PENENTUAN PREMI MANFAAT DAN CADANGAN MANFAAT DENGAN MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

PUJI LESTARI

030501044Y

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2009

PENENTUAN PREMI MANFAAT DAN CADANGAN MANFAAT DENGAN MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

PUJI LESTARI

030501044Y

DEPOK

2009

SKRIPSI : PENENTUAN PREMI MANFAAT DAN
CADANGAN MANFAAT DENGAN MEMPERHITUNGKAN
BIAYA PENGELUARAN

NAMA : PUJI LESTARI

NPM : 030501044Y

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 24 NOVEMBER 2009

Dra. NETTY SUNANDI M.Si

PEMBIMBING I

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana: 10 Juli 2009

Penguji I: Dra. Netty Sunandi, M.Si

Penguji II: Dra. Ida Fithriani, M.Si

Penguji III: Dhian Widya, S.Si, M.Kom

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga tercurah kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat, dan para pengikutnya, mudah-mudahan kita termasuk golongan yang mendapatkan perlindungan di akhirat kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan selesai tanpa bantuan, dorongan, dan do'a dari orang-orang di sekitar penulis. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, khususnya kepada:

1. Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku pembimbing, terima kasih atas kesabarannya , saran dan bimbingannya selama ini.
2. Ibu Dra. Siti Nurrohmah, M.Si. selaku pembimbing akademik penulis, terima kasih atas saran, bimbingan, dan dorongan semangat selama penulis menempuh perkuliahan di matematika.
3. Seluruh dosen matematika UI yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terima kasih atas bimbingannya sehingga penulis memperoleh pengalaman akan luasnya dunia matematika.
4. Teman-teman yang mengambil skripsi, Anggi, Inul, Om2, Desti, Oneng, Rani, Miranti,Nurma, Yuni, Mia, Maria, Aris, Udin, Nasib, Akmal, Rahanti, Stevani, Avi, Nabung yang telah banyak membantu dan memberikan informasi.

5. Teman-teman 2005 tersayang Ratih, Icha, Syarah, Ranti, Fika, Dia, Mery, Othe, Nisma, Kumel, Jessy, Karlina, Dian, Fia, Ida, May, Amri, Chupz, Rifkos, Uun, Shinta, Vani, Khuri, Wicha, Pute, Atul, Andre, Aini, Gyo, Asep, Daniel, Shally, Trian, Aya, Rara, Dima, Ferry, Hadi, Hairu, Hamdan serta Yanu atas bantuan programnya.
6. Teman-teman 2003, 2004, 2006, 2007, 2008, 2009 atas dukungannya.
7. Terima kasih yang tak ada habisnya untuk mama, bapak, adi, ani, mbah kung, mbah uti dan umi yang telah memberikan doa, dukungan dan motivasi yang sangat berharga.
8. Untuk Abang aq terima kasih atas semua canda, tawa, serta ceriamu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Semoga skripsi ini berguna bagi penelitian selanjutnnya.

Penulis

2009

ABSTRAK

Pada skripsi akan dibahas penentuan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran. Penentuan premi ini menggunakan prinsip ekivalen. Prinsip ekivalen ini merupakan ekspektasi kerugian pada waktu masuk asuransi bernilai nol. Sedangkan ekspektasi kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran setelah asuransi berjalan dimana pemegang polis pada waktu tersebut masih hidup merupakan cadangan manfaatnya. Kerugian ini merupakan selisih dari nilai saat ini dari uang pertanggungan dengan akumulasi preminya. Kerugian ini juga bergantung pada biaya pengeluaran yang ditetapkan oleh perusahaan asuransi, asuransi jiwa yang dipilih oleh pemegang polis dan jenis premi manfaat yang harus dibayar oleh pemegang polis.

Kata kunci : prinsip ekivalen, kerugian, asuransi jiwa, anuitas, premi manfaat, cadangan manfaat.

viii + 129 hlm; lamp; tab.

Bibliografi: 7 (1985-1997)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Saat ini banyak masyarakat yang sudah menyadari akan pentingnya asuransi jiwa yaitu jaminan untuk kehidupan dimasa yang akan datang. Salah satu kegunaannya adalah untuk mengurangi dampak kerugian finansial akibat terjadinya peristiwa yang tidak diinginkan seperti halnya kematian, kecelakaan, bencana dan lain-lain. Pada dasarnya kematian seseorang tidak dapat diketahui kapan terjadinya. Dalam asuransi jiwa, waktu kematian ini merupakan suatu variabel random.

Asuransi jiwa biasa dibeli dengan sejumlah pembayaran premi, misalnya premi tahunan dengan besar pembayaran yang sama untuk tiap-tiap tahun. Premi ini akan dibayar oleh pemegang polis secara berkala sesuai dengan jenis kontraknya dan akan terhenti apabila ia meninggal dunia atau karena kontrak asuransinya sudah selesai.

Kerugian bagi perusahaan asuransi merupakan selisih antara nilai saat ini dari uang pertanggungan dengan nilai saat ini dari akumulasi premi. Untuk menutupi kerugian pada saat tertentu, perusahaan asuransi perlu menyiapkan suatu dana cadangan.

Pada kenyataannya perusahaan asuransi tidak dapat beroperasi jika pemasukannya hanya bersumber dari premi tahunan bersih. Perusahaan asuransi harus mengumpulkan premi tahunan untuk memenuhi semua biaya perusahaan, misalnya: pajak, surat ijin, komisi penjualan polis, biaya pemeliharaan polis, dan biaya-biaya umum lainnya. Kemudian biaya-biaya ini harus dimasukan kedalam premi dan disebut sebagai premi yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

Kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran merupakan penjumlahan nilai saat ini dari uang pertanggungan dan biaya pengeluaran dikurangi dengan nilai saat ini dari akumulasi premi yang memperhitungkan biaya pengeluaran. Untuk menutupi kerugian ini pada saat tertentu, perusahaan asuransi perlu menyiapkan suatu dana yang disebut dengan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Bagaimana menentukan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran ?

1.3 TUJUAN

Menentukan premi manfaat bersih dan premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran serta menentukan cadangan manfaat bersih dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

1.4 BATASAN MASALAH

Premi ditentukan hanya berdasarkan prinsip ekivalen.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab yaitu :

Bab I : Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Pada bab ini dibahas mengenai tingkat bunga, fungsi survival, asuransi jiwa dan anuitas hidup.

Bab III : Premi Manfaat dan Cadangan Manfaat

Pada bab ini diberikan pengertian premi manfaat dan cadangan manfaat serta beberapa contoh yang mendukung dalam penulisan ini.

Bab IV : Premi Manfaat dan Cadangan Manfaat yang Memperhitungkan Biaya Pengeluaran

Pada bab ini akan dibahas mengenai prinsip ekivalen, premi manfaat dan cadangan manfaatnya yang memperhitungkan biaya pengeluaran serta penerapan dari perhitungan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

Bab V : Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan yang didapat dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dijelaskan mengenai asuransi jiwa dan anuitas hidup sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk itu, terlebih dahulu akan dibahas mengenai teori dasar tingkat bunga dan anuitas pasti.

2.1 TINGKAT BUNGA

Definisi 2.1.1

- Bunga adalah kompensasi pembayaran dari peminjam suatu modal kepada yang meminjamkan modal tersebut
- Nilai pokok adalah sejumlah uang yang diinvestasikan pada saat awal
- Nilai akumulasi adalah jumlah total uang yang diterima sesudah periode waktu tertentu
- Besar bunga adalah selisih nilai akumulasi sesudah periode waktu tertentu dengan nilai pokok pada saat awal periode

Definisi 2.1.2

Tingkat bunga efektif (i) adalah rasio dari besar bunga yang diperoleh selama periode tertentu terhadap besarnya nilai pokok pada awal periode.

Definisi 2.1.3

Tingkat diskon efektif (d) adalah rasio dari besarnya diskonto yang diperoleh selama periode tertentu terhadap besarnya nilai akumulasi pada akhir periode. Dimana d dapat dinyatakan sebagai

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{2.1.1}$$

Definisi 2.1.4

Nilai saat ini adalah investasi sebesar 1 yang akan terakumulasi menjadi $1+i$ pada akhir periode ke 1. Nilai saat ini juga bisa disebut dengan faktor diskonto yang dinotasikan dengan v dan dapat dinyatakan sebagai

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{2.1.2}$$

Definisi 2.1.5

Tingkat bunga nominal $\left(i^{(m)}\right)$ adalah tingkat bunga yang dibayar m kali dalam 1 periode yang dapat dinyatakan sebagai

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \;,\; m>1$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1+\frac{i^{(m)}}{m}$$

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \tag{2.1.3}$$

dimana $\frac{i^{(m)}}{m}$ adalah tingkat bunga efektif untuk tiap $\frac{1}{m}$ periode dengan m adalah bilangan bulat positif.

Definisi 2.1.6

Tingkat diskon nominal $\left(d^{(m)}\right)$ adalah tingkat diskonto yang membayar m kali dalam 1 periode yang dapat dinyatakan sebagai

$$(1-d)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m},\ m>1$$

$$v^{\frac{1}{m}}=1-\frac{d^{(m)}}{m}$$

$$d^{(m)}=m\left[1-v^{\frac{1}{m}}\right] \tag{2.1.4}$$

dimana $\frac{d^{(m)}}{m}$ adalah tingkat diskon efektif untuk tiap $\frac{1}{m}$ periode dengan m adalah bilangan bulat positif.

Definisi 2.1.5

Force of interest (δ_t) adalah tingkat bunga atas h periode (h kecil) yang dapat dinyatakan sebagai

Force of interest = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{tingkat bunga atas suatu periode interval kecil}}{h}$

$$\delta_t=\lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{a(t)\ h}$$

$$=\frac{1}{a(t)}\lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{h}$$

$$=\frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)} \tag{2.1.5}$$

dimana $a(t)$ adalah fungsi akumulasi. $a(t) = 1 + it$ untuk fungsi akumulasi dengan bunga sederhana dan $a(t) = (1+i)^t$ untuk fungsi akumulasi dengan bunga majemuk. δ_t untuk bunga majemuk ialah konstan. Dari persamaan (2.1.5) dapat diturunkan bentuk δ yaitu

$$\begin{aligned}
\delta_t &= \frac{\frac{d}{dt}\ a(t)}{a(t)} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\ (1+i)^t}{(1+i)^t} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\ e^{\ln(1+i)^t}}{(1+i)^t} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\ e^{t\ln(1+i)}}{(1+i)^t} \\
&= \frac{\left[\ln(1+i)\right]\ e^{t\ln(1+i)}}{(1+i)^t} \\
&= \frac{\left[\ln(1+i)\right]\ (1+i)^t}{(1+i)^t} \\
&= \ln(1+i)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Persamaan (2.1.6) didapat $\delta_t = \ln(1+i)$ yang bukan fungsi t. Jadi *force of interest* untuk bunga majemuk adalah $\delta = \ln(1+i)$.

2.2 ANUITAS

Anuitas adalah sederetan pembayaran yang sifatnya periodik. Berdasarkan jenisnya anuitas terdiri dari anuitas pasti dan anuitas tidak pasti. Anuitas pasti adalah anuitas yang pembayarannya pasti dilakukan pada periode waktu yang ditentukan sedangkan anuitas tidak pasti adalah anuitas yang pembayarannya tidak pasti. Akan ditentukan beberapa macam anuitas pasti yaitu anuitas biasa, anuitas dimuka, anuitas pecahan dan anuitas kontinu.

Anuitas biasa adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan pada tiap akhir periode. Nilai saat ini dari anuitas biasa sebesar 1 untuk n periode dinotasikan dengan $a_{\overline{n|}}$, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} a_{\overline{n|}} &= v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n \\ &= v\left(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}\right) \\ &= v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) \\ &= \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1} \\ &= \frac{1-v^n}{1+i-1} \\ &= \frac{1-v^n}{i} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Anuitas dimuka adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan pada tiap awal periode. Nilai saat ini dari anuitas dimuka sebesar 1 untuk n periode dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1+v+v^2+\ldots+v^{n-1} \\ &= \frac{1-v^n}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} \\ &= \frac{1-v^n}{d} \qquad (2.2.2)\end{aligned}$$

Anuitas pecahan adalah anuitas yang pembayarannya dibayar lebih dari satu kali pada awal tiap periodenya. Nilai saat ini dari anuitas pecahan sebesar 1 yang dibayar m kali (tiap pembayaran sebesar $\frac{1}{m}$) pada awal tiap $\frac{1}{m}$ periode untuk n periode dinotasikan dengan $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} &= \frac{1}{m}+\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}+\ldots+\frac{1}{m}v^{n-1} \\ &= \frac{1}{m}\left(1+v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\ldots+v^{n-1}\right) \\ &= \frac{1-v^n}{m\left(1-v^{\frac{1}{m}}\right)} \\ &= \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \qquad (2.2.3)\end{aligned}$$

Anuitas kontinu adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan secara kontinu. Nilai saat ini dari anuitas kontinu sebesar 1 yang dibayarkan secara kontinu untuk n periode dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n|}}$, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{n|}} &= \int_0^n v^t dt \\ &= \frac{1}{\ln v} v^t \Big|_0^n \\ &= \frac{v^n - 1}{\ln(1+i)^{-1}} \\ &= \frac{-(1-v^n)}{-\ln(1+i)} \\ &= \frac{1-v^n}{\delta} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

2.3 FUNGSI SURVIVAL

Misalkan variabel random kontinu X menyatakan usia saat kematian seseorang yang diukur sejak saat lahir. Fungsi survival dari variabel random kontinu X adalah

$$S_X(x) = Pr(X > x)\ ,\ x \geq 0 \tag{2.3.1}$$

Artinya, probabilitas seseorang bertahan hidup hingga usia x. Sedangkan fungsi distribusi dari X adalah

$$F_X(x) = Pr(X \leq x)\ ,\ x \geq 0 \tag{2.3.2}$$

Artinya, probabilitas seseorang tidak dapat bertahan hidup hingga usia x.

Misalkan (x) menyatakan seseorang yang saat ini berusia x. Maka $T(x)$ merupakan variabel random kontinu sisa usia (x) yang dapat dinyatakan sebagai

$$T(x) = X - x \tag{2.3.3}$$

Fungsi survival dari variabel random kontinu $T(x)$ adalah

$$\begin{aligned} S_{T(x)}(t) &= Pr(T(x) > t) \\ &= Pr(X - x > t \mid X > x) \\ &= Pr(X > x + t \mid X > x) \\ &= \frac{Pr(X > x+t)}{Pr(X > x)} \\ &= \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$S_{T(x)}(t)$ dapat juga dinotasikan dengan ${}_t p_x$. Dimana ${}_t p_x$ merupakan probabilitas (x) bertahan hidup t tahun kemudian.

Misalkan l_0 adalah banyak bayi-bayi yang hidup. Maka dapat didefinisikan

$l_x = l_0 \, S_X(x)$, jumlah orang yang hidup hingga usia x

$d_x = l_x - l_{x+1}$, jumlah orang yang meninggal dari usia x hingga $x+1$

Sehingga ${}_t p_x$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \cdot \frac{l_0}{l_0} \\ &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Fungsi distribusi dari variabel random kontinu $T(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= Pr(T(x) \le t) \\ &= 1 - Pr(T(x) > t) \\ &= 1 - {}_t p_x \\ &= 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$F_{T(x)}(t)$ dapat juga dinotasikan dengan ${}_t q_x$. Dimana ${}_t q_x$ merupakan probabilitas (x) meninggal dalam t tahun kemudian. Pdf dari variabel random kontinu $T(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T(x)}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x) \\ &= -\frac{d}{dt} {}_t p_x \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Variabel random diskrit $K(x)$ adalah banyak tahun diwaktu mendatang yang dijalani (x) sebelum ia meninggal. Variabel random $K(x)$ adalah bilangan bulat terbesar dalam variabel random $T(x)$, yaitu

$$K(x) = \lfloor T(x) \rfloor \quad (2.3.8)$$

Fungsi probabilitas dari variabel random diskrit $K(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
Pr\left(K(x)=k\right) = Pr\left(k < T(x) \le k+1\right) \\
&= Pr\left(k \le T(x) \le k+1\right) \\
&= Pr\left(T(x) \le k+1\right) - Pr\left(T(x) \le k\right) \\
&= {}_{k+1}q_x - {}_{k}q_x \\
&= {}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_{k}p_x - {}_{k}p_x \; p_{x+k} \\
&= {}_{k}p_x \left(1 - p_{x+k}\right) \\
&= {}_{k}p_x \; q_{x+k} \\
&= {}_{k|}q_x
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

Fungsi distribusi dari variabel random diskrit $K(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
F_{K(x)}(k) = Pr\left(K(x) \le k\right) \\
&= \sum_{y=0}^{k} Pr\left(K(x) = y\right) \\
&= \sum_{y=0}^{k} \left({}_{y}p_x - {}_{y+1}p_x\right) \\
&= \left({}_{0}p_x - {}_{1}p_x\right) + \left({}_{1}p_x - {}_{2}p_x\right) + \ldots + \left({}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x\right) \\
&= {}_{0}p_x - {}_{k+1}p_x \\
&= 1 - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_{k+1}q_x
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

Probabilitas (x) meninggal sesaat dinotasikan dengan

$$\lim_{\Delta x \to 0} Pr\left(0 < T(x) < \Delta x\right)$$

dengan Δx adalah selisih waktu yang sangat kecil. $\mu(x)$ adalah *force of mortality* yaitu

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Pr\left(0 < T(x) < \Delta x\right)}{\Delta \text{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Pr\left(0 < X - x < \Delta x \middle| X > x\right)}{\Delta \text{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Pr\left(x < X < x + \Delta x\right)}{Pr\left(X > x\right)\ \Delta \text{x}}$$

$$= \frac{1}{1 - F_X(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta \text{x}}$$

$$= \frac{1}{1 - F_X(x)} F_X^1(x)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}\left(1 - S_X(x)\right)}{S_X(x)}$$

$$= -\frac{\frac{d}{dx} S_X(x)}{S_X(x)} \tag{2.3.12}$$

Pdf dari variabel random kontinu $T(x)$, dapat juga ditulis sebagai

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt} F_{T(x)}(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - S_{T(x)}(t)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}\right)$$

$$= -\frac{d}{dt} \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}$$

$$= -\frac{s_X^1(x+t)}{s_X(x)}$$

$$= -\frac{s_X^1(x+t)}{s_X(x+t)} \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}$$

$$= \mu_X(x+t)\ {}_t p_x \tag{2.3.13}$$

2.4 ASURANSI JIWA

Asuransi jiwa merupakan suatu jenis dari kontrak asuransi yang akan dipilih oleh pemegang polis. Asuransi ini dapat dibeli dengan premi yang dibayar sekali pada saat penandatanganan kontrak yang disebut dengan premi tunggal bersih. Premi tunggal bersih ini adalah ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungannya.

Berdasarkan jenisnya premi tunggal bersih dibedakan menjadi dua yaitu premi tunggal bersih kontinu dan premi tunggal bersih diskrit. Akan ditentukan beberapa macam premi tunggal bersih kontinu maupun diskrit sesuai dengan kontraknya yaitu asuransi seumur hidup, asuransi berjangka n tahun, asuransi *pure endowment* n tahun dan asuransi dwiguna n tahun.

2.5.1 Premi Tunggal Bersih Kontinu

Premi tunggal bersih kontinu adalah premi yang pembayaran uang pertanggungannya dilakukan pada saat kematian yang dinotasikan dengan $\bar{A}$. Kemudian $\bar{A}$ ini akan dikembangkan dengan fungsi uang pertanggungan dan fungsi diskonto yang dinotasikan secara berturut-turut dengan b_t dan v_t sesuai dengan kontrak asuransinya.

Asuransi jiwa seumur hidup dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih kontinu yang dinotasikan dengan $\bar{A}_x$. Kemudian dari $b_t = 1\ , t \geq 0$ dan $v_t = v^t\ , t \geq 0$ diperoleh $\bar{A}_x$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\ f_{T(x)}(t)\ dt \tag{2.4.1}$$

Asuransi jiwa berjangka n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih kontinu yang dinotasikan dengan $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$. Kemudian dari $b_t = \begin{cases} 1, & t \leq n \\ 0, & t > n \end{cases}$ dan $v_t = \begin{cases} v^t, & t \leq n \\ 0\ , & t > n \end{cases}$ diperoleh $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\ f_{T(x)}(t)\ dt \tag{2.4.2}$$

Asuransi jiwa *pure endowment* n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar jika dan hanya jika pemegang polis masih hidup diakhir jangka waktu n tahun, dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih kontinu yang dinotasikan dengan $\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$. Kemudian dari $b_t = \begin{cases} 0, & t \leq n \\ 1, & t > n \end{cases}$ dan $v_t = \begin{cases} 0\ , & t \leq n \\ v^n, & t > n \end{cases}$ diperoleh $\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} &= \int_n^\infty v^n\ f_{T(x)}(t)\ dt \\ &= v^n \int_n^\infty d\left(-{}_t p_x\right) \\ &= -v^n\ {}_t p_x \Big|_n^\infty \\ &= -v^n\left(0 - {}_n p_x\right) \\ &= v^n\ {}_n p_x \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Asuransi jiwa dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih kontinu yang dinotasikan dengan $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$. Kemudian dari $b_t = 1,\ t \geq 0$ dan $v_t = \begin{cases} v^t, & t \leq n \\ v^n, & t > n \end{cases}$ diperoleh $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t \ f_{T(x)}(t)\ dt + \int_n^\infty v^n \ f_{T(x)}(t)\ dt \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

2.5.2 Premi Tunggal Bersih Diskrit

Premi tunggal bersih diskrit adalah premi yang pembayaran uang pertanggungannya dilakukan pada akhir tahun kematian yang dinotasikan dengan A. Kemudian A ini akan dikembangkan dengan fungsi uang pertanggungan dan fungsi diskonto yang dinotasikan secara berturut-turut dengan b_{k+1} dan v_{k+1} sesuai dengan kontrak asuransinya.

