UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER
MODEL REGRESI BINOMIAL NEGATIF
PADA KASUS OVERDISPERSI

SKRIPSI

WIDYA WAHYUNI
0706262003

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI BINOMIAL NEGATIF PADA KASUS OVERDISPERSI

SKRIPSI

Skripsi ini diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

WIDYA WAHYUNI
0706262003

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Widya Wahyuni
NPM	: 0706262003
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 14 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Widya Wahyuni
NPM	: 0706262003
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif pada Kasus Overdispersi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing 1	: Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si	( )
Pembimbing 2	: Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Penguji	: Dra. Ida Fithriani, M.Si	( )
Penguji	: Fevi Novkaniza, M.Si	( )
Penguji	: Sarini Abdullah, S.Si, M.Stats	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 15 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi dengan judul “Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif pada Kasus Overdispersi“ ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Penulisan skripsi ini diselesaikan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa baik dalam penulisan skripsi ini maupun selama penulis kuliah, yaitu kepada:

1. Ibu Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si dan Dra. Siti Nurrohmah, M.Si selaku dosen pembimbing. Terima kasih sebesar-besarnya untuk semua bantuan, saran, kritik dan dorongan yang luar biasa yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Ida Fithriani, M.Si selaku pembimbing akademis. Terima kasih untuk bantuan, dorongan, bimbingan, dan perhatian untuk penulis selama masa kuliah dan juga di dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku ketua departemen, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu proses penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Rianti, Ibu Sarini, Ibu Fevi, Ibu Titin, Ibu Mila, Ibu Sri, dan seluruh staf pengajar departemen Matematika UI yang tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan. Semoga penulis dapat menggunakan ilmu tersebut dengan sebaik-baiknya.
5. Mba Santi, Pak Saliman, Mas Salman, Mba Rusmi, Mas Iwan, Pak Anshori, Mba Fia, dan seluruh karyawan departemen Matematika UI, terima kasih atas segala bantuan dan kemudahan yang telah diberikan untuk penulis.

6. Orang tua penulis yang telah mengasuh penulis sampai saat ini dan selalu memberikan dukungan moril maupun materiil, serta tak pernah berhenti mendoakan penulis.
7. Embah putri, Mas Imam, Tante Sari, dan seluruh keluarga besar mama dan papa, terima kasih atas doa dan dukungannya.
8. Shafiraku, Nediku, Mandaku, Hikmamahku, Adit (Aca), Ndi, Hanif (Daqu), dan Dhanar, terima kasih untuk persahabatan yang kalian berikan. Setiap detik yang kita lalui bersama tidak akan pernah terlupakan.
9. Ashari yang sudah membantu penulis untuk menangani masalah seputar Matlab dan kepada teman-teman mahasiswa Matematika UI angkatan 2007 yang lain, Adi, Afni, Ang, Anjar, Arif, Bobow, Ciput, Citi, Dita, Farah, Fauzan, Ferdi, Gamgam, Iki, Lois, Dadaw, Nora, Mita, Petos, Putuwira, Riyantoto, Shafa, Sica, Siska, Tatep, Teteh, Widi, Winwin, Wiwi, Anis, Yos, dan Zul. Terima kasih untuk semua yang dilalui dalam masa-masa perkuliahan.
10. Semua mahasiswa Matematika UI angkatan 2005, 2006, 2008, dan 2009, serta untuk adik asuh penulis, Maifiana, terima kasih untuk doa dan dukungannya.
11. Semua pihak yang telah membantu pengerjaan skripsi ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu per satu, penulis mengucapkan terima kasih.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan pada skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dapat membantu memperbaiki kekurangan tersebut. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi yang membacanya.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI SKRIPSI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Widya Wahyuni
NPM	: 0706262003
Program Studi	: S1
Departemen	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif pada Kasus Overdispersi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/ formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 14 Juli 2011
Yang menyatakan

(Widya Wahyuni)

ABSTRAK

Nama : Widya Wahyuni
Program Studi : Matematika
Judul : Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif pada Kasus Overdispersi

Data *count* adalah data yang berupa bilangan bulat non-negatif. Analisis regresi yang biasa digunakan untuk variabel respon yang berupa data *count* adalah regresi Poisson. Regresi Poisson memerlukan asumsi bahwa mean pada variabel respon sama dengan variansinya. Jika asumsi tersebut dilanggar yaitu pada saat variansi lebih besar dibanding mean atau disebut kondisi overdispersi, maka regresi Poisson tidak sesuai untuk menganalisis data tersebut. Overdispersi pada regresi Poisson dapat membuat standard *error* dari taksiran parameter regresi cenderung lebih rendah dari seharusnya, sehingga menghasilkan kesimpulan yang tidak valid. Model regresi Binomial Negatif merupakan salah satu model yang dapat digunakan saat terjadi overdispersi pada data *count*. Tugas akhir ini akan membahas mengenai penaksiran parameter model regresi Binomial Negatif dengan metode maksimum *likelihood* dimana solusi dari fungsi *likelihood*-nya diselesaikan dengan metode Newton-Raphson. Uji kesesuaian model yang digunakan mencakup statistik *pseudo*-R^2, uji rasio *likelihood*, dan uji Wald.

Kata Kunci : overdispersi, model regresi Binomial Negatif, *pseudo*-R^2, uji rasio *likelihood*, uji Wald
xi + 75 halaman ; 4 gambar
Daftar Pustaka : 13 (1992 – 2011)

ABSTRACT

Name : Widya Wahyuni
Program Study : Mathematics
Title : Estimating Parameter of Negative Binomial Regression Model on Overdispersion Case

Count data is the non-negative integer data. Regression analysis is commonly used for count dependent data variabel is Poisson Regression. Poisson Regression has an assumption that mean of response variable equal to its variance. If the assumption is violated, where the variance is greater than mean, called overdispersion, then Poisson regression is inconvenient to analyze the data. Overdispersion on Poisson regression may underestimate the standard errors of regression parameters and consequently, giving misleading inference about the regression parameters. Negative Binomial regression model is one of the models that can be used when there is evidence of overdispersion count data. This final task will discuss about estimating parameter of Negative Binomial regression model by maximum likelihood methods, which the maximum likelihood estimates may be solved by using the Newton-Raphson iteration. Goodness of fit testing of this model includes pseudo-R^2 statistic, likelihood ratio, and Wald test.

Keyword : overdispersion, Negative Binomial regression model, pseudo-R^2, likelihood ratio test, Wald test
xi + 75 pages ; 4 pictures
Bibliography : 13 (1992 – 2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Regresi adalah suatu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara suatu variabel respon dengan satu atau lebih variabel penjelas. Pada umumnya, regresi digunakan untuk menganalisis variabel respon yang berjenis kontinu, namun sering juga ditemui variabel respon yang berjenis diskrit. Variabel respon diskrit dapat berupa data *count* yaitu data yang nilainya non-negatif dan menyatakan banyaknya kejadian dalam interval waktu, ruang, atau volume tertentu. Contoh data *count* antara lain banyaknya dering telepon per jam di suatu kantor, banyaknya kecelakaan mobil yang terjadi di Jakarta selama satu minggu, atau banyaknya tikus sawah per hektar. Ketika variabel responnya berupa data *count*, analisis regresi yang biasa digunakan adalah analisis regresi Poisson (Berk dan MacDonald, 2008).

Pada analisis regresi Poisson terdapat asumsi yang harus terpenuhi, yaitu variansi dari variabel responnya sama dengan mean. Pada kenyataannya, kondisi seperti ini sangat jarang terjadi karena biasanya data *count* memiliki variansi yang lebih besar dari mean atau disebut kondisi overdispersi (Cameron dan Trivedi, 1998). Overdispersi dapat mengakibatkan standard *error* dari taksiran parameter regresi yang dihasilkan memiliki kecenderungan untuk menjadi lebih rendah dari seharusnya sehingga jika model regresi Poisson tetap digunakan dalam kondisi overdispersi maka taksiran parameter-parameter yang seharusnya belum tentu signifikan akan menjadi dianggap signifikan (Ismail dan Jemain, 2007). Hal itu dapat mengakibatkan kesimpulan yang akan dihasilkan menjadi tidak tepat atau tidak sesuai dengan data, sehingga menurut Osgood (2000), Paternoster dan Brame (1997), model Binomial Negatif disarankan sebagai alternatif dari model Poisson ketika diindikasikan adanya overdispersi (Berk dan MacDonald, 2008).

Model regresi Binomial Negatif memiliki kegunaan yang sama dengan model regresi Poisson yaitu untuk menganalisis hubungan antara suatu variabel respon data *count* dengan satu atau lebih variabel penjelas, tetapi model regresi Binomial Negatif lebih fleksibel dibandingkan dengan model Poisson karena asumsi mean dan variansi dari model Binomial Negatif tidak harus sama. Model ini juga memiliki parameter dispersi yang berguna menggambarkan variasi dari data yang biasa dinotasikan dengan a. Model Binomial Negatif yang akan digunakan adalah model Binomial Negatif yang merupakan model campuran antara Poisson dan Gamma, dimana distribusi Gamma digunakan untuk menyesuaikan kehadiran overdispersi dalam model Poisson (Hilbe, 2011).

Dari dua buah model regresi yang biasa digunakan untuk data *count*, yaitu Poisson dan Binomial Negatif, model Binomial Negatif memiliki bentuk yang lebih umum, karena model Poisson dapat dinyatakan dalam model Binomial Negatif ketika parameter dispersinya mendekati nol ($a \approx 0$) atau dapat dikatakan data dalam kondisi ekuidispersi. Jadi, model Binomial Negatif pada dasarnya dapat digunakan untuk berbagai kasus data *count* namun dalam penulisan skripsi kali ini akan lebih dikhususkan untuk masalah penaksiran parameter model regresi Binomial Negatif pada kasus overdispersi.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana menaksir parameter-parameter pada model regresi Binomial Negatif.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan dan mempelajari tentang model regresi Binomial Negatif dan penaksiran parameter-parameternya.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Model Binomial Negatif yang digunakan adalah model campuran Poisson-Gamma untuk kasus overdispersi.
2. Penaksiran parameter-parameter model regresi dalam skripsi ini menggunakan metode maksimum *likelihood*.
3. Penentuan solusi dari fungsi *likelihood* dalam penaksiran parameter-parameter model regresi Binomial Negatif menggunakan pendekatan numerik, yaitu metode Newton-Raphson.

1.5 Sistematika Penulisan

BAB 1 : Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

BAB 2 : Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan dalam penulisan skripsi ini. Landasan teori mencakup tentang variabel acak, ekspektasi variabel acak, distribusi Poisson, distribusi Gamma, distribusi Binomial Negatif, distribusi campuran, Binomial Negatif sebagai campuran Poisson dan Gamma, metode maksimum *likelihood*, metode Newton-Raphson, uji rasio *likelihood*, dan uji Wald.

BAB 3 : Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif

Bab ini menjelaskan tentang model regresi Binomial Negatif beserta penaksiran parameter model regresinya dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*. Selain itu terdapat juga penjelasan mengenai uji kesesuaian model.

BAB 4 : Contoh Penggunaan Model Regresi Binomial Negatif

Bab ini membahas contoh data *count* yang akan dianalisis dengan model regresi Binomial Negatif yang telah dijelaskan dari Bab sebelumnya. Data yang digunakan adalah data Kepiting Tapal Kuda.

BAB 5 : Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang melandasi penaksiran parameter model regresi Binomial Negatif yaitu variabel acak, ekspektasi variabel acak, distribusi Poisson, distribusi Gamma, distribusi Binomial Negatif, distribusi campuran, Binomial Negatif sebagai campuran Poisson dan Gamma, metode maksimum *likelihood*, metode Newton-Raphson, uji rasio *likelihood*, dan uji Wald.

2.1 Variabel Acak

Ruang sampel merupakan himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan acak yang biasa dinotasikan dengan $\mathscr{C}$. Hasil percobaan acak dapat berupa bilangan-bilangan, seperti jumlah mata dadu yang muncul, berat badan bayi, dan lain-lain, tetapi hasil percobaan dapat merupakan suatu yang bukan bilangan. Sebagai contoh, misalkan dilakukan percobaan acak yaitu pelemparan koin, maka ruang sampelnya adalah $\mathscr{C} = \{c : c$ adalah ekor atau kepala$\}$. Jadi, dibutuhkan suatu aturan untuk merepresentasikan elemen c dari $\mathscr{C}$ ke dalam suatu bilangan.

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), jika terdapat suatu percobaan acak dengan ruang sampel $\mathscr{C}$, maka fungsi X yang memetakan setiap elemen c dalam domain ruang sampel $\mathscr{C}$ ke dalam ruang nilai $\mathscr{A}$ yang merupakan himpunan bilangan riil dimana $\mathscr{A} = \{x : x = X(c), c \in \mathscr{C}\}$ disebut variabel acak. Nilai dari X biasanya dinotasikan dengan huruf kecil, atau dalam hal ini adalah x.

Dari contoh percobaan pelemparan koin diatas, misalkan terdapat suatu fungsi X yang menyatakan jumlah kepala yang muncul. Dari pendefinisian fungsi X tersebut akan diperoleh $X(c) = 0$ jika muncul ekor dan $X(c) = 1$ jika yang muncul adalah kepala. Jadi, X adalah variabel acak yang memetakan elemen dari ruang sampel $\mathscr{C} = \{c : c$ adalah ekor atau kepala$\}$ ke ruang sampel bilangan riil dengan ruang nilai $\mathscr{A}$ = {0, 1}. Variabel acak terdiri dari dua jenis, yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu.

2.1.1 Variabel Acak Diskrit

Misalkan X adalah suatu variabel acak dengan ruang nilai $\mathscr{A}$ yang merupakan suatu himpunan yang berisi titik yang berhingga atau dapat dikorespondensikan satu-satu dengan bilangan bulat positif. Ruang nilai $\mathscr{A}$ dengan sifat diatas disebut himpunan diskrit. Jika dimisalkan suatu fungsi $f(x)$ sedemikian sehingga

1. $f(x) > 0, x \in \mathscr{A}$
2. $\sum_{\mathscr{A}} f(x) = 1$
3. $P(A) = \Pr(X \in A) = \sum_{A} f(x)$, dimana $P(A)$ merupakan fungsi himpunan probabilitas dan $A \subset \mathscr{A}$

maka X disebut variabel acak diskrit dengan $f(x)$ sebagai fungsi probabilitas dari X (Hogg dan Craig, 1995). Fungsi probabilitas disebut juga *probability density function* atau disingkat dengan p.d.f.

2.1.2 Variabel Acak Kontinu

Misalkan X adalah suatu variabel acak dengan ruang nilai $\mathscr{A}$ yang merupakan ruang berdimensi satu. $\mathscr{A}$ dapat berupa sebuah interval atau gabungan dari beberapa interval. Jika dimisalkan suatu fungsi $f(x)$ sedemikian sehingga

1. $f(x) > 0, x \in \mathscr{A}$
2. $\int_{\mathscr{A}} f(x)dx = 1$
3. Fungsi himpunan probabilitas $P(A), A \subset \mathscr{A}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$P(A) = \Pr(X \in A) = \int_{A} f(x)dx ,$$

maka X disebut variabel acak kontinu dengan $f(x)$ sebagai fungsi probabilitas dari X (Hogg dan Craig, 1995).

2.2 Ekspektasi dari Variabel Acak

Misalkan X adalah suatu variabel acak yang memiliki fungsi probabilitas $f(x)$ sedemikian sehingga untuk kasus diskrit,

$\sum_x |x| f(x)$ konvergen mutlak ke limit yang berhingga

sedangkan untuk kasus kontinu,

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx$ konvergen mutlak ke limit yang berhingga.

