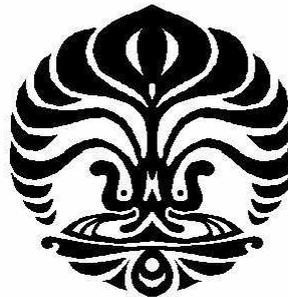


Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi Lambat

Tesis

Diajukan sebagai salah satu syarat
untuk meraih gelar Magister Sains
dalam Ilmu Fisika

Kasmudin
0706171680



Program Magister Ilmu Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia
Depok
2009

Lembar Persetujuan

Judul Tesis : Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi Lambat
Nama : Kasmudin
NPM : 0706171680

Tesis ini telah diperiksa dan disetujui oleh Dosen Pembimbing dan Penguji.

Depok, 20 November 2009

Mengesahkan,

Pembimbing

Dr. Anto Sulaksono

Penguji I

Penguji II

Penguji III

Dr. Terry Mart

Dr. Agus Salam

Dr. Imam Fachruddin

Ketua Program Magister Ilmu Fisika FMIPA UI

Dr. Dedi Suyanto

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan tesis ini serta pada tanggal 20 November 2009 berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian dari persyaratan yang diperlukan untuk meraih gelar Magister Sains (M.Si.) dalam Program Magister Ilmu Fisika, Kekhususan Fisika Murni dan Terapan, FMIPA UI.

Penelitian dan penulisan tesis ini dapat terlaksana dan terselesaikan dengan baik karena adanya bimbingan, bantuan, dukungan, dan motivasi dari berbagai pihak yang semoga Allah SWT membalas semua kebaikan mereka. Untuk itu pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

- Dr Anto Sulaksono selaku Pembimbing atas segala bimbingan, diskusi, motivasi, dan perhatiannya dengan penuh kesabaran yang menyita banyak waktu, tenaga, dan pikiran. Juga atas pinjaman buku-buku yang sangat berguna dan bantuan pengerjaan pemrograman dengan Fortran;
- Dr. Terry Mart, Dr. Agus Salam, dan Dr. Imam Fachruddin selaku Penguji I, Penguji II, dan Penguji III atas diskusi, saran, dan masukan yang diberikan; Dr. Dedi Suyanto selaku Ketua Program Magister Ilmu Fisika FMIPA UI dan Ketua Sidang Tesis penulis;
- Ibu Maryati selaku ibunda dari penulis yang senantiasa memberikan kasih sayang, dukungan, dan doa untuk kesuksesan penulis;
- Fatma Irawati selaku istri penulis atas bantuan, dukungan, pengertian, kesabaran, dan doanya;

- Kepala BATAN, Kepala PRPN, Kepala Pusdiklat, dan Kepala BSDM yang telah memberikan ijin tugas belajar kepada penulis di Program Magister Ilmu Fisika, Kekhususan Fisika Murni dan Terpan, FMIPA UI;
- Kakak Kusmiyati selaku kakanda penulis yang selalu mendukung dan men-doakan kesuksesan penulis;
- Mas Karno dan rekan-rekan di Laboratorium Komputer Cisco Departemen Fisika FMIPA UI atas bantuan menginstallkan Linux Ubuntu dan software-software lain yang sangat berguna untuk proses pengerjaan tesis penulis;
- Mbak Ida dan seluruh Staf Pengajar Bimbingan Belajar PASCAL atas du-dukungan dan doanya;
- Siti Nur Utami, Rayi Saraswati, Fatma Yulisa, Agnes Aurora, dan Novita-sari di Bimbingan Belajar PASCAL atas bantuannya membacakan konsep (naskah) tesis atau editan tesis untuk diketik dalam Latex atau pengetikan tabel dalam Latex;
- Pak Madali atas bantuannya selama sidang tesis;
- Pak Parman yang selalu siap membantu mengurus persoalan administrasi;
- Semua pihak yang telah membantu kelancaran penelitian dan penulisan tesis ini hingga selesai.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kemajuan ilmu pengetahu-an khususnya di bidang ilmu fisika dan semoga bermanfaat juga bagi pihak-pihak lain yang memerlukannya.

Depok, 20 November 2009

Penulis

Abstrak

Dipelajari sifat-sifat bintang neutron statik dan berotasi dengan menggunakan pendekatan medan rata-rata relativistik dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06. Tekanan materi nuklir pada kerapatan tinggi yang diperoleh dengan menggunakan parameter set NL3 bersifat paling *stiff* sedangkan FSUGZ06 bersifat paling *soft*. Relasi massa dan jari-jari bintang neutron diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) dengan input persamaan keadaan, baik dengan atau tanpa *crust*. Prediksi sifat-sifat bintang neutron statik berdasarkan model medan rata-rata relativistik menghasilkan massa maksimum berkisar antara $1,720 M_{\odot}$ - $2,771 M_{\odot}$, sedangkan jari-jari antara 10,963 km - 13,356 km, juga kerapatan jumlah barion pada titik saturasi antara $0,145 \text{ fm}^{-3}$ - $0,151 \text{ fm}^{-3}$. Kerapatan jumlah barion di pusat bintang neutron pada saat massanya maksimum berkisar antara $0,668 \text{ fm}^{-3}$ - $1,181 \text{ fm}^{-3}$ dan kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari materi homogen ke materi inhomogen antara $0,049 \text{ fm}^{-3}$ - $0,074 \text{ fm}^{-3}$, sedangkan tekanan materi nuklir pada daerah transisi tersebut berkisar antara $0,177 \text{ MeV fm}^{-3}$ - $0,368 \text{ MeV fm}^{-3}$. Prediksi momen inersia, momen kuadrupol, eliptisitas equator, dan amplitudo regangan gelombang gravitasi juga dipelajari.

