikan sebagai suatu variabel acak dan akan dilihat variabilitas dari masing-masing *effects*. Dengan demikian, pada *random effects model* perbedaan karakteristik individu dan waktu diakomodir pada *error* dari model. Mengingat ada dua komponen yang mempunyai kontribusi pada pembentukan *error*, yaitu individu dan waktu, maka komponen *error* perlu diurai menjadi *error* untuk individu, *error* untuk komponen waktu, dan *error* yang sebenarnya. Hal ini disebut dengan komponen *error* dua arah. Jika komponen *error* model hanya terdiri dari *error* untuk individu dan *error* yang sebenarnya, maka hal ini disebut dengan komponen *error* satu arah. Dalam hal ini diasumsikan bahwa $\mu_i \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\mu^2\right)$ dan $\varepsilon_{\mathrm{it}} \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma^2\right)$. Dengan μ_i adalah *error* untuk individu dan $\varepsilon_{\mathrm{it}}$ adalah *error* yang sebenarnya.

Pada pemodelan regresi data panel tersebut dibutuhkan beberapa asumsi tentang error yaitu error berdistribusi normal dengan mean nol dan mempunyai variansi konstan (homoskedastis) serta error antar observasi saling bebas.

2.9 MODEL SPASIAL DEPENDEN

Model regresi linier biasanya digunakan untuk menyelidiki hubungan antar variabel, yaitu antara variabel dependen dengan himpunan variabel bebas. Seringkali dalam proses analisis regresi, dijumpai adanya ketergantungan lokasi pada nilai observasi atau errornya. Hal ini disebut dengan dependensi spasial. Oleh karena itu dibutuhkan suatu model regresi yang turut memperhatikan aspek ketergantungan akan lokasi, yang kemudian dikenal dengan model spasial dependen. Model spasial dependen ini terdiri dari model spasial lag dan model spasial error.

Model spasial lag adalah suatu model regresi linier dimana terdapat korelasi spasial pada varibel dependennya. Dengan kata lain menunjukkan adanya ketergantungan suatu nilai observasi di suatu lokasi dengan nilai observasi di lokasi sekitarnya. Misalkan suatu lokasi i berhubungan dengan lokasi j, maka nilai observasi pada lokasi i merupakan fungsi dari nilai observasi pada lokasi j, dengan i ≠ j.

Misalkan y_i merupakan nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{ik} merupakan nilai variabel bebas ke-k pada lokasi ke-i, w_{ij} merupakan bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dengan lokasi ke-j, dan u_i merupakan error pada lokasi ke-i. Misalkan terdapat k-variabel bebas dan n-lokasi pengamatan, maka model spasial lag-nya adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \rho(w_{11}y_1 + w_{12}y_2 + \ldots + w_{1n}y_n) + x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \ldots + x_{1k}\beta_k + u_1 \\
y_2 &= \rho(w_{21}y_1 + w_{22}y_2 + \ldots + w_{2n}y_n) + x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{2k}\beta_k + u_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
y_n &= \rho(w_{n1}y_1 + w_{n2}y_2 + \ldots + w_{nn}y_n) + x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \ldots + x_{nk}\beta_k + u_n
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\mathbf{y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$$

dimana:

y : vektor observasi variabel dependen berukuran *nx1*

ρ : parameter skalar spasial lag

W :matriks spasial terboboti dengan baris terstandardisasi $(\sum_j w_{ij} = 1, \forall \mathrm{i})$ berukuran *nxn*

X : matriks k-variabel bebas berukuran *nxk*

β : vektor parameter regresi berukuran *kx1*

u : vektor error berukuran *nx1*

Jika terdapat ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan error pada lokasi di sekitarnya, hal ini menunjukkan adanya spasial error. Model yang mempehatikan kondisi ini dikenal sebagai model spasial error.

Misalkan y_i merupakan nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{ik} merupakan nilai variabel bebas ke-k pada lokasi ke-i, m_{ij} merupakan bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dengan lokasi ke-j, u_i merupakan nilai error pada lokasi ke-i, dan ε_i merupakan error sebenarnya pada lokasi ke-i. Misalkan terdapat k-variabel bebas dan n-lokasi pengamatan, maka model spasial error-nya adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \ldots + x_{1k}\beta_k + u_1 \\
y_2 &= x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{2k}\beta_k + u_2 \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
y_n &= x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \ldots + x_{nk}\beta_k + u_n
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \lambda(m_{11}u_1 + m_{12}u_2 + \ldots + m_{1n}u_n) + \varepsilon_1 \\
u_2 &= \lambda(m_{21}u_1 + m_{22}u_2 + \ldots + m_{2n}u_n) + \varepsilon_2 \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
u_n &= \lambda(m_{n1}u_1 + m_{n2}u_2 + \ldots + m_{nn}u_n) + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \rho\,\mathbf{Mu} + \varepsilon$$

dimana:

y : vektor observasi variabel dependen berukuran *nx1*

X : matriks k-variabel bebas berukuran *nxk*

β : vektor parameter regresi berukuran *kx1*

u : vektor error berukuran *nx1*

ρ : parameter skalar spasial error

M : matriks spasial terboboti dengan baris terstandardisasi $(\sum_j w_{ij} = 1, \forall \mathrm{i})$ berukuran *nxn*

ε : vektor error sebenarnya, berukuran *nx1*

2.10 MATRIKS BOBOT SPASIAL

Matriks bobot spasial, **W,** merupakan matriks berukuran *nxn* yang dapat merepresentasikan ketergantungan suatu lokasi dengan lokasi sekitarnya. Oleh karena itu diasumsikan bahwa elemen diagonal matriks bobot spasial **W** adalah sama dengan 0. Sedangkan, w_{ij} merupakan elemen dari matriks bobot spasial, **W,** yaitu elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j. w_{ij} ini menggambarkan hubungan lokasi ke-i dengan lokasi ke-j, dimana $w_{ij} > 0$ bila lokasi-i berhubungan dengan lokasi-j.

Matriks bobot spasial dapat ditentukan berdasarkan dua kategori, yaitu berdasarkan jarak dan contiguity. Berikut adalah penjelasan dari masing-masing kategori:

1. **Distance Weight**

   Dalam hal ini, penentuan entri-entri dari matriks bobot spasial dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi jarak. Pada prinsipnya, bobot jarak antara suatu lokasi dengan lokasi di sekitarnya ditentukan oleh jarak antara kedua daerah tersebut. Semakin pendek jarak antar lokasi, maka bobot yang diberikan akan semakin besar. Hal ini dikarenakan lokasi yang jaraknya berdekatan umumnya mempunyai karakteristik yang mirip, berbeda dengan lokasi yang jauh secara jarak, umumnya karakteristik antar lokasi ini akan lebih bervariasi, sehingga bobot yang diberikan akan semakin kecil.

   Selanjutnya, akan dijelaskan beberapa jenis penentuan matriks bobot berdasarkan jarak:

a. Fungsi jarak menurun

$$w_{ij} = d_{ij}^{z} \qquad \text{jika} \quad d_{ij} \le D, \text{ dan } z < 0$$

$$= 0 \qquad \text{jika} \quad d_{ij} > D$$

b. K - lokasi terdekat

Pada metode ini, peneliti dapat menentukan sendiri lokasi-j, sebanyak k-lokasi, yang merupakan lokasi terdekat disekitar lokasi-i.

c. Invers dari jarak

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \qquad \text{jika} \quad d_{ij} \le D, \text{ dan } z < 0$$

$$= 0 \qquad \text{jika} \quad d_{ij} > D$$

dimana:

D merupakan suatu limit dari jarak yang ditentukan

d_{ij} merupakan jarak antara lokasi-*i* dan lokasi-*j*

2. Contiguity Weight

Jenis-jenis penentuan matriks bobot berdasarkan contiguity weight:

a. Rook Contiguity

didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki common edge

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

b. Bishop Contiguity

didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki common verteks

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

c. Queen Contiguity

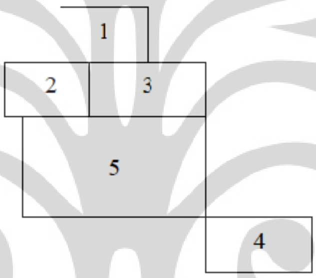
didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki common edge atau common verteks

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

Dalam menentukan suatu matriks bobot, tidak ada ketentuan harus menggunakan metode tertentu untuk kasus tertentu. Pada tugas akhir ini penentuan matriks bobot spasial yang akan digunakan adalah berdasarkan *Contiguity Weight*, lebih khusus lagi yaitu *Queen Contiguity*. Hal ini dikarenakan informasi yang didapat dari matriks bobot dengan metode *Queen Contiguity* akan lebih banyak dibandingkan dengan metode *Rook Contiguity* dan *Bishop Contiguity*.

<u>Ilustrasi pembentukan matriks bobot spasial</u>



Gambar 1: *Contiguity Weight*

Rook contiguity :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bishop contiguity :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queen contiguity :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.11 UJI ASUMSI ERROR ANTAR OBSERVASI SALING BEBAS

Untuk melihat apakah terdapat korelasi antar-residual dapat dilakukan dengan menggunakan uji *Durbin-Watson*. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0: Tidak ada korelasi antar-residual,

H_1: Terdapat korelasi antar-residual.

Statistik uji Durbin-Watson adalah sebagai berikut:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1} \right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

dimana n menyatakan jumlah observasi, dan $\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}$ merepresentasikan perbedaan diantara pasangan residual. Dengan menguraikan pembilang dari d , maka akan diperoleh :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

- Jika residualnya tidak berkorelasi, dengan perkataan lain tidak ada hubungan antara $\hat{\varepsilon}_t$ dan $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, maka $\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} \approx 0$. Sehingga nilai dari *d* akan mendekati 2.

- Jika residual berkorelasi positif, maka $\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} \approx \sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2$ (karena $\hat{\varepsilon}_t \approx \hat{\varepsilon}_{t-1}$). Sehingga nilai dari *d* akan mendekati nol.

$$d = 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 - 2 = 0$$

- Jika residual berkorelasi negatif, maka $\hat{\varepsilon}_t \approx -\hat{\varepsilon}_{t-1}$, sehingga $\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \approx -\hat{\varepsilon}_{t-1} \approx -\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2$ dan nilai dari *d* akan mendekati 4.

$$d = 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 - \frac{-2\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2 + 2 = 4$$

Sehingga, *Range* dari *d* adalah $0 \le d \le 4$, dengan kesimpulan :

- Jika residual tidak berkorelasi, maka $d \approx 2$.
- Jika residual berkorelasi positif, $d < 2$, dan jika korelasinya sangat kuat, maka $d \approx 0$.

- Jika residual berkorelasi negatif, $d > 2$, dan jika korelasinya sangat kuat, maka $d \approx 4$.

Daerah kritisnya adalah : $d < d_{L,\alpha/2}$ *atau* $(4-d) < d_{U,\alpha/2}$, dimana α adalah tingkat signifikansi dari pengujian.

Nilai dari $d_{L,\alpha/2}$ *dan* $d_{U,\alpha/2}$ diperoleh dari tabel Durbin-Watson.

BAB III

PENAKSIRAN PARAMETER PADA

RANDOM EFFECTS SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL

Pada bab III ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model.* Sesuai pembatasan masalah yang sudah dijelaskan diawal, jenis data panel yang akan digunakan adalah data panel lengkap dan menggunakan komponen error satu arah, serta untuk kasus spasial dependennya hanya akan dibahas mengenai spasial lag model. Untuk menaksir model tersebut, akan digunakan metode maksimum likelihood. Karena model ini merupakan *random effects*, maka akan dibahas pula matriks varian kovarian dari komponen error model tersebut.

3.1 MODEL REGRESI SPASIAL PANEL DATA

Model regresi data panel merupakan suatu model regresi yang melibatkan dua jenis data, yaitu data *cross section* dan data *longitudinal*.

Data *cross section* merupakan data yang terdiri dari banyak individu yang dikumpulkan dalam satu waktu tertentu. Sedangkan data longitudinal merupakan data yang dikumpulkan dari beberapa waktu untuk satu individu tertentu. Untuk memperoleh model regresi linear yang baik dibutuhkan beberapa asumsi tentang error, yaitu error berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan (*homoskedastis*), serta error antar observasi saling bebas.

Pada saat melakukan observasi di suatu lokasi, sering ditemui bahwa nilai observasi di suatu lokasi tertentu bergantung pada nilai observasi di lokasi sekitarnya, atau sering disebut dengan terdapat korelasi spasial antar observasi. Hal ini yang kemudian disebut dengan spasial dependen. Model spasial dependen terdiri dari model spasial lag dan model spasial error. Model spasial lag menunjukkan adanya ketergantungan antara variabel dependen di suatu lokasi dengan variabel dependen di lokasi sekitarnya. Sedangkan model spasial error menunjukkan adanya ketergantungan antara error di suatu lokasi dengan error di lokasi sekitarnya. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu analisis regresi yang turut melibatkan aspek ketergantungan lokasi pada model regresi data panel, yang dikenal dengan model regresi spasial data panel.