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), definisi ekspektasi untuk variabel acak diskrit adalah

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) \tag{2.1}$$

sedangkan ekspektasi untuk variabel acak kontinu adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \tag{2.2}$$

Beberapa sifat ekspektasi, yaitu:

- Jika k konstanta, maka $E(k) = k$.
- Jika k konstanta dan v adalah suatu fungsi, maka $E(kv) = k\,E(v)$.
- Jika $k_1, k_2, \ldots, k_m$ konstanta dan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ adalah fungsi-fungsi, maka $E(k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_mv_m) = k_1\,E(v_1) + k_2\,E(v_2) + \ldots + k_m\,E(v_m)$

Beberapa ekspektasi khusus, yaitu:

- Nilai mean dari variabel acak X (nilai mean dari suatu distribusi) yaitu: $\mu = E(X)$
- Nilai variansi dari variabel acak X (nilai variansi dari suatu distribusi) yaitu:
  $$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2\end{aligned}$$

= $E(X^2)$ - $2\mu^2 + \mu^2$

= $E(X^2)$ - μ^2

- *Moment Generating Function* (MGF)

  Misalkan X adalah variabel acak sedemikian sehingga untuk suatu nilai h yang positif, $E(e^{tX})$ ada untuk $-h < t < h$.

  MGF dari X didefinisikan sebagai fungsi $M(t) = E(e^{tX})$, untuk $-h < t < h$.

  MGF untuk variabel kontinu X adalah

  $$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \qquad (2.3)$$

  sedangkan untuk variabel diskrit X adalah

  $$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx} f(x) \qquad (2.4)$$

Turunan pertama dari MGF yaitu:

- Untuk variabel kontinu, $\dfrac{dM(t)}{dt} = M'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx$
- Untuk variabel diskrit, $\dfrac{dM(t)}{dt} = M'(t) = \displaystyle\sum_{x} xe^{tx} f(x)$

Berdasarkan turunan pertama dari MGF di atas, untuk $t = 0$, diperoleh $M'(0) = E(X)$.

Turunan kedua dari MGF yaitu:

- Untuk variabel kontinu, $\dfrac{d^2M(t)}{dt^2} = M''(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{tx} f(x)dx$
- Untuk variabel diskrit, $\dfrac{d^2M(t)}{dt^2} = M''(t) = \displaystyle\sum_{x} x^2e^{tx} f(x)$

Berdasarkan turunan kedua dari MGF di atas, untuk $t = 0$, diperoleh $M''(0) = E(X^2)$, sehingga $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$. Turunan ke-$m$ dari MGF untuk $t = 0$ yaitu $M^{(m)}(0) = E(X^m)$ yang disebut moment ke-m dari variabel acak X.

2.3 Distribusi Poisson

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), suatu variabel acak, misalkan *X*, dikatakan mempunyai distribusi Poisson jika variabel acak tersebut mempunyai fungsi probabilitas sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$
$$= 0 \qquad , x \text{ yang lainnya}$$

dimana $\lambda > 0$.

MGF dari distribusi Poisson adalah

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \tag{2.6}$$

untuk setiap bilangan riil *t*. Berdasarkan MGF pada persamaan (2.6) diatas maka diperoleh mean dan variansi untuk distribusi Poisson sebagai berikut.

$$\mu = M'(0) = \lambda$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= M''(0) - \mu^2 \\ &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Distribusi Poisson memiliki mean dan variansi yang sama yaitu $\mu = \sigma^2 = \lambda > 0$, sehingga apabila *X* berdistribusi Poisson dengan parameter λ maka dapat ditulis dengan $X \sim P(\lambda)$.

2.4 Distribusi Gamma

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), suatu variabel acak kontinu *X* dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β jika variabel tersebut mempunyai fungsi probabilitas sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad , 0 < x < \infty \tag{2.7}$$
$$= 0 \qquad , x \text{ yang lainnya}$$

dimana α, $\beta > 0$.

Definisi fungsi Gamma dari α atau $\Gamma(\alpha)$ pada persamaan (2.7) yaitu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \tag{2.8}$$

untuk $\alpha > 0$ dan nilai dari integral tersebut adalah bilangan positif.
Beberapa nilai dari fungsi Gamma ialah

- Jika $\alpha = 1$, maka $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1$.
- Jika α adalah suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari satu, maka diperoleh $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.
- Jika $\alpha > 1$, maka $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.
- Untuk $c > 0$, $\dfrac{\Gamma(\alpha+c)}{\Gamma(c)} = \dfrac{(c+\alpha-1)(c+\alpha-2)\cdots(c+1)c\Gamma(c)}{\Gamma(c)}$

$$= (c+\alpha-1)(c+\alpha-2)\cdots(c+1)c$$

MGF dari distribusi Gamma adalah

$$M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}, t < \frac{1}{\beta} \tag{2.9}$$

sehingga mean dan variansi dari distribusi Gamma berdasarkan MGF pada persamaan (2.9) adalah

$$\mu = M'(0) = \alpha\beta$$
$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = \alpha\beta^2$$

2.5 Distribusi Binomial Negatif

Distribusi Binomial Negatif merupakan distribusi yang memiliki banyak sekali cara dalam hal pendekatannya. Boswell dan Patil (1970) menunjukkan bahwa terdapat dua belas cara pendekatan distribusi Binomial Negatif, diantaranya yaitu dapat didekati sebagai distribusi campuran Poisson-Gamma, sebagai distribusi Compund Poisson, sebagai barisan percobaan Bernoulli, sebagai model *Polya–Eggenberger urn*, atau sebagai invers dari distribusi Binomial (Hilbe, 2011). Pendekatan klasik dari distribusi Binomial Negatif yang sering digunakan adalah distribusi Binomial Negatif sebagai barisan percobaan Bernoulli, yaitu jumlah percobaan Bernoulli yang dibutuhkan sampai terjadi k buah sukses, dimana setiap pengulangan saling bebas, dan probabilitas sukses pada setiap percobaan konstan yaitu p sedangkan probabilitas gagal yaitu $1 - p$. Misalkan variabel acak X menyatakan jumlah percobaan yang dibutuhkan sampai terjadi k buah sukses, maka X berdistribusi Binomial Negatif dengan fungsi probabilitas sebagai berikut

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \quad , x = k, k+1, k+2, \ldots \tag{2.10}$$

$$= 0 \quad , x \text{ yang lainnya.}$$

Fungsi probabilitas dari variabel acak X dapat dinotasikan ke dalam bentuk lain. Misalkan terdapat sejumlah y kegagalan sebelum sukses ke-k, maka x merupakan jumlah dari y kegagalan dengan k buah sukses atau $x = y + k$. Jadi, akan dibentuk sebuah variabel acak baru, yaitu Y, yang menyatakan jumlah kegagalan sebelum terjadi k buah sukses dengan metode transformasi variabel dimana fungsi transformasinya adalah $Y = X - k$. Variabel acak Y memiliki fungsi probabilitas, $g(y)$, sebagai berikut

$$g(y) = \binom{y+k-1}{k-1} p^k (1-p)^y \quad , y = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

$$= 0 \quad , y \text{ yang lainnya.}$$

2.6 Distribusi Campuran

Misalkan X adalah variabel acak yang bergantung pada parameter λ dengan fungsi probabilitas bersyarat $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$. λ merupakan nilai dari suatu variabel acak Λ dengan fungsi probabilitas $u_\Lambda(\lambda)$, maka distribusi campuran (*mixture distribution*) didefinisikan dengan fungsi probabilitas marginal sebagai berikut:

$$f_X(x) = \int_{\lambda \in \Lambda} f_{X|\Lambda}(x|\lambda) \cdot u_\Lambda(\lambda) d\lambda \tag{2.12}$$

dimana distribusi dari Λ disebut sebagai distribusi pencampur atau *mixing distribution* (Johnson, Kotz, dan Kemp, 1992).

2.7 Binomial Negatif sebagai Campuran Poisson-Gamma

Salah satu cara terbentuknya distribusi Binomial Negatif yaitu didasari dengan terjadinya overdispersi pada saat menggunakan distribusi Poisson. Misalkan Y adalah variabel acak dari suatu populasi yang berdistribusi Poisson dimana mean $E(Y) = Var(Y) = \lambda$. Kondisi data seperti ini disebut dengan kondisi ekuidispersi. Pada kenyataannya, jarang sekali ditemukan data *count* dalam kondisi ekuidispersi. Data *count* biasanya memiliki variansi yang lebih besar dari mean, atau yang biasa disebut dengan kondisi overdispersi. Pada distribusi Poisson terdapat asumsi mean (λ) konstan untuk setiap nilai dari Y, namun dalam kondisi overdispersi, λ tidak lagi konstan atau bervariasi antar observasi pada populasi. Hal ini menunjukkan bahwa populasi tersebut bergantung pada λ, sehingga dapat dikatakan bahwa λ merupakan nilai dari suatu variabel acak Λ yang memiliki distribusi tertentu.

Distribusi Gamma dengan parameter α dan β dipilih sebagai distribusi dari Λ karena distribusi Gamma merupakan *prior natural conjugate* dari distribusi Poisson (Shafira, 2011). Karena Λ berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β, maka mean atau nilai ekspektasi dari Λ atau $E(\Lambda)$ adalah $\alpha\beta$. Pada umumnya mean dari suatu distribusi dinotasikan dengan μ, sehingga dalam hal ini mean dari Λ adalah $\mu = \alpha\beta$ atau dapat ditulis kembali bahwa parameter $\beta = \mu/\alpha$. Misal dinotasikan $1/\alpha = a$, maka dapat dikatakan bahwa Λ berdistribusi Gamma dengan parameter $(1/a)$ dan $a\mu$.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, misalkan Y adalah variabel acak berdistribusi Poisson yang bergantung pada parameter λ dengan fungsi probabilitas bersyarat $f(y|\lambda)$. Saat terjadi overdispersi, λ merupakan nilai dari suatu variabel acak Λ yang berdistribusi Gamma dengan parameter $1/a$ dan $a\mu$

dengan fungsi probabilitas h (λ). Berdasarkan persamaan (2.12) fungsi probabilitas marginal dari Y adalah

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \int_{\lambda} f(y|\lambda)h(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} f(y|\lambda)h(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \Pr(Y = y|\lambda)h(\lambda)d\lambda \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{a})(\mu a)^{\frac{1}{a}}} \lambda^{\frac{1}{a}-1} \exp\left(\frac{-\lambda}{a\mu}\right) \\
&= \frac{\lambda^{y+\frac{1}{a}-1}}{\Gamma(\frac{1}{a})(\mu a)^{\frac{1}{a}}\, y!} \exp\left(-\lambda + \frac{-\lambda}{a\mu}\right)
\end{aligned}
$$

dan berdasarkan Shafira (2011) akan dihasilkan fungsi probabilitas marginal sebagai berikut:

$$
\Pr(Y = y) = \frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\left(\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{a}}\right)^{y}\left(\frac{\frac{1}{a}}{\mu+\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{a}} \qquad (2.13)
$$

Persamaan diatas memiliki bentuk yang similar dengan bentuk fungsi probabilitas dari distribusi Binomial Negatif pada persamaan (2.11) dimana $k = 1/a$ dan $p = \frac{1}{a\mu + 1}$, dengan nilai $k = 1/a$ yang merupakan suatu bilangan positif, sehingga dapat disimpulkan bahwa distribusi marginal dari Y adalah distribusi Binomial Negatif. Distribusi Binomial Negatif dengan fungsi probabilitas pada persamaan (2.13) disebut sebagai distribusi campuran Poisson-Gamma. Penurunan distribusi Binomial Negatif diatas tidak berhubungan dengan penurunan klasik sebagai barisan dari percobaan Bernoulli yang dijelaskan pada subbab 2.5 (Jong & Heller, 2008).

Distribusi Binomial Negatif dengan fungsi probabilitas seperti pada persamaan (2.10) mengasumsikan bahwa k adalah suatu bilangan bulat positif, dimana definisi variabel acak dari distribusi Binomial Negatif adalah jumlah kegagalan yang terjadi sebelum k buah sukses. Pada distribusi Binomial Negatif sebagai distribusi campuran Poisson-Gamma, nilai dari parameter k = 1/a bukan merupakan suatu bilangan bulat positif, melainkan suatu bilangan riil positif, sehingga definisi variabel acak dari distribusi Binomial Negatif sebelumnya tidak dapat digunakan (Hilbe, 2011). Definisi variabel acak yang digunakan pada distribusi Binomial Negatif sebagai distribusi campuran Poisson-Gamma adalah jumlah kejadian dengan dispersi pada data sebesar $1/a$ (Johnson, Kotz, dan Kemp, 1992). Definisi tersebut memiliki kesamaan dengan definisi variabel acak pada distribusi Poisson, namun pada distribusi Binomial Negatif terdapat parameter tambahan yang menjelaskan mengenai dispersi dari data.

2.8 Metode Maksimum *Likelihood*

Misalkan terdapat sampel acak $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dari suatu populasi yang memiliki fungsi probabilitas $f(y;\theta) : \theta \in \Omega$, dimana θ merupakan suatu parameter yang tidak diketahui dan Ω adalah ruang parameter.

Karena $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah sampel acak, maka p.d.f. bersama dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n;\theta) = f(y_1;\theta)\, f(y_2;\theta) \ldots f(y_n;\theta) \qquad (2.14)$$

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai p.d.f. bersama dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ yang dapat dianggap sebagai fungsi dari θ. Misalkan fungsi *likelihood* dinotasikan sebagai $L(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_n) = L(\theta)$, maka

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(y_1, y_2, \ldots, y_n;\theta) \\ &= f(y_1;\theta)\, f(y_2;\theta) \ldots f(y_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta) \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Dalam metode penaksiran maksimum *likelihood*, taksiran dari θ diperoleh dengan menemukan nilai θ itu sendiri yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misalkan dapat ditemukan suatu fungsi nontrivial dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$, misalkan disebut $u(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, sedemikian sehingga ketika θ diganti dengan $u(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ fungsi *likelihood* $L(\theta)$ akan bernilai maksimum, maka statistik $u(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ merupakan taksiran maksimum *likelihood* (*maximum likelihood* *estimator* / MLE) dari θ dan dinotasikan dengan $u(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \hat{\theta}$ (Hogg dan Craig, 1995).

Mencari nilai θ yang memaksimumkan fungsi $L(\theta)$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai θ yang memaksimumkan fungsi ln $L(\theta)$, sebut $l(\theta)$, sehingga baik $L(\theta)$ maupun $l(\theta)$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\theta}$. Jadi, nilai θ yang memaksimumkan $l(\theta)$ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ atau $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$.

2.9 Metode Numerik Newton-Raphson

Penaksiran parameter model regresi Binomial Negatif dilakukan dengan metode maksimum *likelihood*. Proses untuk menemukan solusi dari turunan fungsi log-*likelihood* tidak dapat dilakukan secara langsung karena fungsi log-*likelihood* tidak linier dalam parameter yang ingin ditaksir sehingga membutuhkan metode numerik Newton-Raphson untuk menyelesaikannya.

Metode Newton-Raphson adalah metode yang digunakan untuk mencari akar-akar persamaan dari suatu fungsi non-linier ($f(x) = 0$) dengan menggunakan satu titik awal dan kemudian mendekatinya dengan memperhatikan *slope* atau kemiringan dari fungsi di titik tersebut. Selain untuk mencari akar-akar persamaan dari suatu fungsi, metode ini juga berfungsi untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi, dimana suatu fungsi $f(x)$ akan maksimum atau minimum jika $f'(x) = 0$.

