UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB *b*-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF KECEBONG DAN GRAF *DUMBBELL*

SKRIPSI

NUR ALI MUCHTAR
0606067654

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK

JUNI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB *b*-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF KECEBONG DAN GRAF *DUMBBELL*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

NUR ALI MUCHTAR
0606067654

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya

nyatakan dengan benar.

Nama : Nur Ali Muchtar

NPM : 0606067654

Tanda Tangan : 

Tanggal : 30 Juni 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Nur Ali Muchtar
NPM : 0606067654
Program Studi : S1 Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Total Busur-Ajaib *b*-Busur Berurutan pada Graf Kecebong dan Graf *Dumbbell*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGU

Pembimbing : Dra. Denny R. Silaban, M. Kom ( )

Penguji : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng ( )

Penguji : Dra. Nora Hariadi M.Si. ( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 30 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. Shalawat dan salam semoga tercurahkan pada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan para pengikutnya. Penulis senang sekali karena bisa menyelesaikan skripsi ini. Tentu ini berkat banyak bantuan berbagai pihak. Maka di kata pengantar ini, penulis ingin mengucapakan terima kasih yang sedalam-dalamnya atas bantuan-bantuannya kepada penulis di dalam menyelesaikan skripsi ini.

1. Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom. selaku satu-satunya pembimbing skripsi yang telah banyak meluangkan waktu untuk membimbing, memberi saran, dan memberi bantuan untuk penulis dalam menyelesaikan skripsi.
2. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, Dra. Siti Aminah, M.Kom., Prof. Dr. Djati Kerami, dan Dr. Hengki Tasman, M.Si. yang telah memberikan saran, nasihat, serta semangat kepada penulis selama pembuatan skripsi ini.
3. Dra. Nora Hariadi, M.Si. selaku pembimbing akademis penulis selama menjalani masa kuliah.
4. Dr. Yudi Satria, MT. Selaku ketua Departemen, Rahmi Rusin, M.Sc.Tech. selaku sekertaris Departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu dalam proses pengesahan skripsi ini.
5. Seluruh dosen pengajar Departemen Matematika FMIPA UI yang dengan sepenuh hati memberikan ilmu dan bimbingan dalam belajar.
6. Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA UI, karyawan parkir FMIPA UI yang telah memberikan bantuan-bantuannya selama penulis kuliah.
7. Bapak, Ibu, Kakak, Adik, Keponakan, dan seluruh saudara penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan bagi penulis.
8. M. Abdul Latief dan Arif Agung Riyadi yang telah menjadi teman diskusi dalam menyelesaikan skripsi penulis.

9. Seluruh teman-teman penulis di Departemen Matematika. Angkatan 2006: Rendi, Teguh, Sutisna, Dani, Tino, Dian, Farah, Rifza, Bili, Bara, Budi, Aliman, Pangki, Reza, Nita, Auza, Poe, Indra, dan teman-teman 2006 yang lain. Angkatan 2009: Soleman, Faisal, Agung, Danang, Cepi, dan teman-teman 2009 yang lain. Angkatan 2008: Maimun, Arif, Andi, Adi, Dian, Nita, Olin, dan teman-teman 2008 yang lain. Angkatan 2007: Yosandha, Adi, Zul, Adit, Andi, Hanif, Hikmah, Stefi,Widita, Syahrul, Winda, Louis, Isna, dan teman-teman 2007 yang lain. Angkatan 2005: Dimas, Ridwan, Yanu, Amri, May, Veri, Meri, Asep, dan teman-teman 2005 yang lain.
10. Semua teman-teman Pelangi '06 baik ihwan maupun ahwat atas ukhuwahnya.
11. Teman-teman penulis di MII, forum liqo'at, BTA 70 Lenteng Agung, Pondok Tody dan di kost-an yang sekarang: Sahrul, Zul, Adri, Agus.
12. Bapak dan Ibu penulis yang lain: Pak Eri dan Bu Mia, Pak Suyono dan keluarga, Pak Buyung dan Bu Indri. Terima kasih atas nasihat-nasihat dan bimbingannya.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf apabila terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nur Ali Muchtar
NPM	: 0606067654
Program Studi	: Sarjana
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul: Pelabelan Total Busur-Ajaib *b*-Busur Berurutan pada Graf Kecebong dan Graf *Dumbbell*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 30 Juni 2011
Yang menyatakan

(Nur Ali Muchtar)

ABSTRAK

Nama : Nur Ali Muchtar
Program Studi : Matematika
Judul : Pelabelan Total Busur-Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Kecebong dan Graf *Dumbbell*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dengan v simpul dan e busur. Pelabelan total busur ajaib pada graf G adalah pemetaan bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat positif berurutan $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sehingga bobot semua busur adalah konstan. Pelabelan total busur ajaib dengan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ disebut pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan. Jika suatu graf memiliki pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan maka banyak maksimum busur pada G adalah $v - 1$ atau dengan kata lain $e \leq v - 1$. Suatu graf dengan $e > v - 1$ masih bisa dilabel dengan pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi sehingga memenuhi $e \leq v - 1$. Pada makalah ini akan dikonstruksi pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan untuk graf kecebong dan graf *dumbbell* dengan menambahkan simpul-simpul terisolasi sehingga memenuhi $e \leq v - 1$.

Kata Kunci : pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan, graf kecebong, graf *dumbbell*.
xii+41 halaman; 28 gambar; 1 tabel
Daftar pustaka : 7 (1986-2010)

ABSTRACT

Name : Nur Ali Muchtar
Study Program: Matematika
Title : On Edge Consecutive Edge Magic Total Labeling on Tadpole Graphs and Dumbbell Graphs

Let $G = (V, E)$ be a simple graph with v vertices and e edges. An edge magic total labeling of a graph G is a bijection f from $V \cup E$ onto the set of consecutive positive integers $\{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ so that the weight of all edges are constant. An edge magic total labeling f with $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ is called b-edge consecutive edge magic total labeling. If a graph has a b-edge consecutive edge magic total labeling, then the maximum number of edges in G is $v - 1$ or $e \leq v - 1$. A graph with $e > v - 1$ can be labeled with b-edge consecutive edge magic total labeling by adding some isolated vertices to G in order to satisfy $e \leq v - 1$. In this *skripsi* we give the construction of a b-edge consecutive edge magic total labeling on tadpole graphs and dumbbell graphs by adding some isolated vertices to satisfy $e = v - 1$.

Key Words : b-edge consecutive edge magic total labeling, tadpole graphs, dumbbell graphs
xii+41 pages ; 28 pictures; 1 table
Bibliography : 7 (1986-2010)

DAFTAR ISI

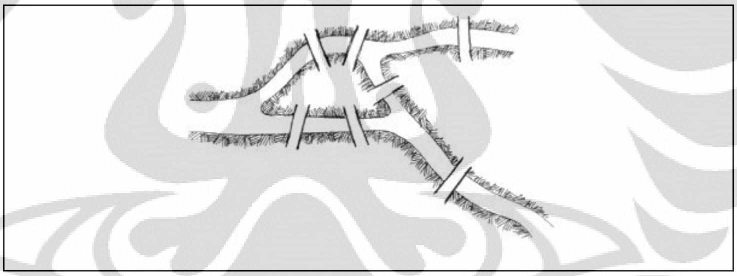
DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit. Teori graf ini bisa digunakan untuk mempermudah menyelesaikan masalah-masalah matematika yang ada. Munculnya teori graf ini bermula dari masalah jembatan Königsberg. Apakah bisa seseorang yang ingin melewati tujuh jembatan Königsberg tepat hanya satu kali dan kembali pada tempat asalnya? (Gambar 1.1). Leonhard Euler adalah orang yang dikenal memberikan solusi untuk masalah ini. Ia memperoleh jawaban bahwa tidak mungkin seseorang melewati jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali ke posisi awal (saat berangkat).

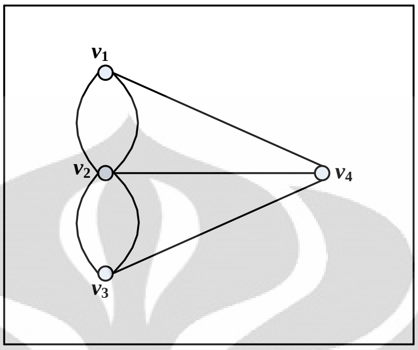


Gambar 1.1 Jembatan Königsberg

Mula-mula ia menggambarkan masalah di atas menjadi bentuk graf seperti Gambar 1.2. Selanjutnya ia memisalkan titik v_1, v_2, v_3, v_4 yang kemudian dikenal sebagai simpul (*vertex*). Sedangkan ruas-ruas $v_1v_2, v_2v_1, v_2v_3, v_3v_2, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4$ dikenal sebagai busur (*edge*). Dengan pemisalan seperti ini, Euler berhasil memecahkan masalah jembatan Königsberg.

Suatu graf G didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut simpul-simpul (*vertices*) bersama dengan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada G yang disebut busur-busur (*edges*) (Chartrand dan Lesniak, 1986). Adapun himpunan busur bisa saja kosong. Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_v\}$ adalah himpunan simpul pada graf G dan

$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_e\}$ adalah himpunan busur pada graf G. Maka banyaknya simpul dan busur pada graf G masing-masing dinyatakan sebagai $v = |V|, v > 0$ dan $e = |E|$.



Gambar 1.2 Graf Königsberg

Pelabelan pada graf G merupakan pemetaan bijektif f dari himpunan simpul V atau himpunan busur E atau keduanya $(V \cup E)$ ke suatu himpunan bilangan (biasanya bilangan asli). Jika himpunan simpulnya yang dilabelkan, maka disebut pelabelan simpul. Jika himpunan busurnya yang dilabelkan, maka disebut pelabelan busur. Jika keduanya yang dilabelkan (simpul dan busur), maka disebut pelabelan total. Jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen-elemen graf disebut bobot. Bobot simpul pada pelabelan total adalah label simpul ditambah dengan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut. Bobot busur pada pelabelan total adalah label busur ditambah dengan label simpul-simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut. Dalam pelabelan graf dikenal istilah pelabelan ajaib. Graf G dikatakan memiliki pelabelan ajaib jika bobot untuk setiap simpul dan/atau busur bernilai sama. Nilai yang sama ini disebut konstanta ajaib. Skripsi ini akan membahas pelabelan total dan pelabelan ajaib.

Pelabelan total busur-ajaib adalah pelabelan pada simpul dan busur dari graf sedemikian sehingga bobot untuk setiap busurnya adalah sama. Pada pelabelan total busur-ajaib, jika label simpulnya berurutan, maka pelabelan ini disebut pelabelan total busur-ajaib simpul berurutan. Jika label busurnya yang berurutan, maka pelabelan ini disebut pelabelan total busur-ajaib busur berurutan.

Konsep dari pelabelan total busur-ajaib busur berurutan telah diperkenalkan oleh Sugeng dan Miller (2008). Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut suatu pelabelan total busur-ajaib a-simpul berurutan (PTBA a-simpul berurutan) dari G jika f adalah suatu pelabelan total busur-ajaib dari G dan $f(V) = \{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + v\}, 0 \leq a \leq e$. Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut suatu pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan (PTBA b-busur berurutan) dari G jika f adalah suatu pelabelan total busur-ajaib dari G dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Jika $a = 0$ (atau $b = 0$) maka f disebut pelabelan total busur-ajaib simpul (atau busur)-super. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur-ajaib a-simpul berurutan (atau b-busur berurutan) disebut graf busur-ajaib a-simpul berurutan (atau b-busur berurutan). Pada skripsi ini akan dibahas pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan (PTBA b-busur berurutan) dengan $0 < b < v$.