Pada tugas akhir ini akan dibahas regresi data panel lengkap komponen error satu arah dengan menggunakan efek acak (*random effect*), dan pengaruh spasial dependen yang akan dibahas hanyalah spasial lag saja. Dan yang dimaksud individu ke – *i* pada tugas akhir ini adalah lokasi ke – *i*.

Pada model regresi spasial panel lengkap satu arah ini diasumsikan bahwa matriks bobot spasial, $\mathbf{W}_N$, konstan terhadap waktu.

3.2 *RANDOM EFFECTS SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL*

Pada model regresi spasial lag panel komponen error satu arah ini diasumsikan bahwa *spatial specific effect* (komponen error satu arah, μ) adalah random.

Random effects spatial lag panel data model pada suatu lokasi *i* dinyatakan sebagai berikut:

$$y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} + \mu_i + \varepsilon_{it} \tag{3.1}$$

Yang bila dijabarkan akan menjadi bentuk seperti di bawah ini:

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= \delta\left(w_{11}y_{11} + w_{12}y_{21} + \ldots + w_{1N}y_{N1}\right) + x_{111}\beta_1 + x_{112}\beta_2 + \ldots x_{11K}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{11} \\
y_{21} &= \delta\left(w_{21}y_{11} + w_{22}y_{21} + \ldots + w_{2N}y_{N1}\right) + x_{211}\beta_1 + x_{212}\beta_2 + \ldots x_{21K}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{21} \\
&\vdots \\
y_{N1} &= \delta\left(w_{N1}y_{11} + w_{N2}y_{21} + \ldots + w_{NN}y_{N1}\right) + x_{N11}\beta_1 + x_{N12}\beta_2 + \ldots x_{N1K}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{N1} \\
y_{12} &= \delta\left(w_{11}y_{12} + w_{12}y_{22} + \ldots + w_{1N}y_{N2}\right) + x_{121}\beta_1 + x_{122}\beta_2 + \ldots x_{12K}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{12} \\
y_{22} &= \delta\left(w_{21}y_{12} + w_{22}y_{22} + \ldots + w_{2N}y_{N2}\right) + x_{221}\beta_1 + x_{222}\beta_2 + \ldots x_{22K}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{22} \\
&\vdots \\
y_{N2} &= \delta\left(w_{N1}y_{12} + w_{N2}y_{22} + \ldots + w_{NN}y_{N2}\right) + x_{N21}\beta_1 + x_{N22}\beta_2 + \ldots x_{N2K}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{N2} \\
&\vdots \\
y_{1T} &= \delta\left(w_{11}y_{1T} + w_{12}y_{2T} + \ldots + w_{1N}y_{NT}\right) + x_{1T1}\beta_1 + x_{1T2}\beta_2 + \ldots x_{1TK}\beta_K + \mu_1 + \varepsilon_{1T} \\
y_{2T} &= \delta\left(w_{21}y_{1T} + w_{22}y_{2T} + \ldots + w_{2N}y_{NT}\right) + x_{2T1}\beta_1 + x_{2T2}\beta_2 + \ldots x_{2TK}\beta_K + \mu_2 + \varepsilon_{2T} \\
&\vdots \\
y_{NT} &= \delta\left(w_{N1}y_{1T} + w_{N2}y_{2T} + \ldots + w_{NN}y_{NT}\right) + x_{NT1}\beta_1 + x_{NT2}\beta_2 + \ldots x_{NTK}\beta_K + \mu_N + \varepsilon_{NT}
\end{aligned}
$$

Atau bila dinyatakan dalam bentuk notasi matriks menjadi:

$$\mathbf{y} = \delta\mathbf{W}_{NT}\mathbf{y} + \mathbf{X\beta} + \mathbf{v}, \quad \text{dimana } \mathbf{v} = \left(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\boldsymbol{\mu} + \left(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.2}$$

dimana :

$\mathbf{y}$ = vektor variabel dependen berukuran $NT \times 1$

$\mathbf{X}$ = matriks variabel independen berukuran $NT \times k$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter yang berukuran $k \times 1$

δ = koeffisien spasial lag

$\boldsymbol{\varepsilon}$ =vektor error berukuran $NT \times 1$ yang independen dan berdistribusi identik normal dengan mean nol dan matrik kovariansi $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_{NT}$.

$\boldsymbol{\mu}$ = *spatial specific effect* berukuran *N* × 1

$\mathbf{W}_{NT}$ = matriks bobot spasial berukuran $NT \times NT$ diketahui.

$\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}$ = vektor berukuran *T × 1* yang setiap entrinya adalah 1.

$\mathbf{I}_\mathbf{T}$ = matriks identitas berukuran *T x T*

$\mathbf{I}_\mathbf{N}$ = matriks identitas berukuran *N x N*

Asumsi yang digunakan pada *random effects spatial lag panel data model* adalah $\mu_\mathrm{i} \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\mu^2\right)$ dan $\varepsilon_\mathrm{it} \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, serta μ_i dan ε_it diasumsikan saling bebas. Pada tugas akhir ini, diasumsikan bahwa distribusi dari μ_i dan ε_it adalah distribusi normal.

Jika koeffisien spasial lag $\delta = 0$, maka *random effects spatial lag panel data model* tersebut akan menjadi model data panel umum, yaitu :

$$y_\mathrm{it} = \mu_i + \beta x_\mathrm{it} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots, \mathrm{N}$$
$$t = 1,\ldots, \mathrm{T}$$

Parameter pada *random effects spatial lag panel data model* di atas akan ditaksir dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Pada metode maksimum likelihood ini diperlukan fungsi likelihood dari variabel dependen Y, yaitu

$$L(\beta,\delta,\sigma_{\varepsilon}^{2},\theta^{2},y_{11}...,y_{NT})=\left[\left(2\pi\right)^{NT}\left|\mathbf{\Omega}\right|\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}\right)'\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}\right)\right]\;\left|\mathbf{I}_{T}\otimes\left(\mathbf{I}_{N}-\delta\mathbf{W}_{N}\right)\right|$$

Terlihat jelas bahwa fungsi likelihood di atas mengandung determinan dan invers dari matriks varian kovarian yang berasal dari komponen error model. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas pembentukan matriks varian kovarian dari komponen error *random effects spatial lag panel data model.*

3.3 PEMBENTUKAN MATRIKS VARIAN KOVARIAN

Pada *random effects spatial lag panel data model*, komponen error satu arah terdiri dari dua variabel random, yaitu pengaruh individu (lokasi) yang tidak diketahui (*spatial specific effect*), μ_i, yang berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ_{μ}^{2}; dan pengaruh yang benar-benar tidak diketahui (error sebenarnya), ε_{it}, yang berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ_{ε}^{2}. Pada persamaan (3.2), komponen error ini dinotasikan dengan $\mathbf{v}$, dimana $\mathbf{v}=\left(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\otimes\mathbf{I}_{\mathbf{N}}\right)\boldsymbol{\mu}+\left(\mathbf{I}_{\mathbf{T}}\otimes\mathbf{I}_{\mathbf{N}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$.

Selanjutnya, karena komponen error ini terdiri dari dua variabel random, maka akan dicari matriks varian kovarian dari komponen error $\mathbf{v}$ tersebut.

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\varepsilon}$$

- $$\begin{aligned} E(\mathbf{v}) &= E\left[(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\ &= E\left[(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\mu}\right] + E\left[(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\ &= (\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})E[\boldsymbol{\mu}] + (\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})E[\boldsymbol{\varepsilon}] \\ &= (\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\cdot\mathbf{0} + (\mathbf{I}_\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\cdot\mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sehingga didapat bahwa mean dari komponen error $\mathbf{v}$ adalah vektor nol $\left(E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\right)$.

- $$\begin{aligned} Var(\mathbf{v}) &= E(\mathbf{vv}') - \left[E(\mathbf{v})\right]^2 \\ &= E(\mathbf{vv}') - \mathbf{0} \\ &= E(\mathbf{vv}') \end{aligned}$$

Sehingga, matriks varian kovarian dari komponen error $\mathbf{v}$ adalah:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \mathrm{E}(\mathbf{vv}') \\ &= \mathrm{E}\left[\left((\boldsymbol{\iota}_\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left((\boldsymbol{\iota}_\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N})\boldsymbol{\varepsilon}\right)'\right] \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat transpose: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ dan $(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$,maka

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathsf{E}\left[\left((\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})' + \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})'\right)\right]$$

Berdasarkan sifat *kronecker product* : $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$, maka

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathsf{E}\left[\left((\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}') + \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}')\right)\right]$$

Karena transpose dari matriks identitas adalah matriks identitas itu sendiri,

maka

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathsf{E}\left[\left((\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right)\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + (\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right] + \mathsf{E}\left[(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right] + \mathsf{E}\left[(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right] + \mathsf{E}\left[(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right]$$

Karena telah diasumsikan di awal, bahwa $\mathsf{E}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$ dan $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, serta

$\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ diasumsikan saling bebas , maka

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathsf{E}\left[(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right] + \mathsf{E}\left[(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\right] + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\mathsf{E}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}')(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})$$

Berdasarkan bukti pada lampiran 2, bahwa $\mathsf{E}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') = \sigma_{\mu}^{2}\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$ dan

$\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma_{\varepsilon}^{2}\mathbf{I}_{\mathsf{NT}}$, maka

$$\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\sigma_{\mu}^{2}\mathbf{I}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}' \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})\sigma_{\varepsilon}^{2}\mathbf{I}_{\mathsf{NT}}(\mathbf{I}_{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}})$$

Karena σ_μ^2 dan σ_ε^2 merupakan suatu skalar, maka dapat dipindahkan ke depan menjadi

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})\mathbf{I}_\mathbf{N}(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})\mathbf{I}_{\mathrm{NT}}(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})$$

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})$$

Berdasarkan sifat *kronecker product* : $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD})$, maka

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T}\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\mathbf{I}_\mathbf{N})$$

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})$$

$$\therefore \mathbf{\Omega} = \mathrm{E}(\mathbf{vv}') = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) \tag{3.3}$$

Menurut Magnus pada tahun1982 (Elhorst, 2003), matriks varian kovarian pada persamaan (3.3) di atas dapat sedikit dimodifikasi menjadi bentuk:

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{E}(\mathbf{vv}') = \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\left(\left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right) \otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right) \tag{3.4}$$

BUKTI

$$\therefore \mathbf{\Omega} = \sigma_\mu^2(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) \qquad \text{persamaan (3.3)}$$

Jika suku pertama dari ruas kanan ditambahkan dengan $\mathrm{T} \cdot \frac{1}{\mathrm{T}}$, maka bentuk di atas dapat ditulis kembali menjadi:

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{T}\sigma_\mu^2 \frac{1}{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}) + \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_\mathbf{N})$$

Berdasarkan sifat *kronecker product* $(\alpha\mathbf{A})\otimes(\beta\mathbf{B})=\alpha\beta(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})$; dengan α = $\frac{1}{\mathrm{T}}$ dan β =1, maka persamaan di atas dapat dibentuk kembali menjadi

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{T}\sigma_\mu^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)+\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N})$$

Dengan menambahkan $\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)-\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)$, maka

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{T}\sigma_\mu^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)+\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)+\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N})-\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)$$

Yang dapat ditulis dengan menggabungkan koefisien di depannya, menjadi

$$\boldsymbol{\Omega}=\left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)+\sigma_\varepsilon^2\left[(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N})-\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\right]$$

Berdasarkan sifat *kronecker product* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})+(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C})$, maka suku terakhir dari persamaan di atas dapat diubah menjadi:

$$\boldsymbol{\Omega}=\left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)+\sigma_\varepsilon^2\left[\left(\mathbf{I}_\mathbf{T}-\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right)\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right] \qquad (3.4)$$

Terbukti bahwa persamaan (3.3) dapat dimodifikasi menjadi bentuk lain seperti pada persamaan (3.4).

Selanjutnya, matriks varian kovarian yang akan digunakan adalah matriks varian kovarian pada persamaan (3.4) di atas.

3.3.1 Invers dari Matriks Varian Kovarian

Bentuk invers dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.4) adalah

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\left(\mathrm{T}\sigma_{\mu}^{2} + \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}'\otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}\right) + \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}\left(\left(\mathbf{I}_{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}'\right)\otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}\right) \qquad (3.5)$$

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{I}_{\mathrm{NT}}$.

Misalkan didefinisikan:

Koefisien $\left(\mathrm{T}\sigma_{\mu}^{2} + \sigma_{\varepsilon}^{2}\right) = \alpha$

Koefisien $\sigma_{\varepsilon}^{2} = \beta$

Matriks $\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}'\otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}} = \mathbf{A}$, matriks yang berukuran *NT x NT*

Matriks $\left(\mathbf{I}_{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}'\right)\otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}} = \mathbf{B}$, matriks yang berukuran *NT x NT*

Bila dijabarkan bentuk *kronecker product*-nya, maka akan didapat bentuk $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}'\otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}\right) = \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}$.