Kata kunci: bintang neutron, medan rata-rata relativistik, persamaan keadaan, parameter set, persamaan TOV.

Abstract

Static and rotating neutron star properties prediction based on relativistic mean-field (RMF) approximation using NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, and FSUGZ06 parameter sets have been studied. Pressure of nuclear matter at high densities predicted by NL3 parameter set is the stiffest, but FSUGZ06 is the softest. The mass and radius relation of neutron stars are obtained by solving Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation where the input is equation of state of neutron star matter and with or without taking into account the neutron star crust. RMF parameter sets predict the value of maximum mass between $1,720 M_{\odot}$ - $2,771 M_{\odot}$, while the radius between 10,963 km - 13,356 km, as well as the value of baryon number density at saturation point between $0,145 \text{ fm}^{-3}$ - $0,151 \text{ fm}^{-3}$. The value of baryon number density at central of neutron star with maximum mass is between $0,668 \text{ fm}^{-3}$ - $1,181 \text{ fm}^{-3}$ and the baryon number density at transition region from core to crust is between $0,049 \text{ fm}^{-3}$ - $0,074 \text{ fm}^{-3}$, while the corresponding pressure is between $0,177 \text{ MeV fm}^{-3}$ - $0,368 \text{ MeV fm}^{-3}$. The neutron stars inertia moment, quadrupole moment, equatorial ellipticity, and gravitational-wave strain amplitude predicted by RMF model also have been discussed.

Keywords: neutron star, relativistic mean-field, equation of state, parameter set, TOV equation.

Daftar Isi

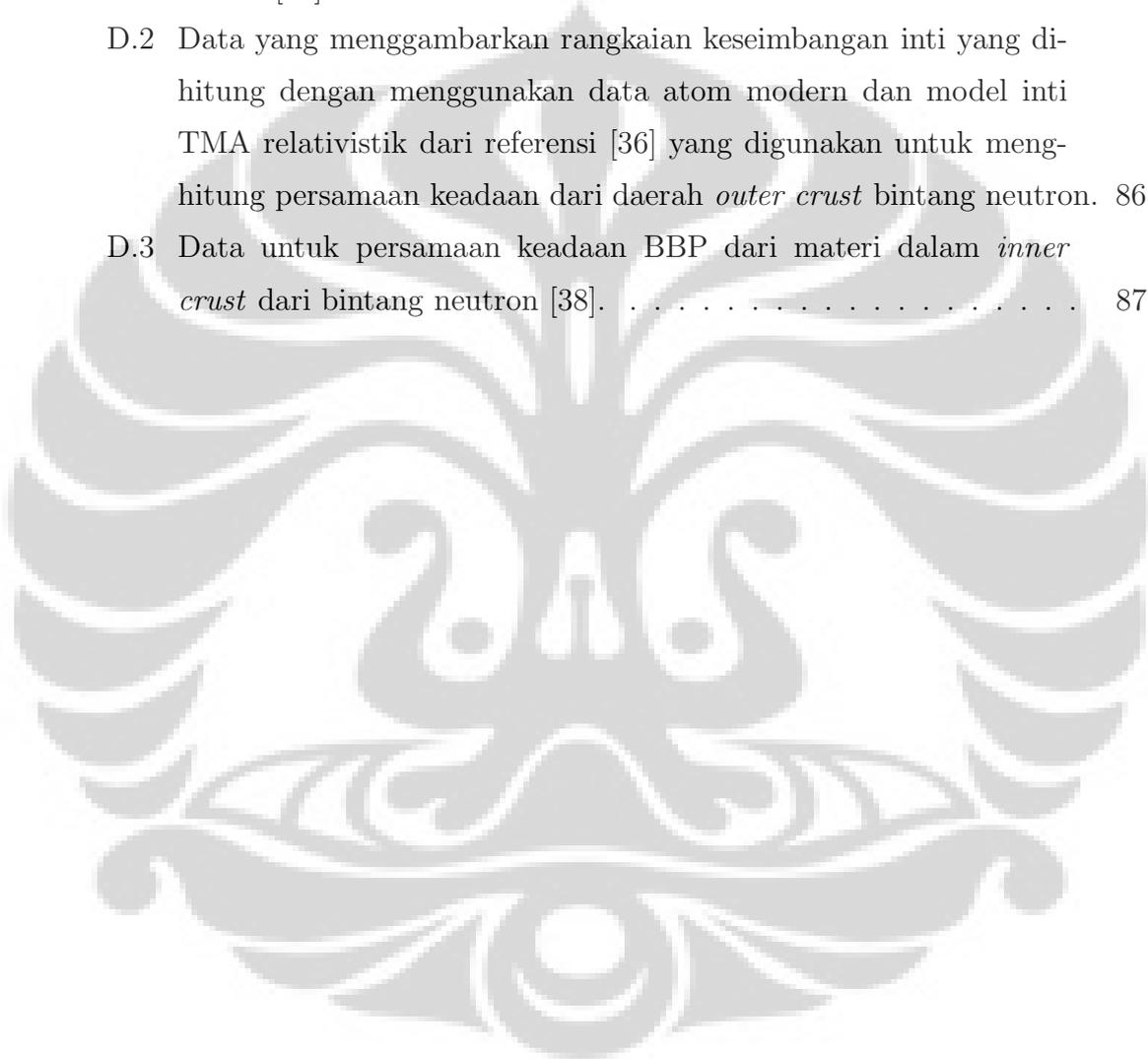
Kata Pengantar	iii
Abstrak	v
Abstract	vi
Daftar Isi	vii
Daftar Tabel	ix
Daftar Gambar	xi
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	4
1.3 Sistematika Penulisan	6
2 Teori	7
2.1 Bintang Neutron	7
2.1.1 Evolusi Bintang	7
2.1.2 Bintang Neutron Statik	9
2.1.3 Bintang Neutron Berotasi	11
2.2 Quantum Hadrodynamics (QHD)	13
2.2.1 Kerapatan Lagrangian	13
2.2.2 Pendekatan Medan Rata-rata Relativistik	15
2.2.3 Parameter Set	19
2.3 Gambaran Materi Bintang Neutron	20