Menurut Sugeng dan Miller (2008), jika suatu graf memiliki PTBA b-busur berurutan maka banyak maksimum busur pada G adalah $v - 1$ atau dengan kata lain $e \leq v - 1$. Jika suatu graf terhubung G mempunyai pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan $b \in \{1,2,3, \dots, v - 1\}$ maka G adalah suatu graf pohon. Akan tetapi, suatu graf terhubung dengan $e > v - 1$ masih bisa dilabel dengan pelabelan PTBA b-busur berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi sehingga memenuhi $e \leq v - 1$ (Silaban dan Sugeng, 2010). Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan $e = v - 1$, maka banyak simpul yang ditambahkan disebut optimal.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Bagaimana konstruksi PTBA b-busur berurutan dengan banyak simpul terisolasi yang ditambahkan optimal pada graf yang mengandung satu dan dua lingkaran? Untuk graf yang mengandung satu lingkaran penelitian dilakukan pada graf kecebong, sedangkan untuk graf yang mengandung dua lingkaran penelitian dilakukan pada graf *dumbbell*.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Metode yang digunakan di dalam penyusunan skripsi ini adalah studi pustaka yang dikembangkan untuk menganalisa dan mengkonstruksi pelabelan pada kelas graf baru.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membuat konstruksi PTBA b-busur berurutan dengan penambahan simpul terisolasi yang optimal pada graf yang mengandung satu lingkaran (graf kecebong) dan dua lingkaran (graf *dumbbell*).

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bagian ini, akan dibahas hal-hal mengenai definisi dan istilah-istilah dalam graf, jenis-jenis graf, operasi pada graf, pelabelan graf serta hasil yang diketahui dari pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan.

2.1 Definisi dan Istilah Dalam Teori Graf

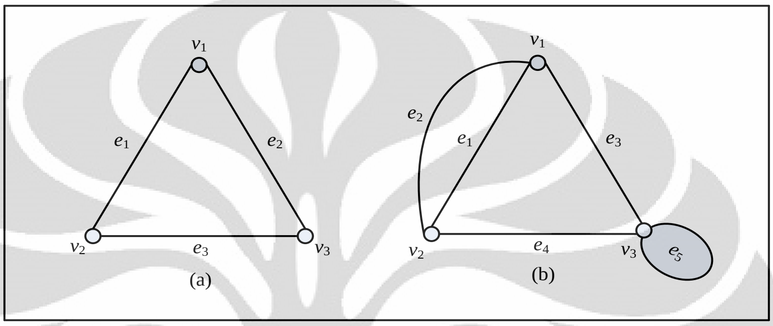
Semua definisi yang digunakan pada subbab ini mengacu pada buku yang ditulis oleh Chartrand dan Lesniak (1986). Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), suatu **graf** G didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut **simpul-simpul** (*vertices*) bersama dengan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada G yang disebut **busur-busur** (*edges*). Himpunan simpul pada G dinotasikan dengan V dan himpunan busur pada G dinotasikan dengan E.

Jika dimisalkan simpul-simpul sebagai titik, maka busur terbentuk dengan cara menghubungkan satu titik ke titik yang lain yang berdekatan. Jadi, **titik-titik ujung** (*endpoint*) dari busur merupakan simpul. **Gelung** (*loop*) adalah busur yang memiliki titik ujung yang sama. Banyaknya simpul dalam suatu graf dinyatakan dengan $v = |V|$, sedangkan banyaknya busur dinyatakan dengan $e = |E|$. Suatu graf dikatakan **berhingga** (*finite*) jika banyaknya simpul pada graf tersebut berhingga.

Biasanya, simpul-simpul dalam suatu graf dinyatakan dengan huruf-huruf kecil semisal $u, v, \ldots$ atau $v_1, v_2, \ldots$ dan digambarkan dengan bulatan kecil (titik). Sedangkan busur-busur dalam suatu graf dinyatakan dengan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ atau dengan kedua ujungnya $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), \ldots$. Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf G_1 dan G_2. Himpunan simpul graf G_1 adalah $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan busurnya adalah $E_1 = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$.

Sedangkan pada graf G_2, himpunan simpulnya adalah $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan

busurnya adalah $E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3),$ $(v_2, v_3), (v_3, v_3)\}$. Pada graf G_2, busur e_5 disebut sebagai gelung. Titik ujung yang sama adalah simpul v_3. Busur e_1 dan e_2 disebut sebagai busur-busur ganda dengan titik-titik ujung yang sama adalah v_1 dan v_2 untuk busur e_1 dan e_2.



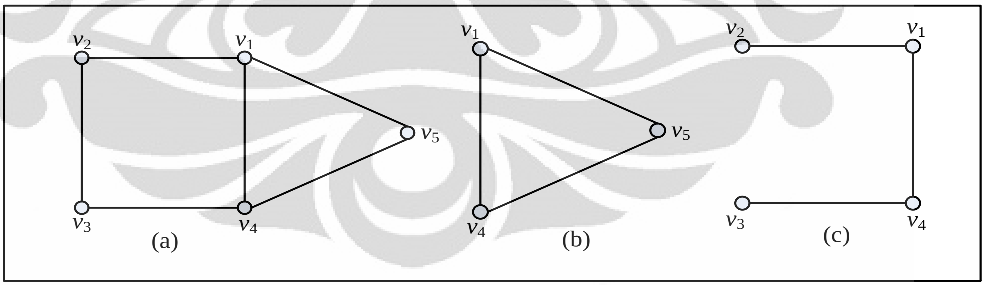
Gambar 2.1 (a) Graf sederhana G_1, (b) Gelung dan busur ganda pada graf G_2

Dua simpul v_1 dan v_2 dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) bila dalam graf terdapat busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Dinotasikan dengan $e = (v_1, v_2)$. Jika demikian, maka dikatakan busur e **hadir** ($incident$) pada simpul v_1 dan v_2. Demikian pula, bisa dikatakan v_1 dan v_2 hadir pada busur e. Jika e_1 dan e_2 hadir pada suatu simpul yang sama, maka e_1 dan e_2 merupakan **busur-busur yang bertetangga**. Banyaknya busur yang hadir pada suatu simpul v disebut sebagai **derajat** (*degree*/*valency*) dari simpul v dan ditulis sebagai $d(v)$. Apabila nilai dari $d(v) = 0$, maka simpul ini disebut **simpul terpencil** (*isolated vertex*). Sedangkan jika nilai dari $d(v) = 1$, maka simpul ini disebut **simpul terminal** (*terminal vertex*) atau **daun** (*leaf*). Jika pada graf G semua simpul memiliki derajat yang, maka graf ini disebut **graf teratur** (*regular*). Apabila suatu graf tidak memiliki gelung dan busur-busur berganda, maka graf ini disebut **graf sederhana**. Yang dibahas di dalam skripsi ini adalah graf sederhana.

Graf G_1 pada Gambar 2.1 adalah contoh graf teratur (regular) karena semua simpulnya yaitu simpul v_1, v_2 dan v_3 memiliki derajat yang sama yaitu $d(v_1) = 2, d(v_2) = 2$ dan $d(v_3) = 2$. Banyak simpul dan busur pada graf G_1

ini sama yaitu $v = e = 3$. Sedangkan pada graf G_2, v_1 dan v_2 bertetangga karena terdapat busur e_1, sehingga bisa ditulis $e_1 = (v_1, v_2)$. Busur e_1 dan e_2 bertetangga karena terdapat simpul v_1 yang merupakan titik pertemuan kedua busur tersebut. Banyak simpul pada graf G_2 ini adalah $n = 3$, sedangkan banyak busurnya adalah $m = 5$. Derajat dari simpul v_1 adalah $d(v_1) = 3$ karena pada v_1 hadir tiga buah busur yaitu e_1, e_2 dan e_3. Derajat dari simpul v_2 adalah $d(v_2) = 3$ karena pada v_2 hadir tiga buah busur yaitu e_1, e_2 dan e_4. Sedangkan derajat dari simpul v_3 adalah $d(v_3) = 4$ karena pada v_3 hadir empat buah busur yaitu e_3, e_4, dan e_5 yang merupakan gelang sehingga dihitung dua busur.

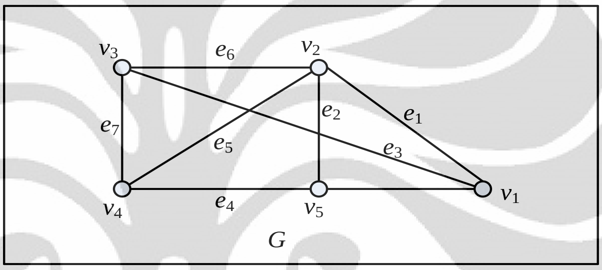
Graf H adalah **subgraf** dari graf G (ditulis $H \subseteq G$) jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Setiap subgraf dari G dapat diperoleh dengan cara menghapus simpul-simpul dan busur-busur yang terdapat pada graf G tersebut. Pada Gambar 2.2, graf F dan H merupakan subgraf dari graf G, dimana
$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5\})$,
$F = (\{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1v_4, v_1v_5, v_4v_5\})$, dan
$H = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_1v_4, v_3v_4\})$. Karena $V(F) \subseteq V(G)$ dan $E(F) \subseteq E(G)$, maka F adalah subgraf dari G. Begitu pula antara H dengan G.



Gambar 2.2 (a) Graf G (b) Graf $F \subseteq G$ (c) Graf $H \subseteq G$

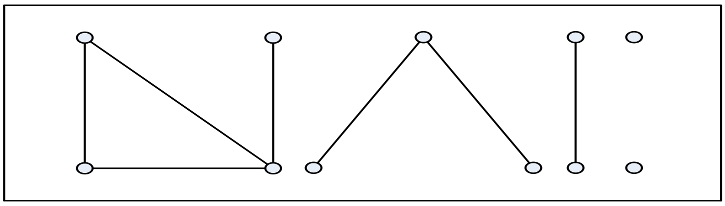
Jalan (*walk*) pada suatu graf G adalah sederetan busur-busur yang membentuk suatu sambungan yang tidak putus pada G. Pada Gambar 2.3 di bawah terlihat bahwa e_1, e_2, e_4, e_5, dan e_6 adalah suatu jalan dengan simpul awal v_1 dan simpul akhir v_3. Jalan ini bisa juga ditulis dengan deret simpul yaitu v_1, v_2, v_5, v_4, v_2 dan v_3.

Suatu jalan dimana deretan busur-busurnya tidak pernah berulang disebut **jalur** (jejak/*trail*); sedangkan suatu jalur dimana deretan simpul-simpulnya tidak pernah berulang disebut **lintasan** (*path*). Jalan e_1, e_2, e_4, e_5, dan e_6 adalah suatu jalur dari simpul v_1 menuju simpul v_3; jalur ini bukan lintasan karena kalau dilihat dalam bentuk deretan simpul yang dilaluinya, simpul v_2 berulang dua kali. Sedangkan e_1, e_2, e_4, dan e_7 adalah lintasan dari simpul v_1 menuju simpul v_3 dengan simpul-simpul v_1, v_2, v_5, v_4, dan v_3. Panjang suatu jalan (jalur ataupun lintasan) adalah banyaknya busur-busur pada jalan tersebut. Jalur dan lintasan di atas masing-masing mempunyai panjang 5 dan 4.



Gambar 2.3 Jalan, jalur dan lintasa pada graf G

Suatu graf G dikatakan **terhubung** (*connected*), apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G, terdapat suatu lintasan dari simpul u menuju simpul v. Apabila syarat ini tidak dipenuhi maka graf G dikatakan **tidak terhubung** (*disconnected*). Apabila suatu graf tidak terhubung, maka graf tersebut terdiri dari beberapa komponen yang masing-masing komponennya adalah suatu graf terhubung atau suatu simpul terpencil. N_n adalah suatu graf tidak terhubung dengan n komponen yang masing-masing adalah simpul terpencil. Gambar 2.4 adalah contoh graf G yang terdiri dari 5 komponen.