Sehingga, bentuk matriks varian kovarian pada persamaan (3.4) dapat ditulis ulang secara sederhana menjadi

$$\mathbf{\Omega} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$$

$$\mathbf{\Omega} = \alpha\mathbf{A} + \beta\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right) \tag{3.6}$$

dan bentuk invers dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.5) dapat ditulis ulang secara sederhana menjadi

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right) \tag{3.7}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1} &= \left[\alpha\mathbf{A} + \beta\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right)\right]\left[\frac{1}{\alpha}\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right)\right] \\
&= \mathbf{A}^2 + \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right)\mathbf{A} + \left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - \mathbf{A}\right)^2 \\
&= \mathbf{A}^2 + \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{A} - \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{A}^2 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{A} - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \\
&= \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\mathbf{A} - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\mathbf{A}^2 \\
&= \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2\right)
\end{aligned}$$

karena matriks $\mathbf{A}$ merupakan matriks simetris yang idempoten (*symmetric idempotent*), maka berlaku $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ atau $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. Sehingga $\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2\right)$ merupakan matriks nol ($\mathbf{0}$) yang berukuran *NT x NT*, atau bentuk di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\mathbf{0}_{\mathrm{NT}}$$

$= \mathbf{I}_{\mathsf{NT}} + \mathbf{0}_{\mathsf{NT}}$

$= \mathbf{I}_{\mathsf{NT}}$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \dfrac{1}{\left(\mathsf{T}\sigma_{\mu}^{2} + \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)}\left(\dfrac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}{}' \otimes \mathbf{I}_{\mathsf{N}}\right) + \dfrac{1}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}\left(\left(\mathbf{I}_{\mathsf{T}} - \dfrac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}{}'\right) \otimes \mathbf{I}_{\mathsf{N}}\right)$

merupakan invers dari $\boldsymbol{\Omega} = \left(\mathsf{T}\sigma_{\mu}^{2} + \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)\left(\dfrac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}{}' \otimes \mathbf{I}_{\mathsf{N}}\right) + \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(\left(\mathbf{I}_{\mathsf{T}} - \dfrac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{T}}{}'\right) \otimes \mathbf{I}_{\mathsf{N}}\right)$.

3.3.2 Determinan dari Matriks Varian Kovarian

Dalam proses pembentukan fungsi likelihood dari Y, akan digunakan pdf multivariate normal yang mengandung determinan dari matriks varian kovarian. Sehingga perlu dicari determinan dari matriks varian kovarian tersebut. Pada sub-subbab ini akan dibahas pembentukan determinan dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.4).

Determinan dari persamaan (3.4) di atas adalah:

$$\left|\boldsymbol{\Omega}\right| = \left|\left(\mathsf{T}\sigma_{\mu}^{2} + \sigma^{2}\right)\mathbf{I}_{\mathbf{N}}\right| \times \left|\sigma^{2}\mathbf{I}_{\mathbf{N}}\right|^{\mathsf{T}-1} \qquad (3.8)$$

BUKTI :

Menurut Abadir dan Magnus (yang dikutip dari buku *A Matrix Handbook for Statisticians*) : Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks bujur sangkar berukuran *nxn*, maka berlaku : $\det\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\det(\mathbf{A}-\mathbf{B})$.

Matriks varian kovarian pada persamaan (3.4) yaitu

$\boldsymbol{\Omega} = \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\left[\left(\mathbf{I}_\mathbf{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right]$ bila diuraikan akan dapat dibentuk menjadi *block matrix* $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix}$ dimana $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks bujur sangkar berukuran *nxn*. Sehingga akan berlaku

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\det(\mathbf{A}-\mathbf{B}).$$

Contoh :

Misalkan T=2 dan N=3.

Maka penjabaran dari matriks varian kovariannya adalah :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} &= \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\left[\left(\mathbf{I}_\mathbf{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right]\\
&= \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\left[\mathbf{I}_\mathbf{NT} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right]\\
&= \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_\mathbf{NT} - \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\\
&= \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes \mathbf{I}_\mathbf{N}\right) + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_\mathbf{NT}\\
&= \left(2\sigma_\mu^2\right)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\iota}_2\boldsymbol{\iota}_2'\otimes \mathbf{I}_3\right) + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_6\\
&= \sigma_\mu^2\left(\boldsymbol{\iota}_2\boldsymbol{\iota}_2'\otimes \mathbf{I}_3\right) + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_6
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dapat dibentuk menjadi block-block matriks $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$

dimana block matriks $\mathbf{A}$ adalah $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ dan block

matriks $\mathbf{B}$ adalah $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \end{pmatrix}$.

Sehingga berdasarkan sifat $\det\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\det(\mathbf{A}-\mathbf{B})$, maka

determinan dari matriks varian kovarian errornya adalah

$$|\mathbf{\Omega}| = \begin{vmatrix} \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 & 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \end{pmatrix} \right|$$

$$|\mathbf{\Omega}| = \left| \begin{pmatrix} 2\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right|$$

$$|\mathbf{\Omega}| = \left|\left(2\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\mathbf{I_3}\right| \left|\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I_3}\right|$$

Yang merupakan bentuk dari $|\mathbf{\Omega}| = \left|\left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma^2\right)\mathbf{I_N}\right| \times \left|\sigma^2\mathbf{I_N}\right|^{\mathrm{T}-1}$ dimana T=2 dan N=3.

Berdasarkan sifat determinan: $\det(\mathrm{k}\mathbf{A}) = \mathrm{k}^{\mathrm{N}} \det(\mathbf{A})$,

dimana k adalah skalar, dan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran *NxN*.

Sehingga, karena $\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2$ dan σ_ε^2 merupakan skalar, maka bentuk determinan pada persamaan (3.8) di atas dapat diubah menjadi :

$$|\mathbf{\Omega}| = \left|\left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\mathbf{I_N}\right| \times \left|\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I_N}\right|^{\mathrm{T}-1} = \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathrm{N}} \left|\mathbf{I_N}\right| \times \left(\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathrm{N}} \left|\mathbf{I_N}\right|\right)^{\mathrm{T}-1}$$

$$= \left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathrm{N}} \times \left(\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathrm{N}}\right)^{\mathrm{T}-1}$$

$$= \left(\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{N}} \times \left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{NT-N}}$$

$$= \left(\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{N}} \times \frac{\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{NT}}}{\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{N}}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right)^{-\mathsf{N}} \times \left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{NT}}$$

$$\therefore \quad |\mathbf{\Omega}| = \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right)^{-\mathsf{N}} \times \left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{\mathsf{NT}} \qquad (3.9)$$

Determinan dari matriks varian kovarian yang akan digunakan selanjutnya adalah yang terdapat pada persamaan (3.9) di atas.

Pada persamaan (3.9) di atas muncul bentuk $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}$. Bentuk $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathsf{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ ini kemudian akan didefinisikan sebagai θ^2.

Dengan adanya pendefinisian tersebut, bentuk invers dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.5) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\theta^2 \frac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}' \otimes \mathbf{I}_\mathsf{N} + \left(\mathbf{I}_\mathsf{T} - \frac{1}{\mathsf{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right) \otimes \mathbf{I}_\mathsf{N}\right] \qquad (3.10)$$

BUKTI

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\left(\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right) + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right) \text{pada persamaan (3.5)}$$

Jika suku pertama dari ruas kanan ditambahkan dengan $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi bentuk:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\cdot\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}\left[\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right] + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right]$$

Berdasarkan sifat *kronecker product* $(\alpha\mathbf{A})\otimes(\beta\mathbf{B}) = \alpha\beta(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})$; dengan $\alpha = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ dan $\beta = 1$, maka persamaan di atas dapat dibentuk kembali menjadi

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right)\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right] + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right]$$

Dengan menggabungkan koefisiennya, akan didapatkan bentuk

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right)\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N} + \left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right]$$

Dengan pendefinisian sebelumnya bahwa $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2} = \theta^2$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\theta^2\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N} + \left(\mathbf{I}_\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}{}'\right)\otimes \mathbf{I}_\mathrm{N}\right] \qquad \text{bentuk persamaan (3.10)}$$

Terbukti bahwa persamaan (3.5) dapat diubah menjadi bentuk

persamaan(3.10) dengan adanya pendefinisian $\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{T}\sigma_\mu^2+\sigma_\varepsilon^2}=\theta^2$.

Dengan sedikit modifikasi, bentuk invers dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.10) tersebut dapat diubah kembali menjadi bentuk

$$\mathbf{\Omega}^{-1}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\mathbf{I}_{\mathrm{NT}}-(1-\theta)\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}\right]^2 \tag{3.11}$$

BUKTI

Jika persamaan (3.10) di atas diakarkuadratkan, maka didapat

$$\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\theta\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}+\left(\mathbf{I}_\mathrm{T}-\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\right)\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}\right]$$

Suku terakhir dari persamaan di atas diselesaikan bentuk *kronecker product*-nya, menjadi:

$$\mathbf{\Omega}^{-1/2}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\theta\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}+\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NT}}-\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}\right)\right]$$

Dengan menggabungkan koefisiennya, didapat

$$\mathbf{\Omega}^{-1/2}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\mathbf{I}_{\mathrm{NT}}-(1-\theta)\frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_\mathrm{N}\right]$$

Bentuk akarkuadrat dari invers di atas kemudian dikuadratkan kembali, sehingga didapat bentuk:

$$\therefore \left(\mathbf{\Omega}^{-1/2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\mathbf{I}_{NT} - (1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T' \otimes \mathbf{I}_N\right]^2$$

Sehingga, bentuk invers dari matriks varian kovarian pada persamaan (3.10) dapat diubah menjadi bentuk:

$$\therefore \mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\mathbf{I}_{NT} - (1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T' \otimes \mathbf{I}_N\right]^2 \tag{3.11}$$

Untuk selanjutnya, invers dari matriks varian kovarian yang akan digunakan adalah yang terdapat pada persamaan (3.11) di atas.

3.4 FUNGSI LIKELIHOOD

Penaksiran parameter pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* akan dilakukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas pembentukan fungsi likelihood pada *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model.* Pada pembahasan ini, akan digunakan determinan dan invers dari matriks varian kovarian yang telah dibahas pada sub-subbab sebelumnya.

Fungsi likelihood dari *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* adalah:

$$L(\beta,\delta,\sigma_\varepsilon^2,\theta^2,y_{11}...,y_{NT})=\left[\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{NT}{2}}\left(\theta^2\right)^{\frac{N}{2}}\right]\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{v}'\left(\mathbf{I}_{NT}-\left(1-\theta\right)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\mathbf{v}\right]$$

(3.12)

dengan $\mathbf{v}=\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}$.

BUKTI

Pada persamaan (3.2), *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* adalah

$$\mathbf{y}=\delta\mathbf{W}_{NT}\mathbf{y}+\mathbf{X\beta}+\mathbf{v},\quad \text{dimana}\;\; \mathbf{v}=\left(\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\boldsymbol{\mu}+\left(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}_\mathbf{N}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$

Karena $\mathbf{v}$ merupakan komponen error model yang terdiri dari dua variabel random $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$, yang masing-masing $\boldsymbol{\mu}\sim\text{NIID}\left(\mathbf{0},\sigma_\mu^2\mathbf{I}_\text{N}\right)$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}\sim\text{NIID}\left(\mathbf{0},\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_\text{NT}\right)$, dan seperti yang telah dibuktikan pada subbab 3.3, maka $\mathbf{v}\sim\text{NIID}\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\Omega}\right)$ dengan $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks varian kovarian dari $\mathbf{v}$.

Bentuk $\mathbf{y} = \delta \mathbf{W}_{NT}\mathbf{y} + \mathbf{X\beta} + \mathbf{v}$, dapat diubah menjadi

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - \delta \mathbf{W}_{NT}\mathbf{y} - \mathbf{X\beta}$$
$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{I}_{NT} - \delta \mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y} - \mathbf{X\beta}$$

Jacobian dari transformasi ini adalah $\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}\right| = \left|\mathbf{I}_{NT} - \delta \mathbf{W}_{NT}\right| = \left|\mathbf{I}_T \otimes \left(\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{W}_N\right)\right|$,

yang menyatakan determinan dari matriks $\mathbf{I}_T \otimes \left(\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{W}_N\right)$ yang berukuran

NT x NT.

Sehingga diperoleh p.d.f bersama dari peubah acak $y_{11}, y_{21}..., y_{NT}$

adalah : $f(y_{11}, y_{21},..., y_{NT}) = f(v_{11})f(v_{21})...f(v_{NT})|J|$

$$= \left[(2\pi)^{\mathrm{NT}} |\mathbf{\Omega}|\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}\right)'\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}\right)\right] \quad \left|\mathbf{I}_{\mathrm{T}} \otimes \left(\mathbf{I}_{\mathrm{N}} - \delta \mathbf{W}_{\mathrm{N}}\right)\right|$$

karena nilai dari determinan merupakan suatu konstanta, maka dapat dipindahkan ke depan, dan karena mean dari $\mathbf{v}$ atau dinotasikan dengan $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}$ adalah $\mathbf{0}$, maka persamaan di atas menjadi:

$$= \left[(2\pi)^{\mathrm{NT}} |\mathbf{\Omega}|\right]^{-1/2} \left|\mathbf{I}_{\mathrm{T}} \otimes \left(\mathbf{I}_{\mathrm{N}} - \delta \mathbf{W}_{\mathrm{N}}\right)\right| \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{v}\right]$$

kemudian substitusikan $|\mathbf{\Omega}|$ pada persamaan (3.9) dan $\mathbf{\Omega}^{-1}$ pada persamaan (3.11) ke persamaan di atas, sehingga didapat

$$=\left[\left(2\pi\right)^{NT}\left(\theta^2\right)^{-N}\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^{NT}\right]^{-1/2}\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{v}'\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\mathbf{I}_{NT}-\left(1-\theta\right)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right]^2\right)\mathbf{v}\right]$$

$$=\left[\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{NT}{2}}\left(\theta^2\right)^{\frac{N}{2}}\right]\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{v}'\left(\mathbf{I}_{NT}-\left(1-\theta\right)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\mathbf{v}\right]$$

Terbukti bahwa Fungsi likelihood dari *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* adalah:

$$L(\beta,\delta,\sigma_\varepsilon^2,\theta^2,y_{11}...,y_{NT})=\left[\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{NT}{2}}\left(\theta^2\right)^{\frac{N}{2}}\right]\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{v}'\left(\mathbf{I}_{NT}-\left(1-\theta\right)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\mathbf{v}\right]$$

dengan $\mathbf{v}=\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$.