Langkah-langkah dari metode Newton-Raphson yaitu dimulai dengan menentukan aproksimasi awal p_0 dan membangun barisan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, dimana

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ untuk } n \geq 1 \qquad (2.16)$$

Metode ini merupakan salah satu metode pencarian akar yang sering digunakan dan cukup baik karena dengan metode ini kekonvergenan lebih cepat tercapai. Berdasarkan Burden dan Faires (1997) terdapat teorema berikut ini:

Teorema

Misalkan $f \in C^2[a,b]$, dimana $C^2[a,b]$ merupakan himpunan semua fungsi yang memiliki turunan kedua yang kontinu pada interval tutup [*a*, *b*]. Jika $p \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(p)=0$ dan $f'(p) \neq 0$, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga metode Newton-Raphson membangun barisan $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ yang didefinisikan dengan iterasi

$$p_{k+1} = g(p_k) = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}, \quad k = 0,1,...$$

akan konvergen ke *p* untuk setiap aproksimasi awal $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

2.10 Uji Rasio *Likelihood*

Berdasarkan Hogg dan Craig (1995), secara umum uji rasio *likelihood* memiliki proses sebagai berikut.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan *n* variabel acak yang saling bebas dan masing-masing mempunyai fungsi probabilitas $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Himpunan yang terdiri dari semua titik parameter $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ dinotasikan dengan Ω yang disebut ruang parameter. Misalkan ω adalah subset dari ruang parameter Ω, maka akan dilakukan pengujian hipotesis (sederhana atau majemuk) $H_0 : (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega$ terhadap semua hipotesis alternatif.

Didefinisikan fungsi *likelihood*

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m), \qquad (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega, \text{ dan}$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m), \qquad (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \Omega.$$

Misalkan $L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$ adalah nilai maksimum yang diasumsikan ada untuk kedua fungsi *likelihood* tersebut. Rasio dari $L(\hat{\omega})$ terhadap $L(\hat{\Omega})$ disebut rasio *likelihood* dan dinotasikan dengan

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \tag{2.17}$$

Misalkan δ_0 adalah suatu fungsi yang nilainya positif. Prinsip uji rasio *likelihood* menyatakan bahwa hipotesis $H_0 : (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega$ ditolak jika dan hanya jika

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta \le \delta_0 .$$

Fungsi δ mendefinisikan suatu variabel acak δ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dan tingkat signifikansi dari uji ini adalah $\alpha = \Pr[\delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \delta_0; H_0]$.

2.11 Uji Wald

Misalkan β menyatakan sembarang parameter. Pandang pengujian signifikansi dari hipotesis $H_0 : \beta = \beta_0$ (atau $H_0 : \beta = 0$, dimana $\beta_0 = 0$). Statistik uji sederhana yang digunakan untuk pengujian tersebut menggunakan sifat dari taksiran maksimum *likelihood*, dimana untuk sampel besar taksiran maksimum *likelihood*, yang dalam hal ini adalah $\hat{\beta}$, akan mendekati distribusi Normal (Agresti, 2007). Misalkan *se*($\hat{\beta}$) menyatakan taksiran standard *error* dari $\hat{\beta}$, maka dibawah asumsi H_0 benar, statistik uji

$$z = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)}{se(\hat{\beta})} \tag{2.18}$$

akan mendekati distribusi Normal standard. Secara ekuivalen, z^2 juga akan mendekati distribusi *chi-square* dengan derajat bebas 1. Statistik uji yang seperti ini disebut dengan statistik Wald sedangkan pengujian yang menggunakan statistik Wald disebut dengan uji Wald.

BAB 3
PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI BINOMIAL NEGATIF

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai model regresi Binomial Negatif beserta penaksiran parameter model regresinya dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*. Selain itu terdapat juga penjelasan mengenai uji kesesuaian model.

3.1 Overdispersi dan Regresi Binomial Negatif

Variabel respon yang berupa data *count* biasanya dianalisis dengan menggunakan regresi Poisson yang memiliki asumsi mean dan variansi sama. Pada kenyataannya, kondisi seperti ini sangat jarang terjadi karena biasanya data *count* memiliki variansi yang lebih besar dari mean atau disebut dengan kondisi overdispersi (Cameron dan Trivedi, 1998). Overdispersi dalam regresi Poisson dapat mengakibatkan standard *error* dari taksiran parameter regresi yang dihasilkan memiliki kecenderungan untuk menjadi lebih rendah dari seharusnya sehingga menghasilkan kesimpulan yang tidak sesuai dengan data (Ismail dan Jemain, 2007). Menurut Osgood (2000), Paternoster dan Brame (1997), model Binomial Negatif merupakan alternatif yang sering digunakan untuk kasus overdispersi pada regresi (Berk dan MacDonald, 2008).

Model regresi Binomial Negatif memiliki kegunaan yang sama dengan model regresi Poisson yaitu untuk menganalisis hubungan antara suatu variabel respon data *count* dengan satu atau lebih variabel acak penjelas, tetapi model regresi Binomial Negatif lebih fleksibel dibandingkan dengan model Poisson karena mean dan variansi dari model Binomial Negatif tidak harus sama. Model ini juga memiliki parameter dispersi yang berguna untuk menggambarkan variasi dari data dan biasa dinotasikan dengan a.

Model Binomial Negatif yang akan digunakan adalah model Binomial Negatif yang merupakan model campuran antara Poisson dan Gamma, dimana distribusi Gamma digunakan untuk menyesuaikan kehadiran overdispersi dalam model Poisson (Hilbe, 2011). Berdasarkan hal tersebut dan penjelasan pada subbab 2.7, fungsi probabilitas dari suatu variabel acak Y yang berdistribusi Binomial Negatif adalah sebagai berikut.

$$f(y) = \frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)^{y}\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)^{1/a}, \; y = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

$$= 0, \; y \text{ yang lainnya}$$

untuk a, $\mu > 0$. Parameter distribusinya yaitu μ dan a, dimana μ merupakan parameter lokasi dan a merupakan parameter dispersi.

3.2 Binomial Negatif sebagai Keluarga Eksponensial

Salah satu keluarga dari beberapa distribusi probabilitas yang sering dijumpai adalah keluarga eksponensial. Keuntungan dari suatu distribusi probabilitas yang termasuk anggota keluarga eksponensial adalah kemudahan dalam mengidentifikasi beberapa ukuran distribusi, salah satunya adalah mean sebagai parameter lokasi dan variansi sebagai parameter penggangu (*nuisance*). Berikut ini adalah definisi dari suatu distribusi yang merupakan anggota keluarga eksponensial.

Misalkan variabel acak Y memiliki distribusi probabilitas yang bergantung pada parameter θ yang dianggap sebagai parameter lokasi dan terdapat parameter lain yaitu ϕ yang disebut parameter pengganggu. Berdasarkan Hilbe (2011), distribusi dari Y merupakan anggota dari keluarga eksponensial jika fungsi probabilitasnya memiliki bentuk sebagai berikut.

$$f(y;\theta,\phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{\alpha(\phi)} + c(y;\phi)\right\} \tag{3.2}$$

dimana θ merupakan parameter kanonik, $\alpha(\phi)$ merupakan parameter skala, dan $b(\theta)$ adalah fungsi unit *cumulant* dimana penjelasannya terdapat pada Lampiran 7.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa distribusi Binomial Negatif merupakan salah satu anggota dari keluarga eksponensial. Misalkan Y adalah suatu variabel acak yang berdistribusi Binomial Negatif dengan parameter a dan μ

dengan fungsi probabilitas pada persamaan (3.1). Dengan menganggap μ sebagai parameter lokasi dan a sebagai parameter penggangu (*nuisance*), maka akan diperoleh:

$$f(y;\mu,a) = \frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)^{y}\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)^{1/a}$$

$$= \exp\left(\ln\left(\frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)^{y}\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)^{1/a}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\ln\left(\frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\right)+y\ln\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)\right)$$

$$= \exp\left(y\ln\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)+\ln\left(\frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\right)+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)\right) \quad (3.3)$$

Dengan menyesuaikan persamaan (3.3) dengan (3.2) diperoleh

- $\theta = \ln\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)$
- $\alpha(\phi) = 1$
- $c(y;\theta) = \ln\left(\frac{\Gamma(y+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})y!}\right)$
- $b(\theta) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)$

sehingga terbukti bahwa distribusi Binomial Negatif merupakan anggota dari keluarga eksponensial.

Telah disebutkan sebelumnya bahwa salah satu keuntungan dari anggota keluarga eksponensial adalah mean dan variansi dari distribusi tersebut dapat diidentifikasi dengan mudah, sehingga berdasarkan Hilbe (2011) yaitu

- $b'(\theta)$ akan menghasilkan mean
- $b''(\theta)\alpha(\phi)$ akan menghasilkan variansi

Jadi, akan dicari mean dan variansi dari variabel acak yang berdistribusi Binomial Negatif dengan menggunakan salah satu sifat dari keluarga eksponensial tersebut.

Sebelum memperoleh mean dan variansi dari distribusi Binomial Negatif, dapat didefinisikan bahwa

$$g(\mu)=\theta=\ln\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)=-\ln\left(\frac{1}{a\mu}+1\right)$$

sehingga

$$-\ln\left(\frac{1}{a\mu}+1\right)=\theta \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a\mu}+1\right)=e^{-\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{a\mu}=e^{-\theta}-1 \Leftrightarrow \mu=\frac{1}{a(e^{-\theta}-1)}$$

dan diperoleh

$$g^{-1}(\theta)=\mu=\frac{1}{a(e^{-\theta}-1)}=[a(e^{-\theta}-1)]^{-1}$$

Fungsi *cumulant* yaitu $b(\theta)$ = $-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1+a\mu}\right)=\frac{1}{a}\ln(1+a\mu)$, sehingga akan diperoleh mean dan variansi dari Binomial Negatif sebagai berikut:

- Mean

$$b'(\theta)=\frac{\partial b}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{1+a\mu}\cdot(-1)(ae^{-\theta}-a)^{-2}(-ae^{-\theta})$$

$$=\frac{1}{1+a\mu}\cdot(ae^{-\theta}-a)^{-2}(ae^{-\theta})$$

karena $\mu=[ae^{-\theta}-a]^{-1}$ maka $ae^{-\theta}=\mu^{-1}+a$ sehingga diperoleh

$$b'(\theta)=\frac{1}{1+a\mu}\cdot\mu^{2}(\mu^{-1}+a)$$

$$=\frac{1}{1+a\mu}\cdot\mu(1+a\mu)$$

$$=\mu$$

- Variansi

Karena $\alpha(\phi)$ = 1, maka variansi dari Y hanya turunan kedua dari *cumulant* terhadap θ yaitu sebagai berikut:

$$b''(\theta)=\frac{\partial^2 b}{\partial\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\partial b}{\partial\mu}\frac{\partial^2\mu}{\partial\theta^2}$$

Sebelumnya akan dicari $\frac{\partial^2 b}{\partial\mu^2}$ dan $\frac{\partial^2\mu}{\partial\theta^2}$.

➢ $\frac{\partial^2 b}{\partial\mu^2}=\frac{\partial(1+a\mu)^{-1}}{\partial\mu}$

$$= -a(1+a\mu)^{-2}$$
$$= \frac{-a}{(1+a\mu)^2}$$

- $(ae^{-\theta} - a)^{-2}(ae^{-\theta}) = \mu^2(\mu^{-1} + a)$

$$= \mu + a\mu^2$$
$$= (ae^{-\theta} - a)^{-1} + a(ae^{-\theta} - a)^{-2}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} = \frac{\partial[(ae^{-\theta} - a)^{-1} + a(ae^{-\theta} - a)^{-2}]}{\partial \theta}$$
$$= (ae^{-\theta} - a)^{-2}(ae^{-\theta}) + (-2a)(ae^{-\theta} - a)^{-3}(-ae^{-\theta})$$
$$= (ae^{-\theta} - a)^{-2}(ae^{-\theta}) + (2a)(ae^{-\theta} - a)^{-3}(ae^{-\theta})$$
$$= (ae^{-\theta})[(ae^{-\theta} - a)^{-2} + (2a)(ae^{-\theta} - a)^{-3}]$$
$$= (\mu^{-1} + a)(\mu^2 + 2a\mu^3)$$
$$= (\mu^{-1} + a)\mu(\mu + 2a\mu^2)$$
$$= (1 + a\mu)(\mu + 2a\mu^2)$$

sehingga turunan kedua dari $b(\theta)$ terhadap θ adalah

$$b''(\theta) = \frac{\partial^2 b}{\partial \mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2}$$
$$= \frac{-a}{(1+a\mu)^2}(\mu(1+a\mu))^2 + \frac{1}{(1+a\mu)}(1+a\mu)(\mu + 2a\mu^2)$$
$$= -a\mu^2 + (\mu + 2a\mu^2)$$
$$= \mu + a\mu^2$$

Jadi, mean dan variansi dari Binomial Negatif secara berturut-turut adalah μ dan $\mu + a\mu^2$.

3.3 Model Regresi Binomial Negatif

Setelah diperoleh mean dan variansi dari variabel acak yang berdistribusi Binomial Negatif, maka selanjutnya dapat dijelaskan mengenai model regresi dengan variabel respon yang berupa data *count* dan berdistribusi Binomial Negatif.

Misalkan ingin diketahui hubungan antara suatu variabel respon Y dengan k buah variabel penjelas $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Variabel respon Y berupa data *count* dan menyatakan banyaknya kejadian yang diamati pada suatu populasi tertentu. Variabel Y diberikan $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$ diasumsikan berdistribusi Binomial Negatif. Diberikan sampel acak berukuran n yaitu $\{(y_i, (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}));$ $i = 1, 2, \ldots, n\}$, dimana y_i adalah pengamatan ke-i dari variabel respon Y, dan $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}$ berturut-turut adalah pengamatan ke-i dari variabel penjelas $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Model regresi pada umumnya menggunakan hubungan antara variabel respon Y dengan variabel-variabel penjelas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.4}$$

dimana $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ menyatakan parameter-parameter yang tidak diketahui dan ε_i menyatakan *error* untuk pengamatan ke-i dan asumsi bahwa nilai ekspektasi dari ε_i adalah nol atau $E(\varepsilon_i) = 0$. Bila persamaan (3.4) dinyatakan dalam bentuk vektor menjadi

$$y_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \tag{3.5}$$

dimana $\mathbf{x}_i' = [1, x_{1i}, \ldots, x_{ki}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$.

Misal diasumsikan nilai ekspektasi untuk Y_i adalah $E\,(Y_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) = \mu_i$ dan sebelumnya telah diasumsikan bahwa nilai ekspektasi untuk ε_i adalah nol, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu_i &= E(Y_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots., X_{ki} = x_{ki}) \\
&= E(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) \\
&= E(\beta_0 \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) + \\
&\quad E(\beta_1 X_{1i} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) + \\
&\quad E(\beta_2 X_{2i} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) + \ldots + \\
&\quad E(\beta_k X_{ki} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki}) + \\
&\quad E(\varepsilon_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{ki} = x_{ki})
\end{aligned}$$

$$= \beta_0 + \beta_1 E(X_{1i} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, ..., X_{ki} = x_{ki}) + \beta_2 E(X_{2i} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, ..., X_{ki} = x_{ki}) + ... + \beta_k E(X_{ki} \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, ..., X_{ki} = x_{ki}) + 0$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_k x_{ki}$$

atau bila dinyatakan dengan vektor menjadi

$$\mu_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} \tag{3.6}$$

Dalam model Binomial Negatif, Y_i adalah variabel yang berupa data *count* sehingga Y_i merupakan bilangan bulat non-negatif, maka nilai ekspektasi dari Y_i juga tidak mungkin negatif. Berdasarkan persamaan (3.6), hal tersebut menjadi sesuatu yang bertentangan karena ruang nilai untuk $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ adalah bilangan riil pada interval (-∞, ∞). Hal ini membuat model regresi pada persamaan (3.5) tidak dapat digunakan untuk menganalisis data *count*.