2.3.1	Persamaan Keadaan untuk Barion, Lepton, dan Meson	20
2.3.2	Keseimbangan β	24
2.3.3	Efek <i>Crust</i>	27
3	Hasil dan Pembahasan	32
3.1	Persamaan Keadaan Bintang Neutron	32
3.2	Sifat-sifat Bintang Neutron Statik	36
3.3	Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi	49
4	Kesimpulan	55
A	Satuan dan Konstanta	57
B	Penurunan Persamaan TOV	58
B.1	Simbol Christoffel	60
B.2	Tensor Kurvatur Riemann-Christoffel	60
B.3	Identitas Bianchi	61
B.4	Tensor Ricci dan Kurvatur Skalar	61
B.5	Tensor Einstein	61
B.6	Tensor Energi-Momentum	62
B.7	Persamaan Medan Einstein	64
B.8	Bintang Relativistik	65
B.8.1	Solusi Schwarzschild	67
B.8.2	Persamaan TOV	69
C	Penyelesaian Integral	79
C.1	Kerapatan Energi	79
C.2	Tekanan	82
C.3	Medan Meson Skalar	84
D	Data untuk Mereproduksi Persamaan Keadaan di <i>crust</i>	85
E	Tabel Massa Bintang Neutron	88

Daftar Tabel

1.1	Hasil evolusi bintang bergantung pada massa awal bintang [7].	2
2.1	Parameter set yang digunakan dalam penelitian ini [32].	19
3.1	Prediksi sifat-sifat bintang neutron statik dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta memperhitungkan efek <i>crust</i> . M_{max} adalah massa maksimum bintang neutron, $R (M_{max})$ adalah jari-jari bintang neutron ketika massanya maksimum, $R (1, 4M_{\odot})$ adalah jari-jari kanonikal bintang neutron, $R_{\infty} (1, 4M_{\odot})$ adalah jari-jari radiasi bintang neutron, $z (M_{max})$ adalah <i>redshift</i> bintang neutron ketika massanya maksimum, ρ_0 adalah kerapatan jumlah barion pada titik saturasi, ρ_c^{max} adalah kerapatan jumlah barion di pusat bintang neutron ketika massanya maksimum, ρ_{DU} dan M_{DU} adalah kerapatan jumlah barion dan massa minimum bintang neutron agar terjadi proses <i>direct Urca</i> , ρ_t , P_t , dan ϵ_t adalah kerapatan jumlah barion, tekanan, dan kerapatan energi di daerah transisi dari inti ke <i>crust</i>	43
3.2	Momen inersia maksimum (I_{max}) yang dicapai oleh setiap parameter set dan massa bintang neutron M yang bersesuaian.	49
3.3	Sifat-sifat pulsar yang dijadikan objek dalam penelitian ini. Kolom pertama menunjukkan nama atau identitas pulsar, kolom kedua menunjukkan frekuensi rotasi pulsar, kolom ketiga menunjukkan massa pulsar (jika diketahui), kolom keempat menunjukkan jarak pulsar ke bumi, kolom kelima atau terakhir menunjukkan acuan atau referensi yang dipakai.	53

A.1	Konstanta yang digunakan dalam tesis ini [50].	57
D.1	Data yang menggambarkan rangkaian keseimbangan inti dari referensi [36] yang digunakan untuk mereproduksi persamaan keadaan yang asli dari daerah <i>outer crust</i> bintang neutron seperti dalam referensi [37].	85
D.2	Data yang menggambarkan rangkaian keseimbangan inti yang dihitung dengan menggunakan data atom modern dan model inti TMA relativistik dari referensi [36] yang digunakan untuk menghitung persamaan keadaan dari daerah <i>outer crust</i> bintang neutron.	86
D.3	Data untuk persamaan keadaan BBP dari materi dalam <i>inner crust</i> dari bintang neutron [38].	87