3.5 PENAKSIRAN PARAMETER

Taksiran parameter untuk *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood. Hal ini akan ekivalen dengan memaksimumkan logaritma dari fungsi likelihood pada persamaan (3.12) di atas. Bentuk logaritma dari fungsi likelihood untuk variabel dependen Y dapat ditulis sebagai berikut :

$LnL = L(\beta,\delta,\sigma_\varepsilon^2,\theta^2,y_{11}...,y_{NT})$

$$= Ln\left(\left[\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{NT}{2}}\left(\theta^2\right)^{\frac{N}{2}}\right]\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{v}'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\mathbf{v}\right]\right)$$

$$= -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)+\frac{N}{2}Ln\left(\theta^2\right)+Ln\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right| -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{v}'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\mathbf{v}$$

Berdasarkan definisi 2.5.5 a. , maka:

$$\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right| = \left|\mathbf{I}_T\right|^N\left|\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|^T = \left|\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|^T$$

sehingga $Ln\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right| = Ln\left|\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|^T = T\ Ln\left|\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|$

Dengan mensubstitusikan $Ln\left|\mathbf{I}_T\otimes\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right| = T\ Ln\left|\left(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right)\right|$ dan $\mathbf{v}=\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, maka bentuk fungsi loglikelihood di atas dapat diubah menjadi:

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)+\frac{N}{2}Ln\left(\theta^2\right)+T\ Ln\left|\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N\right|$$
$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

Perhatikan suku terakhir dari fungsi loglikelihood di atas. Suku terakhir tersebut akan dijabarkan menjadi:

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)\right]\left[\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)\left(\left(\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT}\right)\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

Pada persamaan di atas, bentuk $\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}\boldsymbol{\iota}_\mathbf{T}'\otimes\mathbf{I}_N\right)^2$ dipecah menjadi bentuk $\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)$.

Yang bila dijabarkan secara terpisah didapat:

- $$\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\right]=\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)'-(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\right]\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)$$

  $$=\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)'-\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)'(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'-(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right]$$

  Matriks $\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N$ didefinisikan sebagai rata-rata observasi untuk setiap lokasi sepanjang waktu, sehingga dapat dinotasikan dengan $\overline{\mathbf{Y}}$ dan $\overline{\mathbf{X}}$, sehingga bentuk persamaan di atas dapat diubah menjadi :

  $$=\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)'-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\overline{\mathbf{Y}}\right)'\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'-(1-\theta)\left(\overline{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}\right)'\right]$$

- $$\left[\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]=$$
  $$\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)-(1-\theta)\left(\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})-(1-\theta)\left(\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right]$$

  $$=\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\overline{\mathbf{Y}}\right)\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})-(1-\theta)\left(\overline{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

Sehingga,

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\right]\left[\left(\mathbf{I}_{NT}-(1-\theta)\frac{1}{T}\boldsymbol{\iota}_T\boldsymbol{\iota}_T'\otimes\mathbf{I}_N\right)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)'-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\overline{\mathbf{Y}}\right)'\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'-(1-\theta)\left(\overline{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}\right)'\right]\right\}$$
$$\left\{\left[\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\mathbf{y}\right)-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_{NT}-\delta\mathbf{W}_{NT})\overline{\mathbf{Y}}\right)\right]-\left[(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})-(1-\theta)\left(\overline{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left[\left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\mathbf{Y}_t\right)'-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\overline{\mathbf{Y}}\right)'\right]-\left[(\mathbf{X}_t\beta)'-(1-\theta)(\overline{\mathbf{X}}\beta)'\right]\right\}$$

$$\left\{\left[\left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\mathbf{Y}_t\right)-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\overline{\mathbf{Y}}\right)\right]-\left[(\mathbf{X}_t\beta)-(1-\theta)(\overline{\mathbf{X}}\beta)\right]\right\}$$

Didefinisikan : $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_T\end{bmatrix}$; dimana $\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{N1}\end{bmatrix} \cdots \mathbf{Y}_T = \begin{bmatrix}y_{1T}\\ y_{2T}\\ \vdots\\ y_{NT}\end{bmatrix}$

$\mathbf{Y}_t^* = \left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\mathbf{Y}_t\right)-(1-\theta)\left((\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{W}_N)\overline{\mathbf{Y}}\right)$ dan $\mathbf{X}_t^* = \mathbf{X}_t-(1-\theta)\overline{\mathbf{X}}$,

$\overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{Y}}_{1.}\\ \overline{\mathbf{Y}}_{2.}\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{Y}}_{N.}\end{bmatrix}$; dimana $\begin{aligned}\overline{\mathbf{Y}}_{1.} &= \frac{y_{11}+y_{12}+\ldots+y_{1T}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{1t}\\ &\vdots\\ \overline{\mathbf{Y}}_{N.} &= \frac{y_{N1}+y_{N2}+\ldots+y_{NT}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_{Nt}\end{aligned}$

$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{X}}_{1.}\\ \overline{\mathbf{X}}_{2.}\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{X}}_{N.}\end{bmatrix}$; dimana $\begin{aligned}\overline{\mathbf{X}}_{1.} &= \frac{x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1T}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\\ &\vdots\\ \overline{\mathbf{X}}_{N.} &= \frac{x_{N1}+x_{N2}+\ldots+x_{NT}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{Nt}\end{aligned}$

sehingga bentuk persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left[\mathbf{Y}_t^*-\mathbf{X}_t^*\boldsymbol{\beta}\right]'\left[\mathbf{Y}_t^*-\mathbf{X}_t^*\boldsymbol{\beta}\right]\right\}$$

Didefinisikan bahwa $\mathbf{e}_t = \mathbf{Y}_t^*-\mathbf{X}_t^*\boldsymbol{\beta}$, sehingga suku terakhir dari fungsi

loglikelihood di atas dapat ditulis menjadi bentuk yang lebih sederhana, yaitu:

$$= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t'\,\mathbf{e}_t$$

Sehingga bentuk akhir dari fungsi loglikelihood di atas adalah

$$LnL = -\frac{NT}{2}Ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}Ln\left(\theta^2\right) + T\ Ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t'\,\mathbf{e}_t \qquad (3.13)$$

3.5.1 Taksiran Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Taksiran parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{x}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{y}^*\right)$, (3.14)

dengan $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{X}_T^*\end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_T^*\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_i^* = \begin{bmatrix}x_{1i}^* \\ x_{2i}^* \\ \vdots \\ x_{Ni}^*\end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}_i^* = \begin{bmatrix}y_{1i}^* \\ y_{2i}^* \\ \vdots \\ y_{Ni}^*\end{bmatrix}$

BUKTI

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t'\mathbf{e}_t$$

Nilai dari $\boldsymbol{\beta}$ yang memaksimumkan $\ln L$ diperoleh dengan

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial\left(-\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t'\mathbf{e}_t\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial\left(-\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial\left(\frac{N}{2}\ln\theta^2\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial\left(T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right|\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t'\mathbf{e}_t\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

Pada fungsi loglikelihood di atas, yang mengandung parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah suku terakhir saja, yaitu pada suku $\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t} = \left(\mathbf{Y_t^*} - \mathbf{X_t^*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y_t^*} - \mathbf{X_t^*}\boldsymbol{\beta}\right)$, sehingga suku-suku sebelumnya dapat dianggap sebagai konstanta. Nilai maksimum dari fungsi loglikelihood pada persamaan diatas dapat dicapai ketika suku terakhir dari fungsi loglikelihood tersebut bernilai minimum, atau dengan perkataan lain ketika:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\mathbf{e_1}'\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}'\mathbf{e_2} + \ldots + \mathbf{e_T}'\mathbf{e_T}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

dimana $\mathbf{e_1}'\mathbf{e_1} = \left(\mathbf{Y_1^*} - \mathbf{X_1^*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y_1^*} - \mathbf{X_1^*}\boldsymbol{\beta}\right)$, dengan $\mathbf{Y_1^*} = \begin{bmatrix} y_{11}^* \\ y_{21}^* \\ \vdots \\ y_{N1}^* \end{bmatrix}$; $\mathbf{X_1^*} = \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{21}^* \\ \vdots \\ x_{N1}^* \end{bmatrix}$,

yang bila dijabarkan akan didapat bentuk:

$$\mathbf{e_1}'\mathbf{e_1} = \left(\mathbf{Y_1^*} - \mathbf{X_1^*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y_1^*} - \mathbf{X_1^*}\boldsymbol{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(y_{i1}^* - x_{i1}^*\boldsymbol{\beta}\right)^2$$

$$\mathbf{e_2}'\mathbf{e_2} = \left(\mathbf{Y_2^*} - \mathbf{X_2^*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y_2^*} - \mathbf{X_2^*}\boldsymbol{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(y_{i2}^* - x_{i2}^*\boldsymbol{\beta}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e_T}'\mathbf{e_T} = \left(\mathbf{Y_T^*} - \mathbf{X_T^*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y_T^*} - \mathbf{X_T^*}\boldsymbol{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(y_{iT}^* - x_{iT}^*\boldsymbol{\beta}\right)^2$$

Sehingga, bentuk $\dfrac{\partial\left(-\dfrac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\mathbf{e_1}'\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}'\mathbf{e_2}+\ldots+\mathbf{e_T}'\mathbf{e_T}\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$ dapat ditulis

kembali menjadi:

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{it}^*-x_{it}^*\boldsymbol{\beta}\right)^2\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{it}^{*2}-2x_{it}^*y_{it}^*\boldsymbol{\beta}+x_{it}^{*2}\boldsymbol{\beta}^2\right)\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$$

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(-2\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{it}^*y_{it}^*\right)+2\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{it}^{*2}\boldsymbol{\beta}\right)\right)=\mathbf{0}$$

$$\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}x_{it}^{*2}\right)\boldsymbol{\beta}=\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}x_{it}^*y_{it}^*\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}x_{it}^{*2}\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}x_{it}^*y_{it}^*\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X_t^{*2}}\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X_t^*Y_t^*}\right)$$

atau dapat disederhanakan notasinya menjadi

$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{x}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{y}^*\right)$, dengan $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{X_1^*}\\ \vdots\\ \mathbf{X_T^*}\end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{Y_1^*}\\ \vdots\\ \mathbf{Y_T^*}\end{bmatrix}$

Terbukti bahwa taksiran parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{x}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{y}^*\right)$,

dengan $\mathbf{x}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{X_1^*}\\ \vdots\\ \mathbf{X_T^*}\end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{Y_1^*}\\ \vdots\\ \mathbf{Y_T^*}\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_i^*=\begin{bmatrix}x_{1i}^*\\ x_{2i}^*\\ \vdots\\ x_{Ni}^*\end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}_i^*=\begin{bmatrix}y_{1i}^*\\ y_{2i}^*\\ \vdots\\ y_{Ni}^*\end{bmatrix}$.

3.5.2 Taksiran Parameter σ_ε^2

Taksiran parameter σ_ε^2 adalah

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}}{NT} \tag{3.15}$$

BUKTI

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}$$

Nilai dari σ_ε^2 yang memaksimumkan $\ln L$ diperoleh dengan

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{\partial\left(-\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}$$

θ^2 akan dianggap sebagai suatu parameter, sehingga taksiran parameter

untuk σ_ε^2 adalah:

$$\frac{\partial\left[-\frac{NT}{2}\ln\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right]}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \mathbf{0}$$

$$-\frac{NT}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}}{2\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}}{2\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^2} = \frac{NT}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}}{NT}$$

Terbukti bahwa taksiran parameter σ_ε^2 adalah $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}}{NT}$.

3.5.3 Taksiran Parameter δ dan θ

Pada fungsi loglikelihood di persamaan (3.13), parameter δ terdapat pada suku $-\frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right)$ dan $T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right|$. Nilai determinan dari bentuk $\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right|$, menurut Ord, pada tahun 1975, dapat diselesaikan dengan menguraikan $\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| = \prod_i (1-\delta\omega_i)$, dimana ω_i merupakan nilai eigen dari $\mathbf{W}_N$ (Anselin 2006). Kemudian, pada tahun 1997, Pace dan Barry menemukan metode lain untuk menghitung $\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right|$, yaitu dengan menggunakan *direct sparse matrix algorithms*, seperti dekomposisi LU (Anselin 2006).