Asuransi jiwa seumur hidup dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih diskrit yang dinotasikan dengan A_x. Kemudian dari $b_{k+1} = 1, k = 0, 1,...$ dan $v_{k+1} = v^{k+1},\ k = 0, 1,...$ diperoleh A_x

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Pr\left(K(x) = k\right) \tag{2.4.5}$$

Asuransi jiwa berjangka n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih diskrit yang dinotasikan dengan $A^1_{x:\overline{n|}}$. Kemudian dari $b_{k+1} = \begin{cases} 1, \ k = 0,1,..,n-1 \\ 0, \ k = n, n+1,... \end{cases}$ dan $v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, \ k = 0,1,..,n-1 \\ 0 \quad , k = n, n+1,... \end{cases}$ diperoleh $A^1_{x:\overline{n|}}$

$$A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ Pr\left(K(x) = k\right) \tag{2.4.6}$$

Asuransi jiwa *pure endowment* n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar jika dan hanya jika pemegang polis masih hidup diakhir jangka waktu n tahun, dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih diskrit yang dinotasikan dengan $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$. Kemudian dari $b_{k+1} = \begin{cases} 0 \ , k = 0,1,..,n-1 \\ 1 \ , k = n, n+1,... \end{cases}$ dan $v_{k+1} = \begin{cases} 0 \ \ , k = 0,1,..,n-1 \\ v^n, k = n, n+1,... \end{cases}$ diperoleh $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} &= \sum_{k=n}^{\infty} v^n \ Pr\left(K(x) = k\right) \\ &= v^n \sum_{k=n}^{\infty} Pr\left(K(x) = k\right) \\ &= v^n \ Pr\left(K(x) \geq n\right) \\ &= v^n \ {}_n p_x \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Dari persamaan (2.4.3) didapat $\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ sama dengan $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$, maka untuk pembahasan selanjutnya akan digunakan $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ sebagai premi tunggal bersih kontinu untuk asuransi *pure endowment* n tahun.

Asuransi jiwa dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran premi tunggal bersih diskrit yang dinotasikan dengan $A_{x:\overline{n}|}$.

Kemudian dari $b_{k+1} = 1$, $k = 0,1,...$ dan $v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0,1,..,n-1 \\ v^n, & k = n, n+1,... \end{cases}$ diperoleh $A_{x:\overline{n}|}$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, Pr\left(K(x) = k\right) + \sum_{k=n}^{\infty} v^n \, Pr\left(K(x) = k\right)$$
$$= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \qquad (2.4.8)$$

2.5 ANUITAS HIDUP

Anuitas hidup adalah anuitas yang setiap pembayarannya hanya akan dilakukan jika pemegang polis masih hidup atau dalam jangka waktu yang ditentukan sesuai dengan jenis kontrak asuransinya. Anuitas hidup ini merupakan anuitas yang tidak pasti. Berdasarkan jenisnya anuitas hidup dibedakan menjadi dua yaitu anuitas hidup kontinu dan anuitas hidup diskrit.

2.5.1 Anuitas Hidup Kontinu

Anuitas hidup kontinu adalah anuitas hidup yang dibayar secara kontinu sebesar 1 sesuai dengan kontrak asuransinya. Misalkan $\bar{Y}$ merupakan variabel random nilai saat ini dari anuitas kontinu sebesar 1. Ekspektasi dari variabel random $\bar{Y}$ ini dinotasikan dengan $\bar{a}$ sesuai dengan kontrak asuransinya.

Anuitas seumur hidup yang kontinu merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar secara terus menerus kepada (x) hingga ia meninggal dunia. Ekspektasi dari variabel random $\bar{Y}$, dimana $\bar{Y} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, \ T(x) > 0$ dinotasikan dengan $\bar{a}_x$. Secara umum $\bar{a}_x$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] \\
&= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ f_{T(x)}(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ d\left(-{}_t p_x\right) \\
&= -\bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty v^t\ {}_t p_x\ dt \\
&= -(0-0) + \int_0^\infty v^t\ {}_t p_x\ dt \\
&= \int_0^\infty v^t\ {}_t p_x\ dt
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$\bar{a}_x$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa seumur hidup yaitu

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] \\
&= E\left[\frac{1 - v^{T(x)}}{\delta}\right] \\
&= \frac{1 - E\left[v^{T(x)}\right]}{\delta} \\
&= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Anuitas hidup *temporary* n tahun yang kontinu merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar secara terus menerus kepada (x).Ekspektasi dari variabel random $\bar{Y}$, dimana $\bar{Y} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, & 0 \le T(x) < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T(x) \ge n \end{cases}$ dinotasikan dengan $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ .Secara umum $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\; f_{T(x)}(t)\; dt \;+\; \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\; f_{T(x)}(t)\; dt \\
&= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\; d\left(-{}_t p_x\right) \;+\; \bar{a}_{\overline{n}|}\int_n^\infty d\left(-{}_t p_x\right) \\
&= -\bar{a}_{\overline{t}|}\;{}_t p_x \Big|_0^n \;+\; \int_0^n v^t\;{}_t p_x\; dt \;-\; \bar{a}_{\overline{n}|}\;{}_t p_x \Big|_n^\infty \\
&= -\left(\bar{a}_{\overline{n}|}\;{}_n p_x - \bar{a}_{\overline{0}|}\;{}_0 p_x\right) + \int_0^n v^t\;{}_t p_x\; dt - \bar{a}_{\overline{n}|}\left(0 - {}_n p_x\right) \\
&= -\bar{a}_{\overline{n}|}\;{}_n p_x + 0 + \int_0^n v^t\;{}_t p_x\; dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\;{}_n p_x \\
&= \int_0^n v^t\;{}_t p_x\; dt
\end{aligned}
\qquad (2.5.3)
$$

$\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa dwiguna n tahun dimana $\bar{Z} = \begin{cases} v^{T(x)}, & 0 \le T(x) < n \\ v^n, & T(x) \ge n \end{cases}$ yaitu

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= E\left[\frac{1-\bar{Z}}{\delta}\right] \\
&= \frac{1-E\left[\bar{Z}\right]}{\delta} \\
&= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}
\end{aligned}
\qquad (2.5.4)
$$

Anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun yang kontinu merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar secara terus menerus yang pembayarannya ditunda n tahun kepada (x). Ekspektasi dari variabel random $\bar{Y}$, dimana $\bar{Y} = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le T(x) < n \\ v^n \ \bar{a}_{\overline{T(x)-n|}}, & T(x) \ge n \end{cases}$ dinotasikan dengan ${}_{n|}\bar{a}_x$.

Secara umum ${}_{n|}\bar{a}_x$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= \int_n^\infty v^n \ \bar{a}_{\overline{t-n|}} \ f_{T(x)}(t) \ dt \\
&= \int_n^\infty v^n \ \bar{a}_{\overline{t-n|}} \ d\left(-{}_t p_x\right) \\
&= -v^n \ \bar{a}_{\overline{t-n|}} \ {}_t p_x \Big|_n^\infty + \int_n^\infty v^n \ {}_t p_x \ dt \\
&= -(0-0) + \int_n^\infty v^n \ {}_t p_x \ dt \\
&= \int_n^\infty v^t \ {}_t p_x \ dt
\end{aligned} \tag{2.5.5}
$$

${}_{n|}\bar{a}_x$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa *pure endowment* n tahun yaitu

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= E\left[\bar{Y}\right] \\
&= \int_n^\infty v^n \ \bar{a}_{\overline{t-n|}} \ f_{T(x)}(t) \ dt \\
&= v^n \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t-n|}} \ {}_t p_x \ \mu(x+t) \ dt \\
&= v^n \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s|}} \ {}_{s+n} p_x \ \mu(x+s+n) \ ds \\
&= v^n \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s|}} \ {}_n p_x \ {}_s p_{x+n} \ \mu(x+n+s) \ ds \\
&= v^n \ {}_n p_x \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s|}} \ {}_s p_{x+n} \ \mu(x+n+s) \ ds \\
&= A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \ \bar{a}_{x+n}
\end{aligned} \tag{2.5.6}
$$

2.5.2 Anuitas Hidup Diskrit

Anuitas hidup diskrit adalah anuitas hidup yang dibayar secara berkala tiap tahun polis. Berdasarkan jenisnya anuitas hidup diskrit terdiri dari anuitas hidup diskrit dimuka dan anuitas hidup diskrit biasa. Anuitas hidup diskrit dimuka adalah anuitas hidup yang dibayarkan pada awal tahun polis sedangkan anuitas hidup diskrit biasa adalah anuitas hidup yang dibayarkan pada akhir tahun polis. Pada pembahasan selanjutnya hanya akan dibahas anuitas hidup diskrit dimuka.

Misalkan Y merupakan variabel random nilai saat ini dari anuitas dimuka sebesar 1. Maka ekspektasi dari variabel random $\bar{Y}$ ini dinotasikan dengan $\ddot{a}$ sesuai dengan kontrak asuransinya.

Anuitas seumur hidup diskrit dimuka merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar tiap awal tahun kepada (x) hingga ia meninggal dunia. Ekspektasi dari variabel random Y , dimana $Y = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}, K(x) \geq 0$ dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$. Secara umum $\ddot{a}_x$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= E[Y] \\
&= E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \Pr\left[K(x)=k\right] \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \ \Delta_k \, p_x \\
&= -\ddot{a}_{\overline{k+1}|} \ {}_k p_x \Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_x \ v^{k+1} \\
&= -(0-1) + p_x \ v + {}_2 p_x \ v^2 + {}_3 p_x \ v^3 + \dots \\
&= {}_0 p_x \ v^0 + p_x \ v + {}_2 p_x \ v^2 + {}_3 p_x \ v^3 + \dots \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} {}_s p_x \ v^s
\end{aligned}
\tag{2.5.7}
$$

$\ddot{a}_x$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa seumur hidup yaitu

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= E[Y] \\
&= E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right] \\
&= E\left[\frac{1-v^{K(x)+1}}{d}\right] \\
&= \frac{1-E\left[v^{K(x)+1}\right]}{d} \\
&= \frac{1-A_x}{d}
\end{aligned}
\tag{2.5.8}
$$

Anuitas hidup *temporary* n tahun diskrit dimuka merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar tiap awal tahun kepada (x). Ekspektasi dari variabel random Y , dimana $Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}, & 0 \le K(x) \le n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} &, K(x) \ge n \end{cases}$ dinotasikan dengan

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Secara umum $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ Pr(K(x)=k) + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}\ Pr(K(x)=k) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ \Delta({}_k p_x) + \ddot{a}_{\overline{n}|} \sum_{k=n}^{\infty} Pr(K(x)=k) \\
&= -\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_k p_x \Big|_0^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k+1} p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ Pr(K(x)\geq k) \\
&= -\left(\ddot{a}_{\overline{n+1}|}\ {}_n p_x - \ddot{a}_{\overline{1}|}\ {}_0 p_x\right) + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k+1} p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x \\
&= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|}\ {}_n p_x + 1 + \sum_{s=1}^{n} v^{s}\ {}_s p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x \\
&= -\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n\right) {}_n p_x + 1 + \sum_{s=1}^{n} v^{s}\ {}_s p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x \\
&= -\ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x - v^n\ {}_n p_x + v^0\ {}_0 p_x + v\ p_x + v^2\ {}_2 p_x + \ldots + v^{n-1}\ {}_{n-1} p_x + v^n\ {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x \\
&= v^0\ {}_0 p_x + v\ p_x + v^2\ {}_2 p_x + \ldots + v^{n-1}\ {}_{n-1} p_x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x \qquad (2.5.9)
\end{aligned}$$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa dwiguna n tahun dimana

$$Z = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & 0 \leq K(x) \leq n-1 \\ v^n, & K(x) \geq n \end{cases}$$ yaitu

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\
&= E\left[\frac{1-Z}{d}\right] \\
&= \frac{1-E[Z]}{d} \\
&= \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d} \qquad (2.5.10)
\end{aligned}$$

Anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun diskrit dimuka merupakan sederetan pembayaran sebesar 1 dibayar tiap tahun kepada (x). Ekspektasi dari variabel random Y , dimana $Y = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le K(x) \le n-1 \\ v^n \ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1-n}|}, & K(x) \ge n \end{cases}$ dinotasikan dengan ${}_{n|}\ddot{a}_x$. Secara umum ${}_{n|}\ddot{a}_x$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= E[Y] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} v^n \ \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \Pr\left[K(x) = k\right] \\
&= -\sum_{k=n}^{\infty} v^n \ \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \ \Delta\left({}_k p_x\right) \\
&= -v^n \ \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \ {}_k p_x \Big|_n^{\infty} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \\
&= -v^n \ \left(0 - \ddot{a}_{\overline{1}|} \ {}_n p_x\right)\Big|_n^{\infty} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \\
&= v^n \ \cdot 1 \cdot {}_n p_x + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \\
&= v^n \ {}_n p_x + v^{n+1} \ {}_{n+1}p_x + v^{n+2} \ {}_{n+2}p_x + \ldots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \ {}_k p_x
\end{aligned} \tag{2.5.11}
$$

${}_{n|}\ddot{a}_x$ dapat dihubungkan dengan asuransi jiwa *pure endowment* n tahun yaitu

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= E[Y] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} v^n \ \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \Pr\left(K(x) = k\right) \\
&= v^n \ \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \ {}_k p_x \ q_{x+k} \\
&= v^n \ \sum_{s=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{s+1}|} \ {}_{n+s} p_x \ q_{x+n+s} \\
&= v^n \ \sum_{s=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{s+1}|} \ {}_n p_x \ {}_s p_{x+n} \ q_{x+n+s} \\
&= v^n \ {}_n p_x \sum_{s=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{s+1}|} \ Pr\left(K(x+n) = s\right) \\
&= A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \ \ddot{a}_{x+n}
\end{aligned} \tag{2.5.12}
$$

BAB III

PENENTUAN PREMI MANFAAT DAN CADANGAN MANFAAT

Pada bab ini akan dibahas pengertian dari premi manfaat dan cadangan manfaat serta analisis dari cadangan manfaat dan juga bagaimana menentukannya sesuai dengan kontrak asuransinya dan cara pembayaran preminya.

3.1 PREMI MANFAAT

Premi adalah sejumlah uang yang dibayar oleh pemegang polis secara berkala (biasanya tahunan) sesuai dengan jenis kontraknya.
Besar premi tahunan ini ditentukan dengan menggunakan prinsip ekivalen. Prinsip ekivalen merupakan ekspektasi kerugian dari perusahaan asuransi yang bernilai nol. Artinya, ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan yang dibayar oleh perusahaan asuransi sama dengan ekspektasi nilai saat ini dari akumulasi premi yang dibayar oleh pemegang polis. Premi yang ditentukan berdasarkan prinsip ekivalen ini disebut premi manfaat.

Kerugian dari perusahaan asuransi dapat dilihat dengan menggunakan prinsip kontribusi. Pada prinsip kontribusi, pengeluaran uang bernilai positif dan penerimaan uang bernilai negatif. Jika kerugian bernilai positif maka perusahaan asuransi mengalami kerugian. Sebaliknya, jika kerugian bernilai negatif maka perusahaan asuransi mengalami keuntungan. Secara umum, kerugian dibedakan menjadi dua jenis. Pertama, kerugian kontinu yang dapat dinyatakan sebagai

$$L = b_{T(x)} v^{T(x)} - \bar{P}\bar{Y} \qquad (3.1.1)$$

dimana :

L : kerugian pada saat pemegang polis masuk asuransi

(x) : pemegang polis yang masuk asuransi pada usia x

$T(x)$: variabel random sisa usia yang kontinu dari (x)

$b_{T(x)}$: besar uang pertanggungan yang dibayar pada saat kematian

$v^{T(x)}$: nilai saat ini dari uang pertanggungan sebesar 1 pada waktu $T(x)$

$\bar{P}$: premi yang dibayar secara kontinu sejak masuk asuransi

$\bar{Y}$: nilai saat ini dari anuitas kontinu sebesar 1 .

Kedua, kerugian diskrit dapat dinyatakan sebagai

$$L = b_{K(x)+1} v^{K(x)+1} - PY \qquad (3.1.2)$$

dimana:

$K(x)$: variabel random sisa usia yang diskrit dari (x)

$b_{K(x)+1}$: besar uang pertanggungan yang dibayar pada akhir tahun kematian

$v^{K(x)+1}$: nilai saat ini dari uang pertanggungan sebesar 1 pada waktu $K(x)+1$

P : premi yang dibayar secara berkala sejak awal tahun polis

Y : nilai saat ini dari anuitas diskrit sebesar 1.

Contoh 3.1.1 :

Akan ditentukan premi manfaat P yang dibayar oleh pemegang polis pada awal tiap tahun selama 4 tahun kepada perusahaan asuransi. Dengan tingkat bunga efektif tahunan 0.06 dan fungsi probabilitas

$$Pr\left(K\left(x\right)=k\right)=0.2 \quad , \; k=0,1,2,3,4$$

dimana uang pertanggungan sebesar \$1 dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis.

Berdasarkan prinsip ekivalen, didapat premi manfaat, P

$$E\left[L\right]=0$$
$$E\left[v^{K(x)+1}-P\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}\right]=0$$
$$\sum_{k=0}^{4}\left[v^{k+1}-P\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right]Pr\left(K\left(x\right)=k\right)=0$$
$$\left\{\sum_{k=0}^{4}v^{k+1}-P\sum_{K=0}^{4}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right\}0.2=0$$
$$\sum_{k=0}^{4}v^{k+1}-P\sum_{K=0}^{4}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}=0$$
$$\left(v+v^2+v^3+v^4+v^5\right)-P\left(\ddot{a}_{\overline{1|}}+\ddot{a}_{\overline{2|}}+\ddot{a}_{\overline{3|}}+\ddot{a}_{\overline{4|}}+\ddot{a}_{\overline{5|}}\right)=0$$
$$v\left(1+v+v^2+v^3+v^4\right)=P\left(\ddot{a}_{\overline{1|}}+\ddot{a}_{\overline{2|}}+\ddot{a}_{\overline{3|}}+\ddot{a}_{\overline{4|}}+\ddot{a}_{\overline{5|}}\right)$$
$$v\ \ddot{a}_{\overline{5|}}=P\left(\ddot{a}_{\overline{1|}}+\ddot{a}_{\overline{2|}}+\ddot{a}_{\overline{3|}}+\ddot{a}_{\overline{4|}}+\ddot{a}_{\overline{5|}}\right)$$
$$P=\frac{v\ \ddot{a}_{\overline{5|}}}{\ddot{a}_{\overline{1|}}+\ddot{a}_{\overline{2|}}+\ddot{a}_{\overline{3|}}+\ddot{a}_{\overline{4|}}+\ddot{a}_{\overline{5|}}}$$
$$P=\frac{4.212363786}{13.91490645}$$
$$P=0.30272$$

Jadi, premi manfaat dengan kontrak asuransi berjangka 5 tahun yang dibayar oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi adalah sebesar \$0.30272.

□

Berdasarkan jenisnya, premi manfaat dibedakan menjadi premi manfaat kontinu, premi manfaat diskrit, premi manfaat campuran dan premi manfaat pecahan.

3.1.1 Premi Manfaat Kontinu

Premi manfaat kontinu adalah premi yang dibayar secara terus menerus setiap satu periodenya. Akan ditentukan beberapa macam premi manfaat kontinu sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada tabel 6.

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu. Premi ini dinotasikan sebagai $\bar{P}(\bar{A}_x)$. Dengan menggunakan prinsip ekivalen didapat $\bar{P}(\bar{A}_x)$

$$
\begin{aligned}
E[L] = 0 \Leftrightarrow & E\left[v^{T(x)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow & E\left[v^{T(x)}\right] - \bar{P}(\bar{A}_x)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow & E\left[v^{T(x)}\right] = \bar{P}(\bar{A}_x)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}\right] \\
\Leftrightarrow & \bar{A}_x = \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x \\
\Leftrightarrow & \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \qquad (3.1.3)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (2.5.2) $\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$, $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ juga dapat dinyatakan dalam asuransi jiwa yaitu

$$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\delta \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \tag{3.1.4}$$

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi h tahun. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$

$${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\,\bar{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_x \Leftrightarrow {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.5}$$

Asuransi berjangka n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi n tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$

$$\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow \bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.6}$$

Asuransi *pure endowment* n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi n tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $\bar{P}\left(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $\bar{P}\left(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\right)$

$$\bar{P}\left(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\Leftrightarrow\bar{P}\left(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\right)=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.7}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi n tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\bar{A}_{x:\overline{n}|}\Leftrightarrow\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.8}$$

Berdasarkan persamaan (2.5.4) $\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$, $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$ juga dapat dinyatakan dalam asuransi jiwa yaitu

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.9}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi h tahun $(h < n)$. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$ {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.10} $$

Asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun dengan sederetan pembayaran sebesar 1 secara kontinu kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat kontinu dengan masa pembayaran premi n tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $\bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $\bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$

$$ \begin{aligned} \bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\bar{a}_x &\Leftrightarrow \bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\,\bar{a}_{x+n} \\ &\Leftrightarrow \bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\,\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \end{aligned} \tag{3.1.11} $$

Akan dicari variansi dari variable random L dimana L kerugian pada waktu pemegang polis masuk asuransi. Untuk asuransi jiwa seumur hidup yang kontinu dengan uang pertanggungan sebesar 1 berdasarkan persamaan (3.1.1) yaitu

$$\begin{aligned}
Var[L] &= Var\left[v^{T(x)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)|}}\right] \\
&= Var\left[v^{T(x)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right)\right] \\
&= Var\left[v^{T(x)} + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)v^{T(x)}}{\delta} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right] \\
&= Var\left[v^{T(x)}\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right] \\
&= Var\left[v^{T(x)}\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)\right] \\
&= \left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2 Var\left[v^{T(x)}\right] \\
&= \left(1+\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{\bar{a}_x\delta + \bar{A}_x}{\bar{a}_x\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\bar{a}_x\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \\
&= \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\bar{a}_x\delta)^2}
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

dan variansi untuk variable random L dimana L kerugian pada waktu pemegang polis masuk asuransi. Untuk asuransi dwiguna n tahun yang kontinu dengan uang pertanggungan sebesar 1 dimana

$\bar{Y} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, & 0 \le T(x) < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T(x) \ge n \end{cases}$ dan $\bar{Z} = \begin{cases} v^{T(x)}, & 0 \le T(x) < n \\ v^{n}, & T(x) \ge n \end{cases}$ serta $Var\left[\bar{Z}\right]$ yang

terdapat pada lampiran 3 yaitu

$$\begin{aligned}
Var[L] &= Var\left[\bar{Z} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{Y}\right] \\
&= Var\left[\bar{Z} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\left(\frac{1-\bar{Z}}{\delta}\right)\right] \\
&= Var\left[\bar{Z} + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{Z}}{\delta} - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\delta}\right] \\
&= Var\left[\bar{Z}\left(1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\delta}\right] \\
&= Var\left[\bar{Z}\left(1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\delta}\right)\right] \\
&= \left(1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\delta}\right)^2 Var\left[\bar{Z}\right] \\
&= \left(1 + \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}\delta + \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}\delta}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2}{\left(\bar{a}_{x:\overline{n}|}\delta\right)^2} \qquad (3.1.13)
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.2 :

Akan dihitung premi manfaat kontinu dari asuransi seumur hidup, $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ dan variansi kerugiannya, dengan uang pertanggungan sebesar \$1, asumsi *force of mortality* (μ) 0.04 dan *force of interest* (δ) 0.06.