Daftar Gambar

1.1	Komposisi yang mungkin dari bintang neutron [13].	4
2.1	Tahap-tahap utama evolusi bintang neutron [14].	9
3.1	Hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm ⁻³ terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF, EOS (PNM, NSM, SNM), dan parameter set FSUGold.	33
3.2	Hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm ⁻³ terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.	34
3.3	Relasi massa bintang neutron M dalam M_\odot terhadap jari-jarinya R dalam km untuk persamaan keadaan gas Fermi-TOV (relativitas umum) dan gas Fermi-Newton.	37
3.4	Relasi massa bintang neutron M dalam M_\odot terhadap jari-jarinya R dalam km untuk persamaan keadaan neutron berinteraksi (EOS PNM) dengan parameter set FSUGold dan untuk persamaan keadaan neutron tidak berinteraksi (EOS gas Fermi-TOV).	38
3.5	Relasi massa bintang neutron M dalam M_\odot terhadap jari-jarinya R dalam km dengan menggunakan EOS PNM dan parameter set FSUGold, EOS NSM dan parameter set FSUGold tanpa <i>crust</i> , dan EOS NSM dan parameter set FSUGold dengan memperhitungkan <i>crust</i>	40

3.6	Relasi massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam km dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan memperhitungkan <i>crust</i> . Tiga kurva yang lain adalah kurva-kurva pembatas berlakunya relasi M-R bintang neutron tersebut, yaitu kausalitas ($R > 2,9GM/c^2$), $\Delta I/I = 0,014$, dan rotasi. . . .	42
3.7	Hubungan massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap <i>redshift</i> z yang dihitung dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06, serta memperhitungkan efek <i>crust</i>	44
3.8	Hubungan jari-jari bintang neutron R dalam satuan km terhadap <i>redshift</i> z yang dihitung dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta memperhitungkan <i>crust</i>	45
3.9	Hubungan massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	46
3.10	Hubungan jari-jari bintang neutron R dalam km terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	47
3.11	Hubungan massa maksimum bintang neutron M_{\max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke <i>crust</i> ρ_t dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	48
3.12	Hubungan massa maksimum bintang neutron M_{\max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke <i>crust</i> ρ_t dalam fm^{-3} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	48

3.13	Hubungan momen inersia I ($\times 10^{45}$ g cm ²) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	49
3.14	Hubungan momen kuadrupol Φ_{22} ($\times 10^{39}$ g cm ²) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	50
3.15	Hubungan eliptisitas equator ε ($\times 10^{-6}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.	51
3.16	Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J2124-3358 dengan frekuensi rotasi $\nu = 202,79$ Hz dan $r = 0,25$ kpc.	53
3.17	Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J1024-0719 dengan frekuensi rotasi $\nu = 193,72$ Hz dan $r = 0,35$ kpc.	54
3.18	Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J0437-4715 dengan frekuensi rotasi $\nu = 173,91$ Hz dan $r = 0,18$ kpc.	54
E.1	Tabel massa bintang neutron [56].	88

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Penemuan neutron oleh James Chadwick (1891 - 1974) pada tahun 1932 mendorong para ahli fisika memprediksi eksistensi dari bintang neutron. Perhitungan secara teori dari bintang neutron pertama kali dilakukan oleh Oppenheimer dan Volkoff pada tahun 1939 yang mengasumsikan bahwa bintang neutron berada dalam keadaan gas Fermi neutron yang diikat oleh gravitasi [1]. Hasil perhitungannya adalah bintang neutron memiliki massa maksimum $\sim 0,7 M_{\odot}$, dimana M_{\odot} adalah massa matahari, kerapatan di pusat massanya $\sim 6 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$, dan jari-jarinya $\sim 10 \text{ km}$. Untuk perbandingan, kerapatan materi nuklir di dalam sebuah inti besar seperti ^{208}Pb adalah $\sim 0,16 \text{ nukleon/fm}^3$ atau $\sim 2,7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ [2]. Prediksi massa maksimum dari bintang neutron adalah lebih kecil dari *limit massa Chandrasekhar* sebesar $1,4 M_{\odot}$ untuk katai putih (*white dwarf*) yang tersusun dari inti besi dan mempunyai kerapatan $\sim 10^9 \text{ g/cm}^3$ [3].

Pada tahun 1934, W. Baade dan F. Zwicky [1] berpendapat bahwa bintang neutron dibentuk dari sisa ledakan *supernova*, dimana sebagian besar energinya dilepaskan oleh bintang dan intinya kolaps membentuk bintang neutron dengan massa maksimum lebih besar dari *limit massa Chandrasekhar* tersebut. Pada tahun 1967, Jocelyn Bell dan Anthony Hewish [4] menemukan suatu sinyal unik (suatu pulsa teratur yang tajam) dengan periode 1,34 detik yang kemudian disebut pulsar. Kaitan antara pulsar dan bintang neutron pertama kali diajukan oleh Thomas Gold, beberapa waktu setelah pulsar ditemukan [5]. Gold mengemukakan bahwa penyusutan sebuah bintang yang berotasi menjadi sebuah bintang

neutron haruslah menyebabkan bintang neutron berotasi lebih cepat sebagai akibat adanya hukum kekekalan momentum sudut ($L = I\omega = \text{kekal}$) yang harus dipenuhi, yaitu jika momen inersia I turun karena adanya penyusutan, maka kecepatan sudut rotasi ω naik. Medan magnet kuat dari objek yang berotasi dengan cepat akan menjebak setiap partikel bermuatan yang dipancarkan dan mempercepat mereka hingga mencapai laju yang tinggi, sehingga mereka akan memancarkan radiasi. Pada bintang neutron yang berotasi, berkas radiasi yang dipancarkan ini akan menyapu ruang sekelilingnya termasuk bumi. Selang waktu antara dua pulsa berurutan adalah setengah periode rotasi bintang neutron. Sampai sekarang sudah ditemukan lebih dari 1500 pulsar [6].