Untuk menaksir parameter δ dan θ, langkah pertama adalah dengan mensubstitusikan nilai taksiran dari parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan σ_ε^2 ke dalam fungsi loglikelihood pada persamaan (3.13). Sehingga, akan didapat bentuk fungsi loglikelihood yang baru, yaitu:

$$\ln L = C - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\prod_i(1-\delta\omega_i), \tag{3.16}$$

dengan $C = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{NT}{2} + \frac{NT}{2}\ln(NT)$

BUKTI

Substitusikan $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t}{NT}$ ke dalam fungsi loglikelihood:

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t$$

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln\left(2\pi\frac{\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t}{NT}\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{1}{2\frac{\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t}{NT}}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t$$

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t\right) + \frac{NT}{2}\ln(NT) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right| - \frac{NT}{2}$$

yang dapat disusun ulang menjadi:

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{NT}{2} + \frac{NT}{2}\ln(NT) - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\left|\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{W}_N\right|$$

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{NT}{2} + \frac{NT}{2}\ln(NT) - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e}_t{}'\mathbf{e}_t\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\prod_i(1-\delta\omega_i)$$

Sehingga diperoleh fungsi loglikelihood yang baru, yaitu :

$$\ln L = C - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\prod_i(1-\delta\omega_i),$$

$$\text{dengan } \; C = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{NT}{2} + \frac{NT}{2}\ln(NT)$$

Selanjutnya, nilai dari parameter δ yang akan memaksimumkan fungsi loglikelihood diperoleh dengan :

$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta} = \mathbf{0}$, dimana θ akan dianggap sebagai suatu konstanta, sehingga

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta} = \frac{\partial\left(C - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\prod_i(1-\delta\omega_i)\right)}{\partial\delta}$$

Karena nilai log likelihood yang diperoleh merupakan fungsi polinomial terhadap δ maka solusi untuk δ menjadi tidak unik. Sehingga diperlukan suatu iterasi numerik untuk mendapatkan penaksir dari δ yang akan memaksimalkan fungsi log likelihood tersebut.

Pada iterasi ini fungsi objektif LnL diaproksimasi dengan *second order taylor series* di sekitar *initial value* $\delta^{(1)}$. Secara umum metode ini melakukan aproksimasi dengan taylor order kedua untuk log likelihood disekitar nilai parameter permulaan, yaitu :

$$LnL = LnL\big|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta - \delta^{(1)}\right) + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \frac{\left(\delta - \delta^{(1)}\right)^2}{2}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter δ dengan operasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta - \delta^{(1)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \delta} = \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} + \frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}} \left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right) = -\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}}$$

$$\left(\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right) = -\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} \cdot \left(\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}}\right)^{-1}$$

$$\delta^{(2)} = \delta^{(1)} - \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(1)}} \cdot \left(\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(1)}}\right)^{-1}$$

Bila pada persamaan diatas , $\delta^{(2)}$ menggantikan $\delta^{(1)}$ maka akan diperoleh $\delta^{(3)}$ dan begitu seterusnya. Sehingga diperoleh persamaan umumnya sebagai berikut :

$$\delta^{(n+1)} = \delta^{(n)} - \frac{\partial LnL}{\partial \delta}\bigg|_{\delta^{(n)}} \cdot \left(\frac{\partial^2 LnL}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta^{(n)}}\right)^{-1}$$

Persamaan inilah yang kemudian dikenal sebagai *Newton-Raphson Iteration*. Jika iterasi sudah mencapai konvergen yaitu ketika $\delta^{(n+1)} = \delta^{(n)}$, atau $\left|\delta^{(n+1)} - \delta^{(n)}\right| < \varepsilon$, maka dari persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa $\left.\frac{\partial LnL}{\partial \delta}\right|_{\delta^{(n)}} = 0$. Hal ini telah memenuhi syarat *first order condition.*

Selanjutnya, untuk mencari taksiran parameter θ, nilai nilai dari parameter θ yang akan memaksimumkan fungsi loglikelihood diperoleh dengan : $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \mathbf{0}$, dimana δ akan dianggap sebagai suatu konstanta, sehingga

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(C - \frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right) + \frac{N}{2}\ln\theta^2 + T\ln\prod_i (1-\delta\omega_i)\right)}{\partial \theta}$$

Pada fungsi log likelihood di persamaan (3.13) di atas, parameter θ juga terdapat dalam suku $-\frac{NT}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t}'\mathbf{e_t}\right)$. Bila suku tersebut dijabarkan, maka akan didapatkan bentuk fungsi polinomial terhadap θ, sehingga solusi untuk θ juga menjadi tidak unik. Seperti halnya mencari taksiran parameter untuk δ, maka diperlukan suatu iterasi numerik untuk mendapatkan penaksir dari θ yang akan memaksimalkan fungsi log likelihood tersebut.

Metode numerik yang akan digunakan untuk menaksir parameter θ ini sama seperti metode numerik *Newton-Raphson Iteration* untuk menaksir parameter δ, hanya saja parameter δ akan digantikan dengan parameter θ di setiap tahapan-tahapannya.

BAB IV

APLIKASI *RANDOM EFFECTS SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL*

Pada bab ini akan dibahas aplikasi atau contoh dari penaksiran parameter untuk *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model*. Penaksiran parameter untuk model regresi ini akan menggunakan bantuan *software Matlab 7* dan *SPSS 16* dalam hal pengolahan data. Data yang digunakan adalah data penjualan rokok di 46 negara bagian Amerika selama kurun waktu 6 tahun yang diambil dari Baltagi (2005).

Variabel-variabel yang akan digunakan adalah :

- Variabel dependen :

$Log\ C_{it}$ = penjualan rokok per kapita kepada orang-orang pada usia diperbolehkan merokok (berusia 14 tahun atau lebih) di negara bagian ke-*i* pada waktu ke-*t*. (dalam skala logaritma)

- Variabel independen :

Log P_{it} = rata-rata harga penjualan rokok di negara bagian ke-*i* pada waktu ke-*t*. (dalam skala logaritma)

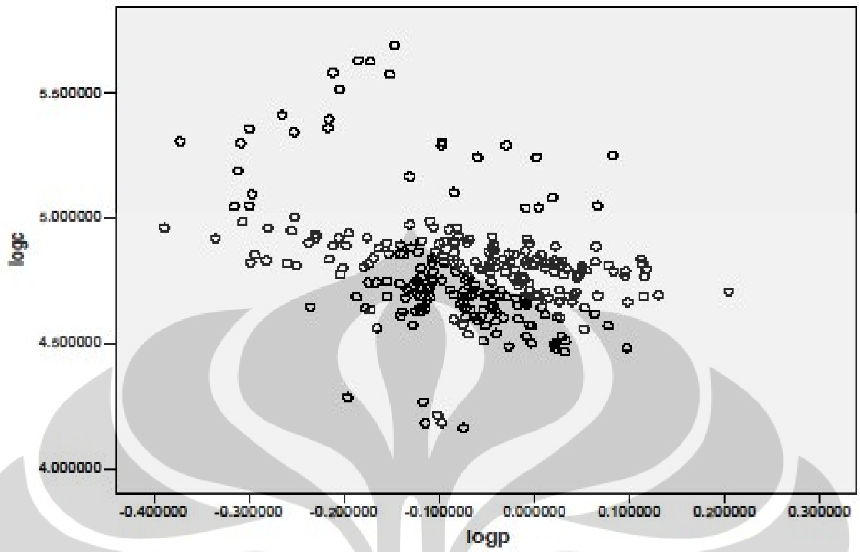
Log Y_{it} = pendapatan perkapita di negara bagian ke-*i* pada waktu ke-*t*. (dalam skala logaritma)

Log Pn_{it} = harga minimum rokok dari negara-negara bagian yang bertetanggaan dengan negara bagian ke-*i*, pada waktu ke-*t*. (dalam skala logaritma)

Tujuan : Ingin dilihat pengaruh dari variabel-variabel independen terhadap variabel dependen.

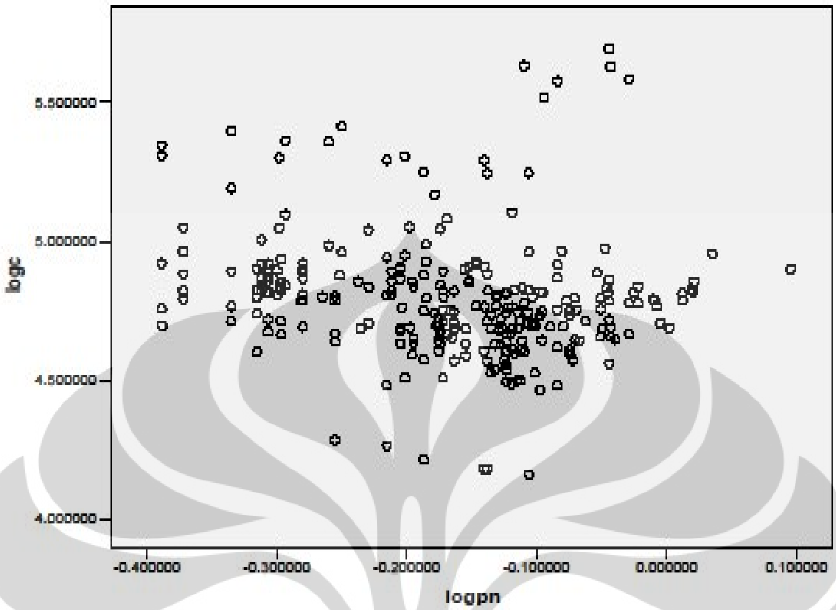
4.1 *SCATTER PLOT* DATA

Scatter plot data merupakan suatu plot yang digunakan untuk melihat hubungan antarvariabel. Scatter plot data untuk variabel-variabel di atas adalah sebagai berikut :



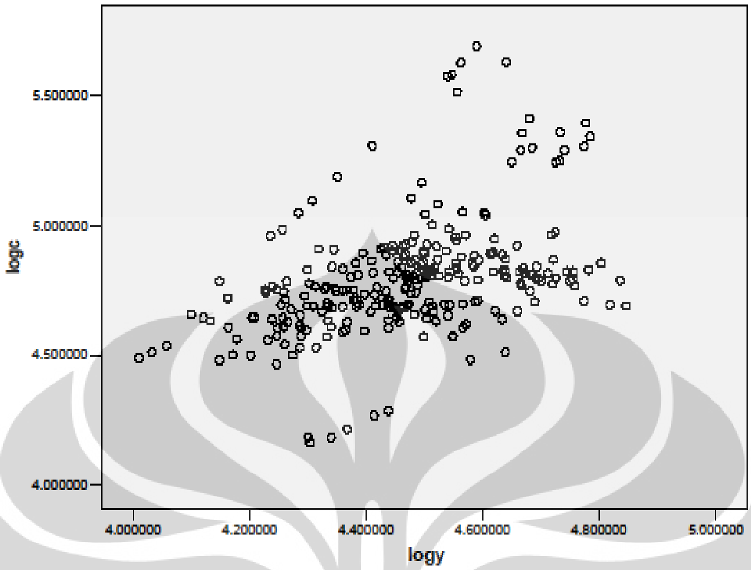
Gambar 2: Scatter plot antara log rata-rata harga penjualan rokok dan log penjualan rokok perkapita

Dari gambar 2 di atas terlihat bahwa ada hubungan linear antara log rata-rata harga penjualan rokok dengan log penjualan rokok perkapita.



Gambar 3: Scatter plot antara log harga minimum rokok dari negara-negara bagian yang bertetanggaan dan log penjualan rokok perkapita

Dari gambar 3 di atas terlihat bahwa ada hubungan linear antara log harga minimum rokok dari negara-negara bagian yang bertetanggaan dan log penjualan rokok perkapita.



Gambar 4: Scatter plot antara log pendapatan perkapita dan log penjualan rokok perkapita

Dari gambar 4 di atas terlihat bahwa ada hubungan linear antara log pendapatan perkapita dan dan log penjualan rokok perkapita.

4.2 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI DATA PANEL DENGAN EFEK *RANDOM*

Model regresi data panel satu arah dengan efek random adalah :

$$y_{it} = x_{it}\beta + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

Dimana μ_i adalah pengaruh yang tidak terobservasi dari individu (negara bagian) ke – *i*.

Berdasarkan output dari program Eviews yang terdapat pada lampiran 4, didapat model regresi data panel satu arah dengan efek random adalah sebagai berikut :

$$\log \hat{C}_{it} = 3{,}69632 - 0{,}0404 \log P_{it} - 0{,}01898 \log Pn_{it} + 0{,}019337 \log Y_{it}$$

Nilai *R-Squared* untuk model di atas sudah sangat bagus yaitu sebesar 99,18%, tetapi dengan MSE sebesar 0,023877.