Terlebih dahulu akan dicari premi tunggal bersih kontinu dari asuransi jiwa seumur hidup $\bar{A}_x = E\left[v^{T(x)}\right]$, ${}^2\bar{A}_x = E\left[v^{2T(x)}\right]$ dan ekspektasi nilai saat ini dari anuitas kontinu $\bar{a}_x$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t \; {}_t p_x \; \mu(x+t)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu\,dt \\
&= \mu \int_0^\infty e^{-t(\delta+\mu)}\,dt \\
&= \frac{-\mu}{\delta+\mu} e^{-t(\delta+\mu)} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{-\mu}{\delta+\mu}(0-1) \\
&= \frac{\mu}{\delta+\mu} \\
&= \frac{0.04}{0.06+0.04} \\
&= 0.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^2\bar{A}_x &= \frac{\mu}{2\delta+\mu} \\
&= \frac{0.04}{2\cdot 0.06+0.04} \\
&= 0.25
\end{aligned}
$$

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$$
$$= \frac{1-0.4}{0.06}$$
$$= 10$$

Dari persamaan (3.1.3) dan (3.1.12) didapat

$$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$
$$= \frac{0.4}{10}$$
$$= 0.04$$

$$Var\left[L\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2}{\left(\bar{a}_x\delta\right)^2}$$
$$= \frac{0.25-\left(0.4\right)^2}{\left(0.06\cdot 10\right)^2}$$
$$= 0.25$$

Jadi, premi manfaat kontinu dari asuransi seumur hidup yang harus dibayar pemegang polis sebesar \$0.04 dan variansi kerugian pada waktu nol yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi sebesar \$0.25. □

3.1.2 Premi Manfaat Diskrit

Premi manfaat diskrit adalah premi yang dibayar secara berkala sejak masuk asuransi pada tiap awal tahun polis. Akan ditentukan beberapa macam premi manfaat diskrit sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada tabel 7.

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), akan dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar secara berkala tiap awal tahun dengan masa pembayaran premi seumur hidup. Premi ini dinotasikan sebagai $P(A_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P(A_x)$

$$\begin{aligned} E[L]=0 &\Leftrightarrow E\left[v^{K(x)+1}-P(A_x)\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow E\left[v^{K(x)+1}\right]-P(A_x)E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow E\left[v^{K(x)+1}\right]=P(A_x)E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right] \\ &\Leftrightarrow A_x=P(A_x)\ \ddot{a}_x \\ &\Leftrightarrow P(A_x)=\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \end{aligned} \qquad (3.1.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.5.8) $\ddot{a}_x=\frac{1-A_x}{d}$, $P(A_x)$ dapat dinyatakan dalam asuransi jiwa yaitu

$$P(A_x)=\frac{dA_x}{1-A_x} \qquad (3.2.15)$$

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), juga bisa dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar h kali dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP(A_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP(A_x)$

$${}_hP(A_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|}=A_x \Leftrightarrow {}_hP(A_x)=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \qquad (3.1.16)$$

Asuransi berjangka n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), akan dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar n kali dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)$.

Dengan prinsip ekivalen didapat $P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)$

$$P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (3.1.17)$$

Asuransi *pure endowment* n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), akan dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar n kali dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)$.

Dengan prinsip ekivalen didapat $P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)$

$$P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \Leftrightarrow P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right) = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (3.1.18)$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia x, akan dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar n kali dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$

$$P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P\left(A_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (3.1.19)$$

Berdasarkan persamaan (2.5.10) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$, $P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$ dapat dinyatakan dalam asuransi jiwa yaitu

$$P\left(A_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.20}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), juga bisa dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit yang dibayar h kali dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun $(h < n)$. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$

$${}_hP\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{h}|} = A_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow {}_hP\left(A_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.21}$$

Anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun dengan sederetan pembayaran sebesar 1 pertahun kepada (x), akan dibayar dengan akumulasi premi manfaat diskrit dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P({}_{n|}\ddot{a}_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P({}_{n|}\ddot{a}_x)$

$$P\left({}_{n|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x \Leftrightarrow P\left({}_{n|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\,\ddot{a}_{x+n}$$

$$\Leftrightarrow P\left({}_{n|}\ddot{a}_x\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\,\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.22}$$

Akan dicari variansi dari variable random L dimana L kerugian pada waktu pemegang polis masuk asuransi. Untuk asuransi jiwa seumur hidup yang diskrit dengan uang pertanggungan sebesar 1 berdasarkan persamaan (3.1.2) yaitu

$$
\begin{aligned}
Var[L] &= Var\left[v^{K(x)+1} - P(A_x)\ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}\right] \\
&= Var\left[v^{K(x)+1} - P(A_x)\left(\frac{1-v^{K(x)+1}}{d}\right)\right] \\
&= Var\left[v^{K(x)+1} + \frac{P(A_x)\ v^{K(x)+1}}{d} - \frac{P(A_x)}{d}\right] \\
&= Var\left[v^{K(x)+1}\left(1+\frac{P(A_x)}{d}\right) - \frac{P(A_x)}{d}\right] \\
&= Var\left[v^{K(x)+1}\left(1+\frac{P(A_x)}{d}\right)\right] \\
&= \left(1+\frac{P(A_x)}{d}\right)^2 Var\left[v^{K(x)+1}\right] \\
&= \left(1+\frac{A_x}{\ddot{a}_x d}\right)^2 \left[{}^2A_x - (A_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{a}_x d + A_x}{\ddot{a}_x d}\right)^2 \left[{}^2A_x - (A_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\ddot{a}_x d}\right)^2 \left[{}^2A_x - (A_x)^2\right] \\
&= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(\ddot{a}_x d)^2}
\end{aligned} \tag{3.1.23}
$$

dan variansi dari variable random L dimana L kerugian pada waktu pemegang polis masuk asuransi. Untuk asuransi dwiguna n tahun yang diskrit dengan uang pertanggungan sebesar 1 dimana

$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}, & 0 \le K(x) \le n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K(x) \ge n \end{cases}$ dan $Z = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & 0 \le K(x) \le n-1 \\ v^{n}, & K(x) \ge n \end{cases}$ serta $Var[Z]$

yang terdapat pada lampiran 3 yaitu

$$\begin{aligned}
Var[L] &= Var\left[Z - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right) Y\right] \\
&= Var\left[Z - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\left(\frac{1-Z}{d}\right)\right] \\
&= Var\left[Z + \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right) Z}{d} - \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{d}\right] \\
&= Var\left[Z\left(1 + \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{d}\right) - \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{d}\right] \\
&= Var\left[Z\left(1 + \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{d}\right)\right] \\
&= \left(1 + \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{d}\right)^2 Var[Z] \\
&= \left(1 + \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} d}\right)^2 \left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} d + A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} d}\right)^2 \left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} d}\right)^2 \left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2\right] \\
&= \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2}{\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} d\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Contoh 3.1.3 :

Akan dihitung premi manfaat diskrit dari asuransi seumur hidup $P(A_x)$ dan variansi dari kerugiannya $Var(L)$ dengan uang pertanggungan sebesar $1.

Dengan fungsi probabilitas

$$Pr\left(K(x)=k\right)=c\ (0.96)^{k+1},\quad K(x)=0,1,2,...$$

dimana $c=\dfrac{0.04}{0.96}$ dan bunga efektif tahunan $i=0.06$.

Akan dicari dahulu premi tunggal bersih diskrit dari asuransi jiwa seumur hidup yang diskrit $A_x=E\left[v^{K(x)+1}\right]$, ${}^2A_x=E\left[v^{2(K(x)+1)}\right]$ dan ekspektasi nilai saat ini dari anuitas diskrit $\ddot{a}_x$

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ Pr\left(K(x)=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k-1}\ c\ (0.96)^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1.06)^{-k-1}\ \frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k}\ 0.96\\
&= 0.04\sum_{k=0}^{\infty} (1.06)^{-k-1} (0.96)^{k}\\
&= \frac{0.04}{1.06}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{0.96}{1.06}\right)^{k}\\
&= \frac{0.04}{1.06}\left\{1+\frac{0.96}{1.06}+\left(\frac{0.96}{1.06}\right)^{2}+\left(\frac{0.96}{1.06}\right)^{3}+...\right\}\\
&= \frac{0.04}{1.06}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{0.96}{1.06}}\\
&= 0.4
\end{aligned}$$

$$ {}^{2}A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k(x)+1)}\ Pr\left(K(x)=k\right) $$

$$ = c \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{0.96}{(1+i)^2}\right]^{k+1} $$

$$ = \frac{0.04}{0.96} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{0.96}{(1.06)^2}\right]^{k} \frac{0.96}{(1.06)^2} $$

$$ = \frac{0.04}{(1.06)^2}\left\{1+\frac{0.96}{(1.06)^2}+\left(\frac{0.96}{(1.06)^2}\right)^2+\ldots\right\} $$

$$ = \frac{0.04}{(1.06)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{0.96}{(1.06)^2}} $$

$$ = 0.2444987775 $$

$$ \ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} $$

$$ = \frac{1-0.4}{\frac{0.06}{1.06}} $$

$$ = 10.6 $$

Dari persamaan (3.1.14) dan (3.1.23) didapat

$$ P(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} $$

$$ = \frac{0.4}{10.6} $$

$$ = 0.0377 $$

$$ Var[L] = \frac{{}^{2}A_x - (A_x)^2}{(\ddot{a}_x d)^2} $$

$$ = \frac{0.2444987775-(0.4)^2}{\left(\frac{0.06}{1.06}\cdot 10.6\right)^2} $$

$$ = 0.2347 $$

Jadi, premi manfaat diskrit dari asuransi seumur hidup yang harus dibayar pemegang polis sebesar \$0.0377 dan variansi kerugian pada waktu nol yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi sebesar \$0.2347. □

3.1.3 Premi Manfaat Campuran

Pada kenyataannya, asuransi jiwa dibayar pada saat kematian namun premi manfaat dibayar secara berkala pada tiap awal tahun polis yang disebut dengan premi manfaat campuran. Akan ditentukan beberapa macam premi manfaat campuran sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada tabel 8.

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat campuran yang dibayar tiap awal tahun polis. Premi ini dinotasikan sebagai $P(\bar{A}_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P(\bar{A}_x)$

$$P(\bar{A}_x)\,\ddot{a}_x = \bar{A}_x \Leftrightarrow P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} \tag{3.1.25}$$

Dari hubungan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan antara asuransi seumur hidup kontinu dan asuransi seumur hidup diskrit $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$, yang terdapat pada lampiran 1. $P(\bar{A}_x)$ juga dapat dinyatakan dalam $P(A_x)$.

$$P(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \Leftrightarrow P(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta} P(A_x) \tag{3.1.26}$$

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat campuran yang dibayar h kali tiap awal tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP\left(\bar{A}_x\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP\left(\bar{A}_x\right)$

$$ {}_hP\left(\bar{A}_x\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_x \Leftrightarrow {}_hP\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.27} $$

Asuransi berjangka n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat campuran yang dibayar n kali tiap awal tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$

$$ P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.28} $$

Dari hubungan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan antara asuransi berjangka n tahun kontinu dan asuransi berjangka n tahun diskrit $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}$, yang terdapat pada lampiran 1. $P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$ dapat dinyatakan dalam $P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)$ yaitu

$$ P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{i}{\delta}\frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \Leftrightarrow P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{i}{\delta} P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) \tag{3.1.29} $$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat campuran yang dibayar n kali tiap awal tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.30}$$

Dari hubungan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan antara asuransi dwiguna n tahun kontinu dan asuransi dwiguna n tahun diskrit $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, yang terdapat pada lampiran 1. $P\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)$ dapat dinyatakan dalam $P\left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right)$ dan $P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)$ yaitu

$$\begin{aligned}
P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{\frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{i}{\delta}\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{i}{\delta} P\left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right) + P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat campuran yang dibayar h kali tiap awal tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun $(h < n)$. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_{h}P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_{h}P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$ {}_{h}P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow {}_{h}P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \qquad (3.1.32) $$

3.1.4 Premi Manfaat Pecahan

Sering kali perusahaan asuransi jiwa tidak hanya menjual polisnya dengan premi tahunan, tetapi diadakan pula pembayaran premi yang lebih dari sekali dalam setahun, misalnya premi semesteran, kwartalan, atau bulanan. $P^{(m)}$ adalah premi manfaat tahunan yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis yaitu tiap pembayaran preminya sebesar $\frac{1}{m}P^{(m)}$ yang disebut premi manfaat pecahan.

Apabila terjadi klaim kematian, uang pertanggungan akan dibayar sepenuhnya meskipun pemegang polis meninggal dalam tahun dimana baru membayar premi pecahan yang pertama. Premi manfaat tahunan ini dibedakan atas uang pertanggungannya yaitu dibayar pada akhir tahun kematian dan dibayar pada saat kematian.

Akan ditentukan beberapa macam premi manfaat pecahan dengan uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada akhir tahun kematian sesuai dengan kontrak asuransinya.

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}(A_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}(A_x)$

$$P^{(m)}(A_x)\ \ddot{a}_x^{(m)} = A_x \Leftrightarrow P^{(m)}(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}} \tag{3.1.33}$$

dimana $\ddot{a}_x^{(m)}$ adalah anuitas seumur hidup diskrit dimuka yang dibayar m kali dalam setahun dan besarnya tiap kali pembayarannya adalah $\frac{1}{m}$ yang akan dibayarkan selama tertanggung masih hidup yaitu

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ \ddot{a}_x - \beta(m) \tag{3.1.34}$$

dengan
$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}\ d^{(m)}} \tag{3.1.35}$$

dan
$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}\ d^{(m)}} \tag{3.1.36}$$

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP^{(m)}(A_x)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP^{(m)}(A_x)$

$${}_hP^{(m)}(A_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)} = A_x \Leftrightarrow {}_hP^{(m)}(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}} \tag{3.1.35}$$

dimana $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}$ adalah anuitas hidup temporary h tahun diskrit dimuka yang dibayar m kali dalam setahun dan besarnya tiap kali pembayarannya adalah $\frac{1}{m}$ yang akan dibayarkan selama tertanggung masih hidup yaitu

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|} = \alpha(m)\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \beta(m)\ \left(1 - A_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1}\right) \tag{3.1.36}$$

Asuransi berjangka n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)$

$$P^{(m)}\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P^{(m)}\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.37}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$

$$P^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow P^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.1.38}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun $(h<n)$. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$

$${}_hP^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}=A_{x:\overline{n}|} \Leftrightarrow {}_hP^{(m)}\left(A_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.39}$$

Sedangkan beberapa macam premi manfaat pecahan dengan uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada saat kematian sesuai kontraknya.

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)$

$$P^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_x^{(m)}=\bar{A}_x \Leftrightarrow P^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}} \tag{3.1.40}$$

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_hP^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_hP^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)$

$${}_hP^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}=\bar{A}_x \Leftrightarrow {}_hP^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}} \tag{3.1.41}$$

Asuransi berjangka n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$

$$P^{(m)}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)\ \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} \Leftrightarrow P^{(m)}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}} \tag{3.1.42}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), dapat dibayar dengan akumulasai premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $n-1$ tahun. Premi ini dinotasikan sebagai $P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat $P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$

$$P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\ \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}} \Leftrightarrow P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}} \tag{3.1.43}$$

Asuransi dwiguna n tahun dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian kepada (x), juga dapat dibayar dengan akumulasi premi manfaat yang dibayar m kali dalam 1 tahun polis dengan masa pembayaran premi $h-1$ tahun $(h<n)$. Premi ini dinotasikan sebagai ${}_{h}P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$. Dengan prinsip ekivalen didapat ${}_{h}P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$

$${}_{h}P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\ \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}} \Leftrightarrow {}_{h}P^{(m)}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h|}}} \tag{3.1.44}$$

Contoh 3.1.4 :

Asuransi dwiguna 20 tahun dengan uang pertanggungan sebesar \$10,000 dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia 50 tahun dan tingkat bunga tahunan efektif tahunan 0.06. Akan dihitung premi manfaat tahunan yang dibayar semesteran.

Dari persamaan (3.1.36) akan dicari dahulu $i^{(2)}$ dan $d^{(2)}$ untuk mendapatkan $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)}$ dan $s_{\overline{1}|}^{(2)}$ yaitu :

$$
\begin{aligned}
i^{(2)} &= 2\left[(1+i)^{\frac{1}{2}}-1\right] \\
&= 2\left[(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\right] \\
&= 0.0591260282 \\
d^{(2)} &= 2\left[1-(1-d)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= 2\left[1-\left(1-\frac{0.06}{1.06}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= 0.05742827529
\end{aligned}
$$

Lalu didapat $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)}$ dan $s_{\overline{1}|}^{(2)}$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)} &= \frac{1-v}{d^{(2)}} \\
&= \frac{1-(1.06)^{-1}}{0.05742827529} \\
&= 0.9856429311 \\
s_{\overline{1}|}^{(2)} &= \frac{(1+i)-1}{i^{(2)}} \\
&= \frac{0.06}{0.0591260282} \\
&= 1.014781507
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (3.1.35) dan (3.1.36) didapat :

$$\alpha(2) = s_{\overline{1}|}^{(2)} \ \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)}$$
$$= 1.014781507 \cdot 0.9856429311$$
$$= 1.000212219$$

$$\beta(2) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(2)} - 1}{d^{(2)}}$$
$$= \frac{1.014781507 - 1}{0.05742827529}$$
$$= 0.2573907526$$

Dari tabel 12 didapat $l_{50} = 89509.00$, $l_{70} = 66161.54$, $A_{50} = 0.2490475$ dan $A_{70} = 0.5149481$ untuk mendapatkan $A_{50:\overline{20}|}$.

$$A_{50:\overline{20}|} = A^{1}_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}$$
$$= A_{50} - A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}} \ A_{70} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}$$
$$= A_{50} - A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}} \ (A_{70} - 1)$$
$$= A_{50} - v^{20} \ {}_{20}p_{50} (A_{70} - 1)$$
$$= A_{50} - v^{20} (1+i)^{-20} \frac{l_{70}}{l_{50}} \ (A_{70} - 1)$$
$$= 0.2490475 - (1.06)^{-20} \frac{66161.54}{89509.00} (0.5149481 - 1)$$
$$= 0.360839263$$

Karena sudah didapat $A_{50:\overline{20}|}$, $\alpha(2)$ dan $\beta(2)$ maka $\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}$ dapat dihitung

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|} = \alpha(2) \ \ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(2) \ \left(1 - A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}\right)$$
$$= \alpha(2) \left(\frac{1 - A_{50:\overline{20}|}}{d}\right) - \beta(2) \ \left(1 - A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}\right)$$
$$= 1.000212219 \cdot 11.29183969 - 0.2573907526 \cdot [1 - 0.2304738173]$$
$$= 11.09616711$$

Sehingga diperoleh $10,000\, P^{(2)}\left(A_{50:\overline{20}|}\right)$ dan $P^{(2)}\left(\bar{A}_{50:\overline{20}|}\right)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
10,000\, P^{(2)}\left(A_{50:\overline{20}|}\right) &= 10,000\ \frac{A_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} \\
&= 10,000\ \frac{0.360839263}{11.09616711} \\
&= 325.1927
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10,000\, P^{(2)}\left(\bar{A}_{50:\overline{20}|}\right) &= 10,000\ \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} \\
&= 10,000\ \frac{\bar{A}^{1}_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} \\
&= 10,000\ \frac{\frac{i}{\delta} A^{1}_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} \\
&= 10,000\ \frac{\frac{i}{\ln(1+i)} A^{1}_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} \\
&= 10,000\ \frac{\frac{0.06}{\ln(1.06)} 0.1303654457 + 0.2304738173}{11.09616711} \\
&= 328.6831
\end{aligned}
$$

Jadi, premi manfaat semesteran yang harus dibayar oleh pemegang polis tiap awal semester adalah sebesar $325.1927 untuk uang pertanggungan yang dibayar pada akhir tahun polis dan sebesar $328.6831 untuk uang pertanggungan yang dibayar pada saat kematian. □

3.2 CADANGAN MANFAAT

Cadangan manfaat pada waktu tertentu merupakan ekspektasi kerugian pada waktu tersebut bagi perusahaan asuransi dimana pada waktu itu pemegang polis masih hidup. Kerugian dalam hal ini berbeda dari kerugian yang sebelumnya. Kerugian yang sebelumnya hanya melihat pada waktu pemegang polis masuk asuransi, sedangkan kerugian dalam hal ini berlaku setelah asuransi berjalan.

Kerugian pada waktu tertentu merupakan nilai saat ini pada waktu tersebut dari kerugian yang akan datang bagi perusahaan asuransi. Seperti yang sebelumnya, kerugian ini juga dibedakan menjadi dua jenis. Pertama, kerugian kontinu yang dapat dinyatakan sebagai

$$_{t}L = b_{T(x)-t} v^{T(x)-t} - \bar{P}\bar{Y} \qquad (3.2.1)$$

dimana $_{t}L$ adalah kerugian kontinu pada waktu t dan $\bar{Y}$ adalah nilai saat ini pada waktu t dari anuitas kontinu. Kedua, kerugian diskrit yang dapat dinyatakan sebagai

$$_{k}L = b_{(K(x)-k)+1} v^{(K(x)-k)+1} - PY \qquad (3.2.2)$$

dimana $_{k}L$ adalah kerugian diskrit pada waktu k dan Y adalah nilai saat ini pada waktu k dari anuitas diskrit.

Jadi, cadangan manfaat pada waktu tertentu dapat dinyatakan sebagai $E\left[{}_{t}L \mid T(x) > t\right]$ untuk yang kontinu dan $E\left[{}_{k}L \mid K(x) = k, k+1, \ldots\right]$ untuk yang diskrit.

Contoh 3.2.1:

Dari contoh 3.1.1, akan ditentukan cadangan manfaat bagi perusahaan asuransi pada waktu 1 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi.