Dalam bintang stabil, tekanan radiasi termonuklir hasil reaksi fusi dan gaya gravitasi akan seimbang sehingga ukuran bintang berada dalam keadaan normal. Akan tetapi ketika tekanan radiasi hilang akibat habisnya bahan bakar untuk proses fusi, maka gaya gravitasi akan menyebabkan bintang kolaps. Hasil akhir dari kolapsnya bintang tersebut di akhir hidupnya bergantung pada massa inti dari bintang semula [5].

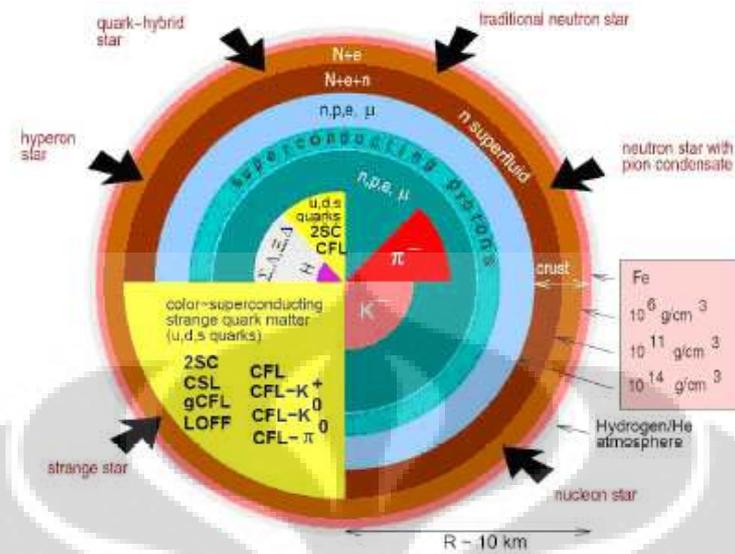
Bintang dengan massa inti akhir lebih kecil dari *limit massa Chandrasekhar* sebesar $1,4 M_{\odot}$ akan menjadi katai putih (*white dwarf*) [7]. Bintang dengan massa inti akhir antara *limit massa Chandrasekhar* yaitu $1,4 M_{\odot}$ dan *limit massa Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV) yaitu $3 M_{\odot}$ akan menjadi bintang neutron (*neutron star*) [8]. Sedangkan bintang dengan massa inti akhir lebih besar dari limit massa TOV akan menjadi "bintang quark" [9]. Sebuah lubang hitam (*black hole*) dihasilkan oleh bintang dengan massa inti akhir jauh lebih besar dari limit massa TOV [10].

Tabel 1.1: Hasil evolusi bintang bergantung pada massa awal bintang [7].

Massa awal	Tahap akhir evolusi	Hasil akhir	Massa akhir
$< 6 M_{\odot}$	nebula planetary	katai putih	$< 1,4 M_{\odot}$
$6 - 9 M_{\odot}$	supernova	katai putih/ bintang neutron	$< 1,4 M_{\odot}$
$9 - 40 M_{\odot}$	supernova	bintang neutron	$< 2 - 3 M_{\odot}$
$> 40 M_{\odot}$	supernova	lubang hitam	$> 2 - 3 M_{\odot}$

Perbedaan utama antara inti atom dan bintang neutron adalah bahwa inti atom diikat hanya oleh gaya kuat nuklir, sedangkan bintang neutron juga diikat oleh gaya gravitasi. Energi ikat gravitasi dari bintang neutron adalah sekitar 10 % dari massa bintang neutron, sedangkan energi ikat inti oleh gaya kuat nuklir yang paling besar dimiliki oleh inti atom ^{56}Fe sebesar 9 MeV/nukleon atau setara dengan 1 % dari massa inti ^{56}Fe [11]. Karena persentase energi ikat gravitasi dari bintang neutron besarnya sekitar sepuluh kali dari energi ikat inti ^{56}Fe , berarti komposisi dan keberadaan partikel penyusun bintang neutron berbeda dengan komposisi dan keberadaan partikel dalam inti ^{56}Fe . Ketika daur fusi bintang berakhir dengan terbentuknya unsur ^{56}Fe dan massa akhir evolusi lebih besar dari *limit Chandrasekhar*, maka gaya gravitasi akan mampu mengatasi interaksi degenerasi yang disebabkan harus terpenuhinya asas larangan Pauli untuk elektron. Hal ini akan memaksa terjadinya reaksi inversi beta, yaitu sebuah proton menangkap sebuah elektron menghasilkan sebuah neutron dan membebaskan sebuah neutrino [5]. Reaksi inversi beta ini akan mengubah hampir semua proton dan elektron dari produk akhir evolusi bintang dengan massa di atas *limit Chandrasekhar* menjadi neutron sehingga hasil akhir evolusi bintang tersebut dikenal sebagai bintang neutron.