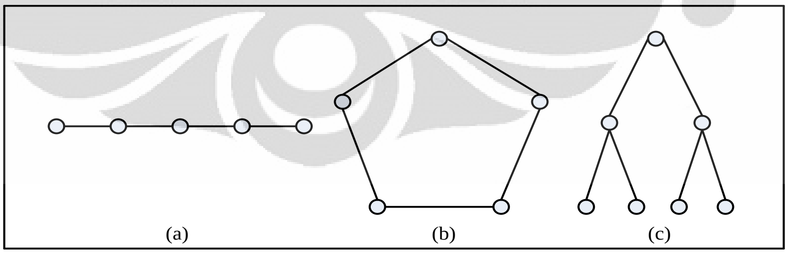
Gambar 2.4 Graf tidak terhubung N_5

Graf yang akan dibahas pada skripsi ini adalah graf tidak berarah. Berikut ini adalah definisi dari beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam skripsi ini.

2.2 Jenis-Jenis Graf

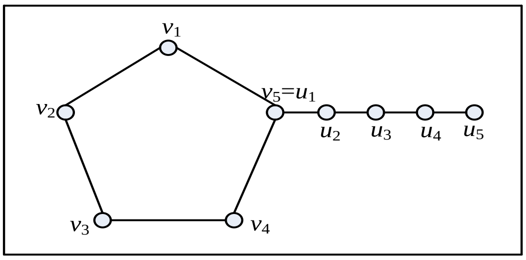
Graf lintasan (*path graph*), P_n, adalah graf yang memiliki n simpul dengan busur $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$ atau bisa juga dinotasikan dengan $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_n$. Simpul v_1 dan v_n berturut-turut merupakan simpul awal dan simpul akhir yang memiliki derajat sama yaitu satu. Selain kedua simpul tersebut, simpul-simpulnya memiliki derajat dua. Busurnya ada sebanyak $n-1$. Jadi, pada graf lintasan bisa ditulis, $|V| = n$ dan $|E| = n-1$.

Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n, adalah graf yang diperoleh dari lintasan P_n dengan menghubungkan simpul awal dan simpul akhirnya sehingga diperoleh graf teratur dengan derajat dua untuk setiap simpulnya. Pada graf lingkaran banyaknya simpul dan busur adalah sama yaitu, $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$. Graf terhubung yang tidak memiliki subgraf lingkaran disebut **graf pohon** (*tree graph*). Pada Gambar 2.5 diberikan contoh untuk (a) graf lintasan, P_5, (b) graf lingkaran, C_5, (c) graf pohon.



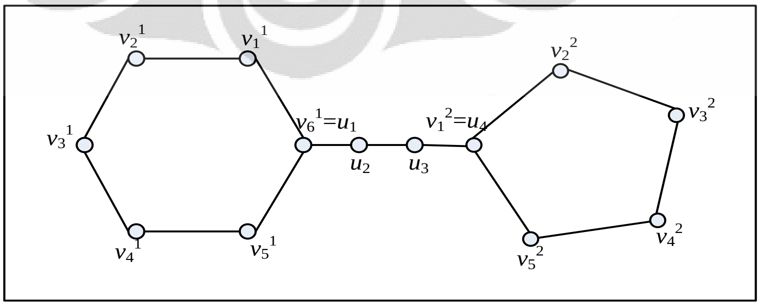
Gambar 2.5 (a) Graf P_5, (b) Graf C_5, (c) Graf pohon

Graf kecebong (*tadpole graph*), $T_{m,q}$, adalah graf yang diperoleh dari graf lingkaran C_m yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P_q, dimana salah satu titik ujung dari graf lintasan P_q adalah salah satu simpul dari graf lingkaran C_m. Pada graf ini, $|V| = |E| = m + q - 1$. Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf kecebong $T_{5,5}$.



Gambar 2.6 Graf kecebong $T_{5,5}$

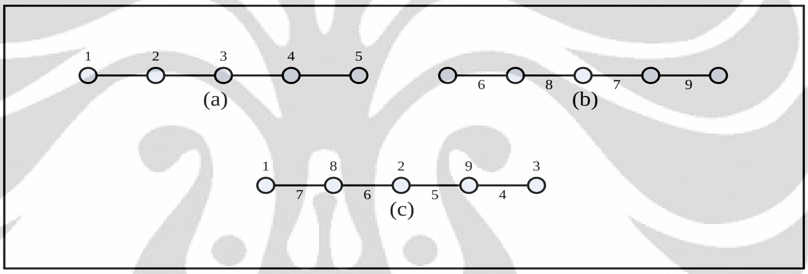
Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran C_m dan C_n yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P_q, dimana titik-titik ujung dari graf lintasan P_q adalah salah satu simpul dari masing-masing graf lingkaran (Wang et al., 2010). Jadi, notasi dari graf ini yaitu $D_{m,n,q}$, dimana $m, n \geq 3$ menyatakan banyak simpul pada kedua graf lingkaran tersebut dan $q \geq 2$ menyatakan banyak simpul pada graf lintasan. Banyak simpul pada graf *dumbbell* adalah $m + n + q - 2$, sedangkan banyak busurnya adalah $m + n + q - 1$ sehingga $|V| = |E| - 1$. Himpunan simpul dan himpunan busur pada graf *dumbbell* masing-masing dinyatakan sebagai $V(D_{m,n,q}) = \{v_i{}^1 | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_j | 1 \leq j \leq q\} \cup \{v_l{}^2 | 1 \leq l \leq n\}$ dan $E(D_{m,n,q}) = \{v_i{}^1 v_{i+1}{}^1 | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_l{}^2 v_{l+1}{}^2 | 1 \leq l \leq n-1\} \cup \{u_j u_{j+1} | 1 \leq j \leq q-1\}$, dimana $v_i{}^1$ dan $v_l{}^2$ adalah simpul pada graf lingkaran, dan u_j adalah simpul pada graf lintasan. Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf *dumbbell* $D_{6,5,4}$.



Gambar 2.7 Graf *dummbell* $D_{6,5,4}$

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan pada graf G adalah suatu pemetaan bijektif f dari himpunan simpul V atau himpunan busur E atau keduanya $(V \cup E)$ ke suatu himpunan bilangan (biasanya himpunan bilangan asli). Himpunan bilangan asli ini disebut **label**. Jika himpunan simpulnya yang dilabelkan, maka disebut **pelabelan simpul**. Jika himpunan busurnya yang dilabelkan, maka disebut **pelabelan busur**. Sedangkan jika keduanya yang dilabelkan yaitu simpul dan busur, maka disebut **pelabelan total**. Pada Gambar 2.8 diberikan contoh graf P_5 dengan (a) pelabelan simpul, (b) pelabelan busur, (c) pelabelan total. Yang dibicarakan di dalam skripsi ini adalah pelabelan total.

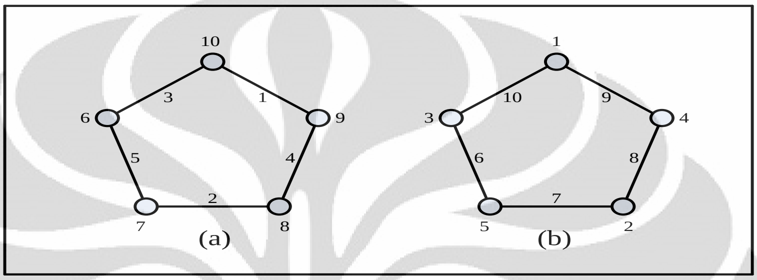


Gambar 2.8 (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, (c) Pelabelan total

Pada pelabelan total, jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen-elemen graf disebut **bobot**. Bobot ini bisa dihitung untuk simpul dan busur. **Bobot simpul** merupakan penjumlahan label simpul dengan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut. Sedangkan **bobot busur** merupakan penjumlahan label busur dengan label simpul-simpul ujungnya. Bobot simpul dari pelabelan total f bisa dinyatakan secara matematis sebagai: $w_f(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv)$; dengan $N(v)$ adalah himpunan semua simpul yang bertetangga dengan v, dan $v \in V$. Sedangkan penulisan bobot busur secara matematis yaitu: $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v), \forall uv \in E$.

Dalam pelabelan graf dikenal istilah pelabelan-ajaib. Suatu graf G dikatakan memiliki **pelabelan-ajaib** jika bobot untuk setiap simpul dan/atau busur bernilai k. Bilangan k ini disebut **konstanta ajaib**. Apabila $w_f(v) = k$

untuk setiap $v \in V$, maka pelabelan disebut **pelabelan total simpul-ajaib**. Sedangkan apabila $w_f(uv) = k$ untuk setiap $uv \in E$, maka pelabelan disebut **pelabelan total busur-ajaib**. Pada Gambar 2.9 diberikan (a) contoh pelabelan total simpul-ajaib pada graf lingkaran C_5 dengan $k = 14$ dan (b) pelabelan total busur-ajaib pada graf lingkaran C_5 dengan $k = 14$. Selanjutnya yang akan dibicarakan di dalam skripsi ini adalah pelabelan total busur-ajaib.



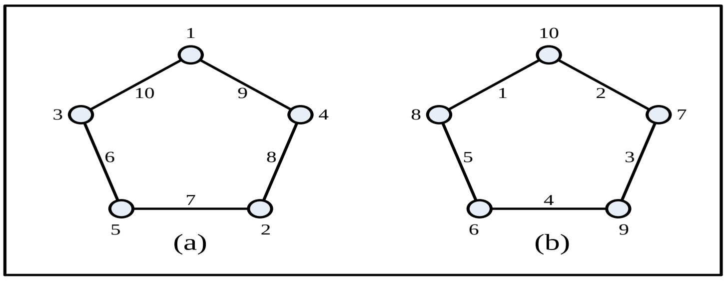
Gambar 2.9 (a) Pelabelan simpul-ajaib pada C_5 dan (b) Pelabelan busur-ajaib pada C_5

Pada pelabelan total busur-ajaib, didefinisikan pelabelan dual. Misalkan pelabelan $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ merupakan pelabelan total busur-ajaib pada graf G. Definisikan pelabelan $f': V \cup E \to \{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ sebagai berikut:

$$f'(x) = v + e + 1 - f(x), \forall x \in V \tag{2.1}$$

$$f'(xy) = v + e + 1 - f(xy), \forall xy \in E \tag{2.2}$$

Maka f' disebut **dual** dari f (Wallis, 2001). Gambar 2.10 memberikan contoh pelabelan f dan pelabelan dual f' pada C_5.



Gambar 2.10 (a) Pelabelan f pada C_5 dan (b) Pelabelan dual f' pada C_5

Pada pelabelan total busur-ajaib, jika label simpulnya berurutan, maka pelabelan ini disebut **pelabelan total busur-ajaib simpul berurutan**. Sedangkan jika label busurnya yang berurutan, maka pelabelan ini disebut **pelabelan total busur-ajaib busur berurutan**. Untuk selanjutnya, skripsi ini hanya akan membahas pelabelan total busur-ajaib busur berurutan yang akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

2.4 Pelabelan Total Busur-Ajaib b-Busur Berurutan

Konsep pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan (PTBA b-busur berurutan) telah diperkenalkan oleh Sugeng dan Miller (2008). Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut suatu **pelabelan total busur-ajaib $\boldsymbol{b}$-busur berurutan** dari G jika f adalah suatu pelabelan total busur-ajaib dari G dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan disebut graf busur-ajaib b-busur berurutan.