Terlebih dahulu akan dicari probabilitas bersyarat dari pemegang polis yang masih hidup 1 tahun setelah masuk asuransi,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[K(x)=k \mid K(x)\geq 1\right] &= \frac{\Pr\left[K(x)=k\right]}{\Pr\left[K(x)\geq 1\right]} \\
&= \frac{\Pr\left[K(x)=k\right]}{1-\Pr\left[K(x)=0\right]} \\
&= \frac{0.2}{0.8} \\
&= 0.25 \quad ,k=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Kerugian bagi perusahaan asuransi akan dilihat dari table dibawah ini,

K	Nilai saat ini dari kewajiban yang akan datang		Kerugian	Probabilitas bersyarat
	Perusahaan Asuransi	Pemegang Polis $P=0.30272$	$v^k - P\ddot{a}_{\overline{k}\rceil}$	
1	$v=0.9433962262$	$P\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}=0.30272$	0.64068	0.25
2	$v^2=0.88999644$	$P\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}=0.588304906$	0.30169	0.25
3	$v^3=0.839619283$	$P\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}=0.857724628$	-0.01811	0.25
4	$v^4=0.7920936632$	$P\ddot{a}_{\overline{4}\rceil}=1.111894177$	-0.31980	0.25
	$0.25\sum_{k=1}^{4} v^k$ =0.86628	$0.25P\sum_{k=1}^{4} \ddot{a}_{\overline{k}\rceil}$ =0.71517	$0.25\sum_{k=1}^{4}\left(v^k - P\ddot{a}_{\overline{k}\rceil}\right)$=0.15111	

Maka, cadangan manfaat pada waktu 1 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi yaitu :

$$
\begin{aligned}
E\left[{}_1L \mid K(x) \geq 1\right] &= E\left[v^{(K(x)-1)+1} - P\ddot{a}_{\overline{(K(x)-1)+1|}} \mid K(x) \geq 1\right] \\
&= \sum_{k=1}^{4}\left(v^{(k-1)+1} - P\ddot{a}_{\overline{(k-1)+1|}}\right)\Pr\left[K = k \mid K \geq 1\right] \\
&= \sum_{k=1}^{4}\left(v^{k} - P\ddot{a}_{\overline{k|}}\right) 0.25 \\
&= 0.25\sum_{k=1}^{4} v^{k} - 0.25 \cdot 0.30272\sum_{k=1}^{4}\ddot{a}_{\overline{k|}} \\
&= 0.86628 - 0.71517 \\
&= 0.15111
\end{aligned}
$$

karena 0.15111 bernilai positif yang berarti terjadi kerugian pada waktu 1 maka perusahaan asuransi harus menutupi kerugian tersebut dengan cadangan. □

Berdasarkan jenisnya, cadangan manfaat dibedakan menjadi cadangan manfaat kontinu, cadangan manfaat diskrit dan cadangan manfaat campuran.

3.2.1 Cadangan Manfaat Kontinu

Cadangan manfaat kontinu pada waktu t merupakan ekspektasi kerugian kontinu pada waktu tersebut bagi perusahaan asuransi dimana pada waktu itu pemegang polis masih bertahan hidup yang dinyatakan dengan ${}_t\bar{V}$. Dimana ${}_t\bar{V}$ merupakan cadangan manfaat kontinu dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada saat kematian dan premi manfaat kontinu secara umum dari berbagai kontrak asuransi. Akan ditentukan beberapa macam cadangan manfaat kontinu sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada tabel 9.

Pada asuransi seumur hidup dengan $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= E\left[{}_tL \mid T(x) > t\right] \\ &= E\left[v^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t\right] \\ &= E\left[v^{T(x)-t} \mid T(x) > t\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t\right] \\ &= E\left[v^{T(x+t)}\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x+t)|}}\right] \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Pada asuransi seumur hidup dengan ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$, perusahaan asuransi juga perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t^h\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$

$${}_t^h\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) = \bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} \tag{3.2.4}$$

Pada asuransi berjangka n tahun dengan $\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right)$

$${}_t\bar{V}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right) = \bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}})\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{3.2.5}$$

Pada asuransi *pure endowment* n tahun $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)$

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ 1} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)\ \bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} \tag{3.2.6} $$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{3.2.7} $$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan ${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t^h\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$

$$ {}_t^h\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\ \bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} \tag{3.2.8} $$

Pada asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun dengan $\bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat kontinu pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_t\bar{V}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$ yaitu :

$$ {}_t\bar{V}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right) = {}_{n-t|}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{3.2.9} $$

Akan dicari variansi dari variable random L kerugian kontinu pada waktu t dari asuransi seumur hidup sebagai berikut :

$$Var\left[{}_tL \mid T(x) > t\right] = Var\left[v^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t\right]$$

$$= Var\left[v^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\left[\frac{1-v^{T(x)-t}}{\delta}\right] \mid T(x) > t\right]$$

$$= Var\left[v^{T(x)-t} - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta} + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)v^{T(x)-t}}{\delta} \mid T(x) > t\right]$$

$$= Var\left[v^{T(x)-t}\left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right] - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta} \mid T(x) > t\right]$$

$$= \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right]^2 Var\left[v^{T(x)-t} \middle| T(x) > t\right]$$

$$= \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right]^2 Var\left[v^{T(x+t)}\right]$$

$$= \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{x+t} - \left(\bar{A}_{x+t}\right)^2\right] \tag{3.2.10}$$

Contoh 3.2.2 :

Berdasarkan hukum De Moivre dengan $l_x = 100 - x$ dan $i = 0.06$. Akan dihitung premi manfaat kontinu $\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)$, cadangannya ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right)$ dan variansinya $Var\left[{}_tL \mid T(x) > t\right]$ untuk $t = 0, 10, 20, ..., 60$ dari asuransi seumur hidup kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia 35 tahun.

Dari persamaan (3.1.4), akan dicari dahulu $\bar{A}_{35}$ yaitu :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t f_T(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty v^t \left(-\frac{d}{dt}\,{}_t p_x\right) dt \\
&= \int_0^\infty v^t \left(-\frac{d}{dt}\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) dt \\
&= -\frac{1}{l_x}\int_0^\infty v^t \left(\frac{d}{dt} l_{x+t}\right) dt \\
&= -\frac{1}{100-x}\int_0^{100-x} v^t \left(\frac{d}{dt}(100-x-t)\right) dt \\
&= \frac{1}{100-x}\int_0^{100-x} v^t dt \\
&= \frac{1}{100-x}\int_0^{100-x} e^{\ln v^t} dt \\
&= \frac{1}{(100-x)\ln v} v^t \Big|_0^{100-x} \\
&= \frac{1}{(100-x)\ln v}\left(v^{100-x}-1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{35} &= \frac{1}{65\ln(1.06)^{-1}}\left((1.06)^{-65}-1\right) \\
&= 0.2580469373
\end{aligned}
$$

Maka didapat premi manfaat kontinu $\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)$ yaitu :

$$
\begin{aligned}
\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \frac{\delta \bar{A}_{35}}{1-\bar{A}_{35}} \\
&= \frac{\ln(1+i)\bar{A}_{35}}{1-\bar{A}_{35}} \\
&= \frac{\ln(1.06)\cdot 0.25805}{1-0.25805} \\
&= 0.02027
\end{aligned}
$$

Jadi premi manfaat kontinu yang dibayar oleh pemegang polis sebesar $\$0.02026558557$. Untuk mendapatkan cadangan manfaat kontinu pada waktu t, ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right)$ dimana $t = 0,10,20,...,60$, dari persamaan $(3.2.1)$ akan dicari dahulu $\bar{A}_{35}$, $\bar{A}_{45}$, $\bar{A}_{55}$, $\bar{A}_{65}$, $\bar{A}_{75}$, $\bar{A}_{85}$ dan $\bar{A}_{95}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \frac{1}{(100-x)\ln v}\left(v^{100-x}-1\right) \\
&= \frac{1}{(100-x)\ln e^{-\delta}}\left(e^{-\delta(100-x)}-1\right) \\
&= \frac{1}{-(100-x)\delta}\left(e^{-(100-x)\delta}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_{35} = \frac{1}{-65\ln(1.06)}\left(e^{-65\ln(1.06)}-1\right) = 0.2580469373$$

$$\bar{A}_{45} = \frac{1}{-55\ln(1.06)}\left(e^{-55\ln(1.06)}-1\right) = 0.2993745593$$

$$\bar{A}_{55} = \frac{1}{-45\ln(1.06)}\left(e^{-45\ln(1.06)}-1\right) = 0.3536667631$$

$$\bar{A}_{65} = \frac{1}{-35\ln(1.06)}\left(e^{-35\ln(1.06)}-1\right) = 0.4265420002$$

$$\bar{A}_{75} = \frac{1}{-25\ln(1.06)}\left(e^{-25\ln(1.06)}-1\right) = 0.5265253077$$

$$\bar{A}_{85} = \frac{1}{-15\ln(1.06)}\left(e^{-15\ln(1.06)}-1\right) = 0.6667191338$$

$$\bar{A}_{95} = \frac{1}{-5\ln(1.06)}\left(e^{-5\ln(1.06)}-1\right) = 0.8675015039$$

Maka didapat cadangan manfaat kontinu ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right)$ untuk $t = 0,10,20,...,60$ yaitu:

$$\begin{aligned}
{}_0\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{35} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{35}}{\delta}\right] \\
&= 0.25805 - 0.02027\left(\frac{1-0.25805}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.0000
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{45} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{45}}{\delta}\right] \\
&= 0.29937 - 0.02027\left(\frac{1-0.29937}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.05570 \\
{}_{20}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{55} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{55}}{\delta}\right] \\
&= 0.35367 - 0.02027\left(\frac{1-0.35367}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.12888 \\
{}_{30}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{65} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{65}}{\delta}\right] \\
&= 0.42654 - 0.02027\left(\frac{1-0.42654}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.22710 \\
{}_{40}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{75} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{75}}{\delta}\right] \\
&= 0.52653 - 0.02027\left(\frac{1-0.52653}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.36185 \\
{}_{50}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{85} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{85}}{\delta}\right] \\
&= 0.66672 - 0.02027\left(\frac{1-0.66672}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.55081 \\
{}_{60}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right) &= \bar{A}_{95} - \bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)\left[\frac{1-\bar{A}_{95}}{\delta}\right] \\
&= 0.86750 - 0.02027\left(\frac{1-0.86750}{\ln(1.06)}\right) \\
&= 0.82142
\end{aligned}
$$

Dan untuk mendapatkan variansi dari kerugian kontinu $Var\left[{}_{t}L \mid T(x) > t\right]$ untuk $t = 0,10,20,...,60$, dari persamaan (3.2.8) akan dicari dahulu ${}^{2}\bar{A}_{35},\ {}^{2}\bar{A}_{45},\ {}^{2}\bar{A}_{55},\ {}^{2}\bar{A}_{65},\ {}^{2}\bar{A}_{75},\ {}^{2}\bar{A}_{85}$ dan ${}^{2}\bar{A}_{95}$ sebagai berikut :

$$ {}^{2}\bar{A}_{x} = \frac{1}{-(100-x)2\delta}\left(e^{-(100-x)2\delta} - 1\right) $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{35} = \frac{1}{-130\ln(1.06)}\left(e^{-130\ln(1.06)} - 1\right) = 0.1319461904 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{45} = \frac{1}{-110\ln(1.06)}\left(e^{-110\ln(1.06)} - 1\right) = 0.1557597067 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{55} = \frac{1}{-90\ln(1.06)}\left(e^{-90\ln(1.06)} - 1\right) = 0.1896803399 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{65} = \frac{1}{-70\ln(1.06)}\left(e^{-70\ln(1.06)} - 1\right) = 0.2410186701 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{75} = \frac{1}{-50\ln(1.06)}\left(e^{-50\ln(1.06)} - 1\right) = 0.3246024917 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{85} = \frac{1}{-30\ln(1.06)}\left(e^{-30\ln(1.06)} - 1\right) = 0.4724588668 $$

$$ {}^{2}\bar{A}_{95} = \frac{1}{-10\ln(1.06)}\left(e^{-10\ln(1.06)} - 1\right) = 0.7578745463 $$

Maka didapat variansi dari kerugian kontinu $Var\left[{}_{t}L \mid T(x) > t\right]$ untuk $t = 0,10,20,...,60$ yaitu :

$$ \begin{aligned} \text{var}\left[{}_{0}L \mid T(35) > 0\right] &= \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{35})}{\delta}\right]^{2}\left[{}^{2}\bar{A}_{35} - \left(\bar{A}_{35}\right)^{2}\right] \\ &= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^{2}\left[0.13195 - \left(0.25805\right)^{2}\right] \\ &= 0.11873 \end{aligned} $$

$$Var\left[{}_{10}L \mid T(35) > 10\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{45} - \left(\bar{A}_{45}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.15576 - \left(0.29938\right)^2\right]$$
$$= 0.12014$$

$$Var\left[{}_{20}L \mid T(35) > 20\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{55} - \left(\bar{A}_{55}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.18968 - \left(0.35367\right)^2\right]$$
$$= 0.11735$$

$$Var\left[{}_{30}L \mid T(35) > 30\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{65} - \left(\bar{A}_{65}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.24102 - \left(0.42654\right)^2\right]$$
$$= 0.10732$$

$$Var\left[{}_{40}L \mid T(35) > 40\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{75} - \left(\bar{A}_{75}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.32460 - \left(0.52651\right)^2\right]$$
$$= 0.08606$$

$$Var\left[{}_{50}L \mid T(35) > 50\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{85} - \left(\bar{A}_{85}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02027}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.47246 - \left(0.66672\right)^2\right]$$
$$= 0.05076$$

$$Var\left[{}_{60}L \mid T(35) > 60\right] = \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{35}\right)}{\delta}\right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{95} - \left(\bar{A}_{95}\right)^2\right]$$
$$= \left[1 + \frac{0.02023}{\ln(1.06)}\right]^2 \left[0.75787 - \left(0.86750\right)^2\right]$$
$$= 0.00966$$

□

3.2.2 Formula Lain untuk Cadangan Manfaat Kontinu

Sejauh ini telah didefinisikan cadangan manfaat untuk satu metode yaitu metode prospektif, yang melihat cadangan manfaat sebagai selisih antara ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan yang dibayar oleh perusahaan asuransi dengan ekspektasi nilai saat ini dari akumulasi premi manfaat yang dibayar oleh pemegang polis. Dari metode prospektif ini, dapat dibangun tiga formula umum untuk polis asuransi dengan uang pertanggungan dan premi manfaat yang tetap.

Untuk asuransi dwiguna n tahun

- Formula akumulasi dari beda premi manfaat kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

- Formula asuransi berjangka $n-t$ kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[1 - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[1 - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}
\end{aligned}
\tag{3.2.12}
$$

- Formula retrospektif untuk $t < n - s$,

$$
\begin{aligned}
{}_s\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} \\
&= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\left[\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} \\
&= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\,\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} \\
&= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\left[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\
&= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\;{}_{s+t}\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+s:\overline{t}|} + A_{x+s:\overline{t}|}^{\;\;\;1}\;{}_{s+t}\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \qquad (3.2.13)
\end{aligned}
$$

- Formula anuitas hidup temporary kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= 1 - \delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= 1 - \delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \left(\frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= 1 - \cancel{\delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} + \cancel{\delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} \\
&= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (3.2.14)
\end{aligned}
$$

- Formula premi manfaat kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\right]\cdot\frac{1}{\dfrac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}} \\
&= \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) + \delta} \qquad (3.2.15)
\end{aligned}
$$

- Formula asuransi berjangka kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) &= 1-\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \\
&= 1-\frac{\delta\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\delta\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \\
&= 1-\frac{1-\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}} \\
&= \frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}
\end{aligned}
\qquad (3.2.16)
$$

Untuk asuransi seumur hidup

- Formula anuitas hidup kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= \bar{A}_{x+t}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t} \\
&= 1-\delta\bar{a}_{x+t}-\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\bar{a}_{x+t} \\
&= 1-\delta\bar{a}_{x+t}-\left(\frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x}\right)\bar{a}_{x+t} \\
&= 1-\cancel{\delta\bar{a}_{x+t}}-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}+\cancel{\delta\bar{a}_{x+t}} \\
&= 1-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}
\end{aligned}
\qquad (3.2.17)
$$

- Formula premi manfaat kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= \bar{A}_{x+t}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t} \\
&= \left[\frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\right]\bar{a}_{x+t} \\
&= \left[\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t}\right)-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\right]\ \frac{1}{\frac{\bar{A}_{x+t}+\delta\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}}} \\
&= \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t}\right)-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\bar{P}\left(\bar{A}_{x+t}\right)+\delta}
\end{aligned}
\qquad (3.2.18)
$$

- Formula asuransi seumur hidup kontinu

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \\
&= 1 - \frac{\delta \bar{a}_{x+t}}{\delta \bar{a}_x} \\
&= 1 - \frac{1 - \bar{A}_{x+t}}{1 - \bar{A}_x} \\
&= \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}
\end{aligned}
\tag{3.2.19}
$$

3.2.3 Cadangan Manfaat Diskrit

Cadangan manfaat diskrit pada waktu k merupakan ekspektasi kerugian diskrit pada waktu tersebut bagi perusahaan asuransi dimana pada waktu itu pemegang polis masih bertahan hidup yang dinyatakan dengan ${}_kV$. ${}_kV$ merupakan cadangan manfaat diskrit dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayar pada akhir tahun kematian dan premi manfaat diskrit secara umum dari berbagai kontrak asuransi. Akan ditentukan beberapa macam cadangan manfaat diskrit sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada tabel 10.

Pada asuransi seumur hidup dengan $P\left(A_x\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(A_x\right)$

$$
\begin{aligned}
{}_kV\left(A_x\right) &= E\left[{}_kL \mid K(x)=k,k+1,...\right] \\
&= E\left[v^{(K(x)-k)+1} - P\left(A_x\right)\ \ddot{a}_{\overline{(K(x)-k)+1|}} \mid K(x)=k,k+1,...\right] \\
&= E\left[v^{(K(x)-k)+1} \mid K(x)=k,k+1,...\right] - P\left(A_x\right)\ E\left[\ddot{a}_{\overline{(K(x)-k)+1|}} \mid K(x)=k,k+1,...\right] \\
&= E\left[v^{K(x+k)+1}\right] - P\left(A_x\right)\ E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x+k)+1|}}\right] \\
&= A_{x+k} - P\left(A_x\right)\ddot{a}_{x+k} \qquad (3.2.20)
\end{aligned}
$$

Pada asuransi seumur hidup dengan ${}_hP\left(A_x\right)$, perusahaan asuransi juga perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_k^hV\left(A_x\right)$

$$
{}_k^hV\left(A_x\right) = A_{x+k} - {}_hP\left(A_x\right)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k|}} \qquad (3.2.21)
$$

Pada asuransi berjangka n tahun dengan $P\left(A^1_{x:\overline{n|}}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(A^1_{x:\overline{n|}}\right)$

$$
{}_kV\left(A^1_{x:\overline{n|}}\right) = A^1_{x+k:\overline{n-k|}} - P\left(A^1_{x:\overline{n|}}\right)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}} \qquad (3.2.22)
$$

Pada asuransi *pure endowment* n tahun dengan $P\left(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)$

$$
{}_kV\left(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right) = A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\ \ \ \ 1} - P\left(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}} \qquad (3.2.23)
$$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan $P\left(A_{x:\overline{n|}}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(A_{x:\overline{n|}}\right)$

$$
{}_kV\left(A_{x:\overline{n|}}\right) = A_{x+k:\overline{n-k|}} - P\left(A_{x:\overline{n|}}\right)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}} \qquad (3.2.24)
$$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan ${}_{h}P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$, perusahaan asuransi juga perlu menyiapkan cadangan manfaat diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_{k}^{h}V\left(A_{x:\overline{n}|}\right)$

$${}_{k}^{h}V\left(A_{x:\overline{n}|}\right)=A_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_{h}P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} \qquad (3.2.25)$$

Pada anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun dengan $P({}_{n|}\ddot{a}_{x})$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaa diskrit pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_{k}V({}_{n|}\ddot{a}_{x})$

$${}_{k}V({}_{n|}\ddot{a}_{x})={}_{n-k|}\ddot{a}_{x+k}-P\left({}_{n|}\ddot{a}_{x}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \qquad (3.2.26)$$

Akan dicari variansi dari variable random kerugian pada waktu t dari asuransi seumur hidup diskrit dengan uang pertanggungan sebesar 1

$$\begin{aligned}
Var\left[{}_{k}L \mid K(x)=k,k+1,...\right] &= Var\left[v^{(K(x)-k)+1}-P\left(A_{x}\right)\ddot{a}_{\overline{(K(x)-k)+1}|} \mid K(x)=k,k+1,...\right]\\
&= Var\left[v^{(K(x)-k)+1}-P\left(A_{x}\right)\left[\frac{1-v^{(K(x)-k)+1}}{d}\right] \mid K(x)=k,k+1,...\right]\\
&= Var\left[v^{(K(x)-k)+1}-\frac{P\left(A_{x}\right)}{d}+\frac{P\left(A_{x}\right)v^{(K(x)-k)+1}}{d} \mid K(x)=k,k+1,...\right]\\
&= Var\left[v^{(K(x)-k)+1}\left[1+\frac{P\left(A_{x}\right)}{d}\right]-\frac{P\left(A_{x}\right)}{d} \mid K(x)=k,k+1,...\right]\\
&= \left[1+\frac{P\left(A_{x}\right)}{d}\right]^{2} Var\left[v^{(K(x)-k)+1} \middle| K(x)=k,k+1,...\right]\\
&= \left[1+\frac{P\left(A_{x}\right)}{d}\right]^{2} Var\left[v^{K(x+k)+1}\right]\\
&= \left[1+\frac{P\left(A_{x}\right)}{d}\right]^{2}\left[{}^{2}A_{x+k}-\left(A_{x+k}\right)^{2}\right] \qquad (3.2.27)
\end{aligned}$$

3.2.4 Formula Lain untuk Cadangan Manfaat Diskrit

Dari metode prospektif dapat dibangun tiga formula umum cadangan manfaat diskrit untuk polis asuransi dengan uang pertanggungan tetap dan manfaat premi yang tetap.