Untuk menjelaskan keadaan materi bintang neutron dengan kerapatan yang sangat tinggi akibat gaya gravitasi perlu digunakan teori relativitas umum [11]. Persamaan TOV menggambarkan keadaan bintang neutron statik dengan asumsi simetri bola dipenuhi. Persamaan ini diturunkan dari persamaan medan Einstein [11]. Mengenai penurunannya dapat dilihat di Lampiran B. Untuk menyelesaikan persamaan TOV diperlukan input berupa persamaan keadaan nuklir (*nuclear equation of state*), yaitu relasi antara tekanan dan kerapatan energi nukleon dan lepton di dalam bintang neutron. Jika diasumsikan bahwa bintang neutron terdiri dari materi yang tersusun dari nukleon dan lepton, model-model nuklir seperti medan rata-rata relativistik (*relativistic mean-field/RMF*), Skyrme Hartree-Fock (SHF), dan lain-lain dapat digunakan untuk menentukan persamaan keadaan untuk bagian dalam dari bintang neutron [11, 12, 3]. Gambar 1.1 menunjukkan komposisi yang mungkin dari bintang neutron.



Gambar 1.1: Komposisi yang mungkin dari bintang neutron [13].

Perbedaan prediksi dari tiap model yang dapat digunakan untuk bagian dalam bintang neutron dapat diuji dengan membandingkan hasil perhitungan, khususnya hubungan antara massa dan jari-jari bintang neutron dengan data-data pengamatan. Dengan proses ini, model-model yang sesuai dapat diidentifikasi kemampuannya untuk menggambarkan materi padat dan dingin dari bintang neutron dengan baik. Secara umum, model-model nuklir yang realistis adalah kompleks dan sulit untuk diselesaikan secara eksak, oleh karena itu dalam mengaplikasikan model-model ini perlu dilakukan pendekatan yang baik. Dalam penelitian ini akan digunakan persamaan keadaan materi bintang neutron dari model materi nuklir yang disebut *quantum hadrodynamics* (QHD) dengan menggunakan pendekatan RMF.

1.2 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah mempelajari sifat-sifat bintang neutron, baik sifat-sifat bintang neutron statik (bintang neutron diam) maupun sifat-sifat bintang neutron dinamik (bintang neutron berotasi). Mula-mula akan dipelajari persamaan keadaan (*equation of state*/EOS) bintang neutron, yaitu membandingkan hubungan antara tekanan materi nuklir di dalam bintang neutron terhadap ke-

rapatan jumlah nukleonnya dengan menggunakan parameter set RMF FSUGold untuk persamaan keadaan (EOS): *pure neutron matter* (PNM) yaitu bintang neutron dianggap tersusun dari neutron saja yang saling berinteraksi, *symmetric nuclear matter* (SNM) yaitu bintang netron dianggap tersusun dari neutron dan proton dalam jumlah sama yang saling berinteraksi, dan *neutron star matter* (NSM) yaitu bintang neutron tersusun dari neutron, proton, elektron, dan muon yang saling berinteraksi dan dalam keseimbangan β . Kemudian dilanjutkan dengan membandingkan hubungan antara tekanan materi nuklir di dalam bintang neutron terhadap kerapatan jumlah nukleonnya dengan menggunakan EOS NSM dari model RMF yang dihitung dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.

Adapun untuk bintang neutron statik, yang akan dipelajari adalah membandingkan relasi massa dan jari-jari bintang neutron menggunakan EOS berdasarkan asumsi gas Fermi (bintang neutron dianggap tersusun dari gas neutron saja yang tidak saling berinteraksi) baik dengan menggunakan persamaan TOV maupun dengan persamaan Newton (faktor-faktor koreksi dari relativitas umum dihilangkan). Kemudian membandingkan relasi massa dan jari-jari bintang neutron dengan EOS gas Fermi dan EOS PNM menggunakan parameter set FSUGold. Kemudian membandingkan relasi massa dan jari-jari bintang neutron dari EOS PNM, EOS NSM, dan EOS NSM yang memperhitungkan *crust*. Masing-masing dihitung dengan parameter set FSUGold dan persamaan TOV. Yang dimaksud *crust* di sini adalah lapisan kulit inhomogen dari bintang neutron. Kemudian juga dipelajari relasi massa dan jari-jari bintang neutron menggunakan persamaan TOV dengan EOS NSM yang memperhitungkan *crust* dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06. Yang terakhir, adalah membandingkan relasi massa bintang neutron terhadap kerapatan nukleonnya dan relasi jari-jari bintang neutron terhadap kerapatan nukleonnya berdasarkan hasil EOS NSM dengan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06, termasuk secara khusus membandingkan relasi massa maksimum bintang neutron terhadap kerapatan nukleonnya di daerah transisi fase dari inti ke *crust*. Perhitungan juga dilakukan dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.

Sedangkan untuk bintang neutron berotasi yang dipelajari adalah membandingkan hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi dari bintang neutron terhadap massanya, membandingkan hubungan momen inersia (ukuran kemampuan untuk mempertahankan kecepatan sudut rotasinya) dari bintang neutron terhadap massanya, membandingkan hubungan momen kuadrupol (distribusi massa tidak simetri bola) dari bintang neutron terhadap massanya, dan membandingkan hubungan eliptisitas equator (ukuran penyimpangan terhadap bentuk lingkaran di equatornya) dari bintang neutron terhadap massanya yang semuanya dilakukan dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.