4.3 PENAKSIRAN PARAMETER *RANDOM EFFECTS SPATIAL LAG PANEL DATA MODEL*

Random effects spatial lag panel data model pada suatu lokasi *i* dinyatakan sebagai berikut:

$$y_{it} = \delta \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_{jt} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{itk} + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

Dimana μ_i merupakan pengaruh yang tidak terobservasi dari individu (lokasi) ke-*i*. Yang dimaksud individu ke-*i* pada kasus ini adalah negara bagian ke-*i* , sehingga pengaruh-pengaruh yang tidak terobservasi tersebut adalah pengaruh yang tidak terobservasi dari setiap negara bagian ke-*i*. Sebagai contoh, pengaruh-pengaruh tersebut mungkin meliputi beberapa hal di bawah ini :

- Negara dengan kawasan perlindungan Indian, seperti Montana, New Mexico, dan Arizona, menjadi negara bagian yang mengalami kerugian paling besar dari penghasilan pajak rokok, disebabkan oleh orang-orang non Indian yang membeli rokok bebas pajak dari kawasan perlindungan tersebut.

- Florida, Texas, Washington, dan Georgia, termasuk negara bagian yang mengalami kerugian paling besar dari penghasilan pajak rokok, disebabkan adanya kawasan basis militer dimana pembelian rokok di kawasan tersebut bebas pajak.
- Utah, yang memiliki persentase populasi Mormon yang besar (populasi Mormon adalah sekte agama yang melarang merokok) memiliki penjualan perkapita rokok pada tahun 1988 sejumlah 55 bungkus, yaitu sedikit lebih kecil dari separuh penjualan perkapita rata-rata nasional yaitu 113 bungkus.
- Nevada, sebuah negara bagian yang merupakan tujuan wisata, memiliki penjualan perkapita rokok pada tahun 1988 sejumlah 142 bungkus atau 29 bungkus lebih banyak dari rata-rata nasional.

Proses *random effects*-nya adalah pemilihan negara-negara bagian dilakukan secara *random* dari populasi negara bagian yang ada. Pada tugas akhir ini sampel yang digunakan adalah sebanyak 46 negara bagian yang telah dipilih secara acak dari 50 negara bagian di Amerika. Sehingga dalam proses pemilihan acak ini, diasumsikan bahwa $\mu_i \sim \text{NIID}\left(0, \sigma_\mu^2\right)$.

Berdasarkan hasil yang didapat dari pengolahan data menggunakan *matlab 7* (terdapat pada lampiran 4), didapat taksiran parameter untuk *random effects spatial lag panel data model* adalah sebagai berikut :

$$\log \hat{C}_{it} = 0{,}1080 \log \sum_{j=1}^{N} w_{ij} C_{jt} - 0{,}6148 \log P_{it} + 0{,}3973 \log Pn_{it} + 0{,}4330 \log Y_{it}$$

Pada lampiran tersebut dapat dilihat bahwa nilai *R-squared* untuk model di atas adalah sebesar 0,9650, dengan nilai MSE sebesar 0,0018. Nilai *R-squared* ini sudah besar dan nilai MSE-nya kecil , sehingga dapat disimpulkan bahwa taksiran parameter untuk *random effects spatial lag panel data model* di atas sudah bagus.

Selanjutnya, akan diperiksa asumsi-asumsi dari *random effects spatial lag panel data model.*

4.4 PEMERIKSAAN ASUMSI

Pada model regresi spasial data panel, diasumsikan bahwa error berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan, serta error-nya saling bebas.

4.4.1 Error Berdistribusi Normal

Untuk asumsi normal ini, akan dicek dengan menggunakan

Kolmogorov-Smirnov.

Berdasarkan hasil olahan dengan SPSS 16, didapatkan output :

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		residual
N		276
Normal Parameters[a]	Mean	.0114780735
	Std. Deviation	.04085922112
Most Extreme Differences	Absolute	.062
	Positive	.045
	Negative	-.062
Kolmogorov-Smirnov Z		1.037
Asymp. Sig. (2-tailed)		.232

a. Test distribution is Normal.

Tabel 1: Uji Normalitas Residual

Hipotesis :

H_0 : residual berdistribusi Normal

H_1 : residual tidak berdistribusi Normal

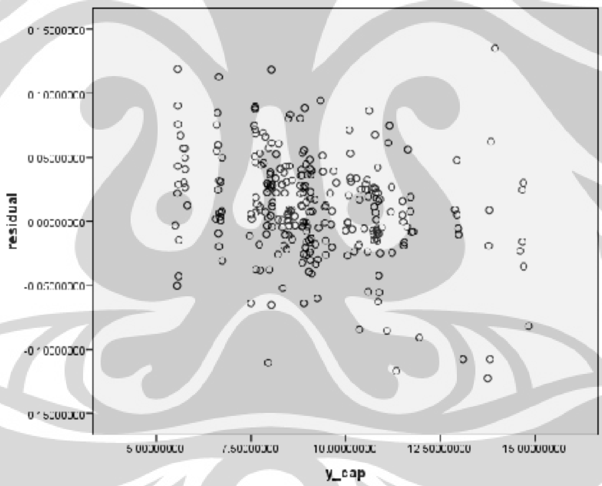
Tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$

Aturan keputusan : H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha$.

Keputusan : karena $\hat{\alpha} = 1,037 > \alpha = 0,05$, maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan : Dengan tingkat signifikansi 5%, didapat bahwa residual berdistribusi Normal.

4.4.2 Variansi Error Konstan (Homoskedastis)



Gambar 5: *Scatter plot* antara nilai prediksi Y terhadap residual

Berdasarkan gambar 5 diatas terlihat bahwa antara nilai prediksi dari variabel dependen Y terhadap residual tidak membentuk pola tertentu, maka asumsi variansi konstan (*homoskedastisitas*) dianggap terpenuhi.

4.4.3 Error Saling Bebas

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	.606[a]	.368	.361	.18152	1.810

a. Predictors: (Constant), log_y, log_pn, log_p

b. Dependent Variable: log_c

Tabel 2: Uji Error Antar-observasi Saling Bebas

Pengujian apakah terdapat korelasi antar-residual akan dilakukan dengan menggunakan uji *Durbin-Watson*. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0: Tidak ada korelasi antar-residual,

H_1: Terdapat korelasi antar-residual.

Tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$

Aturan keputusan: H_0 ditolak jika

$$d < d_{L,\alpha/2} \;\; atau \;\; (4-d) < d_{U,\alpha/2}$$

Keputusan : Karena $d = 1,810 > d_L$=*1,38* maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan : Dengan tingkat signifikansi 5%, didapat bahwa residual tidak saling berkorelasi, atau dengan perkataan lain tidak terjadi otokorelasi.

Karena residual tidak saling berkorelasi dan dengan tambahan asumsi bahwa error berdistribusi normal, maka dapat disimpulkan bahwa error saling bebas.

4.5 Kesimpulan untuk Aplikasi Model

Dari dua model di atas yaitu model regresi data panel tanpa melibatkan aspek korelasi spasial dan model regresi data panel yang melibatkan aspek korelasi spasial (*Random Effects Spatial Lag Panel Data Model*), dapat dilihat bahwa MSE untuk model pertama adalah sebesar 0,023877; sedangkan MSE untuk model kedua adalah sangat kecil yaitu 0,0018. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika terdapat aspek korelasi spasial namun tidak diikutsertakan dalam model, maka model yang didapat akan kurang baik.

Untuk *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model*, dimana aspek korelasi spasialnya diikutsertakan dalam model, dari hasil penelitian di atas dapat dilihat bahwa semua asumsi terpenuhi dengan nilai R-Squared yang besar dan nilai MSE yang kecil, sehingga dapat disimpulkan bahwa taksiran dari *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* untuk studi kasus tersebut sudah baik dan sudah dapat menggambarkan keadaan penjualan rokok di seluruh negara bagian Amerika.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Model spasial data panel merupakan model regresi data panel yang turut melibatkan aspek korelasi spasial yang ada. Seperti halnya model spasial dependen, model spasial data panel juga terbagi menjadi model spasial lag data panel dan model spasial error data panel. Model spasial lag terjadi jika terdapat ketergantungan antara nilai observasi variabel dependen di suatu lokasi dengan nilai observasi variabel dependen di lokasi sekitarnya. Sedangkan model spasial error terjadi jika error pada suatu lokasi bergantung pada error di lokasi sekitarnya. Pada tugas akhir ini, variabel dependen pada contoh kasus yang dibahas juga menunjukkan suatu lokasi, yaitu negara-negara bagian Amerika.

Random Effects Spatial Lag Panel Data Model merupakan model spasial lag data panel yang melibatkan *Random Effects.* Sehingga pengaruh yang tidak diketahui dari suatu individu diasumsikan sebagai variabel random yang mempunyai distribusi. Model ini dapat ditaksir dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

5.2 SARAN

- Untuk pembahasan lebih lanjut, dapat dibahas *Random Effects Spatial Error Panel Data Model.* Karena pada tugas akhir ini hanya dibahas spasial lag saja.
- Dapat juga dibahas model *Random Effects Spatial Lag Panel Data Model* dan *Random Effects Spatial Error Panel Data Model* dimana komponen error yang digunakan adalah komponen error dua arah (*two-way error component*).

DAFTAR PUSTAKA

Andra, Novi. 2007. *Model Regresi Linear pada Data Spasial Dependen*. Departemen Matematika (Skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

Anselin, Luc. Julie Le Gallo., Hubert Jayet. 2006. *Spatial Panel Econometrics.In: Matyas L, SevestreP. (eds) The Econometrics of Panel Data,Fundamentals and Recent Developments in Theoryand Practice, 3rd* edn. Kluwer, Dordrecht, pp 901-969

Baltagi, Badi H. 2005. *Econometric Analysis of Panel Data*. 3rd ed. John Wiley&Sons Ltd, Chichester.

Elhorst , J P. 2003. *Specification and estimation of spatial panel data models*. International Regional Science Review 26(3):244-268

Handhika, Tri. 2008. *Penggunaan Metode Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) pada General Linear Mixed Model*. Departemen Matematika (Skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

Kosasih, Rifki. 2008. *Penaksiran Parameter pada Model Regresi Spasial Panel Data Satu Arah*. Departemen Matematika (Skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

Magnus JR, Neudecker H. 1988. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley, Chichester, New York.

Mardhiyah, Iffatul. 2008. *Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Tidak Lengkap Komponen Error Dua Arah*. Departemen Matematika (Skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

Seber, George A. F. 2008. *A Matrix Handbook for Statisticians*. *John Wiley* &Sons, Inc., New Jersey.

Shearle, S Hayley. 1982. *Matrix Algebra Useful for Statistics. John Wiley*&Sons, Inc., New York.

http://www.regroningen.nl/elhorst/software.html, 16 Juli 2009, pk.09.00.

Lampiran 1

Menunjukkan **θ** memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta})$

jika dan hanya jika **θ** memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$

Akan dibuktikan :

θ memaksimumkan $L(\theta)$ $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

Dimana θ = $(\theta_1, \theta_2, ...\theta_p)$

Bukti :

$(\rightarrow)$ Oleh karena θ memaksimumkan $L(\theta)$ maka :

- $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$$

  $$\vdots$$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

- $D = \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} \cdot \dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \theta_j}\right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p. j = 1, 2, …, p.

  $i \neq j$

akan ditunjukkan bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$ yaitu :

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$$

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0$$

$\vdots$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i} + \frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i} + \frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right)\cdot 0 + \frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i} < \frac{1}{L(\theta)}\cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i} < 0$$

- $D = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p. j = 1, 2, …, p. i $\neq$ j

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}}{L(\theta)}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_j}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}}{L(\theta)}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)}{L^2(\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}}{\partial \theta_j}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)}{L^2(\theta)}$$

$$D = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)}{L^2(\theta)}\right) \cdot \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)}{L^2(\theta)}\right) - \left(\frac{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot L(\theta) - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)}{L^2(\theta)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{L^4(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} \cdot L^2(\theta) + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\theta) \cdot \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2 - \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\theta)\right]$$

$$- \frac{1}{L^4(\theta)}\left[\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2 \cdot L(\theta)^2 + \left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot L(\theta) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)\right]$$

$$= \frac{L^2(\theta)}{L^4(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)^2\right] +$$

$$\frac{L(\theta)}{L^4(\theta)}\left[-2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]$$

$$=\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{L^3(\theta)}\left[-2\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\cdot L(\theta)\cdot 0\cdot 0\right)-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot(0)^2-(0)^2\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]$$

$$=\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]>\frac{1}{L^2(\theta)}\cdot 0=0$$

$$\therefore D=\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_j}-\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2>0,$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Akan dibuktikan :

$(\leftarrow)$Oleh karena θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$ maka :

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_1}=0$
- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_2}=0$

  $\vdots$

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_p}=0$

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2{}_i}<0,$ i = 1, 2, …, p

- $D = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2{}_j} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0,$ i = 1, 2, …, p. j = 1, 2, …, p. i $\neq$ j

akan ditunjukkan bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ yaitu :

- $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{L(\theta)}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1}$$

  $$= L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

- $\therefore \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0$

  $\vdots$

  $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$

  $$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = \frac{L(\theta)}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p}$$

  $$= L(\theta) \cdot \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_p} = L(\theta) \cdot 0 = 0$$

  $\therefore \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_p} = 0$

- $\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2{}_i} < 0,$ i = 1, 2, …, p

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(L(\theta)\cdot\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} + L(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= \frac{1}{L(\theta)}\left[(0)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$= L(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2} < L(\theta)\cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} < 0$$

$$D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \theta_j}\right) > 0,$$ i = 1, 2, …, p. j = 1, 2, …, p. i $\neq$ j

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} = \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} = \frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j}\right)^2 + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} + L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

$$D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i}\cdot\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \theta_j}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2+L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\right]\right)\cdot\left(\frac{1}{L(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2+L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right]\right)-\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}+L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2$$

$$=\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2+L^4(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}\right.$$

$$+L^2(\theta)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}+L^2(\theta)\cdot\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}$$

$$-\frac{1}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2+L^4(\theta)\cdot\left(\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$=\frac{L^4(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$+\frac{L^2(\theta)}{L^2(\theta)}\left[\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}+\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_j}\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$=L^2(\theta)\left[\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]$$

$$=+\left[(0)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}+(0)^2\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}-2\cdot 0\cdot 0\cdot L^2(\theta)\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

$$=L^2(\theta)\left[\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)^2\right]>L^2(\theta)\cdot 0=0$$

$$\therefore D = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_i} \cdot \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2_j} - \left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^2 > 0,$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa θ juga memaksimumkan $L(\theta)$.