Untuk asuransi dwiguna n tahun

- Formula akumulasi dari beda premi manfaat diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[\frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\right]\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[P\left(A_{x+k:\overline{n-k}|}\right) - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\right]\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}
\end{aligned}
\tag{3.2.28}
$$

- Formula asuransi berjangka diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[1 - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{A_{x+k:\overline{n-k}|}}\right]A_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[1 - \frac{P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)}{P\left(A_{x+k:\overline{n-k}|}\right)}\right]A_{x+k:\overline{n-k}|}
\end{aligned}
\tag{3.2.29}
$$

- Formula retrospektif untuk $h < n - j$,

$$
\begin{aligned}
{}_jV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+j:\overline{n-j}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|} \\
&= A^1_{x+j:\overline{h}|} + A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\,A_{x+j+h:\overline{n-j-h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\left[\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\,\ddot{a}_{x+j+h:\overline{n-j-h}|}\right] \\
&= A^1_{x+j:\overline{h}|} + A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\,A_{x+j+h:\overline{n-j-h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\,\ddot{a}_{x+j+h:\overline{n-j-h}|} \\
&= A^1_{x+j:\overline{h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\left[A_{x+j+h:\overline{n-j-h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+j+h:\overline{n-j-h}|}\right] \\
&= A^1_{x+j:\overline{h}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\,\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + A_{x+j:\overset{1}{\overline{h}|}}\;{}_{j+h}V_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
\tag{3.2.30}
$$

- Formula anuitas hidup temporary diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= 1 - d\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= 1 - d\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \left(\frac{1 - d\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}
\end{aligned}
\tag{3.2.31}
$$

- Formula premi manfaat berjangka diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[\frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x+k}} - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\right] \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&= \left[P\left(A_{x+k:\overline{n-k}|}\right) - P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)\right] \frac{1}{\dfrac{A_{x+k:\overline{n-k}|} + d\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}} \\
&= \frac{P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|} + d}
\end{aligned}
\tag{3.2.32}
$$

- Formula asuransi berjangka diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= 1 - \frac{d\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{d\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= 1 - \frac{1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{A_{x+k:\overline{n-k}|} - A_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}}
\end{aligned}
\tag{3.2.33}
$$

Untuk asuransi seumur hidup

- Formula anuitas seumur hidup diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= A_{x+k} - P_x\ \ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - d\ \ddot{a}_{x+k} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - d\ \ddot{a}_{x+k} - \left(\frac{1-d\ \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\right)\ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \qquad (3.2.34)
\end{aligned}
$$

- Formula asuransi seumur hidup diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= 1 - \frac{d\ \ddot{a}_{x+k}}{d\ \ddot{a}_x} \\
&= 1 - \frac{1-A_{x+k}}{1-A_x} \\
&= \frac{A_{x+k} - A_x}{1-A_x} \qquad (3.2.36)
\end{aligned}
$$

- Formula Premi manfaat seumur hidup diskrit

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= A_{x+k} - P_x\ \ddot{a}_{x+k} \\
&= \left[\frac{A_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k}} - P_x\right]\ddot{a}_{x+k} \\
&= \left[P_{x+k} - P_x\right]\ \frac{1}{\dfrac{A_{x+t} + d\ \ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k}}} \\
&= \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d} \qquad (3.2.35)
\end{aligned}
$$

Contoh 3.2.3:

Dengan tingkat bunga efektif tahunan 0.06, akan ditentukan cadangan manfaat dari asuransi berjangka 5 tahun dengan uang pertanggungan sebesar \$1,000 yang dibayar pada akhir tahun polis untuk masing-masing pemegang polis yang berusia 50 tahun pada waktu masuk asuransi. Misalnya π adalah premi manfaat diskrit dari asuransi berjangka 5 tahun dengan uang pertanggungan sebesar \$1,000 yaitu : $\pi = 1,000\ P^{1}_{50:\overline{5}|}$. Dari tabel 12 dengan tingkat bunga efektif tahunan 0.06 dapat dicari

$l_{50} = 89,509.00,\ l_{51} = 88,979.11,\ l_{52} = 88,407.68,\ l_{53} = 87,791.26,\ l_{54} = 87,126.20,$ $l_{55} = 86,408.60$ dan $A_{51} = 0.2596073,\ A_{52} = 0.2704988,\ A_{53} = 0.2817206,$ $A_{54} = 0.2932700,\ A_{55} = 0.3051431.$ Berdasarkan persamaan (3.1.17) akan dicari dahulu $A^{1}_{50:\overline{5}|}$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
A^{1}_{50:\overline{5}|} &= A_{50} - A_{50:\overline{5}|}^{\ \ \ 1}\ A_{55} \\
&= A_{50} - v^{5}\ {}_{5}p_{50}\ A_{55} \\
&= 0.2490475 - (1.06)^{-5}\ \frac{86,408.60}{89,509.00}\ 0.3051431 \\
&= 0.02892497232
\end{aligned}
$$

Maka premi manfaat diskrit dapat dihitung

$$\pi = 1,000\ P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)$$
$$= 1,000 \frac{dA^{1}_{50:\overline{5}|}}{1-A_{50:\overline{5}|}}$$
$$= 1,000 \frac{A^{1}_{50:\overline{5}|}}{1-\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}+A_{50:\overset{1}{\overline{5}|}}\right)}$$
$$= 1,000 \frac{\frac{0,06}{1,06}\ 0.02892497232}{1-0,7502997229}$$
$$= 6.556911363$$

Dari persamaan (3.2.22), maka dicari dahulu $A_{51:\overset{1}{\overline{4}|}},\ A_{52:\overset{1}{\overline{3}|}},\ A_{53:\overset{1}{\overline{2}|}},\ A_{54:\overset{1}{\overline{1}|}}\ dan\ A_{55:\overset{1}{\overline{0}|}}$

untuk menperoleh $A^{1}_{51:\overline{4}|},\ A^{1}_{52:\overline{3}|},\ A^{1}_{53:\overline{2}|},\ A^{1}_{54:\overline{1}|}\ dan\ A^{1}_{55:\overline{0}|}$ yaitu :

$$A_{51:\overset{1}{\overline{4}|}} = v^{4}\ {}_{4}p_{51} = (1.06)^{-4}\ \frac{l_{55}}{l_{51}} = (1.06)^{-4}\ \frac{86408.60}{88979.11} = 0.7692109362$$
$$A_{52:\overset{1}{\overline{3}|}} = v^{3}\ {}_{3}p_{52} = (1.06)^{-3}\ \frac{l_{55}}{l_{52}} = (1.06)^{-3}\ \frac{86408.60}{88407.68} = 0.8206337592$$
$$A_{53:\overset{1}{\overline{2}|}} = v^{2}\ {}_{2}p_{53} = (1.06)^{-2}\ \frac{l_{55}}{l_{53}} = (1.06)^{-2}\ \frac{86408.60}{87791.26} = 0.8759795267$$
$$A_{54:\overset{1}{\overline{1}|}} = v^{1}\ {}_{1}p_{54} = (1.06)^{-1}\ \frac{l_{55}}{l_{54}} = (1.06)^{-1}\ \frac{86408.60}{87126.20} = 0.9356261052$$
$$A_{55:\overset{1}{\overline{0}|}} = v^{0}\ {}_{0}p_{55} = 1\ \frac{l_{55}}{l_{55}} = 1$$

Maka didapat :

$$A^{1}_{51:\overline{4}|} = A_{51} - A_{51:\overset{1}{\overline{4}|}}\ A_{55} = 0.2596073 - 0.7692109362 \cdot 0.3051431 = 0.02488789037$$
$$A^{1}_{52:\overline{3}|} = A_{52} - A_{52:\overset{1}{\overline{3}|}}\ A_{55} = 0.2704988 - 0.8206337592 \cdot 0.3051431 = 0.02008807075$$
$$A^{1}_{53:\overline{2}|} = A_{53} - A_{53:\overset{1}{\overline{2}|}}\ A_{55} = 0.2817206 - 0.8759795267 \cdot 0.3051431 = 0.01442149169$$
$$A^{1}_{54:\overline{1}|} = A_{54} - A_{54:\overset{1}{\overline{1}|}}\ A_{55} = 0.2932700 - 0.9356261052 \cdot 0.3051431 = 0.007770149818$$
$$A^{1}_{55:\overline{0}|} = A_{55} - A_{55:\overset{1}{\overline{0}|}}\ A_{55} = 0.3051431 - 1 \cdot 0.3051431 = 0$$

Setelah diperoleh $A^{1}_{51:\overline{4}|},\ A^{1}_{52:\overline{3}|},\ A^{1}_{53:\overline{2}|},\ A^{1}_{54:\overline{1}|}\ dan\ A^{1}_{55:\overline{0}|}$ maka dapat dihitung cadangan manfaat untuk $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ dan } 5$ dari asuransi berjangka 5 tahun dengan uang pertanggungan sebesar \$1,000 yaitu

$$
\begin{aligned}
k = 1,\ \ 1,000\,{}_{1}V^{1}_{50:\overline{5}|} &= 1,000(A^{1}_{51:\overline{4}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\ \ddot{a}_{51:\overline{4}|}) \\
&= 1,000\left[A^{1}_{51:\overline{4}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\left(\frac{1-A_{51:\overline{4}|}}{d}\right)\right] \\
&= 1,000\left[0.02489 - 0.00656\ \frac{1-\left(0.02489+0.76921\right)}{\frac{0.06}{1.06}}\right] \\
&= 1.03656
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k = 2,\ \ 1,000\,{}_{2}V^{1}_{50:\overline{5}|} &= 1,000(A^{1}_{52:\overline{3}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\ \ddot{a}_{52:\overline{3}|}) \\
&= 1,000\left[A^{1}_{52:\overline{3}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\left(\frac{1-A_{52:\overline{3}|}}{d}\right)\right] \\
&= 1,000\left[0.02009 - 0.00656\ \frac{1-\left(0.02009+0.82063\right)}{\frac{0.06}{1.06}}\right] \\
&= 1.63749
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k = 3,\ \ 1,000\,{}_{3}V^{1}_{50:\overline{5}|} &= 1,000(A^{1}_{53:\overline{2}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\ \ddot{a}_{53:\overline{2}|}) \\
&= 1,000\left[A^{1}_{53:\overline{2}|} - P\left(A^{1}_{50:\overline{5}|}\right)\left(\frac{1-A_{53:\overline{2}|}}{d}\right)\right] \\
&= 1,000\left[0.01442 - 0.00656\ \frac{1-\left(0.01442+0.87597\right)}{\frac{0.06}{1.06}}\right] \\
&= 1.72568
\end{aligned}
$$

$$k=4,\quad 1,000\,{}_4V^1_{50:\overline{5}|} = 1,000(A^1_{54:\overline{1}|} - P\left(A^1_{50:\overline{5}|}\right)\ \ddot{a}_{54:\overline{1}|})$$

$$=1,000\left[A^1_{54:\overline{1}|} - P\left(A^1_{50:\overline{5}|}\right)\left(\frac{1-A_{54:\overline{1}|}}{d}\right)\right]$$

$$=1,000\left[0.00777 - 0.00656\ \frac{1-\left(0.00777+0.93563\right)}{\frac{0.06}{1.06}}\right]$$

$$=1.21324$$

$$k=5,\quad 1,000\,{}_5V^1_{50:\overline{5}|} = 1,000(A^1_{55:\overline{0}|} - P\left(A^1_{50:\overline{5}|}\right)\ \ddot{a}_{55:\overline{0}|})$$

$$=1,000\left[A^1_{55:\overline{0}|} - P\left(A^1_{50:\overline{5}|}\right)\left(\frac{1-A_{55:\overline{0}|}}{d}\right)\right]$$

$$=1,000\left[0 - 0.00656\ \frac{1-\left(0+1\right)}{\frac{0.06}{1.06}}\right]$$

$$=0 \qquad \square$$

Contoh 3.2.4:

Dengan tingkat bunga efektif tahunan 0.06, akan ditentukan cadangan manfaat dari asuransi dwiguna 5 tahun dengan uang pertanggungan sebesar \$1,000 yang dibayar pada akhir tahun polis untuk masing-masing pemegang polis yang berusia 50 tahun pada waktu masuk asuransi.

Dari contoh (3.2.5) telah didapat $A_{50:\overline{5}|} = 0.750299729$ dan dari persamaan (3.2.33), maka dapat dihitung cadangan manfaatnya untuk $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ dan 5

$$k=1,\quad 1,000\,{}_1V_{50:\overline{5}|} = 1,000\ \frac{A_{51:\overline{4}|} - A_{50:\overline{5}|}}{1-A_{50:\overline{5}|}}$$

$$=1,000\ \frac{0.7940988266 - 0.750299729}{1-0.750299729}$$

$$=175.4066883$$

$$k = 2\,,\quad 1{,}000\,{}_2V_{50:\overline{5}|} = 1{,}000\;\frac{A_{52:\overline{3}|} - A_{50:\overline{5}|}}{1 - A_{50:\overline{5}|}}$$

$$= 1{,}000\;\frac{0.84072183 - 0.750299729}{1 - 0.750299729}$$

$$= 362.1225585$$

$$k = 3,\quad 1{,}000\,{}_3V_{50:\overline{5}|} = 1{,}000\;\frac{A_{53:\overline{2}|} - A_{50:\overline{5}|}}{1 - A_{50:\overline{5}|}}$$

$$= 1{,}000\;\frac{0.8904010184 - 0.750299729}{1 - 0.750299729}$$

$$= 561.0780118$$

$$k = 4,\quad 1{,}000\,{}_4V_{50:\overline{5}|} = 1{,}000\;\frac{A_{54:\overline{1}|} - A_{50:\overline{5}|}}{1 - A_{50:\overline{5}|}}$$

$$= 1{,}000\;\frac{0.943396255 - 0.750299729}{1 - 0.750299729}$$

$$= 839.543042$$

$$k = 5,\quad 1{,}000\,{}_5V_{50:\overline{5}|} = 1{,}000\;\frac{A_{55:\overline{0}|} - A_{50:\overline{5}|}}{1 - A_{50:\overline{5}|}}$$

$$= 1{,}000\;\frac{1 - 0.750299729}{1 - 0.750299729}$$

$$= 1{,}000$$

3.2.5 Cadangan Manfaat Campuran

Seperti premi tahunan campuran, cadangan manfaat campuran yang dimaksud adalah uang pertanggungannya dibayar pada saat kematian namun premi manfaatnya dibayar secara berkala yaitu tiap awal tahun polis. Akan ditentukan beberapa macam cadangan manfaat campuran sesuai dengan kontrak asuransinya. Untuk lebih jelasnya,dapat dilihat pada tabel11.

Pada asuransi seumur hidup dengan $P\left(\bar{A}_x\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(\bar{A}_x\right)$

$$\begin{aligned}
{}_kV\left(\bar{A}_x\right) &= E\left[{}_kL \mid K(x)=k,k+1,...\right] \\
&= E\left[v^{K(x)-k+1} - P\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|} \mid K(x)=k,k+1,.\right] \\
&= E\left[v^{K(x)-k} \mid K(x)=k,k+1,...\right] - P\left(\bar{A}_x\right)E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|} \mid K(x)=k,k+1,...\right] \\
&= E\left[v^{K(x+k)}\right] - P\left(\bar{A}_x\right)E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x+k)}|}\right] \\
&= \bar{A}_{x+k} - P\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_{x+k}
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Pada asuransi seumur hidup dengan ${}_hP\left(\bar{A}_x\right)$, perusahaan asuransi juga perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_k^hV\left(\bar{A}_x\right)$

$${}_k^hV\left(\bar{A}_x\right) = \bar{A}_{x+k} - {}_hP\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} \tag{3.2.38}$$

Pada asuransi berjangka n tahun dengan $P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$ yaitu :

$${}_kV\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \bar{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|} - P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{3.2.39}$$

Pada asuransi *pure endowment* n tahun dengan $P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}{}^{1}\right)$, perusahaanasuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}{}^{1}\right)$

$${}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}{}^{1}\right) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}{}^{1} - P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}{}^{1}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{3.2.40}$$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan $P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$ {}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}-P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{3.2.41} $$

Pada asuransi dwiguna n tahun dengan ${}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_k^hV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$

$$ {}_k^hV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{3.2.42} $$

Pada asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun dengan $P\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$, perusahaan asuransi perlu menyiapkan cadangan manfaat campuran pada waktu tertentu yang dinyatakan sebagai ${}_kV\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)$

$$ {}_kV\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)={}_{n-k|}\bar{a}_{x+k}-P\left({}_{n|}\bar{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{3.2.43} $$

BAB IV

PENENTUAN PREMI MANFAAT DAN CADANGAN MANFAAT DENGAN MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Pada bab ini akan ditentukan premi manfaat dan cadangan manfaat dengan memperhitungkan biaya pengeluaran yang diperlukan oleh perusahaan asuransi. Premi manfaat dengan memperhitungkan biaya pengeluaran ini akan ditentukan dengan prinsip ekivalen yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

4.1 BIAYA PENGELUARAN

Pada kenyataannya perusahaan asuransi tidak dapat beroprasi jika pemasukannya hanya bersumber dari premi manfaat. Perusahaan asuransi harus mengumpulkan premi yang mampu memenuhi semua biaya, misalnya pajak, surat ijin, komisi penjualan polis, biaya penerbitan polis, biaya pemeliharaan polis dan biaya-biaya umum lainnya.

Biaya pengeluaran yang dibutuhkan oleh perusahaan asuransi, biasanya ditulis dalam persentase. Tabel 1 di bawah ini merupakan suatu contoh dari biaya pengeluaran pada perusahaan asuransi.

Jenis-jenis dari biaya pengeluaran	Tahun pertama		Tahun Berikutnya	
	Premi	Konstanta	Premi	Konstanta
Komisi penjualan	10%	-	2%	-
Pajak dan surat ijin	2%	-	2%	-
Biaya penerbitan polis	2%	4	-	-
Pemeliharaan polis	2%	1	2%	1
Biaya-biaya umum	4%	3	-	1
total	20%	8	6%	2

Tabel 1: Jenis-jenis biaya pengeluaran

4.2 PRINSIP EKIVALEN DENGAN MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Prinsip ekivalen dengan biaya pengeluaran merupakan ekspektasi dari kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang bernilai nol pada waktu pemegang polis masuk asuransi.

Bagi perusahaan asuransi, kerugian dengan memperhitungkan biaya pengeluaran akan terjadi jika uang pertanggungan dan biaya pengeluaran yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi lebih besar dari akumulasi premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang dibayar oleh pemegang polis. Kerugian ini dinotasikan dengan ${}_kL_e$ dan dinyatakan sebagai

$${}_kL_e = b_{(k(x)-k)+1}v^{(k(x)-k)+1} + (\text{nilai saat ini pada waktu } k \text{ dari biaya pengeluaran}) - GY$$

dimana G adalah premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dan Y adalah nilai saat ini dari anuitas diskrit sebesar 1.

Jadi, prinsip ekivalen yang memperhitungkan biaya pengeluaran dapat dinyatakan sebagai $E\left[{}_0L_e\right]=0$ yaitu

$$E\left[b_{k(x)+1}v^{k(x)+1}+(\text{nilai saat ini pada waktu nol dari biaya pengeluaran})\ -\ GY\right]=0$$

4.3 PREMI MANFAAT DENGAN MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Premi manfaat dengan memperhitungkan biaya pengeluaran adalah premi sebenarnya yang ditentukan oleh perusahaan asuransi kepada pemegang polis agar perusahaan asuransi dapat beroprasi. Premi ini dapat diperoleh dengan menggunakan prinsip ekivalen yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

Premi manfaat yang dibahas pada bab 3.1 merupakan premi manfaat yang tidak memperhitungkan biaya pengeluaran, yang dapat disebut sebagai premi manfaat bersih. Selisih antara premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dengan premi manfaat bersih disebut sebagai premi biaya. Premi biaya ini dinotasikan dengan e yaitu

$$e=G-\pi$$

dimana π merupakan premi manfaat bersih dengan uang pertanggungan yang tidak sama dengan satu.

4.4 CADANGAN MANFAAT DENGAN MAMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu tertentu merupakan ekspektasi kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu tersebut dimana pada waktu itu pemegang polis masih hidup. Cadangan manfaat ini dapat dinyatakan sebagai

$${}_t\bar{V}_e = E\left[{}_tL_e \mid T(x) > t \right]$$

untuk yang kontinu, dimana

${}_t\bar{V}_e$: cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang kontinu pada waktu t

${}_tL_e$: kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang kontinu pada waktu t

$T(x)$: variabel random sisa usia yang kontinu kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia x.

Dan

$${}_kV_e = E\left[{}_kL_e \mid K(x) = k, k+1, \ldots \right]$$

untuk yang diskrit, dimana

${}_kV_e$: cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang diskrit pada waktu k.

${}_kL_e$: kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang kontinu pada waktu k

$K(x)$: variabel random sisa usia yang diskrit kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia x.

Cadangan manfaat yang dibahas pada bab 3.2 adalah cadangan manfaat yang tidak memperhitungkan biaya pengeluaran, yang dapat disebut sebagai cadangan manfaat bersih. Penjumlahan antara cadangan manfaat bersih dan cadangan biaya menghasilkan cadangan manfaat dengan memperhitungkan biaya pengeluaran.

Cadangan biaya pada waktu tertentu merupakan ekspektasi kerugian biaya pada waktu tersebut dimana pada waktu itu pemegang polis masih hidup. Kerugian biaya ini adalah selisih dari nilai saat ini dari biaya pengeluaran dengan akumulasi premi biaya.

4.5 PENERAPAN PREMI MANFAAT DAN CADANGAN MANFAAT YANG MEMPERHITUNGKAN BIAYA PENGELUARAN

Akan dihitung premi manfaat tetap yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang dibayar secara berkala selama 3 kali pada tiap awal tahun. Dari asuransi dwiguna 3 tahun dengan uang pertanggungan sebesar $1,000 yang dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia x tahun. Dengan tingkat bunga efektif tahunan $i = 0,15$

dan tingkat kematian $q_x = \Pr\left[T(x) < 1\right] = 0.1$, $q_{x+1} = \Pr\left[T(x+1) < 1\right] = 0.1111$

dan $q_{x+2} = \Pr\left[T(x+2) < 1\right] = 0.5$ serta biaya pengeluaran pada tabel 1.

Berdasarkan prinsip ekivalen yang memperhitungkan biaya pengeluaran, akan dicari dahulu ${}_0L_e$ dari Tabel 2 di bawah ini.