Untuk mengatasi keadaan yang bertentangan tersebut, maka digunakan sebuah fungsi penghubung yang menghubungkan antara *fitted value* (μ_i) dengan prediktor linier $(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$. Sebagai anggota dari keluarga eksponensial, Binomial Negatif sebenarnya memiliki fungsi penghubung kanonik yang dinyatakan oleh θ pada persamaan (3.3) yaitu $\ln\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ dengan invers $\mu = \frac{1}{a[\exp(-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - 1]}$. Dari bentuk inversnya terlihat bahwa fungsi penghubung tersebut menghasilkan bentuk yang cukup rumit sehingga interpretasi dari parameter-parameter model regresi akan menjadi lebih sulit. Hilbe (2011) menyatakan bahwa model Binomial Negatif pada umumnya menggunakan fungsi penghubung logaritma atau *log link* yaitu

$$\ln(\mu_i) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} \tag{3.7}$$

Model Binomial Negatif dapat menggunakan *log link* karena ln (μ_i) dan $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ akan terdefinisi di dalam interval (-∞, ∞) dan interpretasi parameter regresi akan menjadi lebih mudah (dijelaskan lebih lanjut pada subbab 3.6).

Setelah diperoleh fungsi penghubung yang tepat, maka selanjutnya dapat dinyatakan model regresi Binomial Negatif untuk memodelkan data *count* yaitu

$$\ln\{E[Y_i \mid \mathbf{x}_i]\} = \ln(\mu_i) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.8}$$

sehingga dapat diperoleh

$\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$

Pada model regresi linier biasanya distribusi variabel respon akan sama dengan distribusi dari *error* tetapi pada model regresi non-normal seperti Binomial Negatif akan sulit untuk menyatakan bentuk *error*nya secara eksplisit. Sehingga asumsi spesifikasi untuk *error* tidak perlu dinyatakan lagi, tetapi cukup dengan memberi spesifikasi distribusi pada variabel respon (Pawitan, 2001).

3.4 Penaksiran Parameter Model Regresi dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Parameter-parameter dalam model regresi Binomial Negatif yang tidak diketahui nilainya, yaitu β_0, β_1, …, dan β_k perlu ditaksir. Penaksiran parameter dilakukan dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*.

Misalkan terdapat sampel acak berukuran n yaitu $(y_i,(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ki}))$ untuk i = 1, 2, …, n, maka dengan mensubstitusikan $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ ke dalam fungsi probabilitas bersyarat untuk variabel acak Y_i diberikan nilai $x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ki}$ pada persamaan (3.1) akan diperoleh

$$f(y_i;\boldsymbol{\beta},a) = \frac{\Gamma(y_i+\frac{1}{a})}{y_i!\Gamma(\frac{1}{a})}\left(\frac{a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a} \quad (3.9)$$

Fungsi *likelihood* diperoleh dari p.d.f. bersama Y_i diberikan nilai x_{1i}, x_{2i}, …, x_{ki} yang dinotasikan dengan $L(\boldsymbol{\beta}, a)$ yaitu

$$L(\boldsymbol{\beta}, a) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\boldsymbol{\beta},a)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(y_i+\frac{1}{a})}{y_i!\Gamma(\frac{1}{a})}\left(\frac{a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a} \quad (3.10)$$

Diketahui sebelumnya pada subbab 2.4 yaitu $\frac{\Gamma(y+c)}{\Gamma(c)} = c(c+1)(c+2)...(c+y-1)$,

sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(y_i+\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{1}{a})} &= \left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a}+y_i-1\right)\\ &= \left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+y_i-1\right)\\ &= \left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}\right)(1+a)\cdot\left(\frac{1}{a}\right)(1+2a)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a}\right)(1+(y_i-1)a)\\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^{y_i}\prod_{r=0}^{y_i-1}(1+ar) \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) pada persamaan (3.10), maka fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\beta}, a)$ menjadi

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta},a) &\\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(y_i+\frac{1}{a})}{y_i!\Gamma(\frac{1}{a})}\left(\frac{a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^{y_i}\prod_{r=0}^{y_i-1}(1+ar)\left(\frac{1}{y_i!}\right)\left(\frac{a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a}\right\}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left\{\prod_{r=0}^{y_i-1}(1+ar)\left(\frac{1}{y_i!}\right)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a}\right\} \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Fungsi log-*likelihood* yang dinotasikan dengan $l(\boldsymbol{\beta}^*)$, dimana $\boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ a\end{bmatrix}$, digunakan untuk membantu mempermudah perhitungan untuk mendapatkan taksiran maksimum *likelihood* untuk parameter $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, dan a karena memaksimumkan fungsi log-*likelihood* akan memberikan hasil yang sama dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*-nya.

Fungsi log-*likelihood* sebagai berikut

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}^*) &= \ln L(\boldsymbol{\beta}^*)\\ &= \ln\prod_{i=1}^{n}\left\{\prod_{r=0}^{y_i-1}(1+ar)\left(\frac{1}{y_i!}\right)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)^{1/a}\right\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r=0}^{y_i - 1} \ln(1 + ar) \right) - \ln(y_i!) + y_i \ln(\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) \right.$$

$$\left. - \left(y_i + \frac{1}{a} \right) \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i - 1} \ln(1 + ar) - \ln(y_i!) + y_i(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \right.$$

$$\left. - \left(y_i + \frac{1}{a} \right) \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) \right\} \qquad (3.13)$$

Untuk mencari taksiran dari parameter-parameter, yaitu $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$, dan $\hat{a}$, fungsi log-*likelihood* pada persamaan (3.13) diturunkan secara parsial terhadap masing-masing parameter yang bersesuaian kemudian disamadengankan nol, sehingga didapatkan persamaan-persamaan berikut

- Turunan parsial terhadap β_0

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \frac{(y_i + \frac{1}{a})\, a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i + y_i a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - (y_i + \frac{1}{a}) a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i + y_i a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - y_i a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

- Turunan parsial terhadap β_1

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i x_{1i} - \frac{(y_i + \frac{1}{a}) a x_{1i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{1i} + y_i x_{1i} a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - (y_i + \frac{1}{a}) a x_{1i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{1i} + y_i x_{1i} a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - y_i a x_{1i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - x_{1i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{1i} - x_{1i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{1i}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

- Turunan parsial terhadap β_2

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i x_{2i} - \frac{(y_i + \frac{1}{a}) a x_{2i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{2i} + y_i x_{2i} a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - (y_i + \frac{1}{a}) a x_{2i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{2i} + y_i x_{2i} a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - y_i a x_{2i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - x_{2i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i x_{2i} - x_{2i} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{2i}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

Karena turunan parsial terhadap β_0, β_1, β_2 memiliki hasil yang similar, maka dengan cara yang serupa untuk β_m, $m = 3, 4, \ldots, k$ diperoleh:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_m} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{mi}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \tag{3.14}$$

Di dalam fungsi *likelihood* terdapat parameter dispersi a yang juga akan ditaksir nilainya, sehingga terdapat turunan parsial dari fungsi log-*likelihood* terhadap parameter a yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i - 1} \left(\frac{r}{1 + ar} \right) + \frac{1}{a^2} \ln(1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) - \left(y_i + \frac{1}{a} \right) \frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{r}{1+ar} \right) + \frac{1}{a^2} \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) - \frac{(y_i + \frac{1}{a})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \quad (3.15)$$

Turunan-turunan parsial dari persamaan log-*likelihood* di atas jika dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi:

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{1i}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{pi}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{r}{1+ar} \right) + \frac{1}{a^2} \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) - \frac{(y_i + \frac{1}{a})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \end{bmatrix}$$

Nilai $\boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ a \end{bmatrix}$ yang diperoleh dari penyelesaian persamaan $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{0}$, akan memaksimumkan fungsi $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ jika matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ yaitu matriks Hessian adalah matriks definit negatif (Hertriyanti, 2006). Matriks Hessian untuk kasus model regresi Binomial Negatif adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} \end{bmatrix}$$

Turunan-turunan parsial kedua dari fungsi $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ yang merupakan elemen dari matriks di atas terdapat dalam Lampiran 1. Berdasarkan Anton (2000), suatu matriks simetris **A** berukuran $n \times n$ (yang memiliki sifat $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$) adalah matriks definit negatif jika $\mathbf{s}'\mathbf{A}\mathbf{s}$ bernilai negatif untuk setiap vektor $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ yang berdimensi n.

Pada Lampiran 2, telah ditunjukkan bahwa matriks Hessian tersebut merupakan matriks definit negatif sehingga nilai $\boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ a \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{0}$ akan memaksimumkan $l(\boldsymbol{\beta}^*)$. Nilai $\boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ a \end{bmatrix}$ ini disebut taksiran maksimum *likelihood* dan dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{a} \end{bmatrix}$.

Karena persamaan-persamaan dalam matrik $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}^*)$ tidak linier dalam masing-masing parameternya, maka untuk mencari taksiran dari $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, dan a digunakan metode numerik, yaitu metode Newton-Raphson.

Metode Newton-Raphson digunakan untuk menemukan solusi dari fungsi log-*likelihood* sehingga diperoleh nilai yang cukup konvergen untuk dijadikan sebagai taksiran untuk masing-masing parameter. Prosedurnya adalah sebagai berikut

1. Pilih nilai aproksimasi awal untuk $\boldsymbol{\beta}^*$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{a} \end{bmatrix}^{(0)}$.
2. Tentukan taksiran $\boldsymbol{\beta}^*$ pada iterasi ke-r (r = 1, 2,…) yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)}$ dengan menggunakan persamaan iterasi sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)} - \left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)})\right]^{-1} \mathbf{U}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}) \tag{3.16}$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$	adalah taksiran dari $\boldsymbol{\beta}^*$ pada iterasi ke-(r-1).
$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)})$	adalah matriks yang berukuran (k+2) × (k+2) dan elemen-elemennya berisi turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ pada saat $\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$. Matriks ini biasa disebut dengan matriks Hessian.

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r\text{-}1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r\text{-}1)}}$$

$\mathbf{U}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)})$ adalah vektor yang elemen-elemennya berisi turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ yang dihitung pada $\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$. Vektor ini berukuran $(k+2) \times 1$.

$$\mathbf{U}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r\text{-}1)}}$$

3. Proses iterasi dapat dihentikan ketika nilai taksiran yang diperoleh sudah konvergen ke suatu nilai, atau $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{a} \end{bmatrix}^{(r)} \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{a} \end{bmatrix}^{(r-1)}$.
4. Maka ambil $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)}$ sebagai taksiran untuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$.

Pada umumnya untuk menyelesaikan persamaan iterasi (3.16) digunakan *software* komputer, misalnya *software* Matlab. Apabila taksiran maksimum *likelihood* dari tiap parameter telah diperoleh, maka akan didapat taksiran untuk model regresi Binomial Negatif yaitu

$$\ln \widehat{E[Y_i \mid \mathbf{x}_i]} = \ln(\hat{\mu}_i) = \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ ; untuk } i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.17)$$

3.5 R^2 dan *pseudo*-R^2

Statistik R^2 bukan merupakan suatu statistik yang digunakan dalam pengujian, untuk pengujian hipotesis lebih lanjut akan dilakukan dengan uji rasio *likelihood* dan uji Wald yang akan dijelaskan dalam subbab 3.6.1 dan 3.6.2.

Statistik R^2 biasanya dikenal sebagai koefisien determinasi di dalam regresi linier biasa atau *ordinary least squares regression*. Koefisien R^2 ini biasanya diinterpretasikan sebagai besar persentase dari variasi di dalam data yang dijelaskan oleh model. Nilai dari statistik ini berkisar dari 0 sampai 1, dimana nilai yang semakin mendekati 1 merepresentasikan model yang terbentuk semakin baik. Statistik ini kurang tepat digunakan untuk model regresi non-linier seperti Binomial Negatif karena taksiran parameter model regresi non-linier biasanya tidak menggunakan metode OLS, tetapi menggunakan iterasi dalam prosesnya. Statistik R^2 yang biasanya digunakan untuk model regresi data *count* adalah statistik *pseudo*-R^2. Berdasarkan Hilbe (2011), statistik *pseudo*-R^2, yang dinotasikan dengan R_p^2, memiliki formula sebagai berikut:

$$R_p^2 = 1 - L_F/L_I \qquad (3.18)$$

dimana L_F adalah nilai fungsi log-*likelihood* dari model yang lengkap sedangkan L_I adalah nilai fungsi log-*likelihood* dari model yang hanya mengandung *intercept*. Statistik untuk model Binomial Negatif berdasarkan persamaan (3.18) adalah

$$R_p^2 = 1 - L_F/L_I$$

$$= 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \ln(1+ar) - \ln(y_i!) + y_i(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - \left(y_i + \frac{1}{a}\right) \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) \right\}}{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \ln(1+ar) - \ln(y_i!) + y_i\beta_0 - \left(y_i + \frac{1}{a}\right) \ln(1 + a\exp(\beta_0)) \right\}} \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i\beta_0-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\beta_0))\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i\beta_0-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\beta_0))\right\}}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i\beta_0-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\beta_0))\right\}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\beta_0-y_i(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln\left(\frac{1+a\exp(\beta_0)}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i\beta_0-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\beta_0))\right\}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{-y_i(\beta_1x_{1i}+...+\beta_kx_{ki})-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\log\left(\frac{1+a\exp(\beta_0)}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar)-\ln(y_i!)+y_i\beta_0-\left(y_i+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\beta_0))\right\}} \quad (3.19)$$

Interpretasi koefisien determinasi R^2 pada regresi linier tidak dapat diterapkan kepada *pseudo*-R^2. Interpretasi yang dapat dibuat adalah nilai yang sangat kecil mengindikasikan *lack of fit* atau model yang diperoleh kurang baik sedangkan nilai yang cukup besar mengindikasikan model yang baik.

3.6 Uji Kesesuaian Model Regresi Binomial Negatif

Model regresi Binomial Negatif yang telah diperoleh sebaiknya tidak langsung digunakan begitu saja. Model tersebut dapat diuji melalui tahapan pengujian kebaikan model sampai diperoleh model yang cukup baik untuk memaparkan data. Uji kebaikan model yang biasa digunakan untuk menguji model regresi Binomial Negatif, yaitu dengan menggunakan uji rasio *likelihood* (Hilbe, 2011). Selain uji model secara keseluruhan, terdapat uji Wald yang berguna untuk menguji signifikansi dari masing-masing koefisien regresi.

3.6.1 Uji Rasio *Likelihood*

Uji rasio *likelihood* adalah uji yang paling sering digunakan sebagai uji perbandingan model. Uji ini biasanya digunakan untuk model yang bersarang, tetapi uji ini juga dapat digunakan untuk uji model yang berbeda, sebagai contoh, ingin dilakukan pengujian apakah suatu data lebih baik dimodelkan dengan menggunakan model Binomial Negatif atau Poisson, dimana model Binomial Negatif merupakan perluasan dari model Poisson. Berdasarkan Hilbe (2011), formula untuk uji rasio *likelihood* adalah sebagai berikut.

$$LR = -2\ \{L_{\text{reduced}} - L_{\text{full}}\} \tag{3.20}$$

dimana L_{reduced} adalah nilai fungsi log-*likelihood* untuk model yang lebih sederhana sedangkan L_{full} adalah nilai fungsi log-*likelihood* untuk model lengkap.

Uji rasio *likelihood* merupakan uji yang berguna ketika harus diputuskan apakah penambahan satu atau sejumlah variabel penjelas ke dalam model harus dilakukan atau tidak. Selain itu, uji ini juga digunakan untuk menguji signifikansi dari taksiran model yang telah diperoleh. Berikut ini adalah uji signifikansi model regresi Binomial Negatif, hipotesisnya adalah:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \exists \beta_j \neq 0 \qquad ; j = 1, 2, \ldots, k$$

Statistik yang digunakan untuk pengujian hipotesis tersebut adalah

$$LR = -2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1) \tag{3.21}$$

dimana

$\hat{L}_1$ menyatakan nilai taksiran fungsi *likelihood* setelah mensubstitusikan nilai-nilai taksiran parameter β_0, β_1, …, dan β_k yang diperoleh dari taksiran full model

$\hat{L}_0$ menyatakan nilai taksiran fungsi *likelihood* setelah mensubstitusikan nilai taksiran parameter β_0 yang diperoleh dari taksiran model $\log(\mu_i) = \beta_0$.