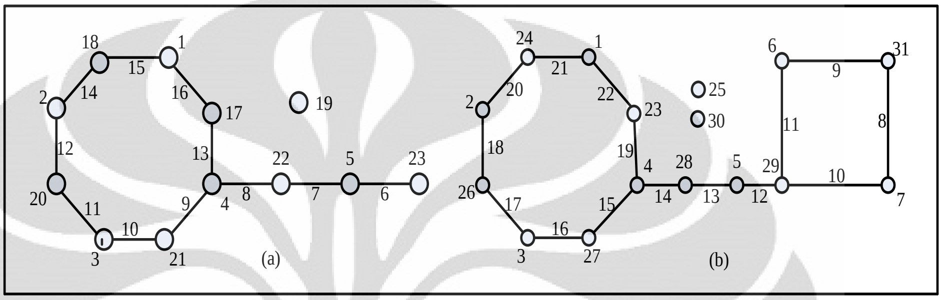
Pada Teorema $2.1 - 2.3$ diberikan beberapa sifat dari PTBA b-busur berurutan:

Teorema 2.1 (Sugeng dan Miller, 2008) Setiap graf busur-ajaib b-busur berurutan mempunyai pelabelan simpul busur anti ajaib.

Teorema 2.2 (Sugeng dan Miller, 2008) Dual dari pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan untuk suatu graf G adalah suatu pelabelan total busur-ajaib $(v - b)$-busur berurutan.

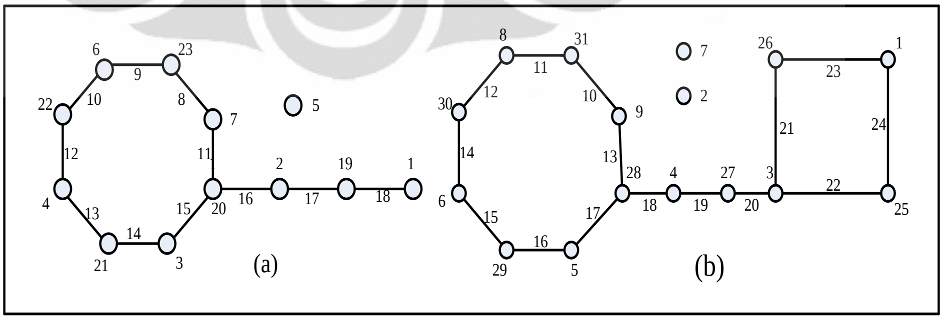
Teorema 2.3 (Sugeng dan Miller, 2008) Jika suatu graf terhubung G mempunyai pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan $b \in \{1, 2, 3, \dots, v - 1\}$ maka G adalah suatu graf pohon.

Menurut Sugeng dan Miller (2008), jika suatu graf memiliki pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan maka banyak maksimum busur pada G adalah $v - 1$ atau dengan kata lain $e \leq v - 1$. Jika suatu graf terhubung G mempunyai pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan $b \in \{1,2,3,\ldots,v-1\}$ maka G adalah suatu graf pohon. Akan tetapi, suatu graf dengan $e > v - 1$ masih bisa dilabel dengan pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi sehingga memenuhi $e \leq v - 1$ (Silaban dan Sugeng, 2010). Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan $e = v - 1$, maka banyak simpul terisolasi yang ditambahkan disebut optimal.



Gambar 2.11 (a) PTBA 5-busur berurutan pada $T_{8,4}$ dengan $k = 34$ dan satu simpul terisolasi, (b) PTBA 7-busur berurutan pada $D_{8,4,4}$ dengan $k = 46$ dan dua simpul tersolasi

Pada Gambar 2.11 diberikan contoh untuk (a) pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,4}$ dengan $b = 5$, konstanta ajaib $k = 34$, dan satu simpul terisolasi, (b) pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,4,4}$ dengan $b = 7$ dan konstanta ajaib $k = 46$, dan dua simpul terisolasi.



Gambar 2.12 (a) PTBA 7-busur berurutan pada $T_{8,4}$ dengan $k = 38$ dan satu simpul terisolasi, (b) PTBA 9-busur berurutan pada $D_{8,4,4}$ dengan $k = 50$ dan dua simpul terisolasi

Pada Gambar 2.12(a) dan (b) diberikan dual untuk Gambar 2.11(a) dan (b). Gambar 2.13(a) pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,4}$ dengan $b = 7$, konstanta ajaib $k = 38$, dan satu simpul terisolasi, (b) pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,4,4}$ dengan $b = 9$, konstanta ajaib $k = 50$, dan dua simpul terisolasi.

2.5 Hasil-Hasil yang Diketahui pada PTBA b-Busur Berurutan

Hasil-hasil yang diketahui dari pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan untuk graf pohon antara lain: setiap graf *caterpillar* memiliki PTBA b-busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i \text{ genap}} n_i - 2, & \text{jika } i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i \text{ genap},\ i<r} n_i - 2 + (n_r - 1), & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

(Sugeng dan Miller, 2008); setiap *firecrackers* teratur memiliki pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan dengan $b = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor s + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ (Sugeng dan Silaban, 2009). Sedangkan hasil-hasil yang diketahui untuk graf yang bukan pohon antara lain: graf tangga $P_n \times P_2$ memiliki pelabelan total busur-ajaib n-busur berurutan dengan $n - 1$ simpul terisolasi (Silaban dan Sugeng); graf gabungan $2mP_n$ dengan graf tangga $P_n \times P_2$ $(2mP_n \cup (P_n \times P_2))$ memiliki pelabelan total busur-ajaib $(m + 1)n$-busur berurutan dengan $n - 1$ simpul terisolasi (Silaban dan Sugeng, pp); graf LT_{mnm} memiliki pelabelan total busur-ajaib $(m + 1)n$-busur berurutan dengan $n - 1$ simpul terisolasi (Silaban dan Sugeng). Pada bab berikutnya, akan dibahas mengenai hasil penelitian terhadap PTBA b-busur berurutan untuk graf yang memiliki satu dan dua lingkaran. Untuk graf yang memiliki satu lingkaran penelitian dilakukan pada graf kecebong. Sedangkan untuk graf yang memiliki dua lingkaran penelitian dilakukan pada graf *dumbbell*.

BAB 3

PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB b-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF KECEBONG DAN GRAF *DUMBBELL*

Pada bab ini, akan diberikan konstruksi pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan (PTBA b-busur berurutan) pada graf kecebong dan graf *dumbbell*. Konsep PTBA b-busur berurutan telah diperkenalkan oleh Sugeng dan Miller (2008). Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut suatu PTBA b-busur berurutan dari G jika f adalah suatu pelabelan total busur-ajaib dari G dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan disebut graf busur-ajaib b-busur berurutan. Jika $b = 0$ maka disebut pelabelan total super ajaib. Yang menjadi perhatian di sini adalah untuk untuk $0 < b < v$.

Menurut Sugeng dan Miller (2008), jika suatu graf memiliki PTBA b-busur berurutan maka banyak maksimum busur pada G adalah $v - 1$ atau dengan kata lain $e \leq v - 1$. Jika suatu graf terhubung G mempunyai PTBA b-busur berurutan dengan $b \in \{1,2,3, \dots, v - 1\}$ maka G adalah suatu graf pohon. Akan tetapi, suatu graf dengan $e > v - 1$ masih bisa dilabel dengan PTBA b-busur berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi sehingga memenuhi $e \leq v - 1$ (Silaban dan Sugeng, 2010). Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan $e = v - 1$, maka banyak simpul terisolasi yang ditambahkan disebut optimal.

Untuk membuktikan bahwa konstruksi PTBA b-busur berurutan, dapat digunakan Lemma 3.2 yang merupakan adaptasi dari Lemma 3.1 yang diberikan oleh Figuerora-Centeno dkk. yang merupakan sifat dari pelabelan total super ajaib.

Lemma 3.1 (Figuerora-Centeno, Ichisima, dan Muntaner Batle, 2001) Suatu (v, e)-graf G merupakan super busur ajaib jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan bijektif $f: V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v\}$ sedemikian sehingga suatu himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari e bilangan bulat berurutan. Dalam kasus ini, f dapat ditingkatkan menjadi suatu pelabelan total super busur ajaib dari G dengan nilai $k = v + e + s$, dimana $s = \min(S)$ dan $S = \{k - (v+1), k - (v+2), \dots, k - (v+e)\}$.

Sifat dari pelabelan total super ajaib juga berlaku untuk PTBA b-busur berurutan. Oleh karena itu, Lemma 3.1 tersebut kemudian diadaptasi dan digunakan untuk membuktikan PTBA b-busur berurutan pada suatu graf. Walaupun label dari simpul-simpul pada PTBA b-busur berurutan akan terbagi dalam dua kelompok bilangan berurutan yang berbeda, himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri atas e bilangan bulat positif berurutan seperti pada Lemma 3.2.

Lemma 3.2 (Silaban dan Sugeng, pp) Suatu graf G dengan v simpul dan e busur adalah suatu graf busur ajaib b-busur berurutan jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} - \{b+1, b+2, b+3, \dots, b+e\}, 0 \le b \le v$ dan himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan. Dalam kasus ini, f dapat ditingkatkan menjadi suatu PTBA b-busur berurutan pada G dengan konstanta ajaib $k = b + e + s$ dengan $s = \min(S)$ dan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\} = \{k - (b+1), k - (b+2), \dots, k - (b+e)\}$.

Bukti.

Jika G adalah suatu graf yang merupakan pelabelan total busur-ajaib b-busur berurutan maka

$$f(V \cup E) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} \tag{3.1}$$

$$f(E) = \{b+1, b+2, b+3, \dots, b+e\} \tag{3.2}$$

$$W_f = \{f(x) + f(y) + f(xy) = k | xy \in E\}. \tag{3.3}$$

$f(V \cup E) = f(V) + f(E)$ maka $f(V) = f(V \cup E) - f(E) = \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}$ yang merupakan dua himpunan bilangan bulat positif berurutan.

$W_f = \{f(x) + f(y) + f(xy) = k | xy \in E\}$ maka $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\} = \{k - f(xy) | xy \in E\} = \{k - (b + 1), k - (b + 2), \ldots, k - (b + e)\}$ yang merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan.

Diketahui

$$f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} \tag{3.4}$$

$$f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\} \tag{3.5}$$

$$S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}. \tag{3.6}$$

$f(V \cup E) = f(V) + f(E)$ maka $f(E) = f(V \cup E) - f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - (\{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}$ yang merupakan himpunan e busur berurutan.

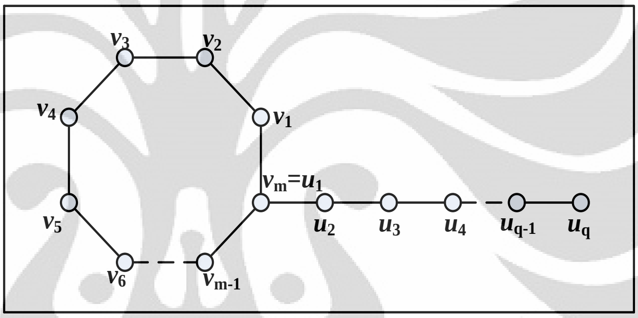
$W_f = \{f(x) + f(y) + f(xy) = k | xy \in E\}$. Karena $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan dan $f(E) = \{f(xy) | xy \in E\}$ juga merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan, maka dapat dibuat $w_f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy) = k$ untuk $xy \in E$.■

Untuk menunjukkan bahwa konstruksi yang diperoleh merupakan PTBA b-busur berurutan, maka digunakan pembuktian dengan alur sebagai berikut: pertama mendefinisikan fungsi pelabelan simpul, kedua menunjukkan bahwa label-label simpul merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan, ketiga menunjukkan bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur ($S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$) membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan. Dengan menggunakan Lemma 3.2, f merupakan PTBA b-busur berurutan dengan konstanta ajaib $k = b + e + s$.