Kerugian dengan memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu masuk asuransi $\left({}_0L_e\right)$				
Sisa usia	$b_{K(x)+1}\ v^{K(x)+1}$	Nilai saat ini dari biaya pengeluaran	$G\,\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}$	$Pr\left(K(x)=k\right)$
$K(x)=0$	$1.000v$	$(0.20G+8)$	$G\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	0.1
$K(x)=1$	$1.000v^2$	$(0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{1}\rceil}$	$G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0.1
$K(x)\geq 2$	$1.000v^3$	$(0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{2}\rceil}$	$G\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}$	0.8

Tabel 2 : Kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari asuransi dwiguna 3 tahun

dimana probabilitas pada waktu k yaitu :

$$\begin{aligned}
K(x)=0,\quad Pr\left(K(x)=0 \middle| K(x)\geq 0\right) &= {}_0p_x\ q_x \\
&= q_x \\
&= 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(x)=1,\quad Pr\left(K(x)=1 \middle| K(x)\geq 1\right) &= p_x\ q_{x+1} \\
&= (1-q_x)\ q_{x+1} \\
&= (1-0.1)\ 0.1111 \\
&= 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(x)\geq 2,\quad Pr\left(K(x)\geq 2\right) &= 1-\left\{Pr\left(K(x)=0 \middle| K(x)\geq 0\right)+Pr\left(K(x)=1 \middle| K(x)\geq 1\right)\right\} \\
&= 1-(0.1+0.1) \\
&= 0.8
\end{aligned}$$

Maka,

$$E\left[{}_0L_e \mid K(x)=0,1,\ldots\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[1{,}000v+\left(0.20G+8\right)-G\ddot{a}_{\overline{1}|}\right]\ 0.1+\left[1{,}000v^2+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{1}|}-G\ddot{a}_{\overline{2}|}\right]\ 0.1$$
$$+\left[1{,}000v^3+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{2}|}-G\ddot{a}_{\overline{3}|}\right]0.8=0$$
$$\Leftrightarrow 1{,}000v\cdot 0.1+1{,}000v^2\cdot 0.1+1{,}000v^3\cdot 0.8+\left(0.20G+8\right)\cdot 0.1+\left(0.20G+8\right)\cdot 0.1$$
$$+\left(0.20G+8\right)0.8+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{1}|}\cdot 0.1+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{2}|}\cdot 0.8-G\ddot{a}_{\overline{1}|}\cdot\ 0.1-G\ddot{a}_{\overline{2}|}\cdot\ 0.1-G\ddot{a}_{\overline{3}|}\cdot\ 0.8=0$$
$$\Leftrightarrow 1{,}000\left[\left(1.15\right)^{-1}0.1+\left(1.15\right)^{-2}0.1+\left(1.15\right)^{-3}0.8\right]$$
$$+\left(0.20G+8\right)\left(0.1+0.1+0.8\right)+\left(0.06G+2\right)\left(a_{\overline{1}|}\cdot 0.1+a_{\overline{2}|}\cdot 0.8\right)$$
$$-G\cdot 1\cdot 0.1-G\left(1+v\right)\cdot 0.1-G\left(1+v+v^2\right)\cdot\ 0.8=0$$
$$\Leftrightarrow 688.58387+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)\left(1.3875236\right)-G\left(2.3875236\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 0.20G+1.3875236\cdot 0.06G-2.3875236G+688.58387+8+2\cdot 1.3875236=0$$
$$\Leftrightarrow -2.104272212G+699.3589173=0$$
$$\Leftrightarrow G=\frac{699.3589173}{2.104272212}$$
$$\Leftrightarrow G=332.3519235$$

Jadi, premi manfaat tetap yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang dibayar pemegang polis kepada perusahaan asuransi sebesar 332.3519235.

Misalkan π adalah premi manfaat bersih dengan uang pertanggungan 1,000 yaitu $\pi=1{,}000\,P\left(A_{x:\overline{3}|}\right)$, maka dari persamaan (3.1.20)

$$P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$$

π dapat ditulis sebagai

$$\pi=1{,}000\ \frac{dA_{x:\overline{3}|}}{1-A_{x:\overline{3}|}}$$

Akan dicari $A_{x:\overline{3}|}$ yang merupakan penjumlahan dari $A^{1}_{x:\overline{3}|}$ dan $A_{x:\overline{3}|}^{\;\;\;1}$ yaitu :

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{3}|} &= A^{1}_{x:\overline{3}|} + A_{x:\overline{3}|}^{\;\;\;1} \\
&= \sum_{k=0}^{2} v^{k+1}\ {}_{k}p_x\ q_{x+k}\ +\ v^3\ {}_{3}p_x \\
&= \left\{ v\ {}_{0}p_x\ q_x + v^2\ {}_{1}p_x\ q_{x+1} + v^3\ {}_{2}p_x\ q_{x+2} \right\} +\ v^3\ p_x\ {}_{2}p_{x+1} \\
&= v\ q_x + v^2\ p_x\ q_{x+1} + v^3\ p_x\ p_{x+1}\ q_{x+2}\ +\ v^3\ p_x\ p_{x+1}\ p_{x+2} \\
&= v\ q_x + v^2\left(1-q_x\right)\ q_{x+1} + v^3\left(1-q_x\right)\left(1-q_{x+1}\right)q_{x+2}\ +\ v^3\ \left(1-q_x\right)\left(1-q_{x+1}\right)\left(1-q_{x+2}\right) \\
&= \left(1.15\right)^{-1}\cdot 0.1 + \left(1.15\right)^{-2}\left(1-0.1\right)\cdot 0.1111 + \left(1.15\right)^{-3}\left(1-0.1\right)\left(1-0.1111\right)\cdot 0.5 \\
&\quad +\ \left(1.15\right)^{-3}\left(1-0.1\right)\left(1-0.1111\right)\left(1-0.5\right) \\
&= 0.4255731076 + 0.2630097806 \\
&= 0.6885828882
\end{aligned}
$$

Maka didapat premi manfaat tetap yang tidak memperhitungkan biaya pengeluaran yaitu

$$
\begin{aligned}
\pi &= 1,000\ \frac{dA_{x:\overline{3}|}}{1-A_{x:\overline{3}|}} \\
&= 1,000\ \frac{\frac{0.15}{1+0.15}\ 0.6885828882}{1-0.6885828882} \\
&= 288.4079131
\end{aligned}
$$

Jadi, premi biayanya adalah $332.35 - 288.41 = 43.94$.

Akan dihitung cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari informasi sebelumnya. Dalam perhitungannya diperlukan nilai saat ini dari biaya pengeluaran tiap tahunnya bagi perusahaan asuransi dimana pemegang polis masih hidup pada waktu tersebut. Dari tabel 2, nilai saat ini pada waktu penandatanganan kontrak asuransi (pada waktu nol) dari biaya pengeluaran pada tahun berikutnya yaitu :

$$K(x)=0, \quad (0,20G+8)=0.2\cdot 332.35+8=74.47$$
$$K(x)=1, \quad (0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{1}|}=74.47+(0.06\cdot 332.35+2)a_{\overline{1}|}=93.55$$
$$K(x)\geq 2, \quad (0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{2}|}=74.47+(0.06\cdot 332.35+2)a_{\overline{2}|}=110.14$$

nilai saat ini pada waktu 1 tahun setelah masuk asuransi dari biaya pengeluaran pada tahun berikutnya yaitu :

$$K(x)=1, \quad (0.06G+2)\ddot{a}_{\overline{1}|}=21.94$$
$$K(x)\geq 2, \quad (0.06G+2)\ddot{a}_{\overline{2}|}=41.02$$

dan nilai saat ini pada waktu 2 tahun setelah masuk asuransi dari biaya pengeluaran pada tahun berikutnya yaitu :

$$K(x)\geq 2, \quad (0.06G+2)\ddot{a}_{\overline{1}|}=21.94$$

Sebelumnya akan dicari dahulu kerugian pada waktu k, ${}_kL_e$ pada tabel 3 dimana π =288.41 dan e =43.94.

${}_kL_e$	Kerugian bersih		Kerugian biaya		Prob
	$b_{(k(x)-k)+1}v^{(k(x)-k)+1}$	$\pi\ \ddot{a}_{\overline{(k(x)-k)+1}|}$	Biaya pengeluaran	$e\ \ddot{a}_{\overline{(k(x)-k)+1}|}$	$Pr(K(x)=k)$
$({}_0L_e)$					
$K(x)=0$	869.57	288.41	74.47	43.94	0.1
$K(x)=1$	756.14	539.20	93.55	82.15	0.1
$K(x)\geq 2$	657.52	757.28	110.14	115.37	0.8
$({}_1L_e)$					
$K(x)=1$	869.57	288.41	21.94	43.39	0.1111
$K(x)\geq 2$	756.14	539.20	41.02	82.15	0.8889
$({}_2L_e)$					
$K(x)\geq 2$	869.57	288.41	21.94	43.39	1

Tabel 3 : Kerugian bersih dan kerugian biaya dari asuransi dwiguna 3 tahun

Cadangan manfaat dengan memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu k dinotasikan sebagai ${}_kV_e$ yang merupakan penjumlah dari cadangan manfaat tanpa biaya dan cadangan biaya yaitu :

$$\begin{aligned}
{}_0V_e &= E\left[{}_0L_e \mid K(x)=0,1,...\right] \\
&= \{(869.57-288.41)0.1+(756.14-539.20)\cdot 0.1+(657.52-757.28)0.8\} \\
&\quad +\{(74.47-43.94)0.1+(93.55-82.15)0.1+(110.14-115.37)0.8\} \\
&= 0.00+0.00 \\
&= 0.00 \\
{}_1V_e &= E\left[{}_1L_e \mid K(x)=1,2,...\right] \\
&= \left[(869.57-288.41)0.1111+(756.14-539.20)0.8889\right] \\
&\quad +\left[(21.94-43.94)0.1111+(41.02-82.15)0.8889\right] \\
&= 257.41-39.00 \\
&= 218.41 \\
{}_2V_e &= E\left[{}_2L_e \mid K(x)=2,3,...\right] \\
&= (869.57-288.41)+(21.94-43.94) \\
&= 581.16-22.00 \\
&= 559.16
\end{aligned}$$

Artinya, cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran bagi perusahaan asuransi semakin meningkat tiap tahunnya. Hal ini terjadi, dikarenakan semakin meningkatnya tingkat kematian pemegang polis tiap tahunnya.

Pada kenyataannya perusahaan asuransi menawarkan sistem asuransi dengan jangka yang tidak pendek. Hal ini dikarenakan pemegang polis menginginkan uang pertanggungan dalam jumlah yang besar namun premi yang dibayarkan tiap periodenya kecil. Berikut ini akan ditunjukkan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran untuk sistem asuransi jiwa seumur hidup dan asuransi dwiguna 30 tahun.

4.5.1 Asuransi Dwiguna 30 tahun

Asuransi dwiguna 30 tahun dengan uang pertanggungan sesesar \$100,000 dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia 20 tahun. Dimana perusahaan asuransi menetapkan tingkat bunga efektif tahunan 0.06 dan biaya pengeluaran pada tabel 1.

Berdasarkan prinsip ekivalen yang memperhitungkan biaya pengeluaran, akan dicari dahulu ${}_0L_e$ dari Tabel 4 di bawah ini.

Kerugian dengan memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu masuk asuransi $\left({}_0L_e\right)$				
Sisa usia	$b_{K(x)+1}\ v^{K(x)+1}$	Nilai saat ini dari biaya pengeluaran	$G\ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}$	$Pr\left(K(x)=k\right)$
$K(x)=0$	100,000 v	$(0.20G+8)$	$G\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	${}_0p_x - {}_1p_x$
$K(x)=1$	100,000 v^2	$(0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{1}\rceil}$	$G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	${}_1p_x - {}_2p_x$
$K(x)=2$	100,000 v^3	$(0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{2}\rceil}$	$G\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}$	${}_2p_x - {}_3p_x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$K(x)\geq 29$	100,000 v^{30}	$(0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{29}\rceil}$	$G\ddot{a}_{\overline{30}\rceil}$	${}_{29}p_x - {}_{30}p_x$

Tabel 4 : Kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari asuransi dwiguna 30 tahun

Maka,

$$
\begin{aligned}
& E\left[{}_0L_e \mid K(x)=0,1,\ldots\right]=0 \\
& \Leftrightarrow \left[100,000v+\left(0.20G+8\right)-G\ddot{a}_{\overline{1}|}\right]\ \left({}_0p_x-{}_1p_x\right) \\
& \quad +\left[100,000v^2+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{1}|}-G\ddot{a}_{\overline{2}|}\right]\ \left({}_1p_x-{}_2p_x\right) \\
& \quad +\left[100,000v^3+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{2}|}-G\ddot{a}_{\overline{3}|}\right]\left({}_2p_x-{}_3p_x\right) \\
& \quad \vdots \\
& \quad +\left[100,000v^{30}+\left(0.20G+8\right)+\left(0.06G+2\right)a_{\overline{29}|}-G\ddot{a}_{\overline{30}|}\right]\left({}_{29}p_x-{}_{30}p_x\right)=0 \ldots\ldots(4.1)
\end{aligned}
$$

dengan ${}_kp_x=\dfrac{l_{x+k}}{l_x}$ dapat dihitung dari tabel 7.

Premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada persamaan (4.1) akan sulit diselesaikan bila dilakukan secara manual. Oleh karena itu, penyelesaian akan dilakukan dengan bantuan program Matlab 7 yang terdapat pada Lampiran 4. Dengan menggunakan $i=0.06$, diperoleh G = $ 1,396.3. Artinya, pemegang polis harus membayar premi tiap awal tahun selama 29 tahun sebesar $ 1,396.3

Premi manfaat bersih dengan uang pertanggungan sebesar 100,000 yaitu $\pi=100,000\ P\left(A_{20:\overline{30}|}\right)$. Dari persamaan (3.1.20), $P\left(A_{x:\overline{n}|}\right)=\dfrac{dA_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$ didapat π = $ 1,296.5. Sehingga, premi biaya yang diperoleh dari $e=G-\pi$ sebesar $ 99.8.

Selain itu, untuk menentukan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran akan dicari dahulu kerugian pada waktu k, ${}_kL_e$ pada tabel 5 dimana π = $ 1,296.5 dan e =$ 99.8.

${}_kL_e$	Kerugian bersih		Kerugian biaya		Prob
	$b_{(k(x)-k)+1}v^{(k(x)-k)+1}$	$\pi\, \ddot{a}_{\overline{(k(x)-k)+1}\rceil}$	Biaya pengeluaran	$e\, \ddot{a}_{\overline{(k(x)-k)+1}\rceil}$	$Pr\left(K(x)=k\right)$
$\left({}_0L_e\right)$					
$K(x)=0$	94,339.62	1,296.5	35.926	99.8	0.001001
$K(x)=1$	88,999.64	2,519.61	116.848642	193.9509	0.001029
$K(x)=2$	83,961.93	3,673.49	193.190756	282.7726	0.00106
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$K(x)\geq 29$	17,411.01	18,916.9	1201.72	1456.15	0.939573
$\left({}_1L_e\right)$					
$K(x)=1$	94,339.62	1,296.5	85.74	99.8	0.001002
$K(x)=2$	88,999.64	2,519.61	166.70	193.9509	0.00103
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$K(x)\geq 29$	94,339.62	1,296.5	1,235.74	2,171.1	0.943918
$\vdots$					
$\left({}_{29}L_e\right)$					
$K(x)\geq 29$	94,339.62	1,296.5	85.74	99.8	1

Tabel 5 :Kerugian bersih dan kerugian biaya dari asuransi dwiguna 30 tahun.

maka penyelesaian secara manual akan cukup menyita waktu. Oleh karena itu akan digunakan program Matlab 7 untuk membantu menyelesaikannya yang ditampilkan pada Lampiran 4. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Lampiran 4, diketahui bahwa

${}_{0}V_e = 0.00$	${}_{10}V_e = 2{,}130.9$	${}_{20}V_e = 2{,}983.4$
${}_{1}V_e = 1{,}473.5$	${}_{11}V_e = 2{,}191.6$	${}_{21}V_e = 3{,}675.8$
${}_{2}V_e = 1{,}549.7$	${}_{12}V_e = 2{,}246.9$	${}_{22}V_e = 5{,}257.1$
${}_{3}V_e = 1{,}626.2$	${}_{13}V_e = 2{,}295.8$	${}_{23}V_e = 10{,}532.4$
${}_{4}V_e = 1{,}702.4$	${}_{14}V_e = 2{,}337.0$	${}_{24}V_e = 18{,}206.4$
${}_{5}V_e = 1{,}778.2$	${}_{15}V_e = 2\ {,}369.2$	${}_{25}V_e = 34{,}756.5$
${}_{6}V_e = 1.8529$	${}_{16}V_e = 2{,}390.6$	${}_{26}V_e = 52{,}943.2$
${}_{7}V_e = 1{,}926.2$	${}_{17}V_e = 2{,}399.5$	${}_{27}V_e = 69{,}246.7$
${}_{8}V_e = 1{,}997.4$	${}_{18}V_e = 2{,}467.3$	${}_{28}V_e = 87{,}523.4$
${}_{9}V_e = 2{,}065.9$	${}_{19}V_e = 2{,}753.2$	${}_{29}V_e = 91{,}254.3$

Artinya, erusahaan asuransi perlu menyiapkan dana cadangan pada waktu:

- pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 0.0000
- 1 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 1,473.5
- 2 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 1,549.7

  $\vdots$

- 30 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 100,000

4.5.2 Asuransi Seumur Hidup

Asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan sesesar $100,000 dibayar pada akhir tahun kematian kepada pemegang polis yang masuk asuransi pada usia 20 tahun. Dimana perusahaan asuransi menetapkan tingkat bunga efektif tahunan 0.06 dan biaya pengeluaran pada tabel 1.

Dengan bantuan program Matlab 7 yang terdapat pada Lampiran 5, diperoleh G = \$ 407.4301. Artinya, pemegang polis harus membayar premi tiap awal tahun seumur hidupnya sebesar \$ 407.4301.

Premi manfaat bersih dengan uang pertanggungan sebesar 100,000 yaitu $\pi = 100,000\ P\left(A_{20}\right)$. Dari persamaan (3.1.20), $P\left(A_x\right) = \dfrac{dA_x}{1 - A_x}$ didapat π = \$ 377.1782. Sehingga, premi biaya yang didapat sebesar \$ 30.2519.

Program Matlab 7 juga membantu menentukan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang ditampilkan pada Lampiran 7, hasil yang diperoleh sebagai berikut :

${}_{0}V_e = 0.00$	${}_{16}V_e = 7,008$	${}_{31}V_e = 19,850$	${}_{46}V_e = 40,209$	${}_{61}V_e = 64,325$	${}_{76}V_e = 19,850$
${}_{1}V_e = 237$	${}_{17}V_e = 7,646$	${}_{32}V_e = 20,977$	${}_{47}V_e = 41,784$	${}_{62}V_e = 65,846$	${}_{77}V_e = 19,850$
${}_{2}V_e = 553$	${}_{18}V_e = 8,312$	${}_{33}V_e = 22,140$	${}_{48}V_e = 43,377$	${}_{63}V_e = 67,339$	${}_{78}V_e = 19,850$
${}_{3}V_e = 885$	${}_{19}V_e = 9,008$	${}_{34}V_e = 23,338$	${}_{49}V_e = 44,983$	${}_{64}V_e = 68,799$	${}_{79}V_e = 19,850$
${}_{4}V_e = 1,233$	${}_{20}V_e = 9,732$	${}_{35}V_e = 24,570$	${}_{50}V_e = 46,602$	${}_{65}V_e = 70,227$	${}_{80}V_e = 83,147$
${}_{5}V_e = 1,599$	${}_{21}V_e = 10,488$	${}_{36}V_e = 25,837$	${}_{51}V_e = 48,230$	${}_{66}V_e = 71,617$	${}_{81}V_e = 84,041$
${}_{6}V_e = 1,984$	${}_{22}V_e = 11,274$	${}_{37}V_e = 27,139$	${}_{52}V_e = 49,864$	${}_{67}V_e = 72,969$	${}_{82}V_e = 84,885$
${}_{7}V_e = 2,387$	${}_{23}V_e = 12,092$	${}_{38}V_e = 28,473$	${}_{53}V_e = 51,501$	${}_{68}V_e = 74,281$	${}_{83}V_e = 85,680$
${}_{8}V_e = 2,811$	${}_{24}V_e = 12,943$	${}_{39}V_e = 29,840$	${}_{54}V_e = 53,138$	${}_{69}V_e = 75,550$	${}_{84}V_e = 86,424$
${}_{9}V_e = 3,255$	${}_{25}V_e = 13,826$	${}_{40}V_e = 31,238$	${}_{55}V_e = 54,772$	${}_{70}V_e = 76,775$	${}_{85}V_e = 87,114$
${}_{10}V_e = 3,720$	${}_{26}V_e = 14,744$	${}_{41}V_e = 32,667$	${}_{56}V_e = 56,399$	${}_{71}V_e = 77,955$	${}_{86}V_e = 87,742$
${}_{11}V_e = 4,207$	${}_{27}V_e = 15,695$	${}_{42}V_e = 34,124$	${}_{57}V_e = 58,017$	${}_{72}V_e = 79,089$	${}_{87}V_e = 88,289$
${}_{12}V_e = 4,718$	${}_{28}V_e = 16,681$	${}_{43}V_e = 35,609$	${}_{58}V_e = 59,622$	${}_{73}V_e = 80,176$	${}_{88}V_e = 88,708$
${}_{13}V_e = 5,253$	${}_{29}V_e = 17,702$	${}_{44}V_e = 37,119$	${}_{59}V_e = 61,210$	${}_{74}V_e = 81,214$	${}_{89}V_e = 88,888$
${}_{14}V_e = 5,812$	${}_{30}V_e = 18,759$	${}_{45}V_e = 38,653$	${}_{60}V_e = 62,779$	${}_{75}V_e = 82,205$	${}_{90}V_e = 88,926$
${}_{15}V_e = 6,396$					

Artinya, erusahaan asuransi perlu menyiapkan dana cadangan pada waktu :

- pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 0.0000
- 1 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 237
- 2 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 553

  ⋮
- 90 tahun setelah pemegang polis masuk asuransi sebesar $ 88,926

BAB V

KESIMPULAN

Premi yang memperhitungkan biaya pengeluaran diperoleh berdasarkan prinsip ekivalen. Prinsip ekivalen ini merupakan ekspektasi kerugian pada waktu masuk asuransi bernilai nol. Kerugian pada waktu nol untuk asuransi seumur hidup dapat dinyatakan sebagai

$$ {}_0L_e = b_{K(x)+1} v^{K(x)+1} + (\text{nilai saat ini dari biaya pengeluaran}) - G\,\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} \quad , K(x) \geq 0 $$

dan kerugian pada waktu nol untuk asuransi dwiguna n tahun dengan

$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} & , 0 \leq K(x) \leq n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & , K(x) \geq n \end{cases}$ dan $Z = \begin{cases} v^{K(x)+1} & , 0 \leq K(x) \leq n-1 \\ v^{n} & , K(x) \geq n \end{cases}$ dapat dinyatakan sebagai

$$ {}_0L_e = b_{K(x)+1}\, Z + (\text{nilai saat ini dari biaya pengeluaran}) - GY $$

dimana

${}_0L_e$: kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu masuk asuransi

$K(x)$: variabel random sisa usia yang diskrit dari pemegang polis yang masuk asuransi pada waktu x

$b_{K(x)+1}$: besar uang pertanggungan yang dibayar pada akhir tahun kematian

$v^{K(x)+1}$: nilai saat ini dari uang pertanggungan sebesar 1 pada waktu $K(x)+1$

G : premi yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang dibayar secara berkala sejak awal tahun polis

Y : nilai saat ini dari anuitas diskrit sebesar 1.

Selisih antara premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dan premi manfaat bersih disebut premi biaya. Premi biaya ini akan digunakan untuk memperoleh cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran.

Cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu tertentu merupakan ekspektasi kerugian pada waktu tersebut dimana pada waktu itu pemegang polis masih hidup. Cadangan manfaat ini dapat dinyatakan sebagai

$${}_kV_e = E\left[{}_kL_e \mid K(x) = k, k+1, \ldots \right]$$

dengan

$${}_kL_e = b_{(k(x)-k)+1} v^{(k(x)-k)+1} + (\text{nilai saat ini dari biaya pengeluaran}) - GY$$

dimana

${}_kV_e$: cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang diskrit pada waktu k

${}_kL_e$: kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran yang kontinu pada waktu k.

Cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran adalah jumlah antara cadangan manfaat bersih dan cadangan biaya. Cadangan biaya pada waktu tertentu merupakan ekspektasi kerugian biaya pada waktu tersebut dimana pada waktu itu pemegang polis masih hidup. Kerugian biaya ini adalah selisih dari nilai saat ini dari biaya pengeluaran dengan akumulasi premi biaya.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, Greber, Hickman, Jones dan Nesbitt.1997. *Actuarial Mathematics 2^{nd} ed*. United States of America : The Society Of Actuaries.

Stephen G. Kellison. 1991. *The Theory of Interest.* United States of America.

Kenneth Black, JR dan Harold Skipped, JR. 1994. *Life Insurance 12^{th} ed.* United States of America.

Robert Cissell. 1985. *Mathematics of Finance 6^{th} ed.* Formerly of Xavier University.

Hans U. Gerber. 1997. *Life Insurance Mathematics 3^{th} ed.* Swiss Association of Actuaries Zurich.

Gatot Herliyanto. 1994. Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I & II. The Research Institute of Life Insurance Walfare, Japan.

Hogg. R. V. dan Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics 5^{th} ed*. Prentice Hall Inc. New Jersey.

Tabel 6

Tabel premi manfaat kontinu dengan uang pertanggungan sebesar $b_{T(x)}$

Rencana	Komponen Kerugian		Formula Premi Manfaat Kontinu $\bar{P} = \dfrac{E\left[b_{T(x)}v^{T(x)}\right]}{E\left[\bar{Y}\right]}$
	Asuransi $b_{T(x)}$ $v_{T(x)}$	Anuitas $\bar{Y}$	
Asuransi seumur hidup	1 $v^{T(x)}$	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) > 0$	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Asuransi berjangka n tahun	1 $v^{T(x)}$ 0	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}$, $T(x) > n$	$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert}) = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Asuransi *pure endowment* n tahun	0 1 v^{n}	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}$, $T(x) > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}) = \dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Asuransi dwiguna n tahun	1 $v^{T(x)}$ 1 v^{n}	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}$, $T(x) > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Asuransi seumur hidup dengan masa pembayaran premi h tahun	1 $v^{T(x)}$ 1 $v^{T(x)}$	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}$, $T(x) > h$	${}_{h}\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\vert}}$
Asuransi dwiguna n tahun dengan masa pembayaran premi h tahun	1 $v^{T(x)}$ 1 $v^{T(x)}$ 1 v^{n}	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}$, $h > T(x) > n$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}$, $T > n$	${}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\vert}}$
annuitas seumur hidup yang ditunda n tahun	0 $\bar{a}_{\overline{T(x)-n}\vert}$ v^{n}	$\bar{a}_{\overline{T(x)}\vert}$, $T(x) \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}$, $T(x) > n$	$\bar{P}({}_{n\vert}\bar{a}_x) = \dfrac{A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}\ \bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$

Tabel 7

Tabel premi manfaat diskrit dengan uang pertanggungan sebesar $b_{K(x)+1}$

Rencana	Komponen Kerugian		Formula Premi Manfaat Diskrit
	Asuransi $b_{K(x)+1}\ v_{K(x)+1}$	Anuitas Y	$P=\dfrac{E\left[b_{K(x)+1}v^{K(x)+1}\right]}{E\left[Y\right]}$
Asuransi seumur hidup	$1 \quad v^{K(x)+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)\geq 0$	$P(A_x)=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Asuransi berjangka n tahun	$1 \quad v^{K(x)+1}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\ K(x)\geq n$	$P\left(A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}\right)=\dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Asuransi *pure endowment* n tahun	0 $1 \quad v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\ K(x)\geq n$	$P\left(A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ \ 1}\right)=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Asuransi dwiguna n tahun	$1 \quad v^{K(x)+1}$ $1 \quad v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\ K(x)\geq n$	$P\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Asuransi seumur hidup dengan masa pembayaran premi h tahun	$1 \quad v^{K(x)+1}$ $1 \quad v^{K(x)+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<h$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\ K(x)\geq h$	${}_{h}P(A_x)=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
Asuransi dwiguna n tahun dengan masa pembayaran premi h tahun	$1 \quad v^{K(x)+1}$ $1 \quad v^{K(x)+1}$ $1 \quad v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<h$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\ h\leq K(x)<n$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\ K(x)\geq n$	${}_{h}P\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
annuitas seumur hidup yang ditunda n tahun	0 $\ddot{a}_{\overline{K(x)-n+1}\rvert}\ v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rvert}\ ,\ K(x)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\ K(x)\geq n$	$P\left({}_{n\rvert}\ddot{a}_x\right)=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ \ 1}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$

Tabel 8

Tabel premi manfaat campuran dengan uang pertanggungan sebesar $b_{T(x)}$

Rencana	Komponen Kerugian		Formula Premi Manfaat Campuran
	Asuransi $b_{T(x)}\ v_{T(x)}$	Anuitas Y	$P=\dfrac{E\left[b_{T(x)}v^{T(x)}\right]}{E\left[Y\right]}$
Asuransi seumur hidup	$1\ \ v^{T(x)}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}\ ,K\left(x\right)\geq 0$	$P\left(\bar{A}_x\right)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$
Asuransi berjangka n tahun	$1\ \ v^{T(x)}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}\ ,K\left(x\right)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\ ,K\left(x\right)\geq n$	$P\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}\right)=\dfrac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Asuransi dwiguna n tahun	$1\ \ v^{T(x)}$ $1\ \ v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}\ ,K\left(x\right)<n$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\ ,K\left(x\right)\geq n$	$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}\right)=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Asuransi seumur hidup dengan masa pembayaran premi h tahun	$1\ \ v^{T(x)}$ $1\ \ v^{T(x)}$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}\ ,K\left(x\right)<h$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}\ ,K\left(x\right)\geq h$	${}_hP\left(\bar{A}_x\right)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Asuransi dwiguna n tahun dengan masa pembayaran premi h tahun	$1\ \ v^{T(x)}$ $1\ \ v^{T(x)}$ $1\ \ v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}\rceil}\ ,K\left(x\right)<h$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}\ ,h\leq K\left(x\right)<n$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}\ ,K\left(x\right)\geq n$	${}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}\right)=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$

Tabel 9

Tabel cadangan manfaat kontinu

Rencana	Notasi	Formula Cadangan Manfaat Kontinu
Asuransi seumur hidup	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$, $t > 0$
Asuransi berjangka n tahun	${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$, $t < n$ 0 , $t = n$
Asuransi pure endowment n tahun	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}^{\;\;1} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rceil}$, $t < n$ 1 , $t = n$
Asuransi dwiguna n tahun	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$, $t < n$ 1 , $t = n$
Asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi h tahun	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rceil}$, $t \le n$ $\bar{A}_{x+t}$, $t > n$
Asuransi dwiguna n tahun dengan pembayaran premi h tahun	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rceil}$, $t \le h < n$ $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$, $h < t < n$ 1 , $t = n$
Asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun	${}_t\bar{V}({}_{n\vert}\bar{a}_x)$	${}_{n-t\vert}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}({}_{n\vert}\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$, $t \le n$ $\bar{a}_{x+t}$, $t > n$

Tabel 10

Tabel cadangan manfaat diskrit

Rencana	Notasi	Formula Cadangan Manfaat Diskrit
Asuransi seumur hidup	${}_kV\left(A_x\right)$	$A_{x+k} - P\left(A_x\right)\ddot{a}_{x+k}$, $k = 0,1,\ldots$
Asuransi berjangka n tahun	${}_kV\left(A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$A^{1}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P\left(A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 0 , $k = n$
Asuransi *pure endowment* n tahun	${}_kV\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}\right)$	$A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}\rvert}} - P\left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 1 , $k = n$
Asuransi dwiguna n tahun	${}_kV\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 1 , $k = n$
Asuransi seumur hidup dengan h pembayaran	${}^h_kV\left(A_x\right)$	$A_{x+k} - {}_hP\left(A_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,h-1$ A_{x+k} , $k = h,h+1,\ldots$
Asuransi dwiguna n tahun dengan h pembayaran	${}^h_kV\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - {}_hP\left(A_{x:\overline{n}\rvert}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}$, $k < h < n$ $A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $h \le k < n$ 1 , $k = n$
Asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun	${}_kV\left({}_{n\rvert}\ddot{a}_x\right)$	${}_{n-k\rvert}\ddot{a}_{x+k} - P\left({}_{n\rvert}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{x+k}$, $k = n,n+1,\ldots$

Tabel 11

Tabel cadangan manfaat campuran

Rencana	Notasi	Formula Cadangan Manfaat Campuran
Asuransi seumur hidup	${}_kV\left(\bar{A}_x\right)$	$\bar{A}_{x+k} - P\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_{x+k}$, $k = 0,1,\ldots$
Asuransi berjangka n tahun	${}_kV\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\bar{A}^1_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 0 , $k = n$
Asuransi *pure endowment* n tahun	${}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}\right)$	$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}^{\;\;1} - P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 1 , $k = n$
Asuransi dwiguna n tahun	${}_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ 1 , $k = n$
Asuransi seumur hidup dengan masa pembayaran premi h tahun	${}^h_kV\left(\bar{A}_x\right)$	$\bar{A}_{x+k} - {}_hP\left(\bar{A}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n$ $\bar{A}_{x+k}$, $k = n+1,\ldots$
Asuransi dwiguna n tahun dengan masa pembayaran premi h tahun	${}^h_kV\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - {}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k \le h < n$ $\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $h < k < n$ 1 , $k = n$
asuransi anuitas seumur hidup yang ditunda n tahun	${}_kV\left({}_{n\rvert}\bar{a}_x\right)$	${}_{n-k\rvert}\bar{a}_{x+k} - P\left({}_{n\rvert}\bar{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}$, $k = 0,1,\ldots,n$ $\bar{a}_{x+k}$, $k = n+1,\ldots$

Tabel 12

Life Table

Usia	l_x	d_x	$1,000\ q_x$	$1,000\ A_x$	$1,000\ \left({}^2A_x\right)$	$\ddot{a}_x$
0	100,000.00	2,042.1700	20.4217	49.0025	25.9210	16.80096
1	97,957.83	131.5672	1.3431	32.1781	8.8845	17.09819
2	97,826.26	119.7100	1.2237	32.8097	8.6512	17.08703
3	97,706.55	109.8124	1.1239	33.5957	8.5072	17.07314
4	97,596.74	101.7056	1.0421	34.5264	8.4443	17.05670
5	97,495.03	95.2526	0.9770	35.5930	8.4547	17.03786
6	97,399.78	90,2799	0.9269	36.7875	8.5310	17.01675
7	97,309.50	86.6444	0.8904	38.1031	8.6666	16.99351
8	97,222.86	84.1950	0.8660	39.5341	8.8553	16.96823
9	97,138.66	82.7816	0.8522	41.0757	9.0917	16.94100
10	97,055.88	82.2549	0.8475	42.7245	9.3712	16.91187
11	96,973.63	82.4664	0.8504	44.4782	9.6902	16.88089
12	96,891.16	83.2842	0.8594	46.3359	10.0460	16.84807
13	96,807.88	84.5180	0.8730	48.2981	10.4373	16.81340
14	96,723.36	86.0611	0.8898	50.3669	10.8638	16.77685
15	96,637.30	87.7559	0.9081	52.5459	11.3268	16.73836
16	96,549.54	89.6167	0.9282	54.8404	11.8295	16.69782
17	96,459.92	91.6592	0.9502	57.2558	12.3749	16.65515
18	96,368.27	93.9005	0.9744	59.7977	12.9665	16.61024
19	96,274.36	96.3596	1.0009	62.4720	13.6080	16.56299
20	96,178.01	99.0569	1.0299	65.2848	14.3034	16.51330
21	96,078.95	102.0149	1.0618	68.2423	15.0569	16.46105
22	95,976.93	105.2582	1.0967	71.3508	15.8730	16.40614
23	95,871.68	108.8135	1.1350	74.6170	16.7566	16.34843
24	95,762.86	112.7102	1.1770	78.0476	17.7128	16.28783
25	95,650.15	116.9802	1.2330	81.6496	18.7472	16.22419
26	95,533.17	121.6585	1.2735	85.4300	19.8657	16.15740
27	95,411.51	126.7830	1.3288	89.3962	21.0744	16.08733
28	95,284.73	132.3953	1.3895	93.5555	22.3802	16.01385
29	95,152.33	138.5406	1.4560	97.9154	23.7900	15.93683
30	95,013.79	145.2682	1.5289	102.4835	25.3113	15.85612
31	94,868.53	152.6317	1.6089	107.2676	26.9520	15.77161

32	94,715.89	160.6896	1.6965	112.2754	28.7206	15.68313
33	94,555.20	169.5052	1.7927	117.5148	30.6259	15.59057
34	94,385.70	179.1475	1.8980	122.9935	32.6772	15.49378
35	94,206.55	189.6914	2.0136	128.7194	34.8843	15.39262
36	94,016.86	201.2179	2.1402	134.7002	37.2574	15.28696
37	93,815.64	213.8149	2.2791	140.9437	39.8074	15.17666
38	93,601.83	227.5775	2.4313	147.4572	42.5455	15.06159
39	93,374.25	242.6085	2.5982	154.2484	45.4833	14.94161
40	93,131.64	259.0186	2.7812	161.3242	48.6332	14.81661
41	92,872.62	276.9271	2.9818	168.6916	52.0077	14.68645
42	92,595.70	296.4623	3.2017	176.3572	55.6199	14.55102
43	92,299.23	317.7619	3.4427	184.3271	59.4833	14.41022
44	91,981.47	340.9730	3.7070	192.6071	63.6117	14.26394
45	91,640.50	366.2529	3.9966	201.2024	68.0193	14.11209
46	91,274.25	393.7687	4.3141	210.1176	72.7205	13.95459
47	90,880.48	423.6978	4.6621	219.3569	77.7299	13.79136
48	90,456.78	456.2274	5.0436	228.9234	83.06242	13.62235
49	90,000.55	491.5543	5.4617	238.8198	88.7329	13.44752
50	89,509.00	529.8844	5.9199	249.0475	94.7561	13.26683
51	88,979.11	571.4316	6.4221	259.6073	101.1469	13.08027
52	88,407.68	616.4165	6.9724	270.4988	107.9196	12.88785
53	87,791.26	665.0646	7.5755	281.7206	115.0885	12.68960
54	87,126.20	717.6041	8.2364	293.2700	122.6672	12.48556
55	86,408.60	774.2626	8.9605	305.1431	130.6687	12.27581
56	85,634.33	835.2636	9.7538	317.3346	139.1053	12.06042
57	84,799.07	900.8215	10.6230	329.8381	147.9883	11.83953
58	83,898.25	971.1358	11.5752	342.6452	157.3280	11.61327
59	82,927.11	1,046.3843	12.6181	355.7466	167.1332	11.38181
60	81,880.73	1,126.7146	13.7604	369.1310	177.4113	11.14535
61	80,754.01	1,212.2343	15.0114	382.7858	188.1682	10.90412
62	79,541.78	1,302.9994	16.3813	396.6965	199.4077	10.65836
63	78,238.78	1,399.0010	17.8812	410.8471	211.1318	10.40837
64	76,839.78	1,500.1504	19.5231	425.2202	223.3401	10.15444
65	75,339.63	1,606.2618	21.3203	439.7965	236.0299	9.89693
66	73,733.37	1,717.0334	23.2871	454.5553	249.1958	9.63619
67	72,016.33	1,832.0273	25.4391	469.4742	262.8299	9.37262
68	70,184.31	1,950.6476	27.7932	484.5296	276.9212	9.10664
69	68,233.66	2,072.1177	30.3680	499.6963	291.4559	8.83870
70	66,161.54	2,195.4578	33.1833	514.9481	306.4172	8.56925

71	63,966.08	2,319.4639	36.2608	530.2574	321.7850	8.29879
72	61,646.62	2,442.6884	39.6240	545.5957	337.5361	8.02781
73	59,203.93	2,563.4258	43.2982	560.9339	353.6443	7.75683
74	56,640.51	2,679.7050	47.3108	576.2419	370.0803	7.48639
75	53,960.80	2,789.2905	51.6911	591.4895	386.8119	7.21702
76	51,171.51	2,889.6965	56.4708	606.6460	403.8038	6.94925
77	48,281.81	2,978.2164	61.6840	621.6808	421.0184	6.68364
78	45,303.60	3,051.9717	67.3671	636.5634	438.4155	6.42071
79	42,251.62	3,107.9833	73.5589	651.2639	455.9527	6.16101
80	39,143.64	3,143.2679	80.3009	665.7528	473.5861	5.90503
81	36,000.37	3,154.9603	87.6369	680.0019	491.2698	5.65330
82	32,845.41	3,140.4624	95.6134	693.9837	508.9574	5.40629
83	29,704.95	3,097.6146	104.2794	707.6723	526.6012	5.16446
84	26,607.34	3,024.8830	113.6860	721.0431	544.1537	4.92824
85	23,582.45	2,921.5530	123.8867	734.0736	561.5675	4.69803
86	20,660.90	2,787.9129	134.9367	746.7428	578.7956	4.47421
87	17,872.99	2,625.4088	146.8926	759.0320	595.7923	4.25710
88	15,247.58	2,436.7474	159.8121	770.9244	612.5133	4.04700
89	12,810.83	2,225.9244	173.7533	782.4056	628.9163	3.84417
90	10,584.91	1,998.1533	188.7738	793.4636	644.9611	3.64881
91	8,586.75	1,759.6818	204.9298	804.0884	660.6105	3.46110
92	6,827.07	1,517.4869	222.2749	814.2726	675.8298	3.28118
93	5,309.58	1,278.8606	2240.8589	824.0111	690.5878	3.10914
94	4,030.72	1,050.9136	260.7257	833.3007	704.8565	2.94502
95	2,979.81	840.0452	281.9122	842.1408	718.6115	2.78885
96	2,139.77	651.4422	304.4456	850.5325	731.8321	2.64059
97	1,488.32	488.6776	328.3410	858.4791	744.5010	2.50020
98	999.65	353.4741	353.5993	865.9853	756.6047	2.36759
99	646.17	245.6772	380.2041	873.0577	768.1330	2.24265
100	400.49	163.4494	408.1188	879.7043	779.0793	2.12522
101	237.05	103.6560	437.2837	885.9341	789.4400	2.01517
102	133.39	62.3746	467.6133	891.7573	799.2147	1.91229
103	71.01	35.4358	498.9935	897.1852	808.4054	1.81639
104	35.58	18.9023	531.2793	902.2295	817.0170	1.72728
105	16.68	9.4105	564.2937	906.9025	825.0563	1.64472
106	7.27	4.3438	597.8266	911.2170	832.5324	1.56850
107	2.92	1.8458	631.6360	915.1860	839.4558	1.49838
108	1.08	0.7163	665.4495	918.8224	845.8386	1.43414
109	0.36	0.2517	698.9685	922.1396	851.6944	1.37553
110	0.11	0.0793	731.8742	925.1507	857.0377	1.32234

Lampiran 1

Hubungan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan antara asuransi jiwa kontinu dan asuransi jiwa diskrit sesuai dengan kontrak asuransinya

Tujuan:

Untuk mengetahui hubungan antara asuransi jiwa kontinu dan asuransi jiwa diskrit sesuai dengan kontrak asuransinya diperoleh melalui definisi dari asuransi jiwa itu sendiri.

(a) Asuransi Seumur Hidup

Dengan asumsi $T = K + S$, dimana K dan S independent serta S berdistribusi uniform (0,1) maka didapat :

$$\begin{aligned} E\left[v^{S-1}\right] &= \int_0^1 v^{s-1} f_S(s)\, ds \\ &= \frac{1}{v}\int_0^1 v^s \cdot 1\, ds \\ &= \frac{1}{v\ln v}\; v^s \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{v\ln e^{-\delta}}(v-1) \\ &= \frac{1-v}{v\delta} \\ &= \frac{iv}{v\delta} \\ &= \frac{i}{\delta} \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas didapat hubungan premi tunggal kontinu dan premi tunggal diskrit dari asuransi seumur hidup adalah :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E\left[v^T\right] \\
&= E\left[v^{K+S}\right] \\
&= E\left[v^{(K+1)}\ v^{(S-1)}\right] \\
&= E\left[v^{(K+1)}\right] E\left[v^{(S-1)}\right] \\
&= A_x\ \frac{i}{\delta}
\end{aligned}
$$

(b) Asuransi Berjangka n Tahun

Hubungan premi tunggal kontinu dan premi tunggal diskrit dari asuransi berjangka n tahun adalah :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} &= \int_0^1 v^t\ f_T(t)\,dt \\
&= \int_0^1 v^t\ \frac{d}{dt}\left(-{}_t p_x\right)dt \\
&= \int_0^1 v^t\ \frac{d}{dt}\left(-\left(1-tq_x\right)\right)dt \\
&= \int_0^1 v^t\ q_x dt \\
&= q_x \int_0^1 v^t dt \\
&= q_x\ \frac{1}{\ln v}\ v^t \Big|_0^1 \\
&= q_x\ \frac{1}{\ln e^{-\delta}}\left(v-1\right) \\
&= q_x\ \frac{\left(1-v\right)}{\delta} \\
&= \frac{i}{\delta} v q_x \\
\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} &= \frac{i}{\delta} A^1{}_{x:\overline{1}|} \\
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} A^1{}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

(c) Asuransi Dwiguna n Tahun

Hubungan premi tunggal kontinu dan premi tunggal diskrit dari asuransi dwiguna n tahun adalah :

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n|}} &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1} \\
&= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1} \\
&= \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{1|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1}
\end{aligned}$$

Lampiran 2

Hubungan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan antara asuransi jiwa dari semua sistem asuransi baik kontinu maupun diskrit

Tujuan :

Untuk memudahkan dalam perhitungan premi manfaat dan cadangan manfaat untuk semua sistem asuransi agar bisa didapatkan suatu nilai pada *life table* dengan tingkat bunga efektif tahunan sebesar 0.06.

Dalam menghitung nilai asuransi jiwa dari suatu sistem asuransi, semua sistem asuransi dapat diubah menjadi asuransi seumur hidup baik yang kontinu maupun diskrit. Berikut adalah proses pembentukkan dari asuransi jiwa berjangka n tahun menjadi asuransi jiwa seumur hidup yang dapat diperoleh dari *life table* dengan manggunakan tingkat bunga efektif tahunan sebesar 0.06. Dari definisi asuransi jiwa berjangka n tahun yang kontinu maupun diskrit dan dengan menggunakan persamaan (2.3.13) maupun (2.3.9) dapat diperoleh asuransi jiwa berjangka n tahun untuk (x) yang merupakan selisih dari asuransi jiwa seumur hidup untuk (x) dengan perkalian antara asuransi jiwa *pure endowmwnt* n tahun untuk (x) dan asuransi jiwa seumur hidup untuk $(x+n)$. Dimana (x) adalah pemegang polis yang berusia x pada waktu masuk asuransi.