Dibawah kondisi H_0 benar, statistik uji LR mendekati distribusi Chi-Kuadrat (χ^2) dengan derajat bebas k. Aturan keputusannya adalah H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika $LR > \chi^2_{\alpha,k}$.

H_0 ditolak memberi pengertian bahwa paling sedikit ada satu variabel penjelas yang memiliki kontribusi yang signifikan terhadap model pada tingkat signifikansi α.

3.6.2 Uji Wald

Uji ini berguna untuk mengevaluasi signifikansi dari masing-masing variabel penjelas terhadap model. Bila pada uji signifikansi untuk model regresi diperoleh hasil bahwa paling sedikit ada satu variabel penjelas yang memiliki kontribusi yang signifikan terhadap model, maka selanjutnya dengan uji Wald ingin diketahui variabel penjelas mana saja yang berpengaruh terhadap variabel respon. Hipotesis untuk menguji signifikansi dari sembarang koefisien regresi, misalkan β_j, adalah:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan yaitu

$$W_j = \left[\frac{\hat{\beta}_j}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_j)} \right]^2 \tag{3.22}$$

dimana $\hat{\beta}_j$ adalah taksiran parameter β_j dan $\mathrm{se}(\hat{\beta}_j)$ merupakan taksiran standard *error* dari taksiran parameter β_j yang diperoleh dari matriks taksiran variansi-kovariansi dari $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Dibawah kondisi H_0 benar, statistik uji W_j pada persamaan (3.22) akan mendekati distribusi *Chi-Square* (χ^2) dengan derajat bebas 1, sehingga aturan keputusannya adalah menolak H_0 pada tingkat signifikansi α, jika $W_j > \chi^2_{\alpha,1}$.

Penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α berarti bahwa variabel penjelas ke-j, untuk suatu j tertentu ($j = 1, 2, \ldots, k$), memiliki kontribusi yang signifikan terhadap variabel respon Y.

Dalam statistik uji Wald, terdapat $\mathrm{se}(\hat{\beta}_j)$ merupakan taksiran standard *error* dari taksiran parameter β_j yang diperoleh dari matriks taksiran variansi-kovariansi dari $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, misal dinotasikan dengan $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Matriks $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ diperoleh dari minus invers dari matriks Hessian yaitu sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \approx -\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]^{-1} \approx -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k \partial a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} \end{bmatrix}^{-1}$$

Elemen diagonal utama ke-j (j = 1, 2, …, k+1) dari matriks $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan taksiran variansi dari $\hat{\beta}_{j-1}$, yang dinyatakan dengan $\hat{v}(\hat{\beta}_{j-1})$ dan diperoleh melalui tahapan sebagai berikut:

a) Turunan parsial kedua dari fungsi log-*likelihood* terhadap β_j yaitu

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_j^2} = \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{ji}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \right\} \right]}{\partial \beta_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{-x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})] - ax_{ji}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{ji}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}$$

b) Ekspektasi dari minus matriks Hessian akan menghasilkan matriks *Fisher Information*, sehingga elemen diagonal dari matriks *Fisher Information* untuk β_j adalah:

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_j^2} \right] = I(\beta_j)$$

Dalam hal ini, matriks *Fisher Information* digunakan untuk mengukur seberapa besar informasi dari variabel penjelas X_j yang terobservasi dapat dijelaskan oleh parameter β_j. Karena sebelumnya telah dinyatakan bahwa variansi untuk β_j diperoleh dari elemen diagonal matriks $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$ maka berdasarkan kedua hal tersebut, variansi β_j adalah

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{var}(\beta_j)\\
&=[I(\beta_j)]^{-1}\\
&=\left\{E\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{-x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]-ax_{ji}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{ji}(Y_i-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right]\right\}^{-1}\\
&=\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]+ax_{ji}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{ji}(Y_i-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right]\right\}^{-1}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]+ax_{ji}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{ji}(\mu_i-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]+ax_{ji}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{ji}(\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}x_{ji}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}\right\}^{-1}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}^2\mu_i}{1+a\mu_i}\right\}^{-1} \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

c) Taksiran standard *error* untuk $\hat{\beta}_j$ dalam model regresi Binomial Negatif adalah

$$
\begin{aligned}
\operatorname{se}(\hat{\beta}_j)&=\sqrt{\hat{v}(\hat{\beta}_j)}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}^2\exp(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}{1+\hat{a}\exp(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}\right\}^{-1/2}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ji}^2\hat{\mu}_i}{1+\hat{a}\hat{\mu}_i}\right\}^{-1/2} \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan formula taksiran standard *error* untuk $\hat{\beta}_j$ pada persamaan diatas, dapat dikatakan bahwa standard *error* tersebut dipengaruhi oleh parameter a. Hal tersebut memberikan pengertian bahwa pada saat terjadi overdispersi, model Binomial Negatif akan menjadi lebih sensitif terhadap signifikansi dari variabel-variabel penjelasnya karena ia memperhatikan pengaruh dari overdispersi tersebut melalui parameter a.

Berikut ini akan ditunjukkan pengaruh dari overdispersi terhadap taksiran standard *error* dari $\hat{\beta}_j$ jika tetap menggunakan model Poisson. Sebelumnya telah diketahui bahwa model Binomial Negatif dapat dinyatakan sebagai model Poisson saat $a \approx 0$, sehingga taksiran standard *error* untuk $\hat{\beta}_j$ pada model Poisson, misalkan $\mathrm{se}_p(\hat{\beta}_j)$, adalah

$$\mathrm{se}_p(\hat{\beta}_j) \approx \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ji}^2 \hat{\mu}_i}{1 + 0 \cdot \hat{\mu}_i} \right\}^{-1/2} \approx \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2 \hat{\mu}_i \right\}^{-1/2} \tag{3.25}$$

Jika dibandingkan dengan taksiran standard *error* untuk $\hat{\beta}_j$ pada model Binomial Negatif, misalkan $\mathrm{se}_{NB}(\hat{\beta}_j)$, maka dapat dinyatakan

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2 \hat{\mu}_i \right\}^{-1/2} < \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ji}^2 \hat{\mu}_i}{1 + a\hat{\mu}_i} \right\}^{-1/2}$$

$$\mathrm{se}_P(\hat{\beta}_j) < \mathrm{se}_{NB}(\hat{\beta}_j)$$

Dari perbandingan di atas terlihat bahwa $\mathrm{se}_P(\hat{\beta}_j) < \mathrm{se}_{NB}(\hat{\beta}_j)$ sehingga ketika model Poisson tetap digunakan saat terjadi overdispersi, $\mathrm{se}_p(\hat{\beta}_j)$ yang diperoleh akan menjadi lebih kecil dari seharusnya. Jadi, berdasarkan statistik uji Wald pada persamaan (3.22), taksiran parameter regresi yang seharusnya belum tentu signifikan akan menjadi signifikan dan berakibat kepada kesimpulan yang tidak valid.

3.7 Interpretasi Taksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif

Salah satu kegunaan model regresi adalah untuk menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan variabel-variabel penjelas yang diinginkan. Taksiran dari koefisien-koefisien regresi, yaitu $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$, memiliki peranan penting dalam menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan variabel-variabel penjelas tersebut. Interpretasi masing-masing $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ terhadap model regresi dapat digunakan untuk menjelaskan peran dari variabel-variabel penjelas X_1, X_2, …, X_k agar model regresi yang telah diperoleh menjadi semakin bermakna.

Cara menginterpretasi parameter regresi pada model regresi linier biasa tidak dapat digunakan untuk menginterpretasikan parameter regresi pada model regresi Binomial Negatif. Hal tersebut dikarenakan perbedaan bentuk model regresinya. Cara menginterpretasikan parameter model regresi Binomial Negatif bergantung dari jenis variabel penjelasnya, sehingga interpretasi dari taksiran parameter regresi Binomial Negatif dibagi menjadi dua, yaitu saat variabel penjelasnya berupa variabel kontinu dan kategorik.

3.7.1 Interpretasi Taksiran Parameter saat Variabel Penjelasnya Kontinu

Misalkan X_j adalah suatu variabel penjelas ke-j yang berjenis kontinu. Untuk setiap kenaikan 1 unit nilai x_j dan diasumsikan bahwa nilai dari variabel-variabel penjelas lainnya tetap maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
&\ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j + 1, ..., X_k = x_k) \\
&= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (x_j + 1) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas dapat diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
&\ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j + 1, ..., X_k = x_k) - \ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j, ..., X_k = x_k) \\
&= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (x_j + 1) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k - \left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j x_j + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \right] \\
&= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j x_j + \hat{\beta}_j + \cdots + \hat{\beta}_k x_k - \left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j x_j + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \right] \\
&= \hat{\beta}_j
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\ln \left(\frac{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j + 1, ..., X_k = x_k)}{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j, ..., X_k = x_k)} \right) = \hat{\beta}_j$$

atau

$$\frac{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j + 1, ..., X_k = x_k)}{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j, ..., X_k = x_k)} = e^{\hat{\beta}_j} \tag{3.26}$$

yang merupakan rasio antara rata-rata Y sesudah dan sebelum kenaikan 1 unit nilai x_j dengan menganggap nilai-nilai variabel penjelas lainnya tetap. Maka, interpretasi yang tepat berdasarkan persamaan (3.26) adalah untuk setiap kenaikan 1 unit dari nilai variabel penjelas kontinu X_j , yaitu x_j, dengan asumsi nilai – nilai variabel penjelas lainnya tetap, rata-rata Y akan mengalami perubahan sebesar $\exp(\hat{\beta}_j)$ kali.

3.7.2 Interpretasi Taksiran Parameter saat Variabel Penjelasnya Kategorik

Misalkan X_j adalah suatu variabel penjelas kategorik ke-j. Variabel X_j terdiri dari dua kategori, dimana X_j bernilai 0 untuk kategori pertama dan bernilai 1 untuk kategori kedua. Jika X_j merupakan kategori 1 (atau bernilai 0) maka dengan menganggap bahwa nilai dari variabel-variabel penjelas lainnya tetap akan diperoleh

$$\begin{aligned} &\ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 0, ..., X_k = x_k) \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (0) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \end{aligned} \tag{3.27}$$

sedangkan untuk X_j yang merupakan kategori 2 (atau bernilai 1) maka

$$\begin{aligned} &\ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 1, ..., X_k = x_k) \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (1) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dari persamaan (3.28) dan (3.29) dapat diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} &\ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 1, ..., X_k = x_k) - \ln \hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 0, ..., X_k = x_k) \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (1) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k - \left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j (0) + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \right] \\ &= \hat{\beta}_j \end{aligned}$$

sehingga

$$\ln\left(\frac{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 1, \ldots, X_k = x_k)}{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 0, \ldots, X_k = x_k)}\right) = \hat{\beta}_j$$

$$\frac{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 1, \ldots, X_k = x_k)}{\hat{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_j = 0, \ldots, X_k = x_k)} = e^{\hat{\beta}_j} \qquad (3.29)$$

yang merupakan rasio antara rata-rata variabel Y saat X_j merupakan kategori 2 dengan rata-rata variabel Y saat X_j merupakan kategori 1 dengan menganggap bahwa nilai dari variabel-variabel penjelas lainnya tetap.

Jadi, interpretasi yang tepat untuk menggambarkan variabel penjelas X_j berdasarkan persamaan (3.29) adalah rata-rata Y saat X_j yang merupakan kategori 2 adalah sebesar $\exp(\hat{\beta}_j)$ kali rata-rata Y untuk X_j yang merupakan kategori 1 dengan asumsi bahwa nilai – nilai variabel penjelas lainnya dianggap tetap.

BAB 4
APLIKASI DATA

4.1 Latar Belakang Data

Data untuk contoh aplikasi kali ini akan membahas mengenai ritual perkawinan dari suatu jenis kepiting yang sudah sangat langka, yaitu kepiting tapal kuda. Kepiting tapal kuda merupakan salah satu jenis *arthropoda* yang hidup di perairan laut dangkal yang permukaannya berpasir atau berlumpur lembut. Kepiting ini dinamakan tapal kuda karena bentuknya yang sekilas mirip dengan kaki kuda. Seluruh tubuh kepiting tapal kuda dilindungi oleh sebuah *shell* (kulit) keras dan ukuran tubuh kepiting betina lebih besar dibandingkan dengan jantan.

Dalam hal perkawinan, kepiting tapal kuda jantan memiliki dua taktik. Taktik pertama yaitu pada saat air pasang tinggi beberapa kepiting jantan akan datang ke daratan untuk melekat pada seekor betina (menggenggam pinggiran belakang karapas betina dengan pedipalpus mereka), kemudian mereka akan bersarang untuk melakukan perkawinan. Kedua, kepiting jantan yang tidak ikut melekat pada kepiting betina akan mengerumuni di sekitar pasangan yang sedang bersarang dan mereka tetap melakukan pembuahan terhadap kepiting betina tersebut. Kepiting tapal kuda jantan yang melakukan taktik kedua ini disebut dengan kepiting satelit.

Jumlah satelit yang mengerumuni pasangan kepiting yang sedang bersarang terkadang sedikit terkadang banyak. Banyak sedikitnya jumlah kepiting jantan satelit ini digunakan pada penelitian yang ingin mencari pengaruh banyaknya satelit untuk setiap kepiting tapal kuda betina dengan menggunakan beberapa faktor, yaitu warna kulit, kondisi cangkang, lebar punggung, dan berat dari kepiting betina tersebut. Jadi, aplikasi data kedua untuk penulisan skripsi ini akan menggunakan contoh data pada penelitian tersebut.

4.2 Data

Tabel pada Lampiran 3 memuat sebanyak 173 data kepiting tapal kuda betina yang terdiri dari satu buah variabel respon Y_i dan empat buah variabel penjelas X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, dan X_{4i}.

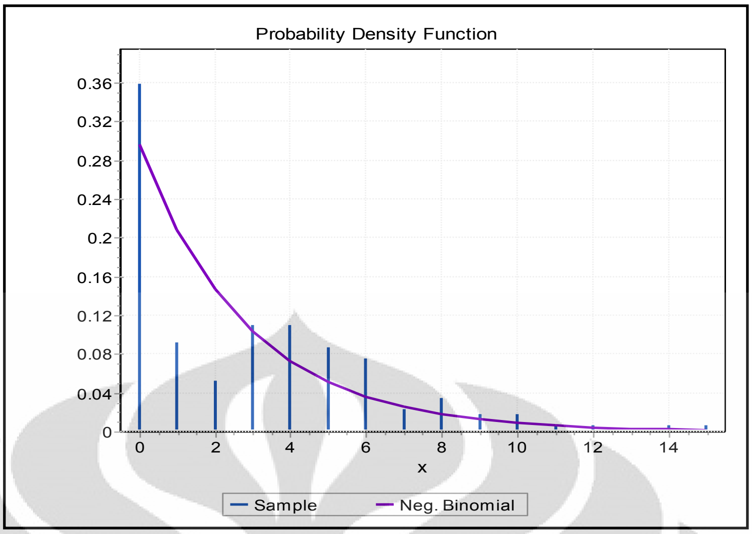
Variabel Y_i adalah variabel respon yang menyatakan banyaknya satelit yang mengerumuni kepiting tapal kuda betina ke-i, X_{1i} adalah variabel penjelas kategorik dengan dua buah kategori yang menyatakan warna kulit kepiting tapal kuda betina ke-i (terang = 0, gelap = 1), X_{2i} adalah variabel penjelas kategorik yang menyatakan kondisi cangkang kepiting tapal kuda betina ke-i (baik = 0, tidak baik = 1), X_{3i} adalah variabel penjelas kontinu yang menyatakan lebar punggung kepiting tapal kuda betina ke-i (dalam cm), dan X_{4i} adalah variabel penjelas kontinu yang menyatakan berat kepiting tapal kuda betina ke-i (dalam kg).