Pada Subbab 3.1 akan dibahas mengenai hasil yang diperoleh untuk PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong dengan nilai m adalah kelipatan 4.

3.1 Pelabelan Total Busur-Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Kecebong

Berdasarkan Bab 2.2 telah dijelaskan bahwa $T_{m,q}$ merupakan graf kecebong dengan m adalah banyaknya simpul pada lingkaran dan q adalah banyaknya simpul pada lintasan. Pada graf ini, $|V| = |E| = m + q - 1$. Oleh karena itu, agar bisa dilabel dengan pelabelan PTBA b-busur berurutan perlu ditambah simpul terisolasi. Supaya optimal, yaitu memenuhi kondisi $|E| = |V| - 1$ maka simpul terisolasi yang akan ditambahkan pada graf kecebong $T_{m,q}$ adalah satu simpul. Untuk keperluan pelabelan, graf kecebong $T_{m,q}$ akan digambarkan seperti pada Gambar 3.1 bersama dengan penamaan simpul-simpulnya.



Gambar 3.1 Graf kecebong $T_{m,q}$

Pada Teorema 3.1 diberikan PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{m,q}$ dengan banyak simpul pada graf lingkaran merupakan kelipatan empat. Untuk menghasilkan PTBA b-busur berurutan perlu ditambahkan satu simpul terisolasi.

Teorema 3.1 Setiap graf kecebong $T_{m,q}$ dengan $m = 0$ mod 4 memiliki pelabelan total busur-ajaib $\left\lfloor\frac{m+q-1}{2}\right\rfloor$–busur berurutan dengan penambahan satu simpul terisolasi.

Bukti. Nyatakan simpul terisolasi dengan x

Pilih $a = \left\lfloor\frac{3m+3q-3}{2}\right\rfloor$

Langkah-langkah pembuktiannya adalah sebagai berikut

Pertama, label simpul-simpul dari graf kecebong $T_{m,q}$ sebagai berikut

Label simpul untuk lingkaran dengan

$$f(v_i) = \begin{cases} a + \frac{i+1}{2} & , \quad i = 1, 3, 5, \dots, \frac{m}{2} - 1 \\ a + \frac{i+1}{2} + 1 & , \quad i = \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 3, \frac{m}{2} + 5, \dots, m - 1 \\ \frac{i}{2} & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, m \end{cases} \quad (3.7)$$

Label simpul untuk lintasan dengan q ganjil

$$f(u_j) = \begin{cases} \frac{m+j}{2} - \frac{1}{2} & , \quad j = 1, 3, 5, \dots, q \\ a + \frac{m+j}{2} + 1 & , \quad j = 2, 4, 6, \dots, q - 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Label simpul untuk lintasan dengan q genap

$$f(u_j) = \begin{cases} \frac{m+j}{2} - \frac{1}{2} & , \quad j = 1, 3, 5, \dots, q - 1 \\ a + \frac{m+j}{2} + 1 & , \quad j = 2, 4, 6, \dots, q \end{cases} \quad (3.9)$$

Kemudian label simpul terisolasi dengan $f(x) = a + \frac{m}{4} + 1$

(3.10)

Kedua, akan ditunjukkan bahwa label-label simpul $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan. Untuk membuktikan bahwa $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan, maka digunakan persamaan (3.7), (3.8), (3.9) dan (3.10). Pembuktian dibagi untuk 2 kasus yaitu q ganjil dan q genap.

Kasus 1: q ganjil

Dengan menggunakan f pada persamaan (3.7), (3.8) dan (3.10) diperoleh

$$L_1 = \{f(v_i) | \ i \text{ genap}\} = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \quad (3.11)$$

$$L_2 = \{f(v_i) | \ i \text{ ganjil}\} = \left\{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + \frac{m}{4}, a + \frac{m}{4} + 2, a + \frac{m}{4} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + 1\right\} \quad (3.12)$$

$$L_3 = \{f(x)\} = \left\{a + \frac{m}{4} + 1\right\} \quad (3.13)$$

$$L_4 = \{f(u_j) |\, j \text{ genap}\} = \left\{a + \frac{m}{2} + 2, a + \frac{m}{2} + 3, \dots, \frac{m+q+1}{2}\right\} \quad (3.14)$$

$$L_5 = \{f(u_j) |\, j \text{ ganjil}\} = \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\right\} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} f(V) &= L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \\ &= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + \frac{m}{4}, a + \frac{m}{4} + \right. \\ &\quad \left. 2, a + \frac{m}{4} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + 1\right\} \cup \left\{a + \frac{m}{4} + 1\right\} \cup \left\{a + \frac{m}{2} + \right. \\ &\quad \left. 2, a + \frac{m}{2} + 3, \dots, \frac{m+q+1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{m+q-1}{2}\right\} \cup \left\{a + 1, a + 2, a + \right. \\ &\quad 3, \dots, a + \frac{m}{4}, a + \frac{m}{4} + 1, a + \frac{m}{4} + 2, a + \frac{m}{4} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + \\ &\quad \left. 1, a + \frac{m}{2} + 2, a + \frac{m}{2} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kasus 2: q genap

Dengan menggunakan f pada persamaan (3.7), (3.9) dan (3.10) diperoleh

$$L_1 = \{f(v_i) |\, i \text{ genap}\} = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} L_2 = \{f(v_i) |\, i \text{ ganjil}\} &= \left\{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + \frac{m}{4}, a + \frac{m}{4} + \right. \\ &\quad \left. 2, a + \frac{m}{4} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + 1\right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$L_3 = \{f(x)\} = \left\{a + \frac{m}{4} + 1\right\} \quad (3.19)$$

$$L_4 = \{f(u_j) |\, j \text{ genap}\} = \left\{a + \frac{m}{2} + 2, a + \frac{m}{2} + 3, \dots, a + \frac{m}{2} + \frac{q}{2} + 1\right\}$$
(3.20)

$$L_5 = \{f(u_j) |\, j \text{ ganjil}\} = \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{q}{2} - 1\right\} \quad (3.21)$$

$$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$$

$$= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{4}+1\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+\frac{q}{2}+1\right\} \cup \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m}{2}+\frac{q}{2}-1\right\}$$

$$= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}+2, \dots, \frac{m}{2}+\frac{q}{2}-1\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+1, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+\frac{q}{2}+1\right\} \quad (3.22)$$

Dari kasus 1 dan 2 terbukti bahwa label-label simpul $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan baik untuk q ganjil maupun q genap.

Berdasarkan definisi dari nilai b yaitu nilai terbesar dari himpunan pertama $f(V)$ diperoleh nilai b yaitu

$$b = \begin{cases} \frac{m+q-1}{2}, q \text{ ganjil} \\ \frac{m+q-2}{2}, q \text{ genap} \end{cases} \text{atau } b = \left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor \quad (3.23)$$

Ketiga, akan ditunjukkan bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur ($S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$) membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan.

Skema pembuktian dibagi untuk beberapa kasus berikut

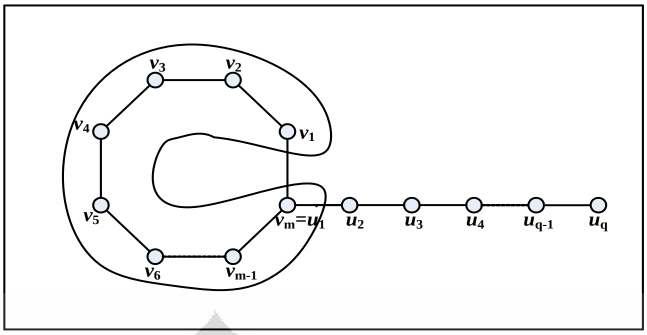
1. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$
   (a) Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2} - 1$

   Tanpa menghilangkan keumuman misalkan i ganjil maka $i+1$ genap

   (b) Untuk $i = \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}+2, \dots, m-1$

   Tanpa menghilangkan keumuman misalkan i ganjil maka $i+1$ genap

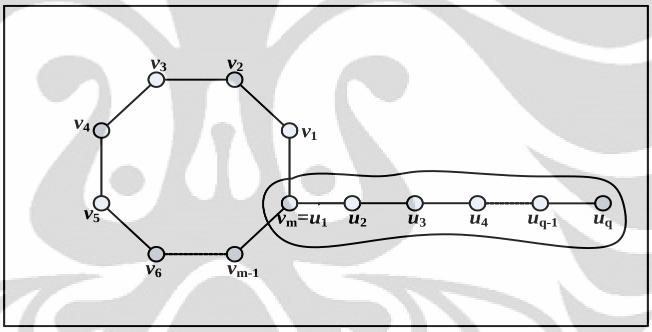
   Untuk mempermudah melihat kasus satu ini, lihat Gambar 3.2 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.2 Graf kecebong $T_{m,q}$ kasus satu

2. $u_j u_{j+1}$ untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$

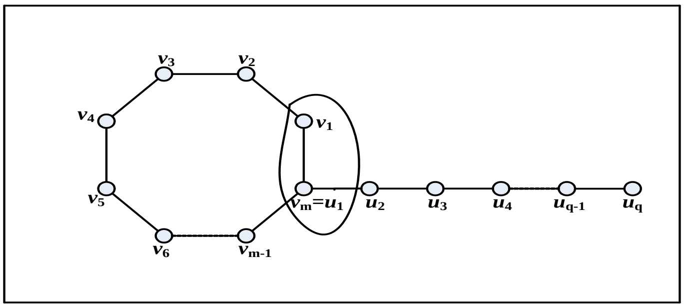
   Tanpa menghilangkan keumuman misalkan j ganjil maka $j + 1$ genap Untuk mempermudah melihat kasus dua ini, lihat Gambar 3.3 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.3 Graf kecebong $T_{m,q}$ kasus dua

3. $v_1 v_m$

   Untuk mempermudah melihat kasus dua ini, lihat Gambar 3.4 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.4 Graf kecebong $T_{m,q}$ kasus tiga

Selanjutnya akan dibuktikan menurut kasus-kasus di atas

1. Kasus 1a untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2} - 1$

   i ganjil maka $i + 1$ genap

   $$S_1 = f(v_i) + f(v_{i+1}) = \left(a + \frac{i+1}{2}\right) + \left(\frac{i+1}{2}\right) = a + i + 1 \tag{3.24}$$

   Sehingga untuk $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_1 = \left\{a + 2, a + 3, \dots, a + \frac{m}{2} - 1, a + \frac{m}{2}\right\} \tag{3.25}$$

   Kasus 1b untuk $i = \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1$

   i ganjil maka $i + 1$ genap

   $$S_2 = f(v_i) + f(v_{i+1}) = \left(a + \frac{i+1}{2} + 1\right) + \left(\frac{i+1}{2}\right) = a + i + 2 \tag{3.26}$$

   Sehingga untuk $i = \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_2 = \left\{a + \frac{m}{2} + 2, a + \frac{m}{2} + 3, \dots, a + m, a + m + 1\right\} \tag{3.27}$$

2. Kasus 2 untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$

   j ganjil maka $j + 1$ genap

   $$S_3 = f(u_j) + f(u_{j+1}) = \left(\frac{m+j}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(a + \frac{m+(j+1)}{2} + 1\right) = a + m + j + 1 \tag{3.28}$$

   Sehingga untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_3 = \{a + m + 2, a + m + 3, \dots, a + m + q - 1, a + m + q\} \tag{3.29}$$

3. Kasus 3 untuk $v_1 v_m$

   $$S_4 = f(v_1) + f(v_m) = (a + 1) + \left(\frac{m}{2}\right) = a + \frac{m}{2} + 1 \tag{3.30}$$

   Sehingga diperoleh bobot busur

   $$S_4 = \left\{a + \frac{m}{2} + 1\right\} \tag{3.31}$$

Akan ditunjukkan bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur S membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan yaitu dengan menggabungkan S_1, S_2, S_3, S_4 diperoleh

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+m, a+m+1\right\} \cup \{a+m+2, a+m+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+1\right\}$$

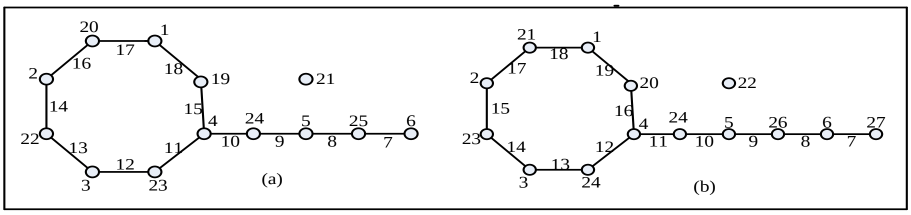
$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+m, a+m+1, a+m+2, a+m+3, a+m+4, \dots, a+m+q-1, a+m+q\right\}$$

$$= \{a+2, a+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q\} \tag{3.32}$$

Terbukti bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur S merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan yaitu $\{a+2, a+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q\}$.