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, f_{T(x)}(t) \, dt$$
$$= \int_0^\infty v^t \, f_{T(x)}(t) \, dt \; - \int_n^\infty v^t \, f_{T(x)}(t) \, dt$$
$$= \bar{A}_x \; - \int_n^\infty v^t \, \mu_X(x+t) \; {}_t p_x \, dt$$
$$= \bar{A}_x \; - \int_0^\infty v^{s+n} \, \mu_X(x+s+n) \; {}_{s+n} p_x \, ds$$
$$= \bar{A}_x \; - \int_0^\infty v^s \, v^n \, \mu_X(x+s+n) \; {}_n p_x \; {}_s p_{x+n} \, ds$$
$$= \bar{A}_x \; - v^n \; {}_n p_x \int_0^\infty v^s \, \mu_X(x+n+s) \; {}_s p_{x+n} \, ds$$
$$= \bar{A}_x \; - A^{\;1}_{x:\overline{n}|} \; \bar{A}_{x+n}$$

dan

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, Pr\big(K(x)=k\big)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_k p_x \; q_{x+k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; {}_k p_x \; q_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \; {}_k p_x \; q_{x+k}$$
$$= A_x - \sum_{s=0}^{\infty} v^{n+s+1} \; {}_{n+s} p_x \; q_{x+n+s}$$
$$= A_x - v^n \; {}_n p_x \sum_{s=0}^{\infty} v^{s+1} \; {}_s p_{x+n} \; q_{x+n+s}$$
$$= A_x - A^{\;1}_{x:\overline{n}|} \; A_{x+n}$$

Berdasarkan persamaan yang dihasilkan, diketahui bahwa semua sistem asuransi dapat diubah menjadi asuransi seumur hidup baik yang kontinu maupun diskrit. Untuk asuransi jiwa dwiguna n tahun juga dapat diubah menjadi asuransi jiwa seumur hidup baik yang kontinu maupun diskrit.

Lampiran 3

Variansi untuk semua sistem asuransi jiwa

Tujuan :

Untuk mengetahui variansi premi manfaat yang kontinu maupun diskrit dari semua sistem asuransi, perlu diketahui variansi dari semua sistem asuransi jiwa baik kontinu maupun diskrit.

Variansi dari asuransi seumur hidup yang kontinu dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada saat kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[v^{T(x)}\right] = {}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2 \quad , \; T(x) > 0$$

dimana

$T(x)$: variabel random sisa usia yang kontinu

$v^{T(x)}$: nilai saat ini dari uang pertanggungan sebesar 1 pada waktu $T(x)$

$\bar{A}_x$: ekspektasi dari $v^{T(x)}$

Variansi dari asuransi berjangka n tahun yang kontinu dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada saat kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[\bar{Z}_B\right] = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)^2$$

dimana $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$ adalah ekspektasi dari $\bar{Z}_B$ dimana $\bar{Z}_B = v^{T(x)}$ untuk $T(x) \le n$.

Variansi dari asuransi *pure endowmwnt* n tahun yang kontinu dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada saat kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[\bar{Z}_{PE}\right] = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)^2$$

dimana $\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ adalah ekspektasi dari $\bar{Z}_{PE}$ dimana $\bar{Z}_{PE} = v^n$ untuk $T(x) > n$.

Asuransi dwiguna n tahun yang kontinu dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada saat kematian baik pemegang polis meninggal dalam jangka waktu n tahun maupun setelah jangka waktu

n tahun. Dengan $\bar{Z}_D$ merupakan variable random sisa usia pemegang polis yang diukur sejak masuk asuransi, yang dapat dinyatan sebagai

$$\bar{Z}_D = \begin{cases} v^{T(x)} & , T(x) \le n \\ v^n & , T(x) > n \end{cases}$$

Diperoleh variansi dari asuransi dwiguna n tahun sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
Var\left[\bar{Z}_D\right] &= Var\left[\bar{Z}_B + \bar{Z}_{PE}\right] \\
&= Var\left[\bar{Z}_B\right] + Var\left[\bar{Z}_{PE}\right] - 2\ \operatorname{cov}\left[\bar{Z}_B, \bar{Z}_{PE}\right] \\
&= \left({}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right)^2\right) + \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)^2\right] - 2\left[\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\ \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right] \\
&= \left({}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + {}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right) - \left[\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right)^2 + \left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)^2 + 2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\ \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right] \\
&= \left({}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + {}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right) - \left[\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}\right) + \left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\right)\right]^2 \\
&= {}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \left[\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right]^2
\end{aligned}$$

dimana $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ adalah ekspektasi dari $\bar{Z}_D$. $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ juga merupakan gabungan dari

$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ dan $\bar{A}_{x:\overline{n}|}{}^{1}$.

Variansi dari asuransi seumur hidup yang diskri dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada akhir tahun kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[v^{K(x)+1}\right] = {}^{2}A_{x} - \left(A_{x}\right)^{2} \quad , K(x) > 0$$

dimana

$K(x)$: variabel random sisa usia yang diskrit

$v^{K(x)+1}$: nilai saat ini dari uang pertanggungan sebesar 1 pada waktu $K(x)$

A_{x} : ekspektasi dari $v^{K(x)+1}$.

Variansi dari asuransi berjangka n tahun yang diskrit dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada akhir tahun kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[Z_{B}\right] = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right)^{2}$$

dimana $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ adalah ekspektasi dari Z_{B} dimana $Z_{B} = v^{K(x)+1}$ untuk $K(x) < n$.

Variansi dari asuransi *pure endowmwnt* n tahun yang diskrit dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada akhir tahun kematian, dapat dinyatakan sebagai

$$Var\left[Z_{PE}\right] = {}^{2}A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} - \left(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\right)^{2}$$

dimana $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ adalah ekspektasi dari Z_{PE} dimana $Z_{PE} = v^{n}$ untuk $K(x) \geq n$.

Asuransi dwiguna n tahun yang diskrit dimana uang pertanggungan sebesar 1 dibayar pada akhir tahun kematian baik pemegang polis meninggal dalam jangka waktu n tahun maupun setelah jangka waktu n tahun. Dengan Z_D merupakan variable random sisa usia pemegang polis yang diukur sejak masuk asuransi, yang dapat dinyatan sebagai

$$Z_D = \begin{cases} v^{K(x)+1} & , K(x) < n \\ v^n & , K(x) \geq n \end{cases}$$

Diperoleh variansi dari asuransi dwiguna n tahun sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Var[Z_D] &= Var[Z_B + Z_{PE}] \\ &= Var[Z_B] + Var[Z_{PE}] - 2\ \mathrm{cov}[Z_B, Z_{PE}] \\ &= \left({}^2A^1_{x:\overline{n}|} - \left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 \right) + \left[{}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)^2 \right] - 2\left[A^1_{x:\overline{n}|}\ A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right] \\ &= \left({}^2A^1_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right) - \left[\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 + \left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)^2 + 2\,A^1_{x:\overline{n}|}\ A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right] \\ &= \left({}^2A^1_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \right) - \left[\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) + \left(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right) \right]^2 \\ &= {}^2A_{x:\overline{n}|} - \left[A_{x:\overline{n}|} \right]^2 \end{aligned}$$

dimana $A_{x:\overline{n}|}$ adalah ekspektasi dari Z_D. $A_{x:\overline{n}|}$ juga merupakan gabungan dari $A^1_{x:\overline{n}|}$ dan $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$.

Lampiran 4

Program perhitungan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari sistem asuransi dwiguna 30 tahun

Tujuan:

Untuk mengetahui premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari sistem asuransi dwiguna 30 tahun.

Premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dinyatakan dengan

$$E\left[{}_0L_e\right]=0$$

Dimana

$${}_0L_e = b_{K(x)+1}v^{K(x)+1} + (\text{nilai saat ini dari biaya pengeluaran}) - GY$$

dengan

${}_0L_e$: kerugian yang memperhitungkan biaya pengeluaran pada waktu masuk asuransi

$b_{K(x)+1}$: besar uang pertanggungan yang dibayar pada akhir tahun kematian

$v^{K(x)+1}$: nilai saat ini sebesar 1 pada waktu awal $K(x)+1$

G : premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran

Y : nilai saat ini dari anuitas diskrit sebesar 1.

Pencarian premi akan dibantu dengan program Matlab 7. Berikut ini adalah algoritma dari program Matlab 7.

```
clear;
data = xlsread('data.xls');
l = data(:,1);
A = data(:,2);

% Menghitung G
syms G;

n = 30;
x = 20;
i = 0.06;
b = 100000;
d = i/(1+i);

v = ((ones(n,1) + i*ones(n,1)).^(-1*(1:n)'));
a1 = [0; (ones(n-1,1) - v(1:n-1))/i];
a2 = (ones(n,1) - v)/d;
Pr = (l(x:x+n-2)/l(x)) - (l(x+1:x+n-1)/l(x));
Pr = [Pr; 1-sum(Pr)];
E  = sum((b * v + ((0.20*G*ones(n,1) + 8*ones(n,1)) +...
    ((0.06*G*ones(n,1) + 2*ones(n,1)) .* a1)) - G*a2).*Pr);

G = double(solve(E));

% Menghitung kVe
Ax1n = A(x) - (((1 + i)^(-n)) * (l(x+n)/l(x)) * A(x+n));
Axn1 = ((1 + i)^(-n)) * (l(x+n)/l(x));
Axn  = Ax1n + Axn1;
a2xn = (1-Axn)/d;
P = d*Axn/(1-Axn);
Pb= b*P;
V = zeros(1,n);

% Hitung 0Ve
Pr = (l(x:x+n-2)/l(x)) - (l(x+1:x+n-1)/l(x));
Pr = [Pr; 1-sum(Pr)];
V(1) = sum(((b * v(1:n)) - (Pb * a2(1:n)) + ((0.20*nG*ones(n,1) +
...
    8*ones(n,1)) + ((0.06*nG*ones(n,1) + 2*ones(n,1)) .* a1(1:n))) -
...
    ((nG - Pb) * a2(1:n))) .* Pr);

% Hitung kVe, k=1...(n-1)
for k=1:n-1
    Pr = (l(x+k:x+n-1)/l(x+k)) - (l(x+k+1:x+n)/l(x+k));
    V(k+1) = sum(((b * v(1:n-k)) - (Pb * a2(1:n-k)) +
((0.06*nG*ones(n-k,1) +...
        2*ones(n-k,1)) .* a2(1:n-k)) - ((nG - Pb) * a2(1:n-k))) .*
Pr);
end
```

Interpretasi :

- n adalah jangka waktu dari suatu sistem asuransi yang dipilih oleh pemegang polis.
- x adalah umur pemegang polis ketika masuk asurasi.
- i adalah tingkat bunga efektif tahunan yang ditetapkan oleh perusahaan asuransi.
- b adalah besar uang pertanggungan yang dijanjikan
- G adalah premi yang memperhitungkan biaya pengeluaran
- Pb adalah premi manfaat bersih

Berikut adalah output yang dihasilkan

```
>> G

G =

  1.3963e+003

>> Pb

Pb =

  1.2965e+003

>> Ax1n

Ax1n =

    0.0236

>> Axn1

Axn1 =

    0.1628

>> Axn

Axn =

    0.1864
```

```
>> a2xn

a2xn =

   14.3742

>> V'

ans =

  1.0e+003 *

    0.0000                   2.1309                   2.9834
    1.4735                   2.1916                   3.6758
    1.5497                   2.2469                   5.2571
    1.6262                   2.2958                  10.5324
    1.7024                   2.3370                  18.2064
    1.7782                   2.3692                  34.7565
    1.8529                   2.3906                  52.9432
    1.9262                   2.3995                  69.2467
    1.9974                   2.4673                  87.5234
    2.0659                   2.7532                  91.2543
```

Berdasarkan output di atas, diperoleh G = 1,396.3, $\pi = 1{,}296.5$,

$A^{1}_{20:\overline{30}|}$=0.0236, $A_{20:\overset{1}{\overline{30}|}}$ = 0.1628, $A_{20:\overline{30}|} = 0.1864$, $\ddot{a}_{20:\overline{30}|}$ = 14.3742, dan

${}_kV_e$ untuk $k = 0,1,2,3,...,29$ yaitu

${}_0V_e = 0.00$	${}_{10}V_e = 2{,}130.9$	${}_{20}V_e = 2{,}983.4$
${}_1V_e = 1{,}473.5$	${}_{11}V_e = 2{,}191.6$	${}_{21}V_e = 3{,}675.8$
${}_2V_e = 1{,}549.7$	${}_{12}V_e = 2{,}246.9$	${}_{22}V_e = 5{,}257.1$
${}_3V_e = 1{,}626.2$	${}_{13}V_e = 2{,}295.8$	${}_{23}V_e = 10{,}532.4$
${}_4V_e = 1{,}702.4$	${}_{14}V_e = 2{,}337.0$	${}_{24}V_e = 18{,}206.4$
${}_5V_e = 1{,}778.2$	${}_{15}V_e = 2\ {,}369.2$	${}_{25}V_e = 34{,}756.5$
${}_6V_e = 1.8529$	${}_{16}V_e = 2{,}390.6$	${}_{26}V_e = 52{,}943.2$
${}_7V_e = 1{,}926.2$	${}_{17}V_e = 2{,}399.5$	${}_{27}V_e = 69{,}246.7$
${}_8V_e = 1{,}997.4$	${}_{18}V_e = 2{,}467.3$	${}_{28}V_e = 87{,}523.4$
${}_9V_e = 2{,}065.9$	${}_{19}V_e = 2{,}753.2$	${}_{29}V_e = 91{,}254.3$

Lampiran 5

Program perhitungan premi manfaat dan cadangan manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari sistem asuransi seumur hidup

Tujuan:

Untuk mengetahui premi manfaat yang memperhitungkan biaya pengeluaran dari sistem asuransi seumur hidup yang harus dibayar oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi selama hidupnya. Cadangan manfaat juga dapat diketahui guna mengurangi dampak kerugian bagi perusahaan asuransi.

Pencarian premi akan dibantu dengan program Matlab 7. Berikut ini adalah algoritma dari program Matlab 7.

```
clear;
data = xlsread('data.xls');
l = data(:,1);
A = data(:,2);

% Menghitung G
syms G;

n = 90;
x = 20;
i = 0.06;
b = 100000;
d = i/(1+i);

v = ((ones(n,1) + i*ones(n,1)).^(-1*(1:n)'));
a1 = [0; (ones(n-1,1) - v(1:n-1))/i];
a2 = (ones(n,1) - v)/d;
Pr = (l(x:x+n-2)/l(x)) - (l(x+1:x+n-1)/l(x));
Pr = [Pr; 1-sum(Pr)];
E  = sum((b * v + ((0.20*G*ones(n,1) + 8*ones(n,1)) +...
    ((0.06*G*ones(n,1) + 2*ones(n,1)) .* a1)) - G*a2).*Pr);
```

```
G = double(solve(E));

% Menghitung kVe
Ax1n = A(x) - (((1 + i)^(-n)) * (l(x+n)/l(x)) * A(x+n));
Axn1 = ((1 + i)^(-n)) * (l(x+n)/l(x));
Axn  = Ax1n + Axn1;
a2xn = (1-Axn)/d;
P = d*Axn/(1-Axn);
Pb= b*P;
V = zeros(1,n);

% Hitung 0Ve
Pr = (l(x:x+n-2)/l(x)) - (l(x+1:x+n-1)/l(x));
Pr = [Pr; 1-sum(Pr)];
V(1) = sum(((b * v(1:n)) - (Pb * a2(1:n)) + ((0.20*nG*ones(n,1) +
...
    8*ones(n,1)) + ((0.06*nG*ones(n,1) + 2*ones(n,1)) .* a1(1:n))) -
...
    ((nG - Pb) * a2(1:n))) .* Pr);

% Hitung kVe, k=1...(n-1)
for k=1:n-1
    Pr = (l(x+k:x+n-1)/l(x+k)) - (l(x+k+1:x+n)/l(x+k));
    V(k+1) = sum(((b * v(1:n-k)) - (Pb * a2(1:n-k)) +
((0.06*nG*ones(n-k,1) +...
        2*ones(n-k,1)) .* a2(1:n-k)) - ((nG - Pb) * a2(1:n-k))) .*
Pr);
end
```

Output yang dihasilkan adalah

```
>> G

G =

  407.4301

>> Pb

Pb =

  377.1782

>> Ax1n

Ax1n =

    0.0625

>> Axn1

Axn1 =

  1.9736e-008
```

```
>> Axn

Axn =

    0.0625

>> a2xn

a2xn =

   16.5630

>> V'

ans =

  1.0e+004 *


    0.0000                   1.7702
    0.0237                   1.8759                   6.1210
    0.0553                   1.9850                   6.2779
    0.0885                   2.0977                   6.4325
    0.1233                   2.2140                   6.5846
    0.1599                   2.3338                   6.7339
    0.1984                   2.4570                   6.8799
    0.2387                   2.5837                   7.0227
    0.2811                   2.7139                   7.1617
    0.3255                   2.8473                   7.2969
                                                      7.4281
    0.3720                   2.9840
    0.4207                   3.1238                   7.5550
    0.4718                   3.2667                   7.6775
    0.5253                   3.4124                   7.7955
    0.5812                   3.5609                   7.9089
    0.6396                   3.7119                   8.0176
    0.7008                   3.8653                   8.1214
    0.7646                   4.0209                   8.2205
    0.8312                   4.1784                   8.3147
                             4.3377                   8.4041
    0.9008                                            8.4885
    0.9732                   4.4983
    1.0488                   4.6602                   8.5680
    1.1274                   4.8230                   8.6424
    1.2092                   4.9864                   8.7114
    1.2943                   5.1501                   8.7742
    1.3826                   5.3138                   8.8289
    1.4744                   5.4772                   8.8708
    1.5695                   5.6399                   8.8888
    1.6681                   5.8017                   8.8926
                             5.9622
```

Berdasarkan output di atas, diketahui bahwa untuk pemegang polis yang memilih asuransi seumur hidup harus membayar premi tiap awal tahunnya sebesar 407.43. Perusahaan asuransi perlu menyediakan cadangan untuk menutupi kerugian pada waktu mendatang dimana diketahui $\pi = 377.18$, $A^{1}_{20:\overline{90}|}$ =0.0625, $A_{20:\overset{1}{\overline{90}|}}$ = 0.00, $A_{20:\overline{90}|}$ = 0.0625, $\ddot{a}_{20:\overline{90}|}$ = 16.56, dan ${}_kV_e$ untuk $k = 0,1,2,3,...,90$ yaitu

${}_{0}V_e = 0.00$
${}_{1}V_e = 237$
${}_{2}V_e = 553$
${}_{3}V_e = 885$
${}_{4}V_e = 1{,}233$
${}_{5}V_e = 1{,}599$
${}_{6}V_e = 1{,}984$
${}_{7}V_e = 2{,}387$
${}_{8}V_e = 2{,}811$
${}_{9}V_e = 3{,}255$
${}_{10}V_e = 3{,}720$
${}_{11}V_e = 4{,}207$
${}_{12}V_e = 4{,}718$
${}_{13}V_e = 5{,}253$
${}_{14}V_e = 5{,}812$
${}_{15}V_e = 6{,}396$
${}_{16}V_e = 7{,}008$
${}_{17}V_e = 7{,}646$
${}_{18}V_e = 8{,}312$
${}_{19}V_e = 9{,}008$
${}_{20}V_e = 9{,}732$
${}_{21}V_e = 10{,}488$
${}_{22}V_e = 11{,}274$
${}_{23}V_e = 12{,}092$
${}_{24}V_e = 12{,}943$
${}_{25}V_e = 13{,}826$
${}_{26}V_e = 14{,}744$
${}_{27}V_e = 15{,}695$
${}_{28}V_e = 16{,}681$
${}_{29}V_e = 17{,}702$
${}_{30}V_e = 18{,}759$
${}_{31}V_e = 19{,}850$
${}_{32}V_e = 20{,}977$
${}_{33}V_e = 22{,}140$
${}_{34}V_e = 23{,}338$
${}_{35}V_e = 24{,}570$
${}_{36}V_e = 25{,}837$
${}_{37}V_e = 27{,}139$
${}_{38}V_e = 28{,}473$
${}_{39}V_e = 29{,}840$
${}_{40}V_e = 31{,}238$
${}_{41}V_e = 32{,}667$
${}_{42}V_e = 34{,}124$
${}_{43}V_e = 35{,}609$
${}_{44}V_e = 37{,}119$
${}_{45}V_e = 38{,}653$
${}_{46}V_e = 40{,}209$
${}_{47}V_e = 41{,}784$
${}_{48}V_e = 43{,}377$
${}_{49}V_e = 44{,}983$
${}_{50}V_e = 46{,}602$
${}_{51}V_e = 48{,}230$
${}_{52}V_e = 49{,}864$
${}_{53}V_e = 51{,}501$
${}_{54}V_e = 53{,}138$
${}_{55}V_e = 54{,}772$
${}_{56}V_e = 56{,}399$
${}_{57}V_e = 58{,}017$
${}_{58}V_e = 59{,}622$
${}_{59}V_e = 61{,}210$
${}_{60}V_e = 62{,}779$
${}_{61}V_e = 64{,}325$
${}_{62}V_e = 65{,}846$
${}_{63}V_e = 67{,}339$
${}_{64}V_e = 68{,}799$
${}_{65}V_e = 70{,}227$
${}_{66}V_e = 71{,}617$
${}_{67}V_e = 72{,}969$
${}_{68}V_e = 74{,}281$
${}_{69}V_e = 75{,}550$
${}_{70}V_e = 76{,}775$
${}_{71}V_e = 77{,}955$
${}_{72}V_e = 79{,}089$
${}_{73}V_e = 80{,}176$
${}_{74}V_e = 81{,}214$
${}_{75}V_e = 82{,}205$
${}_{76}V_e = 19{,}850$
${}_{77}V_e = 19{,}850$
${}_{78}V_e = 19{,}850$
${}_{79}V_e = 19{,}850$
${}_{80}V_e = 83{,}147$
${}_{81}V_e = 84{,}041$
${}_{82}V_e = 84{,}885$
${}_{83}V_e = 85{,}680$
${}_{84}V_e = 86{,}424$
${}_{85}V_e = 87{,}114$
${}_{86}V_e = 87{,}742$
${}_{87}V_e = 88{,}289$
${}_{88}V_e = 88{,}708$
${}_{89}V_e = 88{,}888$
${}_{90}V_e = 88{,}926$