4.3 Tujuan

Tujuan analisis data dalam penulisan skripsi ini adalah untuk menerapkan regresi Binomial Negatif terhadap kasus penelitian yang ingin mengetahui hubungan antara banyaknya satelit untuk setiap kepiting tapal kuda betina dengan beberapa faktor, yaitu warna kulit, kondisi cangkang, lebar punggung, dan berat dari kepiting betina tersebut.

4.4 Analisis Data

Variabel respon Y yang digunakan dalam data kepiting tapal kuda ini merupakan data *count*. Berikut ini adalah plot dari data tersebut yang dibandingkan dengan sebaran dari Binomial Negatif.

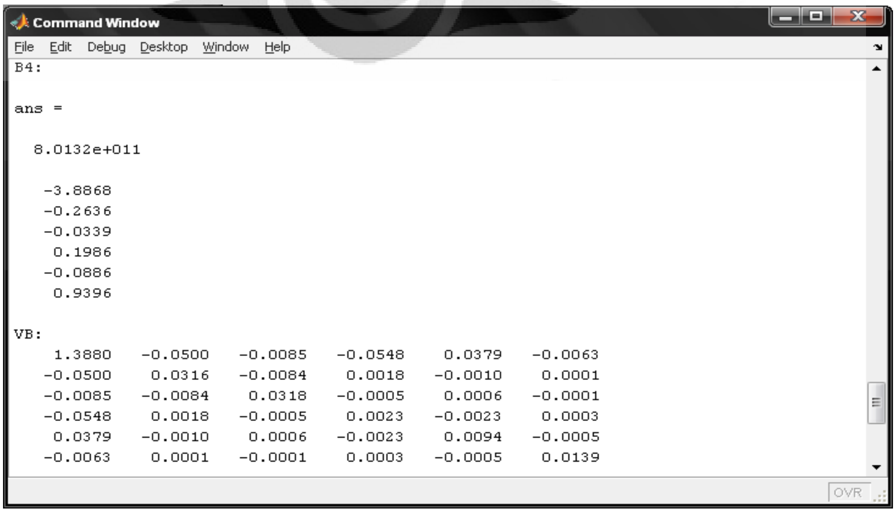


Gambar 4.1. Plot data *count* (variabel *Y*)

Dari plot di atas terlihat bahwa data tersebut seperti membentuk pola yang mengikuti sebaran Binomial Negatif, sehingga dapat diasumsikan bahwa data *count* tersebut berdistribusi Binomial Negatif. Jadi, untuk menganalisis hubungan variabel tersebut dengan 4 buah variabel penjelas yang telah disebutkan sebelumnya akan digunakan model regresi Binomial Negatif. Model regresi Binomial Negatif untuk menganalisis data tersebut adalah:

$$\ln(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i}\text{ ; dimana } i = 1, 2, \ldots, 173$$

Dengan menggunakan algoritma pada Lampiran 4 ke dalam *software* Matlab 7.1, diperoleh output berikut



```
Command Window
File  Edit  Debug  Desktop  Window  Help
B4:

ans =

  8.0132e+011

   -3.8868
   -0.2636
   -0.0339
    0.1986
   -0.0886
    0.9396

VB:
    1.3880   -0.0500   -0.0085   -0.0548    0.0379   -0.0063
   -0.0500    0.0316   -0.0084    0.0018   -0.0010    0.0001
   -0.0085   -0.0084    0.0318   -0.0005    0.0006   -0.0001
   -0.0548    0.0018   -0.0005    0.0023   -0.0023    0.0003
    0.0379   -0.0010    0.0006   -0.0023    0.0094   -0.0005
   -0.0063    0.0001   -0.0001    0.0003   -0.0005    0.0139
OVR
```

Gambar 4.2. Nilai taksiran parameter β_0, β_1, β_2, β_3, β_4, dan *a*, serta matriks **V**

Jadi, taksiran maksimum *likelihood* dari β_0, β_1, β_2, β_3, β_4, dan a adalah

$\hat{\beta}_0$ = -3.8868 $\quad$ $\hat{\beta}_1$ = -0.2636 $\quad$ $\hat{\beta}_2$ = -0.0339

$\hat{\beta}_3$ = 0.1986 $\quad$ $\hat{\beta}_4$ = -0.0886 $\quad$ $\hat{a}$ = 0.9396

sehingga taksiran dari model regresi Binomial Negatif untuk data tersebut adalah:

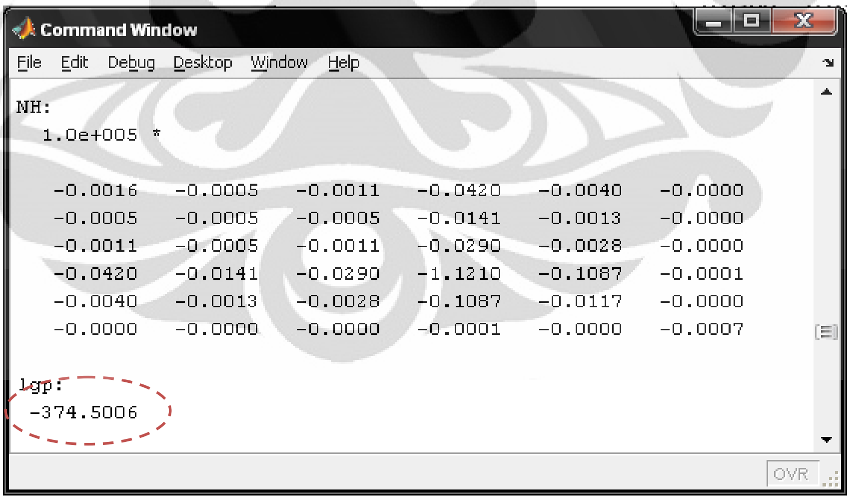
$$\ln(\hat{\mu}_i) = -3.8868 - 0.2636x_{1i} - 0.0339x_{2i} + 0.1986x_{3i} - 0.0886x_{4i}$$

untuk i = 1, 2, …,173.

Taksiran matriks variansi-kovariansi untuk $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\beta}_4$, dan $\hat{a}$ yaitu:

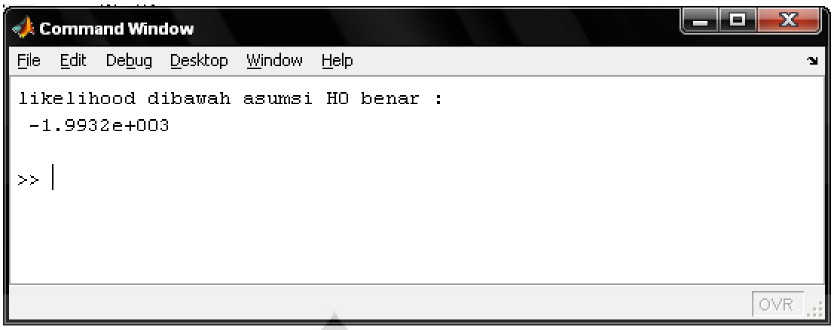
$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1.3880 & -0.0500 & -0.0085 & -0.0548 & 0.0379 & -0.0063 \\ -0.0500 & 0.0316 & -0.0084 & 0.0018 & -0.0010 & 0.0001 \\ -0.0085 & -0.0084 & 0.0318 & -0.0005 & 0.0006 & -0.0001 \\ -0.0548 & 0.0018 & -0.0005 & 0.0023 & -0.0023 & 0.0003 \\ 0.0379 & -0.0010 & 0.0006 & -0.0023 & 0.0094 & -0.0005 \\ -0.0063 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0005 & 0.0139 \end{pmatrix}$$

Selain itu, nilai taksiran fungsi log *likelihood* yang mengandung seluruh variabel penjelas juga diperoleh yaitu:



Gambar 4.3. Nilai taksiran fungsi *likelihood*

sebesar -374.5006 dan berdasarkan algoritma pada Lampiran 5 diperoleh output untuk nilai taksiran fungsi log *likelihood* yang tidak mengandung variabel penjelas yaitu:



Gambar 4.4. Nilai taksiran fungsi *likelihood* tanpa variabel penjelas

Dari gambar output di atas diperoleh nilai taksiran fungsi log *likelihood* yang tidak mengandung variabel penjelas yaitu sebesar -1993.2.

4.5 *Pseudo-R*^{2}

Statistik *pseudo-R*^{2} yang diperoleh berdasarkan formula $R_p^2 = 1 - L_F/L_I$ adalah

$$R_p^2 = 1 - \frac{(-374.5006)}{(-1993.2)}$$

$$= 1 - 0.18788912$$

$$= 0.81211088$$

Nilai R_p^2 yang diperoleh adalah 0.81211088 dimana nilai tersebut relatif cukup besar mendekati 1, sehingga dapat dikatakan model yang digunakan sudah cukup baik untuk menggambarkan data dalam kasus ini. Untuk mendapatkan kesimpulan yang lebih meyakinkan, maka selanjutnya akan dilakukan pengujian hipotesis yaitu uji rasio *likelihood* dan uji Wald.

4.6 Uji Kesesuaian Model

Uji kesesuaian model yang akan dilakukan adalah dengan menggunakan uji rasio *likelihood* dan uji Wald.

4.6.1 Uji Rasio *Likelihood*

Uji rasio *likelihood* untuk model ini digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan antara banyaknya kepiting satelit dengan warna kulit, kondisi cangkang, lebar punggung, dan berat dari kepiting betina. Berikut ini adalah pengujian hipotesisnya.

- Hipotesisnya adalah

  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

  $H_1 : \exists \beta_j \neq 0$; j = 1, 2, 3, dan 4

- Statistik yang digunakan untuk pengujian hipotesis tersebut adalah

  $$LR = -2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1)$$

- Tingkat signifikansi

  Pengujian ini dilakukan dengan tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

- Aturan keputusan

  H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika $LR > \chi^2_{\alpha,k} = \chi^2_{0.05,4}$.

- Keputusan

  Nilai statistik *LR* berdasarkan model tersebut adalah

  $$\begin{aligned} LR &= -2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1) \\ &= 2(\log \hat{L}_1 - \log \hat{L}_0) \\ &= 2(-374.5006 - (-1993.2)) \\ &= 2(1618.7) \\ &= 3237.4 \end{aligned}$$

  Berdasarkan tabel *Chi-Square*, nilai dari $\chi^2_{0.05,4}$ adalah 9.49. Karena nilai LR = 3237.4 > $\chi^2_{0.05,4}$ = 9.49, maka H_0 ditolak dengan tingkat kepercayan 95%.

Penolakan H_0 pada tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$ berarti bahwa terdapat variabel penjelas yang memiliki kontribusi yang signifikan terhadap variabel respon *Y*. Untuk mengetahui variabel penjelas mana yang memiliki kontribusi yang signifikan terhadap variabel respon *Y* maka selanjutnya dapat dilakukan pengujian untuk masing-masing parameter modelnya dengan uji Wald.

4.6.2 Uji Wald

Selanjutnya akan dilakukan pengujian signifikansi untuk masing-masing parameter dalam model. Berikut ini adalah pengujian hipotesisnya.

- Hipotesisnya adalah

  $H_0 : \beta_j = 0$

  $H_1 : \beta_j \neq 0$; j = 1, 2, 3, dan 4

- Statistik yang digunakan untuk pengujian hipotesis tersebut adalah

$$W_j = \left[\frac{\hat{\beta}_j}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_j)} \right]^2$$

- Tingkat signifikansi

  Pengujian ini dilakukan dengan tingkat signifikansi α = 0.05

- Aturan keputusan

  H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika statistik uji $W_j > \chi^2_{\alpha,k} = \chi^2_{0.05,1}$ untuk setiap j = 1, 2, 3, dan 4.

- Keputusan

  Nilai statistik uji untuk masing-masing parameter model regresi adalah

$$W_1 = \left[\frac{\hat{\beta}_1}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_1)} \right]^2 = \left(\frac{-0.2636}{\sqrt{0.0316}} \right)^2 = 2.1989$$

$$W_2 = \left[\frac{\hat{\beta}_2}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_2)} \right]^2 = \left(\frac{-0.0339}{\sqrt{0.0318}} \right)^2 = 0.0361$$

$$W_3 = \left[\frac{\hat{\beta}_3}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_3)} \right]^2 = \left(\frac{0.1986}{\sqrt{0.0023}} \right)^2 = 17.1487$$

$$W_4 = \left[\frac{\hat{\beta}_4}{\mathrm{se}(\hat{\beta}_4)} \right]^2 = \left(\frac{-0.0886}{\sqrt{0.0094}} \right)^2 = 0.8351$$

  Dari tabel *Chi-Square*, diperoleh nilai $\chi^2_{0.05,1}$ = 3.8415.

  Keputusan hasil pengujian untuk masing-masing parameter adalah:

- $W_1 = 2.1989 < \chi^2_{0.05,1} = 3.8415$, maka H_0 tidak ditolak pada tingkat signifikansi α = 0.05.
- $W_2 = 0.0361 < \chi^2_{0.05,1} = 3.8415$, maka H_0 tidak ditolak pada tingkat signifikansi α = 0.05.
- $W_3 = 17.1487 > \chi^2_{0.05,1} = 3.8415$, maka H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α = 0.05.
- $W_4 = 0.8351 < \chi^2_{0.05,1} = 3.8415$, maka H_0 tidak ditolak pada tingkat signifikansi α = 0.05.

Kesimpulannya adalah hanya parameter β_3 yang signifikan pada tingkat signifikansi 0.05, sedangkan parameter β_1, β_2, dan β_4 tidak signifikan pada tingkat signifikansi 0.05. Hal tersebut berarti bahwa hanya variabel penjelas ke-3 yaitu lebar punggung dari kepiting tapal kuda betina yang memiliki pengaruh signifikan terhadap banyaknya kepiting satelit yang mengerumuni kepiting betina.

4.7 Interpretasi Parameter Model Regresi Binomial Negatif

Karena hanya variabel X_3 yang memiliki pengaruh signifikan terhadap model maka model regresi Binomial Negatifnya menjadi

$$\ln(\mu_i) = \beta_0 + \beta_3 x_{3i} \text{ ; untuk } i = 1, 2, \ldots, 173.$$

Setelah dilakukan proses penaksiran yang hanya melibatkan variabel X_3 dengan menggunakan algoritma pada Lampiran 6, diperoleh taksiran modelnya yaitu

$$\ln(\hat{\mu}_i) = -4.0380 + 0.1915 x_{3i} \text{; untuk } i = 1, 2, \ldots, 173.$$

Karena parameter yang signifikan pengaruhnya terhadap model hanyalah parameter β_3, maka interpretasi yang diperlukan adalah interpretasi untuk parameter β_3 saja. Parameter β_3 adalah koefisien regresi untuk variabel penjelas ketiga, atau X_3, yang menyatakan lebar punggung dari kepiting tapal kuda betina ke-*i* (dalam cm).

Nilai taksiran untuk parameter β_3 adalah 0.1915, maka hal tersebut memberikan pengertian bahwa untuk setiap kenaikan satu cm lebar punggung dari kepiting betina, maka rata-rata banyak kepiting satelit yang mengerumuni kepiting betina tersebut juga akan bertambah sebesar exp(0.1915) = 1.2110648 ekor.

BAB 5
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kondisi overdispersi yaitu kondisi dimana variansi dari data *count* melebihi meannya. Kondisi ini sering kali terjadi pada data *count*. Regresi yang digunakan untuk variabel respon yang berupa data *count* adalah regresi Poisson yang memiliki asumsi mean dan variansi sama. Jika pada kondisi overdispersi digunakan regresi Poisson untuk menganalisis data, maka dapat dihasilkan standard *error* dari taksiran parameter yang cenderung lebih rendah dari seharusnya sehingga berdampak pada kesimpulan yang tidak sesuai dengan data. Terdapat alternatif model regresi selain Poisson yang dapat digunakan jika terjadi overdispersi. Salah satunya adalah model regresi Binomial Negatif.