Keempat, dengan menggunakan Lemma 3.2, f merupakan PTBA b-busur berurutan dengan konstanta ajaib $k = b + e + s$ untuk $b = \left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor$, $e = m + q - 1$ dan $s = \min(S) = (a+2)$.■

Pada Gambar 3.5 diberikan contoh (a) PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,5}$ dengan $b = 6$, konstanta ajaib $k = 38$ serta simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak 1 simpul, (b) PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,6}$ dengan $b = 6$, konstanta ajaib $k = 40$ serta simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak 1 simpul.

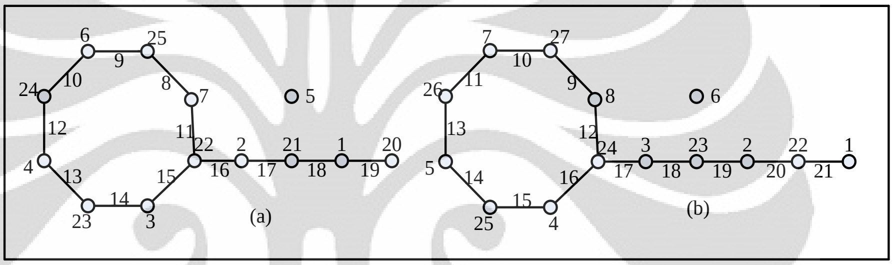


Gambar 3.5 (a) PTBA 6-busur berurutan pada $T_{8,5}$, $k = 38$, dan 1 simpul terisolasi, (b) PTBA 6-busur berurutan pada $T_{8,6}$, $k = 40$, dan 1 simpul terisolasi

Dengan menggunakan Teorema 2.2 diperoleh Akibat 3.1

Akibat 3.1 Setiap graf kecebong $T_{m,q}$ dengan $m = 0$ mod 4 memiliki pelabelan total busur-ajaib $\left(m + q - \left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor\right)$-busur berurutan dengan penambahan satu simpul terisolasi.

Pada Gambar 3.6 (a) dan (b) diberikan dual untuk Gambar 3.2 (a) dan (b). Gambar 3.3 (a) PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,5}$ dengan $b = 7$, konstanta ajaib $k = 40$, dan 1 simpul terisolasi, (b) PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong $T_{8,6}$ dengan $b = 8$, konstanta ajaib $k = 44$, dan 1 simpul terisolasi.

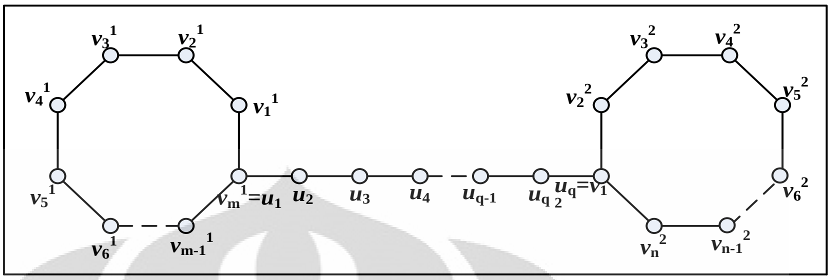


Gambar 3.6 (a) PTBA 7-busur berurutan pada $T_{8,5}$, $k = 40$, dan 1 simpul terisolasi, (b) PTBA 8-busur berurutan pada $T_{8,6}$, $k = 44$, dan 1 simpul terisolasi

3.2 Pelabelan Total Busur-Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf *Dumbbell*

Berdasarkan Bab 2.2 telah dijelaskan bahwa $D_{m,n,q}$ merupakan graf *dumbbell* dengan m adalah banyaknya simpul pada lingkaran sebelah kiri dan n adalah banyaknya simpul pada lingkaran sebelah kanan serta q adalah banyaknya simpul pada lintasan. Pada graf *dumbbell*, simpul-simpul ujung pada lintasan merupakan salah satu simpul dari masing-masing lingkaran. Pada graf *dumbbell*, $m, n \geq 3$ dan $q \geq 2$. Jumlah simpul pada graf *dumbbell* adalah $m + n + q - 2$, sedangkan jumlah busurnya adalah $m + n + q - 1$. Oleh karen itu, agar bisa dilabel dengan pelabelan PTBA b-busur berurutan perlu ditambah simpul terisolasi. Supaya optimal, yaitu memenuhi kondisi $|E| = |V| - 1$ maka simpul terisolasi yang akan ditambahkan pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ adalah dua simpul.

Untuk keperluan pelabelan, graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ akan digambarkan seperti pada Gambar 3.7 bersama dengan penamaan simpul-simpulnya.



Gambar 3.7 Graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$

Pada Teorema 3.2 diberikan PTBA b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ dengan banyak simpul pada kedua graf lingkaran merupakan kelipatan empat. Untuk menghasilkan PTBA b-busur berurutan perlu ditambahkan dua simpul terisolasi.

Teorema 3.2 Setiap graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ dengan $m = 0 \bmod 4$ dan $n = 0 \bmod 4$ memiliki pelabelan total busur-ajaib $\left\lfloor\frac{m+q+n-2}{2}\right\rfloor$-busur berurutan dengan menambahkan dua simpul terisolasi.

Bukti. Nyatakan simpul terisolasi dengan x_1 dan x_2.

Pilih $a = \left\lfloor\frac{3m+3n+3(q-2)}{2}\right\rfloor + 1$

Langkah-langkah pembuktiannya adalah sebagai berikut

Pertama, label simpul-simpul dari graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$

Label simpul untuk lingkaran kiri dengan

$$f(v_i^{\,1}) = \begin{cases} a + \frac{i+1}{2} & , \quad i = 1, 3, 5, \dots, \frac{m}{2} - 1 \\ a + \frac{i+1}{2} + 1 & , \quad i = \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 3, \frac{m}{2} + 5 \ \dots, m - 1 \\ \frac{i}{2} & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, m \end{cases}$$

(3.33)

Untuk q ganjil

Label simpul untuk lingkaran kanan

$$f(v_l^{2}) = \begin{cases} \frac{m+q+l}{2} - 1 & , \quad l = 1,3,5,\dots,n-1 \\ a + \frac{m+q+l-1}{2} + 1 & , \quad l = 2,4,6,\dots,\frac{n}{2} \\ a + \frac{m+q+l-1}{2} + 2 & , \quad l = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4,\dots,n \end{cases} \tag{3.34}$$

Label simpul untuk lintasan

$$f(u_j) = \begin{cases} \frac{m+j-1}{2} & , \quad j = 1,3,5,\dots,q \\ a + \frac{m+j}{2} + 1 & , \quad j = 2,4,6,\dots,q-1 \end{cases} \tag{3.35}$$

Untuk q genap

Label simpul untuk lingkaran kanan

$$f(v_l^{2}) = \begin{cases} a + \frac{m+q+l-1}{2} + 1 & , \quad l = 1,3,5,\dots,\frac{n}{2}-1 \\ a + \frac{m+q+l-1}{2} + 2 & , \quad l = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+3,\dots,n-1 \\ \frac{m+q+l}{2} - 1 & , \quad l = 2,4,6,\dots,n \end{cases} \tag{3.36}$$

Label simpul untuk lintasan

$$f(u_j) = \begin{cases} \frac{m+j-1}{2} & , \quad j = 1,3,5,\dots,q-1 \\ a + \frac{m+j}{2} + 1 & , \quad j = 2,4,6,\dots,q \end{cases} \tag{3.37}$$

Kemudian label simpul-simpul terisolasi dengan

$$f(x_1) = a + \frac{m}{4} + 1 \tag{3.38}$$

$$f(x_2) = a + \left\lceil \frac{m+q-2}{2} \right\rceil + \frac{n}{4} + 2 \tag{3.39}$$

Kedua, akan ditunjukkan bahwa label-label simpul $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan. Untuk membuktikan bahwa $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan, maka digunakan persamaan (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.38) dan (3.39). Pembuktian dibagi untuk 2 kasus yaitu q ganjil dan q genap.

Kasus 1: q ganjil

Dengan menggunakan f pada persamaan (3.33), (3.34), (3.35), (3.38) dan (3.39) diperoleh

$$L_1 = \{f(v_i{}^1) \mid i \text{ genap}\} = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \tag{3.40}$$

$$L_2 = \{f(v_i{}^1) \mid i \text{ ganjil}\} = \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1\right\} \tag{3.41}$$

$$L_3 = \{f(x_1)\} = \left\{a+\frac{m}{4}+1\right\} \tag{3.42}$$

$$L_4 = \{f(v_l{}^2) \mid l \text{ ganjil}\} = \left\{\frac{m+q}{2}-\frac{1}{2}, \frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{m+q+n}{2}-\frac{3}{2}\right\} \tag{3.43}$$

$$L_5 = \{f(v_l{}^2) \mid l \text{ genap}\} = \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q+n}{2}+\frac{3}{2}\right\} \tag{3.44}$$

$$L_6 = \{f(x_2)\} = \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}\right\} \tag{3.45}$$

$$L_7 = \{f(u_j) \mid j \text{ genap}\} = \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}\right\} \tag{3.46}$$

$$L_8 = \{f(u_j) \mid j \text{ ganjil}\} = \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-\frac{1}{2}\right\} \tag{3.47}$$

$$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8$$

$$= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{4}+1\right\} \cup \left\{\frac{m+q}{2}-\frac{1}{2}, \frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{m+q+n}{2}-\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q+n}{2}+\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-\frac{1}{2}, \frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{m+q+n}{2}-\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+1, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{1}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{5}{2}, \dots, a+\frac{m+q+n}{2}+\frac{3}{2}\right\} \quad (3.48)$$