Terbukti bahwa θ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$

Lampiran 2

Pembuktian $\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}') = \sigma_\mu^2 \mathbf{I}_\mathrm{N}$ dan $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_\mathrm{NT}$

- Akan dibuktikan bahwa $\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}') = \sigma_\mu^2 \mathbf{I}_\mathrm{N}$

$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_\mathrm{N} \end{bmatrix}$, sehingga $\boldsymbol{\mu}' = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_\mathrm{N} \end{bmatrix}$

Maka,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}') = \mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_\mathrm{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_\mathrm{N} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{E}\begin{pmatrix} \mu_1\mu_1 & \mu_1\mu_2 & \cdots & \mu_1\mu_\mathrm{N} \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2\mu_2 & \cdots & \mu_2\mu_\mathrm{N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_\mathrm{N}\mu_1 & \mu_\mathrm{N}\mu_2 & \cdots & \mu_\mathrm{N}\mu_\mathrm{N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{E}(\mu_1\mu_1) & \mathrm{E}(\mu_1\mu_2) & \cdots & \mathrm{E}(\mu_1\mu_\mathrm{N}) \\ \mathrm{E}(\mu_2\mu_1) & \mathrm{E}(\mu_2\mu_2) & \cdots & \mathrm{E}(\mu_2\mu_\mathrm{N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{E}(\mu_\mathrm{N}\mu_1) & \mathrm{E}(\mu_\mathrm{N}\mu_2) & \cdots & \mathrm{E}(\mu_\mathrm{N}\mu_\mathrm{N}) \end{pmatrix}$$

karena diasumsikan $\begin{aligned} \mathrm{E}(\mu_\mathrm{i}\mu_\mathrm{j}) &= \sigma_\mu^2, && \text{jika i=j} \\ &= 0, && \text{jika i} \neq \text{j} \end{aligned}$, maka bentuk matriks di atas dapat ditulis menjadi

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\mu^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_\mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_\mu^2 \mathbf{I}_\mathrm{N}$$

➢ Akan dibuktikan bahwa $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_\mathrm{NT}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \varepsilon_{2T} \\ \vdots \\ \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}$$; vektor yang berukuran *NTx1*

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{N1} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{N2} & \cdots & \varepsilon_{1T} & \varepsilon_{2T} & \cdots & \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right) = E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \varepsilon_{2T} \\ \vdots \\ \varepsilon_{NT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{N1} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{N2} & \cdots & \varepsilon_{1T} & \varepsilon_{2T} & \cdots & \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}\right)$$

$$= E\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{11}\varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{11}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{11}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{11}\varepsilon_{NT} \\ \varepsilon_{21}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{21}\varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{21}\varepsilon_{N1} & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{N1}\varepsilon_{11} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{N1}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{N1}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{11}\varepsilon_{NT} \\ \varepsilon_{12}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{12}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{12}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{12}\varepsilon_{NT} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{N2}\varepsilon_{11} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{N2}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{N2}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{N2}\varepsilon_{NT} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{1T}\varepsilon_{11} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{1T}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{1T}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{1T}\varepsilon_{NT} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{NT}\varepsilon_{11} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{NT}\varepsilon_{N1} & \cdots & \varepsilon_{NT}\varepsilon_{1T} & \cdots & \varepsilon_{NT}\varepsilon_{NT} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}) & E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}) & \cdots & E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{NT}) \\
E(\varepsilon_{21}\varepsilon_{11}) & E(\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}) & \cdots & E(\varepsilon_{21}\varepsilon_{N1}) & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E(\varepsilon_{N1}\varepsilon_{11}) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_{N1}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{N1}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{11}\varepsilon_{NT}) \\
E(\varepsilon_{12}\varepsilon_{11}) & E(\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}) & \cdots & E(\varepsilon_{12}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{12}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{12}\varepsilon_{NT}) \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E(\varepsilon_{N2}\varepsilon_{11}) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_{N2}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{N2}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{N2}\varepsilon_{NT}) \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E(\varepsilon_{1T}\varepsilon_{11}) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_{1T}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{1T}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{1T}\varepsilon_{NT}) \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E(\varepsilon_{NT}\varepsilon_{11}) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_{NT}\varepsilon_{N1}) & \cdots & E(\varepsilon_{NT}\varepsilon_{1T}) & \cdots & E(\varepsilon_{NT}\varepsilon_{NT})
\end{pmatrix}
$$

karena diasumsikan $\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) &= \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{jika i=j} \\ &= 0, \quad \text{jika i} \neq \text{j} \end{aligned}$, maka bentuk matriks di atas dapat

ditulis menjadi :

$$
= \begin{bmatrix}
\sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\
& & & & \ddots & & & \\
\vdots & & & & & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \vdots \\
0 & & & & & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2
\end{bmatrix}
$$

$$
= \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\
& & & & \ddots & & & \\
\vdots & & & & & 1 & 0 & \vdots \\
0 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \, \mathbf{I}_{NT}
$$

Lampiran 3

DATA

residual	y_cap	log_c	log_p	log_pn	log_y
-.01086203	8.50449498	4.48	.02	-.08	4.15
.00091927	8.32895001	4.75	-.10	-.07	4.36
.01575829	11.50496680	4.64	-.10	-.18	4.12
.08480923	6.62437828	4.82	.02	-.11	4.66
.08856307	7.59474732	4.96	-.10	-.08	4.72
.00120418	8.22374445	5.10	.00	-.12	4.48
.08751683	7.61015918	5.41	-.20	-.25	4.68
.00691596	6.71550351	4.86	.00	-.04	4.41
-.00483156	8.32691484	4.65	.00	-.17	4.29
-.03369039	9.21397839	4.60	.00	-.07	4.30
.07467112	11.15628490	4.89	.02	-.28	4.63
.02206135	9.59170330	4.90	-.10	-.28	4.45
.05606438	11.64297897	4.69	.04	-.18	4.43
.00041600	8.46561524	4.61	.00	-.18	4.44
-.12268666	13.75266589	4.96	-.20	-.25	4.24
.02978526	7.92748748	4.76	.00	-.12	4.24
.04956347	5.76252810	4.91	.00	-.15	4.32
-.00704387	10.00456952	4.80	-.10	-.26	4.50
.01776036	9.07055446	4.85	.01	-.15	4.58
.02887951	8.03240939	4.90	.00	-.16	4.50
.05555532	8.90271045	4.73	.00	-.07	4.41
-.02039256	8.94059549	4.49	.00	-.12	4.01
.02456026	14.66022801	4.92	-.10	-.28	4.46
.03566034	8.81925498	4.75	.00	-.08	4.33
.08637364	10.62567079	4.70	.00	-.18	4.39
-.00105188	8.86880063	5.25	.00	-.11	4.65
.03675987	8.00176033	5.58	-.10	-.08	4.54
.06618523	7.88785811	4.87	.00	-.08	4.72

.08031725	8.48983702	4.60	.00	-.11	4.25
.01133682	9.44757387	4.83	.00	-.11	4.63
.04611153	7.62111995	4.57	.00	-.07	4.25
.03263107	10.56712714	4.87	-.10	-.28	4.48
-.01815174	10.35378393	4.73	-.10	-.18	4.29
.04207302	10.84628235	4.76	.04	-.12	4.47
.11293680	6.65593765	4.96	.00	-.11	4.48
-.05024817	5.55076893	4.56	-.10	-.04	4.18
.01790252	10.81370206	4.61	.00	-.07	4.26
.04786506	12.93142265	4.69	.00	-.28	4.25
.02161375	8.80670533	4.69	.00	-.12	4.36
-.02415586	9.05143545	4.16	.00	-.11	4.30
.00902127	7.72802420	4.86	.00	-.15	4.45
.01149723	10.75609221	4.81	-.20	-.28	4.39
.09027702	5.56658720	4.62	.06	-.08	4.57
.06747196	10.77699496	4.79	-.10	-.28	4.15
.04453475	8.95600721	4.71	.00	-.06	4.44
.07133480	10.10495635	4.92	.00	-.08	4.43
-.00337676	8.51155853	4.50	.00	-.11	4.17
.04103656	8.27956818	4.73	.00	-.10	4.40
-.01859565	11.53375709	4.63	-.10	-.20	4.13
.05959350	6.63964359	4.82	.00	-.10	4.67
.08938677	7.61358538	4.97	-.10	-.05	4.72
.06057698	8.23761975	5.17	-.10	-.18	4.50
.01874799	7.62965069	5.36	-.30	-.26	4.67
.05523780	6.59707915	4.80	.12	-.07	4.45
.02829540	8.32251159	4.69	.00	-.24	4.31
-.06017664	9.25683731	4.61	-.10	-.12	4.34
.02672979	11.21225684	4.87	.00	-.31	4.64
-.02024977	9.64204774	4.89	-.20	-.31	4.47
.00783693	11.71065490	4.68	.00	-.20	4.46
.00535116	8.49339795	4.63	-.10	-.20	4.46
-.10783656	13.80301763	4.99	-.30	-.26	4.26

.02274359	7.92498618	4.75	-.10	-.17	4.23
.05684584	5.76290032	4.91	.00	-.20	4.34
-.02674962	10.04879172	4.81	-.10	-.30	4.52
.03656781	9.08197053	4.87	.00	-.20	4.59
.01170629	8.05816265	4.89	-.10	-.21	4.50
.02721897	8.93839636	4.72	-.10	-.13	4.43
-.00079883	8.95362405	4.51	.00	-.17	4.03
.03011131	14.68907944	4.92	-.20	-.31	4.45
.03621664	8.84386172	4.77	-.10	-.14	4.33
.02508263	10.69544559	4.69	-.10	-.20	4.44
.02656725	8.88603307	5.29	-.10	-.14	4.67
-.06524893	8.03950879	5.52	-.20	-.09	4.56
.04536894	7.83336135	4.80	.05	-.13	4.73
-.02179264	8.44311829	4.47	.03	-.10	4.25
.03865725	9.40292794	4.81	.05	-.13	4.64
.01339617	7.66243794	4.57	-.10	-.12	4.29
.01942937	10.60027658	4.86	-.10	-.31	4.50
.03361799	10.28008916	4.69	.01	-.20	4.30
.01592381	10.86491788	4.74	.00	-.18	4.49
.00185894	6.57457562	4.77	.05	-.13	4.49
-.01451974	5.59601903	4.65	-.20	-.07	4.21
.02212560	10.86208287	4.63	-.10	-.13	4.26
-.00569878	12.97323873	4.68	-.10	-.31	4.27
.04042082	8.82569844	4.71	.00	-.17	4.38
.00734073	9.04957858	4.18	-.10	-.14	4.30
.05311827	7.73575322	4.90	.00	-.20	4.46
.02577050	10.78292301	4.82	-.20	-.31	4.41
.07581961	5.57115953	4.61	.02	-.14	4.57
-.01320643	10.80890332	4.72	-.10	-.31	4.16
.03646756	8.99003877	4.71	.00	-.11	4.44
.05298930	10.13113482	4.91	-.10	-.14	4.43
.00028547	8.50653534	4.50	.02	-.12	4.20
.02894711	8.31242608	4.75	.00	-.11	4.43