Pada model regresi Binomial Negatif, variabel respon diasumsikan berdistribusi Binomial Negatif. Binomial Negatif yang digunakan merupakan distribusi campuran antara distribusi Poisson dan Gamma, dimana distribusi Gamma digunakan untuk menyesuaikan kehadiran overdispersi. Regresi Binomial Negatif merupakan salah satu model yang digunakan dalam menangani masalah overdispersi dalam data *count* karena model tersebut memiliki parameter yang khusus menggambarkan sebaran data yaitu parameter dispersi.

Penaksiran parameter-parameter dalam model regresi Binomial Negatif dilakukan dengan metode maksimum *likelihood*. Solusi dari persamaan log-*likelihood* diperoleh dengan menggunakan metode Newton-Raphson karena persamaan log-*likelihood* yang diperoleh tidak linier dalam parameternya.

5.2 Saran

Saran untuk pengembangan skripsi ini adalah membahas metode lain untuk menangani overdispersi pada data Poisson, seperti metode modifikasi standard *error* pada Poisson, metode Quasi-Poisson, atau dengan metode Binomial Negatif umum (NB-P).

DAFTAR PUSTAKA

Agresti, Alan. (2007). *An introduction to categorical data analysis* (2nd ed.). USA: John Willey & Sons.

Anton, Howard. (2000). *Dasar-dasar aljabar linier* (Ir. Hari Suminto, Penerjemah). Jilid 2. (Ed. ke-7). Batam: Interaksara.

Berk, Richard dan MacDonald, J.M. (2008). *Overdispersion and poisson regression*. Philadelphia: Springer.

Burden, Richard L. dan Faires, J. Douglas. (1997). *Numerical analysis* (6th ed.). USA: Brooks.

Cameron, A. Colin dan Trivedi, Pravin K. (1998). *Regression analysis of count data*. New York: Cambridge University Press.

Clark, David R., dan Thayer, Charles A. (2004). *A primer on the exponential family of distributions*. Call Paper Program on Generalized Linear Model.

Hertriyanti, Renita. (2006). *Analisis regresi poisson*. Depok: Universitas Indonesia.

Hilbe, Joseph M. (2011). *Negative binomial regression* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.

Hogg, R.V. dan Craig, A.T. (1995). *Introduction to mathematical statistics* (5th ed.). New Jersey: Prentice-Hall International.

Ismail, N. dan Jemain, A. A. (2007). *Handling overdispersion with negative binomial and generalized poisson regression models*. Virginia: Casualty Actuarial Society Forum.

Johnson, Norman L., Kotz, Samuel, dan Kemp, Adrienne W. (1992). *Univariate discrete distribution*. New York: The Willey Interscience Publication.

Jong, Piet De, dan Heller, Gillian Z. (2008). *Generalized linear models for insurance data*. New York: Cambridge University Press.

Pawitan, Yudi. (2001). *In all likelihood: Statistical modeling and inference using likelihood*. Oxford: Clarendon Press.

Shafira. (2011). *Penaksiran parameter distribusi binomial negatif pada kasus overdispersi*. Depok: Universitas Indonesia.

Lampiran 1. Turunan Parsial Kedua dari Fungsi Log-*Likelihood*

Fungsi log-*likelihood* berdasarkan persamaan (3.13) adalah

$$l(\boldsymbol{\beta}^*) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\ln(1+ar) - \ln(y_i!) + y_i(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - \left(y_i + \frac{1}{a}\right)\ln(1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))\right\}$$

dengan masing-masing turunan parsial pertamanya adalah sebagai berikut:

- Turunan parsial terhadap β_0

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right\}$$

- Turunan parsial terhadap $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{1i}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right\}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{2i}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{ki}(y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right\}$$

- Turunan parsial terhadap a

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{r}{1+ar}\right) + \frac{1}{a^2}\ln(1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) - \frac{(y_i+\frac{1}{a})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right\}$$

Turunan parsial kedua terhadap $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, dan a adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})] - [a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ay_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ay_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-(1+ay_i)\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_m} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})] - [ax_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ax_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ax_{mi}y_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + ax_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ax_{mi}y_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1 + ay_i)x_{mi} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial a} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_m \partial \beta_r} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi}x_{ri} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})] - [ax_{ri}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{mi}y_i - x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi}x_{ri} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ax_{mi}x_{ri}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2 - ax_{ri}x_{mi}y_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + ax_{mi}x_{ri}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi}x_{ri} \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - ax_{ri}x_{mi}y_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1 + ay_i)\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})x_{mi}x_{ri}}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

untuk m, $r = 0, 1, 2, \ldots, k$ dimana $x_{0i} = 1$.

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_m \partial a} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][x_{mi}y_i - x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{mi}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][y_i - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

untuk $m = 1, 2, \ldots, k$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i - 1} \left(\frac{-r^2}{(1 + ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3}\ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) + \frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a^2(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))} \right.$$

$$\left. - \frac{-\frac{1}{a^2}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})] - \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})(y_i + \frac{1}{a})\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{[1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3} \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) + \frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a^2(1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}))} \right.$$

$$\left. + \frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{a^2[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3} \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) + \frac{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a^2[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{a^2[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3} \ln(1 + a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) + \right.$$

$$\left. \frac{2\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a^2[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a \partial \beta_m} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{a x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a^2[(1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]} - \frac{[y_i x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{a}x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right.$$

$$\left. + \frac{[y_i\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{a}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})][a x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]} - \frac{[y_i x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{a}x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - a[y_i x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{a}x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]}{a[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{a x_{mi}[\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2 - a y_i x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{a[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{mi}\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})(\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) - y_i)}{[1+a\exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^2} \right\}$$

untuk m = 0, 1, 2, …, k dimana $x_{0i} = 1$.

Lampiran 2. Menunjukkan Matriks Hessian untuk Model Regresi Binomial Negatif adalah Matriks Definit Negatif

Matriks Hessian untuk model regresi Binomial Negatif adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} H_{00} & H_{01} & \cdots & H_{0k} & H_{0a} \\ H_{10} & H_{11} & \cdots & H_{1k} & H_{1a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{k0} & H_{k1} & \cdots & H_{kk} & H_{ka} \\ H_{a0} & H_{a1} & \cdots & H_{ak} & H_{aa} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Lampiran 1, diperoleh bahwa:

$$H_{00} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{01} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$H_{10} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{11} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$H_{k0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$H_{a0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{a1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$H_{0k} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{0a} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$H_{1k} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{1a} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$H_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad \vdots$$

$$H_{ak} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \qquad H_{ka} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \text{dan}$$

$$H_{aa} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} \right\}$$

dimana $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$.

Akan ditunjukkan bahwa matriks $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ adalah matriks definit negatif.

Berdasarkan definisi Anton (2000), suatu matriks simetris $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ berukuran $(k+2) \times (k+2)$ adalah definit negatif jika $\mathbf{s}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{s}$ bernilai negatif untuk setiap vektor $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ yang berdimensi $k+2$.

$\mathbf{s}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{s} =$

$$= \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{00} & H_{01} & \cdots & H_{0k} & H_{0a} \\ H_{10} & H_{11} & \cdots & H_{1k} & H_{1a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{k0} & H_{k1} & \cdots & H_{kk} & H_{ka} \\ H_{a0} & H_{a1} & \cdots & H_{ak} & H_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \Bigg[s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}, \ldots,$$

$$s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\},$$

$$s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}$$

$$+ s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3} \ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} \right\} \Bigg] \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= s_0^2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_0 s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_0 s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} +$$

$$+ s_0 s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1^2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots +$$

$$s_1 s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_1 s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \ldots + s_k s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} +$$

$$s_k s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_k^2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-(1+ay_i)x_{ki}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_k s_{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} +$$

$$s_{k+1} s_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + s_{k+1} s_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\} + \cdots + s_{k+1} s_k \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \right\}$$

$$+ s_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{y_i-1} \left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2} \right) - \frac{2}{a^3} \ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} \right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{s_0^2\left\{\frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_0s_1\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\cdots+s_0s_k\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\right.$$

$$s_0s_{k+1}\left\{\frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_1s_0\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{1i}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_1^2\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{1i}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\cdots+$$

$$s_1s_k\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_1s_{k+1}\left\{\frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\ldots+s_ks_0\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+$$

$$s_ks_1\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{1i}x_{ki}\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\cdots+s_k^2\left\{\frac{-(1+ay_i)x_{ki}^2\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_ks_{k+1}\left\{\frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+$$

$$s_{k+1}s_0\left\{\frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+s_{k+1}s_1\left\{\frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\cdots+s_{k+1}s_k\left\{\frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+$$

$$\left.s_{k+1}^2\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right)-\frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i)+\frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]}+\frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}\right\}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})\left\{\frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}\right.$$

$$+2s_0s_{k+1}\left\{\frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+2s_1s_{k+1}\left\{\frac{-x_{1i}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}+\cdots+2s_ks_{k+1}\left\{\frac{-x_{ki}\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}$$

$$\left.+s_{k+1}^2\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right)-\frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i)+\frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]}+\frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}\right\}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})\left\{\frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}\right.$$

$$+(2s_0s_{k+1}+2s_1s_{k+1}x_{1i}+\cdots+2s_ks_{k+1}x_{ki})\left\{\frac{-\mu_i[y_i-\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}$$

$$\left.+s_{k+1}^2\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right)-\frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i)+\frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]}+\frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}\right\}\right\}$$

Untuk membuktikan persamaan diatas bernilai negatif, maka akan dilihat dari masing-masing suku.

- Suku pertama yaitu $(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})\left\{\frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}\right\}$.

  Karena $(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})(s_0+s_1x_{1i}+\cdots+s_kx_{ki})$ bernilai positif dan

$\frac{-(1+ay_i)\mu_i}{[1+a\mu_i]^2}$ bernilai negatif untuk setiap a, y_i, dan μ_i maka suku pertama akan bernilai negatif.

- Suku kedua yaitu $(2s_0 s_{k+1} + 2s_1 s_{k+1} x_{1i} + \cdots + 2s_k s_{k+1} x_{ki})\left\{\frac{-\mu_i[y_i - \mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}\right\}$.

  Pada bagian dari suku kedua yaitu $\frac{-\mu_i[y_i - \mu_i]}{[1+a\mu_i]^2}$, terdapat $[y_i - \mu_i]$ dimana $\mu_i = E\,[Y_i \mid \mathbf{x}_i]$. Nilai $E\,[Y_i \mid \mathbf{x}_i]$ diharapkan mendekati nilai y_i sehingga dapat dikatakan $[y_i - E\,[Y_i \mid \mathbf{x}_i]] = 0$, maka suku kedua dari persamaan tersebut juga akan mendekati 0.

- Suku ketiga yaitu

$$s_{k+1}^2\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right) - \frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}\right\}$$

  s_{k+1}^2 pasti bernilai positif, sedangkan bagian dalam kurung kurawal akan menjadi:

$$\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right) - \frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}$$

$$= \sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right) - \frac{1}{a^2}\left[\frac{-2\mu_i}{[1+a\mu_i]} + \frac{a(1+ay_i)\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} + \frac{2\ln(1+a\mu_i)}{a}\right]$$

$$= -\left\{\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{r^2}{(1+ar)^2}\right) + \frac{1}{a^2}\left[\frac{-2\mu_i}{[1+a\mu_i]} + \frac{a(1+ay_i)\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} + \frac{2\ln(1+a\mu_i)}{a}\right]\right\}$$

  Karena $\mu_i = E\,[Y_i \mid \mathbf{x}_i]$ diharapkan mendekati y_i, maka bagian

$$\frac{2\mu_i[1+a\mu_i]}{[1+a\mu_i]^2} \approx \frac{a(1+ay_i)\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}$$

  sehingga $\left[\frac{-2\mu_i}{[1+a\mu_i]} + \frac{a(1+ay_i)\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2} + \frac{2\ln(1+a\mu_i)}{a}\right] \approx \frac{2\ln(1+a\mu_i)}{a}$ yang akan bernilai positif. Hal tersebut mengakibatkan bagian

  $\sum_{r=0}^{y_i-1}\left(\frac{-r^2}{(1+ar)^2}\right) - \frac{2}{a^3}\ln(1+a\mu_i) + \frac{2\mu_i}{a^2[1+a\mu_i]} + \frac{(y_i+\frac{1}{a})\mu_i^2}{[1+a\mu_i]^2}$ akan bernilai negatif.

Berdasarkan nilai untuk suku pertama, kedua, dan ketiga yang secara berturut-turut akan bernilai negatif, nol, dan negatif, maka $\mathbf{s}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{s}$ yang merupakan penjumlahan dari suku pertama, kedua, dan ketiga, maka secara keseluruhan nilai dari $\mathbf{s}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{s}$ juga akan negatif. Jadi, terbukti bahwa matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ adalah matriks definit negatif.

Lampiran 3. Data Banyaknya Kepiting Satelit yang Mengerumuni Kepiting Tapal Kuda Betina

Kepiting Betina ke-	Kategori Warna Kepiting Betina	Kondisi Cangkang Kepiting Betina	Lebar Punggung Kepiting Betina (dalam cm)	Berat Kepiting Betina (dalam kg)	Banyaknya Kepiting Satelit
i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	X_{4i}	Y_i
1	0	1	28.30	3.05	8
2	1	1	26.00	2.60	4
3	1	1	25.60	2.15	0
4	1	0	21.00	1.85	0
5	0	1	29.00	3.00	1
6	0	0	25.00	2.30	3
7	1	1	26.20	1.30	0
8	0	1	24.90	2.10	0
9	0	0	25.70	2.00	8
10	0	1	27.50	3.15	6
11	0	0	26.10	2.80	5
12	1	1	28.90	2.80	4
13	0	0	30.30	3.60	3
14	0	1	22.90	1.60	4
15	1	1	26.20	2.30	3
16	1	1	24.50	2.05	5
17	0	1	30.00	3.05	8
18	0	1	26.20	2.40	3
19	0	1	25.40	2.25	6
20	0	1	25.40	2.25	4
21	1	1	27.50	2.90	0
22	1	1	27.00	2.25	3
23	0	0	24.00	1.70	0
24	0	0	28.70	3.20	0

25	1	1	26.50	1.97	1
26	0	1	24.50	1.60	1
27	1	1	27.30	2.90	1
28	0	1	26.50	2.30	4
29	0	1	25.00	2.10	2
30	1	1	22.00	1.40	0
31	0	0	30.20	3.28	2
32	0	0	25.40	2.30	0
33	0	0	24.90	2.30	6
34	1	1	25.80	2.25	10
35	1	1	27.20	2.40	5
36	0	1	30.50	3.32	3
37	1	1	25.00	2.10	8
38	0	1	30.00	3.00	9
39	0	0	22.90	1.60	0
40	0	1	23.90	1.85	2
41	0	1	26.00	2.28	3
42	0	1	25.80	2.20	0
43	1	1	29.00	3.28	4
44	0	0	26.50	2.35	0
45	1	1	22.50	1.55	0
46	0	1	23.80	2.10	0
47	1	1	24.30	2.15	0
48	0	0	26.00	2.30	14
49	1	1	24.70	2.20	0
50	0	0	22.50	1.60	1
51	0	1	28.70	3.15	3
52	0	0	29.30	3.20	4
53	0	0	26.70	2.70	5
54	1	1	23.40	1.90	0
55	0	0	27.70	2.50	6
56	0	1	28.20	2.60	6
57	1	1	24.70	2.10	5