Kasus 2: q genap

Dengan menggunakan f pada persamaan (3.33), (3.36), (3.37), (3.38) dan (3.39) diperoleh

$$L_1 = \{f(v_i{}^1) | \; i \text{ genap}\} = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\right\} \quad (3.49)$$

$$L_2 = \{f(v_i{}^1) | \; i \text{ ganjil}\} = \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1\right\} \quad (3.50)$$

$$L_3 = \{f(x_1)\} = \left\{a+\frac{m}{4}+1\right\} \quad (3.51)$$

$$L_4 = \{f(v_l{}^2) | \; l \text{ genap}\} = \left\{\frac{m+q}{2}, \frac{m+q}{2}+1, \dots, \frac{m+q+n}{2}-1\right\} \quad (3.52)$$

$$L_5 = \{f(v_l{}^2) | \; l \text{ ganjil}\} = \left\{a+\frac{m+q}{2}+1, a+\frac{m+q}{2}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{2}+1\right\} \quad (3.53)$$

$$L_6 = \{f(x_2)\} = \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+1\right\} \quad (3.54)$$

$$L_7 = \{f(u_j) | \; j \text{ genap}\} = \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+1\right\} \quad (3.55)$$

$$L_8 = \{f(u_j) | \; j \text{ ganjil}\} = \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-1\right\} \quad (3.56)$$

$$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8$$

$$= \left\{1,2,3,\dots,\frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{4}+1\right\} \cup \left\{\frac{m+q}{2}, \frac{m+q}{2}+1, \dots, \frac{m+q+n}{2}-1\right\} \cup \left\{a+\frac{m+q}{2}+1, a+\frac{m+q}{2}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{2}+1\right\} \cup \left\{a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+1\right\} \cup \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-1\right\}$$

$$= \left\{1,2,3,\dots,\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m+q}{2}-1, \frac{m+q}{2}, \frac{m+q}{2}+1, \dots, \frac{m+q+n}{2}-1\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{4}, a+\frac{m}{4}+1, a+\frac{m}{4}+2, a+\frac{m}{4}+3, \dots, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+\frac{m+q}{2}+1, a+\frac{m+q}{2}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+1, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{4}+2, \dots, a+\frac{m+q}{2}+\frac{n}{2}+1\right\} \tag{3.57}$$

Dari kasus 1 dan 2 terbukti bahwa label-label simpul $f(V)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan bilangan berurutan baik untuk q genap maupun q ganjil.

Berdasarkan definisi dari nilai b yaitu nilai terbesar dari himpunan pertama $f(V)$ diperoleh nilai b yaitu

$$b = \begin{cases} \frac{m+q+n}{2} - \frac{3}{2} & , \quad q \text{ ganjil} \\ \frac{m+q+n}{2} - 1 & , \quad q \text{ genap} \end{cases} \text{ atau } b = \left\lfloor \frac{m+q+n-2}{2} \right\rfloor \tag{3.58}$$

Ketiga, akan ditunjukkan bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur ($S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$) membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan.

Skema pembuktian dibagi untuk beberapa kasus berikut

1. $v_i^1 v_{i+1}^1$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m-1$

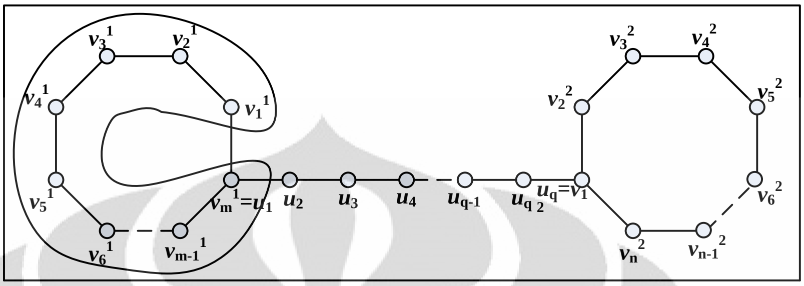
(a) Untuk $i = 1,2,3,\dots,\frac{m}{2}-1$

Tanpa mengurangi keumuman misalkan i ganjil maka $i+1$ genap

(b) Untuk $i = \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}+2, \dots, m-1$

Tanpa mengurangi keumuman misalkan i ganjil maka $i + 1$ genap

Untuk mempermudah melihat kasus satu ini, lihat Gambar 3.8 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:

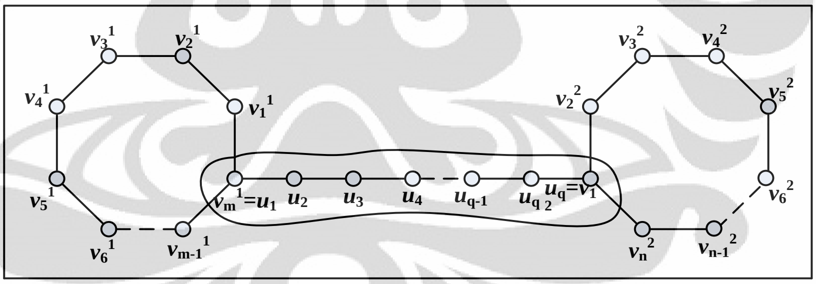


Gambar 3.8 Graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ kasus satu

2. $u_j u_{j+1}$ untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$

Tanpa menghilangkan keumuman misalkan j ganjil maka $j + 1$ genap

Untuk mempermudah melihat kasus dua ini, lihat Gambar 3.9 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.9 Graf Dumbbell $D_{m,n,q}$ kasus dua

3. ${v_l}^2 {v_{l+1}}^2$ untuk $l = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

(a) q genap

(1) Untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$

Tanpa menghilangkan keumuman misalkan l ganjil maka $l + 1$ genap

(2) Untuk $l = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$

Tanpa menghilangkan keumuman misalkan l ganjil maka $l + 1$ genap

(b) q ganjil

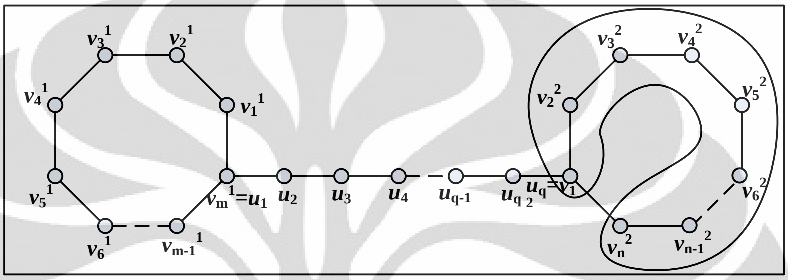
(1) Untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$

Tanpa menghilangkan keumuman misalkan l ganjil maka $l + 1$ genap

(2) Untuk $l = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$

Tanpa menghilangkan keumuman misalkan l ganjil maka $l + 1$ genap

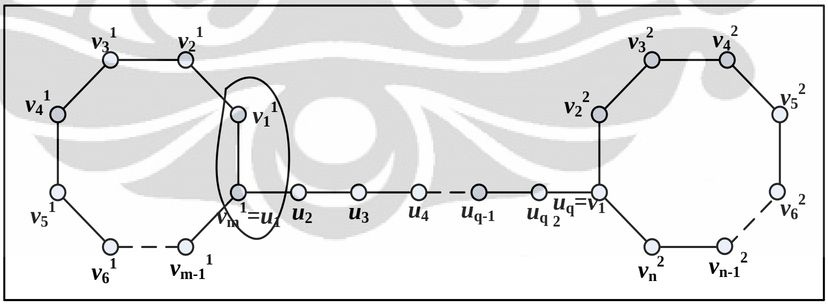
Untuk mempermudah melihat kasus tiga ini, lihat Gambar 3.10 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.10 Graf Dumbbell $D_{m,n,q}$ kasus tiga

4. $v_1{}^1 v_m{}^1$

Untuk mempermudah melihat kasus empat ini, lihat Gambar 3.11 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



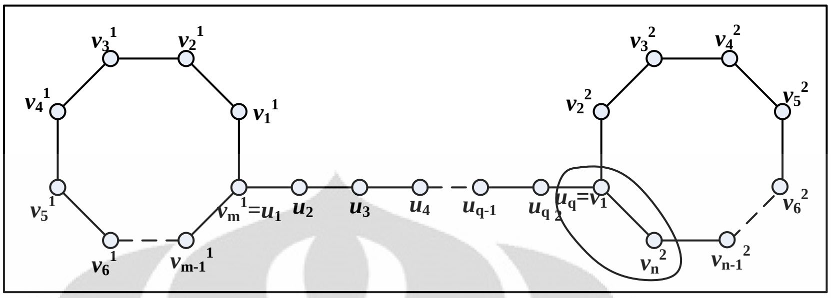
Gambar 3.11 Graf Dumbbell $D_{m,n,q}$ kasus empat

5. $v_1{}^2 v_n{}^2$

(a) q genap

(b) q ganjil

Untuk mempermudah melihat kasus lima ini, lihat Gambar 3.12 pada simpul-simpul yang diberi lingkaran berikut:



Gambar 3.12 Graf Dumbbell $D_{m,n,q}$ kasus lima

Selanjutnya akan dibuktikan menurut kasus-kasus di atas

1. Kasus 1a untuk $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1$

   i ganjil maka $i + 1$ genap

   $$S_1 = f(v_i{}^1) + f(v_{i+1}{}^1) = \left(a + \tfrac{i+1}{2}\right) + \left(\tfrac{i+1}{2}\right) = a + i + 1 \qquad (3.59)$$

   Sehingga untuk $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_1 = \left\{a + 2, a + 3, \dots, a + \tfrac{m}{2} - 1, a + \tfrac{m}{2}\right\} \qquad (3.60)$$

   Kasus 1b untuk $= \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1$

   i ganjil maka $i + 1$ genap

   $$S_2 = f(v_i{}^1) + f(v_{i+1}{}^1) = \left(a + \tfrac{i+1}{2} + 1\right) + \left(\tfrac{i+1}{2}\right) = a + i + 2 \quad (3.61)$$

   Sehingga untuk $i = \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_2 = \left\{a + \tfrac{m}{2} + 2, a + \tfrac{m}{2} + 3, \dots, a + m, a + m + 1\right\} \qquad (3.62)$$

2. Kasus 2 untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$

   j ganjil maka $j + 1$ genap

   $$S_3 = f(u_j) + f(u_{j+1}) = \left(\tfrac{m+j}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(a + \tfrac{m+(j+1)}{2} + 1\right) = a + m + j + 1 \qquad (3.63)$$

   Sehingga untuk $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$ diperoleh bobot busur

   $$S_3 = \{a + m + 2, a + m + 3, \dots, a + m + q - 1, a + m + q\} \quad (3.64)$$

3. Kasus 3a(1) untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$

   l ganjil maka $l + 1$ genap

$$S_4 = f({v_l}^2) + f({v_{l+1}}^2) = \left(a + \frac{m+q+l-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{m+q+(l+1)}{2} - 1\right) = a + m + q + l \quad (3.65)$$

   Sehingga untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$ diperoleh bobot busur

$$S_4 = \left\{a + m + q + 1, a + m + q + 2, \dots, a + m + q + \frac{n}{2} - 2, a + m + q + \frac{n}{2} - 1\right\} \quad (3.66)$$

   Kasus 3a(2) untuk $l = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1$

   l ganjil maka $l + 1$ genap

$$S_5 = f({v_l}^2) + f({v_{l+1}}^2) = \left(a + \frac{m+q}{2} + \frac{l-1}{2} + 2\right) + \left(\frac{m+q+(l+1)}{2} - 1\right) = a + m + q + l + 1 \quad (3.67)$$

   Sehingga untuk $l = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1$ diperoleh bobot busur

$$S_5 = \left\{a + m + q + \frac{n}{2} + 1, a + m + q + \frac{n}{2} + 2, \dots, a + m + q + n - 1, a + m + q + n\right\} \quad (3.68)$$

   Kasus 3b(1) untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$

   l ganjil maka $l + 1$ genap

$$S_6 = f({v_l}^2) + f({v_{l+1}}^2) = \left(\frac{m+q+l}{2} - 1\right) + \left(a + \frac{m+q+(l+1)-1}{2} + 1\right) = a + m + q + l \quad (3.69)$$