.00489911	11.50316097	4.61	.00	-.12	4.16
.03179834	6.66493707	4.81	.00	-.04	4.68
.00177577	7.52598346	4.79	.08	.01	4.75
.02233901	8.16618874	5.04	.01	-.17	4.50
-.03768194	7.63062523	5.30	-.30	-.30	4.68
.07541345	6.60068571	4.82	.11	-.12	4.49
-.01894132	8.37475459	4.70	-.10	-.18	4.33
-.02987484	9.26763289	4.63	-.10	-.13	4.37
.06132573	11.12683301	4.83	.06	-.32	4.64
-.00247094	9.62187721	4.90	-.20	-.32	4.44
.01902854	11.71759449	4.69	.00	-.14	4.46
.08346501	8.53479976	4.74	-.10	-.14	4.48
-.01897783	13.77291992	5.05	-.30	-.30	4.28
-.03787141	7.98840274	4.75	-.10	-.07	4.25
.03022623	5.73338295	4.86	.00	-.21	4.38
-.00139464	10.05573188	4.82	-.10	-.31	4.56
.04826411	9.05192055	4.82	.02	-.21	4.62
.00442784	8.02636227	4.86	-.10	-.24	4.48
-.00028809	8.89243151	4.65	.01	-.04	4.45
-.00409633	8.98756960	4.54	.00	-.12	4.06
-.02312158	14.60567045	4.80	.00	-.32	4.47
-.03231540	8.85980326	4.71	-.10	-.14	4.38
-.01007305	10.73291809	4.68	-.10	-.13	4.44
.01172264	8.86285028	5.24	.00	-.14	4.73
-.00429370	8.05724793	5.58	-.20	-.03	4.55
.00733887	7.88938865	4.79	.06	-.01	4.75
.00545141	8.46388711	4.50	.02	-.11	4.27
-.00108884	9.44957231	4.78	.05	-.03	4.67
.07474806	7.58236689	4.54	.00	-.13	4.26
.02501973	10.53257840	4.80	.00	-.32	4.50
-.01955726	10.32841746	4.69	.00	-.13	4.33
-.04244769	10.87559910	4.68	.00	-.17	4.50
-.00950225	6.64852110	4.82	.01	.02	4.50

.02201750	5.55806299	4.64	-.10	-.12	4.24
.00679993	10.79122162	4.53	.00	-.14	4.29
.00907402	12.88680746	4.60	.03	-.32	4.29
.02778879	8.80371227	4.67	.04	-.12	4.41
-.02162081	9.08398658	4.18	-.10	-.14	4.34
-.01798595	7.71759139	4.81	.00	-.21	4.47
.00121867	10.80525646	4.82	-.30	-.32	4.44
.02883651	5.58183864	4.57	.00	-.14	4.55
-.01545497	10.83130670	4.74	-.10	-.32	4.23
.01515663	8.96373680	4.67	.00	-.03	4.46
.03095185	10.14529648	4.88	-.10	-.14	4.43
.04315364	8.51863852	4.56	.05	-.12	4.23
-.05220076	8.33442378	4.70	.00	-.10	4.47
-.01664476	11.54680444	4.65	.00	-.10	4.20
.00654461	6.67428916	4.80	.00	-.05	4.69
.00546829	7.50914320	4.77	.12	-.01	4.76
.05252251	8.16577228	5.08	.02	-.17	4.52
.05083882	7.59805001	5.36	-.20	-.29	4.73
.02461560	6.63908914	4.81	.08	-.12	4.51
-.01040603	8.40485109	4.75	-.10	-.17	4.37
-.00509807	9.28644177	4.69	-.10	-.16	4.38
.00741213	11.18795557	4.83	.02	-.30	4.67
.00810812	9.64272292	4.94	-.20	-.30	4.48
-.00840960	11.74718511	4.69	.00	-.15	4.46
.00932451	8.50563679	4.63	.00	-.15	4.52
.00868636	13.78616472	5.10	-.30	-.29	4.31
.02848525	7.95192631	4.79	.00	-.08	4.26
.02656706	5.76677525	4.89	.00	-.17	4.39
-.00049128	10.05221234	4.84	-.10	-.29	4.58
-.01357614	9.08711771	4.80	.01	-.17	4.64
.02550455	7.98385344	4.84	.00	-.23	4.52
.08859870	8.91941877	4.76	.00	-.05	4.47
.04111804	9.04964460	4.66	.00	-.04	4.10

-.01600666	14.66135117	4.85	-.10	-.30	4.49
-.00337655	8.86910355	4.75	-.10	-.19	4.38
-.01470153	10.75817790	4.69	-.10	-.16	4.47
.08043599	8.80084168	5.25	.08	-.19	4.73
.06119419	8.04517428	5.63	-.10	-.04	4.56
-.00329841	7.92485178	4.83	.03	.02	4.78
.00770306	8.49276450	4.53	.03	-.10	4.31
.01232159	9.47476497	4.81	.03	-.03	4.69
.06846174	7.62653674	4.59	.00	-.15	4.36
.02901972	10.53325216	4.83	.00	-.30	4.51
.01685732	10.36631669	4.75	.00	-.10	4.35
-.00748414	10.81386917	4.67	.10	-.17	4.52
-.01963044	6.65969584	4.81	.00	.01	4.50
.11883837	5.56333351	4.74	-.10	-.12	4.26
-.00758972	10.84379225	4.57	.00	-.16	4.33
.00505693	12.93561949	4.67	.03	-.30	4.32
-.00420380	8.84949313	4.69	.04	-.04	4.42
.02291286	9.07185258	4.22	-.10	-.19	4.37
-.03824919	7.75147672	4.82	.00	-.17	4.51
-.00618816	10.82021170	4.86	-.20	-.30	4.48
.04311297	5.56644294	4.57	.00	-.19	4.55
.02624126	10.74603763	4.71	.03	-.30	4.26
-.00754528	8.97479251	4.66	.00	-.05	4.48
-.00618839	10.16971171	4.88	-.10	-.19	4.46
.03206924	8.58565055	4.62	.01	-.11	4.29
.02216376	8.39476284	4.83	-.10	-.12	4.51
-.00032744	11.52294823	4.64	.05	-.11	4.26
.00077925	6.69712772	4.82	.00	-.10	4.71
-.01124540	7.46444847	4.71	.20	.00	4.77
.03375427	8.15328183	5.05	.07	-.20	4.57
.07173462	7.60940014	5.40	-.20	-.34	4.78
.00374580	6.68071283	4.84	.11	-.02	4.56
.03813513	8.37607628	4.76	.00	-.20	4.42

.09433806	9.33890182	4.84	-.20	-.19	4.46
-.02446842	11.22748908	4.84	.00	-.31	4.69
.03913443	9.68282785	5.01	-.20	-.31	4.51
-.00797234	11.78155797	4.70	.00	-.10	4.53
.00926765	8.58252667	4.71	.00	-.10	4.59
.06227104	13.83265108	5.19	-.30	-.34	4.35
.05710136	7.96283163	4.83	.00	-.11	4.30
.04078110	5.76959934	4.92	.00	-.15	4.43
.02030745	10.08159227	4.89	-.20	-.34	4.61
-.03032010	9.05764862	4.77	.10	-.15	4.67
.03817394	8.01741722	4.88	.00	-.25	4.56
-.06404283	8.90060212	4.57	.08	-.07	4.50
.03928272	9.10864212	4.72	-.10	-.04	4.16
-.03526993	14.69689095	4.87	-.10	-.31	4.52
.05345061	8.86413887	4.81	.00	-.22	4.48
-.00721898	10.72016528	4.65	.00	-.19	4.54
.02257229	8.88233920	5.29	.00	-.22	4.74
.11838467	8.03973032	5.69	-.10	-.04	4.59
.00273580	7.95138904	4.86	.01	.02	4.80
.00811439	8.55042267	4.60	.00	-.12	4.36
-.02615700	9.47877566	4.79	.02	-.04	4.70
.01150371	7.74686288	4.64	.00	-.07	4.50
-.02374123	10.57687625	4.82	.00	-.31	4.54
.02503995	10.40673099	4.80	.00	-.10	4.37
-.00998588	10.84974112	4.69	.07	-.20	4.54
.03080810	6.69785074	4.90	.00	.10	4.54
.06701362	5.64251214	4.78	-.20	-.02	4.30
.01699359	10.90332194	4.63	.00	-.19	4.44
-.01026562	12.98894623	4.71	.00	-.34	4.38
.01219753	8.82160324	4.69	.12	-.05	4.45
.00776913	9.12350542	4.27	-.10	-.22	4.41
.04393917	7.76903412	4.93	.00	-.15	4.50
-.00976430	10.87963890	4.92	-.30	-.31	4.52

-.00316180	5.51044257	4.48	.10	-.22	4.58
.02253062	10.80039647	4.77	.00	-.34	4.31
-.01456517	9.03674872	4.69	.00	.00	4.51
-.02368291	10.23045858	4.94	-.10	-.22	4.55
.00418335	8.65323176	4.63	.00	-.17	4.33
.03066108	8.43604610	4.85	-.10	-.20	4.55
-.00429394	11.61752822	4.68	.02	-.17	4.34
-.03081611	6.74537218	4.82	-.10	-.14	4.74
-.06395374	7.50550468	4.69	.13	-.09	4.82
-.02577757	8.21195200	5.04	.00	-.23	4.60
.00719111	7.62689181	5.34	-.20	-.39	4.78
.00786989	6.73480501	4.89	.07	-.05	4.62
.04294296	8.41611570	4.79	.00	-.28	4.47
.05145679	9.39426838	4.80	-.20	-.26	4.54
-.11684461	11.33769338	4.82	.00	-.37	4.76
.03018749	9.75857444	5.05	-.30	-.37	4.60
-.09083448	11.94209542	4.71	.00	-.16	4.69
-.00305424	8.66539817	4.75	-.10	-.16	4.68
.13526483	13.94081242	5.31	-.30	-.39	4.41
.02725413	8.02213705	4.84	-.10	-.17	4.34
.01236752	5.81932306	4.93	.00	-.19	4.47
.03387323	10.13091786	4.92	-.20	-.39	4.66
-.04101212	9.11024833	4.80	.04	-.19	4.70
.01492555	8.07086398	4.90	-.10	-.30	4.62
-.03930527	9.03073148	4.67	.03	-.12	4.62
.01683243	9.18745942	4.74	-.10	-.11	4.23
-.08180892	14.83384515	4.88	-.10	-.37	4.59
-.01606877	8.97429206	4.79	.00	-.26	4.57
-.06267494	10.85862577	4.67	.00	-.26	4.66
-.02657567	8.96855904	5.31	-.10	-.20	4.77
.02786365	8.07605285	5.63	-.10	-.11	4.64
-.01003478	7.91065117	4.79	.10	-.01	4.84
-.01395362	8.59058060	4.59	.00	-.20	4.40

-.01505988	9.47233566	4.78	.03	-.11	4.72
-.11038271	7.95166503	4.69	-.10	-.11	4.85
-.05500512	10.59708636	4.79	.00	-.37	4.59
-.00571654	10.49237734	4.82	.00	-.16	4.45
-.02483545	10.90826937	4.71	.01	-.23	4.59
.04970279	6.74256603	4.96	.00	.04	4.55
.05692594	5.71007591	4.83	-.20	-.05	4.36
-.08551656	11.08792649	4.64	-.10	-.26	4.63
-.10783572	13.10416641	4.70	.00	-.39	4.44
-.02542364	8.89881065	4.70	.04	-.11	4.51
-.01779125	9.20576351	4.29	-.20	-.26	4.44
.06910553	7.81915570	4.99	-.10	-.19	4.54
-.00490263	10.95099140	4.96	-.30	-.37	4.57
-.04289702	5.58775889	4.51	.03	-.20	4.64
-.05552325	10.88500503	4.76	-.10	-.39	4.35
-.01301892	9.07889592	4.70	.00	-.08	4.57
-.08442371	10.36280906	4.95	-.20	-.20	4.62

Lampiran 4

Output Model

1. Model Regresi Data Panel Satu Arah *Random Effects*

Berdasarkan program Eviews, didapat output model regresi data panel satu arah dengan *random effects* adalah sebagai berikut :

Dependent Variable: LOG_C?
Method: GLS (Variance Components)
Date: 12/13/09 Time: 06:18
Sample: 1901 1906
Included observations: 6
Total panel observations 276

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.696322	0.337445	10.95384	0.0000
LOG_P?	-0.040401	0.050573	-0.798860	0.4251
LOG_PN?	-0.018982	0.128115	-0.148165	0.8823
LOG_Y?	0.019337	0.116094	0.166559	0.8678
Random Effects				
GLS Transformed Regression				
R-squared	0.991843	Mean dependent var		3.500000
Adjusted R-squared	0.991753	S.D. dependent var		1.710927
S.E. of regression	0.155373	Sum squared resid		6.566294
Durbin-Watson stat	0.714269			

2. Model Regresi Spasial Lag Data Panel Satu Arah Random Effects

Berdasarkan program yang dijalankan pada Matlab 7, didapat output model sebagai berikut:

```
results =
     meth: 'sarsre'
     iter: 3
     beta: [3x1 double]
      rho: 0.1080
     sige: 0.0018
    tnvar: 3
    resid: [276x1 double]
     rsqr: 0.9650
    corr2: 0.0021
     yhat: [276x1 double]
      lik: 279.4338
      cov: [4x4 double]
    tstat: [5x1 double]
     nobs: 276
     nvar: 3
     rmax: 1
     rmin: -1
    lflag: 0
    order: 50
    miter: 30
       fe: 0
     time: 0.2350
    time1: 0.0480
    time2: 0
    time3: 0.0040
    time4: 0.2250
    lndet: [2001x2 double]
        N: 46
```

```
        T: 6
    model: 0
     teta: 0.0148

>> results.beta

ans =

   -0.6148
    0.3973
    0.4330

>> results.rho

ans =

    0.1080
```