58	0	0	25.70	2.00	5
59	0	0	27.80	2.75	0
60	1	0	27.00	2.45	3
61	0	1	29.00	3.20	10
62	1	1	25.60	2.80	7
63	1	1	24.20	1.90	0
64	1	1	25.70	1.20	0
65	1	1	23.10	1.65	0
66	0	1	28.50	3.05	0
67	0	0	29.70	3.85	5
68	1	1	23.10	1.55	0
69	1	1	24.50	2.20	1
70	0	1	27.50	2.55	1
71	0	1	26.30	2.40	1
72	0	1	27.80	3.25	3
73	0	1	31.90	3.33	2
74	0	1	25.00	2.40	5
75	1	1	26.20	2.22	0
76	1	1	28.40	3.20	3
77	0	0	24.50	1.95	6
78	0	1	27.90	3.05	7
79	0	0	25.00	2.25	6
80	1	1	29.00	2.92	3
81	0	0	31.70	3.73	4
82	0	1	27.60	2.85	4
83	1	1	24.50	1.90	0
84	1	1	23.80	1.80	0
85	0	1	28.20	3.05	8
86	1	1	24.10	1.80	0
87	0	0	28.00	2.62	0
88	0	0	26.00	2.30	9
89	1	0	24.70	1.90	0
90	0	1	25.80	2.65	0

91	0	0	27.10	2.95	8
92	0	1	27.40	2.70	5
93	1	1	26.70	2.60	2
94	0	0	26.80	2.70	5
95	0	1	25.80	2.60	0
96	1	1	23.70	1.85	0
97	0	1	27.90	2.80	6
98	0	0	30.00	3.30	5
99	0	1	25.00	2.10	4
100	0	1	27.70	2.90	5
101	0	1	28.30	3.00	15
102	1	1	25.50	22.50	0
103	0	1	26.00	2.15	5
104	0	1	26.20	2.40	0
105	1	1	23.00	1.65	1
106	0	0	22.90	1.60	0
107	0	1	25.10	2.10	5
108	1	0	25.90	2.55	4
109	1	0	25.50	2.75	0
110	0	0	26.80	2.55	0
111	0	0	29.00	2.80	1
112	1	1	28.50	3.00	1
113	0	0	24.70	2.55	4
114	0	1	29.00	3.10	1
115	0	1	27.00	2.50	6
116	1	1	23.70	1.80	0
117	1	1	27.00	2.50	6
118	0	1	24.20	1.65	2
119	1	1	22.50	1.47	4
120	0	1	25.10	1.80	0
121	0	1	24.90	2.20	0
122	0	1	27.50	2.63	6
123	0	0	24.30	2.00	0

124	0	1	29.50	3.02	4
125	0	1	26.20	2.30	0
126	0	1	24.70	1.95	4
127	1	0	29.80	3.50	4
128	1	1	25.70	2.15	0
129	1	1	26.20	2.17	2
130	1	1	27.00	2.63	0
131	1	1	24.80	2.10	0
132	0	0	23.70	1.95	0
133	0	1	28.20	3.05	11
134	0	1	25.20	2.00	1
135	0	0	23.20	1.95	4
136	1	1	25.80	2.00	3
137	1	1	27.50	2.60	0
138	0	0	25.70	2.00	0
139	0	1	26.80	2.65	0
140	1	1	27.50	3.10	3
141	1	0	28.50	3.25	9
142	0	1	28.50	3.00	3
143	0	0	27.40	2.70	6
144	0	1	27.20	2.70	3
145	1	1	27.10	2.55	0
146	0	1	28.00	2.80	1
147	0	0	26.50	1.30	0
148	1	1	23.00	1.80	0
149	1	0	26.00	2.20	3
150	1	0	24.50	2.25	0
151	0	1	25.80	2.30	0
152	1	1	23.50	1.90	0
153	1	1	26.70	2.45	0
154	1	1	25.50	2.25	0
155	0	1	28.20	2.87	1
156	0	0	25.20	2.00	1

157	0	1	25.30	1.90	2
158	1	1	25.70	2.10	0
159	1	1	29.30	3.23	12
160	1	1	23.80	1.80	6
161	0	1	27.40	2.90	3
162	0	1	26.20	2.02	2
163	0	0	28.00	2.90	4
164	0	0	28.40	3.10	5
165	0	0	33.50	5.20	7
166	0	1	25.80	2.40	0
167	1	1	24.00	1.90	10
168	0	0	23.10	2.00	0
169	0	1	28.30	3.20	0
170	0	1	26.50	2.35	4
171	0	1	26.50	2.75	7
172	1	1	26.10	2.75	3
173	0	0	24.50	2.00	0

[Sumber : An Introduction to Categorical Data Analysis, Alan Agresti 2007]

Keterangan:

Data telah diolah kembali oleh penulis, dimana variabel kategori warna kepiting betina (X_1) dan kondisi cangkang kepiting betina (X_2) telah dikategorikan ulang.

- Variabel X_1 pada data awal terdiri dari 4 kategori, yaitu

  1= cukup terang

  2= terang

  3= cukup gelap

  4= gelap

  Penulis mengategorikan variabel tersebut menjadi 2, dimana kategori 1 dan 2 menjadi kategori 0 yang menyatakan warna terang, sedangkan kategori 3 dan 4 menjadi kategori 1 yang menyatakan warna gelap.

- Variabel X_2 pada data awal terdiri dari 3 kategori, yaitu

  1= baik

  2= sebagian baik, sebagian rusak

3= rusak

Penulis mengategorikan variabel tersebut menjadi 2, dimana kategori 1 dan 2 menjadi kategori 0 yang menyatakan kondisi cangkang masih cukup baik, sedangkan kategori 3 menjadi kategori 1 yang menyatakan kondisi cangkang sudah tidak baik/rusak.

Lampiran 4. Algoritma Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif

```
function algoritmanegbinomial
load datayx.mat;
syms B0 B1 B2 B3 B4 a;
N=173;
lgp=0;
for i=1:N
    ar=0;
    for l=1:datayx(i,5)-1
        ar=ar+log(1+a*l);
    end
    lgpa(i)=ar-(log(factorial(datayx(i,5))))+(datayx(i,5)*...
            (B0+B1*datayx(i,1)+B2*datayx(i,2)+B3*datayx(i,3)+...
            B4*datayx(i,4)))-(((datayx(i,5)+1/a)*log(1+a*exp(B0...
            +B1*datayx(i,1)+B2*datayx(i,2)+B3*datayx(i,3)+...
            B4*datayx(i,4)))));
    lgp=lgp+lgpa(i);

end

B=[-3.237 0.258 0.001 0.159 -0.038 0.1]';
fprintf('B0:\n');
BM=B;
disp(BM);
err=1;

U=[diff(lgp,B0) diff(lgp,B1) diff(lgp,B2) diff(lgp,B3)
diff(lgp,B4) diff(lgp,a)]';
H=[diff(lgp,B0,2) diff(diff(lgp,B0),B1) diff(diff(lgp,B0),B2)
diff(diff(lgp,B0),B3) diff(diff(lgp,B0),B4)
diff(diff(lgp,B0),a);...
diff(diff(lgp,B1),B0) diff(lgp,B1,2) diff(diff(lgp,B1),B2)
diff(diff(lgp,B1),B3) diff(diff(lgp,B1),B4)
diff(diff(lgp,B1),a);...
diff(diff(lgp,B2),B0) diff(diff(lgp,B2),B1) diff(lgp,B2,2)
diff(diff(lgp,B2),B3) diff(diff(lgp,B2),B4)
diff(diff(lgp,B2),a);...
diff(diff(lgp,B3),B0) diff(diff(lgp,B3),B1) diff(diff(lgp,B3),B2)
diff(lgp,B3,2) diff(diff(lgp,B3),B4) diff(diff(lgp,B3),a);...
diff(diff(lgp,B4),B0) diff(diff(lgp,B4),B1) diff(diff(lgp,B4),B2)
diff(diff(lgp,B4),B3) diff(lgp,B4,2) diff(diff(lgp,B4),a);...
diff(diff(lgp,a),B0) diff(diff(lgp,a),B1) diff(diff(lgp,a),B2)
diff(diff(lgp,a),B3) diff(diff(lgp,a),B4) diff(lgp,a,2)];

i=4;
tic;
while norm(err,inf)>10^-5 && i-3<=4
    B=BM;
    NU=subs(U,{B0,B1,B2,B3,B4,a},{B(1),B(2),B(3),B(4),B(5),B(6)});
    for j=1:6
        for k=j:6
            NH(j,k)=subs(H(j,k),{B0,B1,B2,B3,B4,a},...
            {B(1),B(2),B(3),B(4),B(5),B(6)});
            NH(k,j)=NH(j,k);
```

```
            end
        end
        if ~isfloat(NH)
            NH=eval(NH);
        end
        fprintf('B%d:\n',i-3);
        det(NH)
        BM=B-(NH\NU);
        for j=1:N
            m=subs(exp(B0+B1*datayx(j,1)+B2*datayx(j,2)+...
            B3*datayx(j,3)+B4*datayx(j,4)),...
            {B0,B1,B2,B3,B4},{BM(1),BM(2),BM(3),BM(4),BM(5)});
            if ~isfloat(m)
                miu(j)=eval(m);
            else
                miu(j)=m;
            end
        end
        disp(BM);
        err=abs(B-BM);
        i=i+1;
    end

    if ~isfloat(NH)
        NH = eval(NH);
    end

    fprintf('VB:\n');
    disp(-inv(NH));
    fprintf('NH:\n');
    disp(NH);
    fprintf('lgp:\n');
    disp(subs(lgp,{B0,B1,B2,B3,B4,a},{BM(1),BM(2),BM(3),BM(4),BM(5),BM
    (6)}));
```

Lampiran 5. Algoritma Nilai Fungsi Likelihood Model Binomial Negatif untuk Uji Rasio Likelihood

```
clear;
load datayx.mat;
syms B0 a;
N=173;
logn=0;
for i=1:N
    ar=0;
    for l=1:datayx(i,5)-1
        ar=ar+log(1+a*l);
    end
    logn1(i)=ar-(log(factorial(datayx(i,5))))+(datayx(i,5)*B0)-...
        ((datayx(i,5)+1/a)*log(1+a*exp(B0)));
    logn=logn+logn1(i);
end

fprintf('likelihood dibawah asumsi H0 benar :\n');
disp(subs(logn,{B0,a},{-3.8868,0.9396}));
```

Lampiran 6. Algoritma Penaksiran Parameter Model Regresi Binomial Negatif dengan Variabel Penjelas ke-3

```
function algoritmanegbinomial
load data1.mat;
syms B0 B3 a;
N=173;
lgp=0;
for i=1:N
    ar=0;
    for l=1:data1(i,2)-1
        ar=ar+log(1+a*l);
    end
    lgpa(i)=ar-
(log(factorial(data1(i,2))))+data1(i,2)*(B0+B3*data1(i,1))-
((data1(i,2)+1/a)*log(1+a*exp(B0+B3*data1(i,1))));
    lgp=lgp+lgpa(i);

end

B=[-3.237 0.159 0.1]';
fprintf('B0:\n');
BM=B;
disp(BM);
err=1;

U=[diff(lgp,B0) diff(lgp,B3) diff(lgp,a)]';
H=[diff(lgp,B0,2) diff(diff(lgp,B0),B3) diff(diff(lgp,B0),a);...
diff(diff(lgp,B3),B0) diff(lgp,B3,2) diff(diff(lgp,B3),a);...
diff(diff(lgp,a),B0) diff(diff(lgp,a),B3) diff(lgp,a,2)];

i=4;
tic;
while norm(err,inf)>10^-5 && i-3<=4
    B=BM;
    NU=subs(U,{B0,B3,a},{B(1),B(2),B(3)});
    for j=1:3
        for k=j:3
            NH(j,k)=subs(H(j,k),{B0,B3,a},...
            {B(1),B(2),B(3)});
            NH(k,j)=NH(j,k);
        end
    end
    if ~isfloat(NH)
        NH=eval(NH);
    end
    fprintf('B%d:\n',i-3);
    det(NH)
    BM=B-(NH\NU);
    for j=1:N
        m=subs(exp(B0+B3*data1(j,1)),...
        {B0,B3},{BM(1),BM(2)});
        if ~isfloat(m)
            miu(j)=eval(m);
        else
            miu(j)=m;
```

```
            end
        end
        disp(BM);
        err=abs(B-BM);
        i=i+1;
    end

    if ~isfloat(NH)
        NH = eval(NH);
    end

    fprintf('VB:\n');
    disp(-inv(NH));
    fprintf('NH:\n');
    disp(NH);
```

Lampiran 7. Fungsi Unit *Cumulant*

Misalkan variabel acak Y memiliki distribusi probabilitas yang bergantung pada parameter θ yang dianggap sebagai parameter lokasi dan terdapat parameter lain yaitu ϕ yang disebut parameter pengganggu, maka distribusi dari Y merupakan anggota dari keluarga eksponensial jika fungsi probabilitasnya memiliki bentuk sebagai berikut:

$$f(y;\theta,\phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{\alpha(\phi)} + c(y;\phi)\right\}$$

dimana θ merupakan parameter kanonik, $\alpha(\phi)$ merupakan parameter skala, $b(\theta)$ disebut fungsi unit *cumulant*. Fungsi unit *cumulant* ini dapat digunakan untuk menghitung momen dari Y. $b(\theta)$ sendiri sebenarnya adalah fungsi dalam μ karena θ merupakan fungsi dalam μ atau dapat dikatakan $\theta = \tau^{-1}(\mu)$.

Berdasarkan Clark dan Thayer (2004), *Cumulant Generating Function*, $K(t)$, didefinisikan sebagai $\ln[M(t)]$, dimana $M(t)$ merupakan MGF (telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 2.2), dan *cumulant* (κ_r) adalah:

$$\kappa_r = \left.\frac{\partial^r K(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0}$$

Berdasarkan Clark dan Thayer (2004), hubungan antara empat *cumulant* pertama dengan momen adalah sebagai berikut:

$$\kappa_1 = E[Y^1] = \mu$$
$$\kappa_2 = E[(Y-\mu)^2] = Var(Y)$$
$$\kappa_3 = E[(Y-\mu)^3]$$
$$\kappa_4 = E[(Y-\mu)^4] - 3 \cdot Var(Y)^2$$

Cumulant Generating Function untuk keluarga eksponensial dapat dinyatakan ke dalam bentuk berikut:

$$K(t) = \frac{b(\theta + a(\phi)\cdot t) - b(\theta)}{a(\phi)}$$

sehingga

$$\kappa_r = b^{(r)}(\theta)\cdot a(\phi)^{r-1} \text{ dimana } b^{(r)}(\theta) = \frac{\partial^r b(\theta)}{\partial \theta^r}$$

Karena $\theta = \tau^{-1}(\mu)$ maka turunan dari $b(\theta)$ merupakan fungsi dalam μ, sehingga hubungan *cumulant* dengan momen untuk keluarga eksponensial yang diperoleh adalah:

- Mean = $E[Y;\theta] = b'(\theta) = \mu$
- Variansi = $Var[Y;\theta] = b''(\theta)\cdot a(\phi) = V(\mu)\cdot(\phi)$
- Skewness $= \dfrac{b^{(3)}(\theta)\cdot a(\phi)^2}{Var[Y;\theta]^3} = \dfrac{d}{du}[V(\mu)]\cdot\sqrt{\dfrac{a(\phi)}{V(\mu)}}$
- Kurtosis $= 3 + \dfrac{b^{(4)}(\theta)\cdot a(\phi)^3}{Var[Y;\theta]^2} = 3 + \left[\dfrac{d^2}{d\mu^2}[V(\mu)]V(\mu) + \left(\dfrac{d}{d\mu}V(\mu)\right)^2\right]\cdot\dfrac{a(\phi)}{V(\mu)}$

(Clark dan Thayer, 2004).