   Sehingga untuk $l = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$ diperoleh bobot busur

$$S_6 = \left\{a + m + q + 1, a + m + q + 2, \dots, a + m + q + \frac{n}{2} - 1, a + m + q + \frac{n}{2}\right\} \quad (3.70)$$

   Kasus 3b(2)

   l ganjil maka $l + 1$ genap

$$S_7 = f(v_l{}^2) + f(v_{l+1}{}^2) = \left(\frac{m+q+l}{2} - 1\right) + \left(a + \frac{m+q+(l+1)-1}{2} + 2\right) = a + m + q + l + 1 \quad (3.71)$$

Sehingga untuk $l = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$ diperoleh bobot busur

$$S_7 = \left\{a + m + q + \frac{n}{2} + 2, a + m + q + \frac{n}{2} + 3, \dots, a + m + q + n - 1, a + m + q + n\right\} \quad (3.72)$$

4. Kasus 4 untuk $v_1{}^1 v_m{}^1$

$$S_8 = f(v_1{}^1) + f(v_m{}^1) = (a + 1) + \left(\frac{m}{2}\right) = a + \frac{m}{2} + 1 \quad (3.73)$$

Sehingga diperoleh bobot busur

$$S_8 = \left\{a + \frac{m}{2} + 1\right\} \quad (3.74)$$

5. Kasus 5a untuk $v_1{}^2 v_n{}^2$

$$S_9 = f(v_1{}^2) + f(v_n{}^2) = \left(a + \frac{m+q}{2} + 1\right) + \left(\frac{m+q+n}{2} - 1\right) = a + m + q + \frac{n}{2} \quad (3.75)$$

Sehingga diperoleh bobot busur

$$S_9 = \left\{a + m + q + \frac{n}{2}\right\} \quad (3.76)$$

Kasus 5b untuk $v_1{}^2 v_n{}^2$

$$S_{10} = f(v_1{}^2) + f(v_n{}^2) = \left(\frac{m+q+1}{2} - 1\right) + \left(a + \frac{m+q+n-1}{2} + 2\right) = a + m + q + \frac{n}{2} + 1 \quad (3.77)$$

Sehingga diperoleh bobot busur

$$S_{10} = \left\{a + m + q + \frac{n}{2} + 1\right\} \quad (3.78)$$

Akan ditunjukkan bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur S membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan yaitu dengan menggabungkan $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_8, S_9$ untuk q genap dan $S_1, S_2, S_3, S_6, S_7, S_8, S_{10}$ untuk q ganjil diperoleh

Untuk q genap maka

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_8 \cup S_9$$

$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, \left(a+\frac{m}{2}+3\right), \dots, a+m, a+m+1\right\} \cup \{a+m+2, a+m+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q\} \cup \left\{a+m+q+1, a+m+q+2, \dots, a+m+q+\frac{n}{2}-2, a+m+q+\frac{n}{2}-1\right\} \cup \left\{a+m+q+\frac{n}{2}+1, a+m+q+\frac{n}{2}+2, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+1\right\} \cup \left\{a+m+q+\frac{n}{2}\right\}$$

$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+m, a+m+1, a+m+2, a+m+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q, a+m+q+1, a+m+q+2, \dots, a+m+q+\frac{n}{2}-2, a+m+q+\frac{n}{2}-1, a+m+q+\frac{n}{2}, a+m+q+\frac{n}{2}+1, a+m+q+\frac{n}{2}+2, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\right\}$$

$$= \{a+2, a+3, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\} \tag{3.79}$$

Untuk q ganjil maka

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_6 \cup S_7 \cup S_8 \cup S_{10}$$

$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+m, a+m+1\right\} \cup \{a+m+2, a+m+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q\} \cup \left\{a+m+q+1, a+m+q+2, \dots, a+m+q+\frac{n}{2}-1, a+m+q+\frac{n}{2}\right\} \cup \left\{a+m+q+\frac{n}{2}+2, a+m+q+\frac{n}{2}+3, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\right\} \cup \left\{a+\frac{m}{2}+1\right\} \cup \left\{a+m+q+\frac{n}{2}+1\right\}$$

$$= \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{m}{2}-1, a+\frac{m}{2}, a+\frac{m}{2}+1, a+\frac{m}{2}+2, a+\frac{m}{2}+3, \dots, a+m, a+m+1, a+m+2, a+m+3, \dots, a+m+q-1, a+m+q, a+m+q+1, a+m+q+2, \dots, a+m+\right.$$

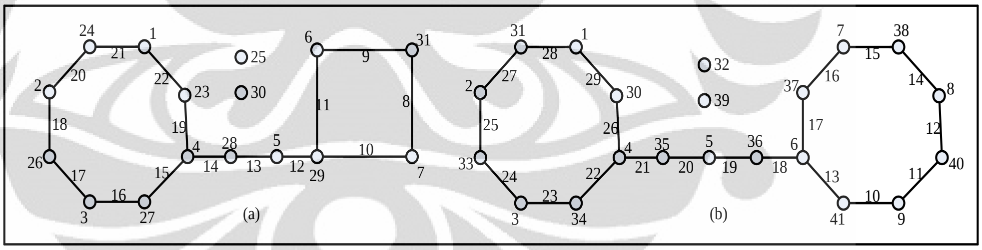
$$q+\frac{n}{2}-1, a+m+q+\frac{n}{2}, a+m+q+\frac{n}{2}+1, a+m+q+\frac{n}{2}+ 2, a+m+q+\frac{n}{2}+3, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\Big\}$$

$$=\{a+2, a+3, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\} \qquad (3.80)$$

Terbukti bahwa penjumlahan label simpul-simpul ujung pada setiap busur S merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan yaitu $\{a+2, a+3, \dots, a+m+q+n-1, a+m+q+n\}$.

Keempat, dengan menggunakan Lemma 3.2, f merupakan PTBA b-busur berurutan dengan konstanta ajaib $k=b+e+s$ untuk $b=\left\lfloor\frac{m+q+n-2}{2}\right\rfloor$, $e=m+n+q-1$ dan $s=\min(S)=(a+2)$.■

Pada Gambar 3.13 diberikan contoh (a) PTBA b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,4,4}$ dengan $b=7$, konstanta ajaib $k=46$ serta simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak 2 simpul, (b) PTBA b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,8,5}$ dengan $b=9$, konstanta ajaib$k=60$ serta simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak 2 simpul.

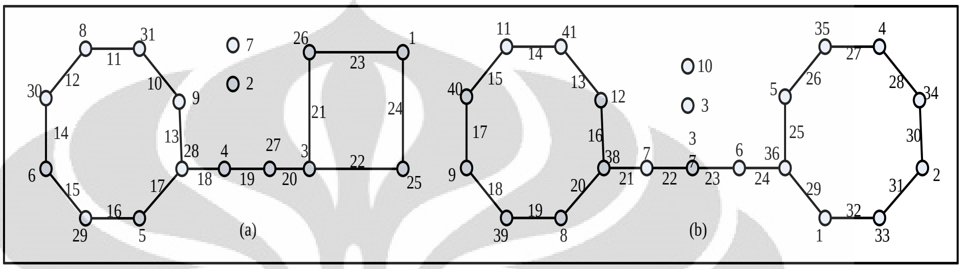


Gambar 3.13 (a) PTBA 7-busur berurutan pada $D_{8,4,4}$, $k=46$, dan 2 simpul terisolasi, (b) PTBA 9-busur berurutan pada $D_{8,8,5}$, $k=60$, dan 2 simpul terisolasi

Dengan menggunakan Teorema 2.2 diperoleh Akibat 3.2.

Akibat 3.2 Setiap graf dumbbell $D_{m,n,q}$ dengan $m=0$ mod 4 dan $n=0$ mod 4 memiliki pelabelan total busur-ajaib $\left(m+n+q-\left\lfloor\frac{m+n+q-2}{2}\right\rfloor\right)$-busur berurutan dengan penambahan dua simpul terisolasi.

Pada Gambar 3.14 (a) dan (b) diberikan dual untuk Gambar 3.13 (a) dan (b). Gambar 3.6 (a) PTBA b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,4,4}$ dengan $b = 9$, konstanta ajaib $k = 50$, dan 2 simpul terisolasi, (b) PTBA b-busur berurutan pada graf *dumbbell* $D_{8,8,5}$ dengan $b = 12$, konstanta ajaib $k = 66$, dan 2 simpul terisolasi.



Gambar 3. 14 (a) PTBA 9-busur berurutan pada $D_{8,4,4}$, $k = 50$, dan 2 simpul terisolasi, (b) PTBA 12-busur berurutan pada $D_{8,8,5}$, $k = 66$, dan 2 simpul terisolasi

BAB 4
KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dibuktikan bahwa graf kecebong dan graf *dumbbell* memiliki PTBA b-busur berurutan dengan nilai b masing-masing untuk graf tersebut adalah $b = \left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor$ dan $b = \left\lfloor \frac{m+n+q-2}{2} \right\rfloor$. Hasil-hasil tersebut dirangkum dalam Tabel 4.1.

Tabel 4. 1 Pelabelan Total b-Busur Berurutan Busur Ajaib

Graf	Pelabelan	Hasil	Keterangan
Graf kecebong $T_{m,q}$	PTBA $\left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor$-busur berurutan	Teorema 3.1	$m = 0$ mod 4, $q \geq 2$
	PTBA $\left(m + q - \left\lfloor \frac{m+q-1}{2} \right\rfloor\right)$-busur berurutan	Akibat 3.1	$m = 0$ mod 4, $q \geq 2$
Graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$	PTBA $\left\lfloor \frac{m+n+q-2}{2} \right\rfloor$-busur berurutan	Teorema 3.2	$m = 0$ mod 4, $n = 0$ mod 4, $q \geq 2$
	PTBA $\left(m + n + q - \left\lfloor \frac{m+n+q-2}{2} \right\rfloor\right)$-busur berurutan	Akibat 3.2	$m = 0$ mod 4, $n = 0$ mod 4, $q \geq 2$

Penelitian lebih lanjut mengenai konstruksi PTBA b-busur berurutan pada graf kecebong dan graf *dumbbell* dengan banyak simpul m pada lingkaran diberikan dalam masalah terbuka berikut.

Masalah terbuka 1. Apakah graf kecebong $T_{m,q}$dengan $m \geq 3, q \geq 2$ memiliki PTBA b-busur berurutan.

Masalah terbuka 2. Apakah graf dumbbell $D_{m,n,q}$ dengan $m \geq 3, n \geq 3, q \geq 2$ memiliki PTBA b-busur berurutan.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G dan Lesniak, L. (1986). *Graphs & Digraphs*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

Niagara, W. M. (2010). *Pelabelan Total Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf dari Kelas Graf yang Sama untuk* $d = 1$ *dan* $d = 2$, Skripsi Departemen Matematika Universitas Indonesia, Depok.

Silaban, D. R. dan Sugeng, K. A. (2009). Construction of edge consecutive edge magic labeling on a disconnective graph which are not a subclass of forest, *Proccedings of IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA)*, October, 907-911.

Sugeng, K. A. dan Silaban, D. R. (2009). An edge consecutive edge magic total labeling on some classes of tree, *Proccedings of the* 5^{th} *International Conference on Mathematics, Statistics and Their Applications (ICMSA)*, June, 966-969.

Silaban, D. R. dan Sugeng, K. A., *Pelabelan Total Busur Berurutan Busur Ajaib pada Graf Terhubung Bukan Graf Pohon*, Preprint.

Sugeng, K. A. dan Miller, M. (2008). On Consecutive edge magic total labeling of graphs, *Journal of Discrete Algorithms 6*, 59-65.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*, Birkhäuser.