1.3 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari tesis ini terdiri atas empat bab dan lima lampiran. Bab 1 Pendahuluan, berisi tentang Latar Belakang, Tujuan, dan Sistematika Penulisan. Bab 2 Teori, menjelaskan secara singkat teori-teori tentang: Bintang Neutron (Evolusi Bintang Neutron, Bintang Neutron Statik, dan Bintang Neutron Berotasi), *Quantum Hadrodynamics* (Kerapatan Lagrangian, Pendekatan Medan Rata-rata Relativistik, dan Parameter Set), dan Gambaran Materi Bintang Neutron (Persamaan Keadaan, Keseimbangan β , dan Efek *Crust*). Bab 3 Hasil dan Pembahasan, membahas hasil-hasil penelitian dalam tesis ini, yaitu tentang Persamaan Keadaan Bintang Neutron, Sifat-sifat Bintang Neutron Statik, dan Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi. Bab 4 Kesimpulan, berisi tentang kesimpulan dari tesis ini. Lampiran berisi tentang: Konversi Satuan dan Konstanta, Penurunan Persamaan TOV, Penyelesaian Integral (Kerapatan Energi, Tekanan, Medan Meson Skalar), Data untuk Mereproduksi Persamaan Keadaan di *Crust*, dan Tabel Massa Bintang Neutron. Daftar Pustaka yang digunakan sebagai acuan atau referensi dalam penulisan tesis ini ada di bagian akhir.

Bab 2

Teori

2.1 Bintang Neutron

2.1.1 Evolusi Bintang

Materi purba yang dihasilkan dari proses kelahiran jagat raya terdiri atas 75% awan gas hidrogen dan 25% awan gas helium, sedangkan semua unsur kimia lainnya akan terbentuk oleh berbagai reaksi inti pada bagian dalam bintang. Karena pengaruh gaya gravitasi, maka awan hidrogen dan helium menyusut sehingga energi potensial gravitasi berkurang akibat jarak rata-rata antaratomnya berkurang. Untuk mengimbangi agar energi totalnya kekal, maka energi kinetiknya harus bertambah, di mana pertambahannya diikuti dengan kenaikan suhu.

Sewaktu awan itu terus menyusut, suhu di sekitar pusatnya naik dengan cepat sekali. Keadaan akhirnya suhu dalam rentang $10^7 K$ tercapai dan energi kinetik termal proton cukup besar untuk melampaui tolakan Coulomb antara mereka, sehingga reaksi inti (fusi) antarproton menjadi helium mulai berlangsung, dan lahirlah sebuah bintang. Ini terjadi setelah penyusutan berlangsung sekitar 10^6 tahun. Bintang sekarang memasuki masa stabil dan penyusutan selanjutnya dihadang oleh tekanan keluar radiasi (foton) yang menjalar dari pusat ke permukaan bintang. Bintang terus membangkitkan energi dalam reaksi fusi pada tingkat laju reaksi yang ditentukan oleh massanya. Untuk bintang seperti matahari, masa ini bertahan kurang lebih selama 10^{10} tahun, sedangkan untuk bintang yang lebih besar massanya (10 hingga 100 kali massa matahari) pembakarannya hanya bertahan sekitar 10^7 tahun.

Ketika semua hidrogen diubah menjadi helium dalam reaksi fusi, penyusutan karena gravitasi kembali berlangsung dan suhu bintang naik dari sekitar $10^7 K$ menjadi sekitar $10^8 K$. Pada suhu ini, tersedia energi kinetik termal yang cukup untuk melawan tolakan Coulomb antara inti helium, dan memungkinkan fusi helium mulai berlangsung. Dalam proses ini, tiga buah inti ${}^4\text{He}$ diubah menjadi ${}^{12}\text{C}$ melalui proses dua tahap berikut:



Begitu cukup banyak ${}^{12}\text{C}$ yang dibentuk dalam bintang, reaksi partikel α atau inti ${}^4\text{He}$ lainnya berpeluang terjadi, seperti:

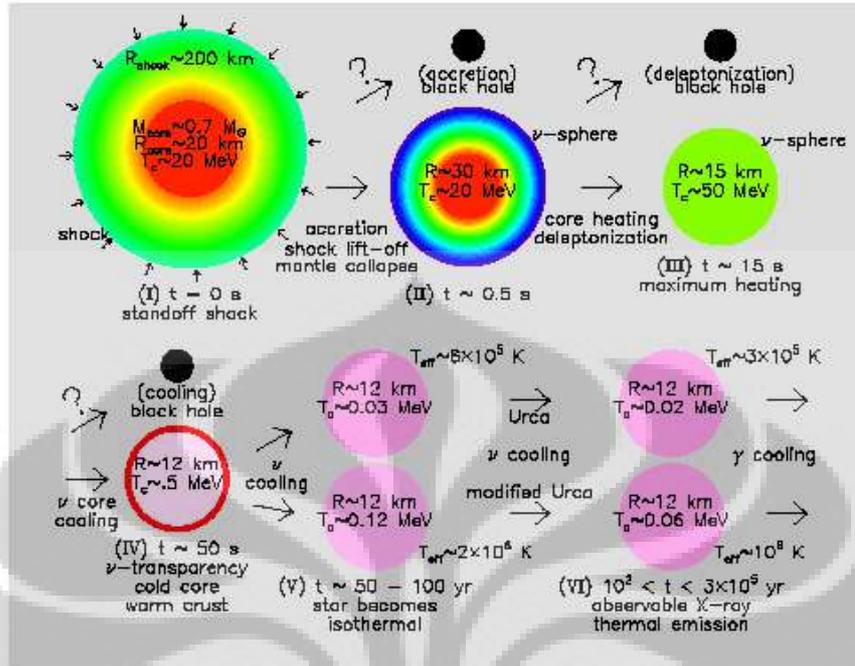


Pada suhu yang lebih tinggi lagi ($10^9 K$) mulailah terjadi pembakaran karbon dan oksigen:



Akhirnya, inti ${}^{56}\text{Fe}$ tercapai, dan pada saat ini tidak ada lagi energi yang dihasilkan melalui proses fusi sehingga riwayat bintang selanjutnya didominasi oleh penyusutan gravitasi. Setelah melalui suatu tahap yang singkat dalam bentuk *nova*, bintang tadi terus menyusut hingga bisa menjadi sebuah katai putih (*white dwarf*), bintang neutron (*neutron star*), atau lubang hitam (*black hole*) bergantung pada massa inti diakhir hidup bintang tersebut, di mana dasar dari klasifikasi ini sudah dijelaskan pada pendahuluan.

Gambar 2.1 menunjukkan tahap-tahap utama evolusi bintang neutron [14].



Gambar 2.1: Tahap-tahap utama evolusi bintang neutron [14].

2.1.2 Bintang Neutron Statik

Sebagai pendekatan pertama, sebuah bintang (termasuk bintang neutron) diasumsikan berada dalam keadaan statik, berwujud fluida (gas) yang memenuhi simetri bola dan dalam keseimbangan hidrostatis [11]: bintang diikat oleh keseimbangan antara tekanan eksternal yang menekan bintang karena gaya gravitasi dan tekanan internal di dalam bintang karena adanya gaya repulsif degenerasi dari nukleon. Oleh karena itu bintang neutron harus digambarkan dengan persamaan relativistik dalam keseimbangan hidrostatis.

Persoalan bintang neutron pertama kali dipelajari oleh R. C. Tolman [15], J. R. Oppenheimer dan G. M. Volkoff [16] pada tahun 1939. Mereka menurunkan persamaan untuk mempelajari keseimbangan hidrostatis relativistik di mana sebuah bintang neutron digambarkan dengan fluida yang didominasi oleh gas neutron dengan kerapatan yang tinggi yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan [3]:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2r} \right]^{-1} \quad (2.1)$$

dan

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi\epsilon(r)r^2}{c^2}, \quad (2.2)$$

dimana :

- $M(r)$ adalah massa bintang neutron,
- $\epsilon(r)$ adalah kerapatan energi, dan
- $P(r)$ adalah tekanan internal bintang neutron.

Persamaan (2.1) di atas dikenal sebagai persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff (disingkat persamaan TOV) [17].

Persamaan TOV menggambarkan evolusi tekanan di dalam bintang neutron $P(r)$ dari pusat ke permukaan, di mana pada $r = 0$, maka $P(0) = P_c$ dan pada $r = R$, maka $P(R) = 0$. Di sini R adalah jari-jari bintang neutron. Ketika $P(R) = 0$, maka kerapatan energinya habis. Kedua besaran tersebut, tekanan dan kerapatan energi bintang neutron, dihubungkan melalui persamaan keadaan materi di dalam bintang neutron. Makin besar ukuran bintang, maka makin tinggi tekanan di pusat bintang (P_c) karena gaya gravitasi yang menekan bintang makin besar. Karena tekanan $P(r)$ dalam persamaan (2.1) muncul baik di ruas kiri maupun ruas kanan, maka kenaikan tekanan di pusat bintang akan menaikkan gradien tekanan [ruas kiri persamaan (2.1)]. Oleh karena itu makin masif sebuah bintang, maka jari-jarinya makin kecil. Oleh karena itu ada nilai kritis untuk massa bintang, dimana di atas nilai kritis tersebut bintang akan kolaps akibat gaya gravitasinya sendiri [11]. Nilai kritis ini dikenal sebagai massa maksimum bintang dan harganya akan berbeda satu dengan yang lain untuk persamaan keadaan yang berbeda dari materi penyusun bintang neutron.

Selain relasi massa M dan jari-jari bintang neutron R , dari persamaan TOV ini juga dapat dihitung nilai *redshift* (z) dari bintang neutron dengan persamaan

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1. \quad (2.3)$$

dan jari-jari radiasi bintang neutron dengan persamaan

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}. \quad (2.4)$$

Bintang neutron dengan komposisi neutron, proton, elektron, dan muon akan mengalami proses *Urca* (*unrecordable cooling agent*), yaitu proses pendinginan bintang neutron. Proses pendinginan paling cepat dengan cara mengemisikan neutrino (deleptonisasi) yang disebut *direct Urca* di mana proses ini terjadi jika persamaan [18]

$$Y_n^{1/3} \leq Y_p^{1/3} + Y_e^{1/3}, \quad (2.5)$$

dipenuhi, di sini Y_n , Y_p , dan Y_e berturut-turut adalah fraksi neutron, fraksi proton, dan fraksi elektron dari bintang neutron tersebut.

2.1.3 Bintang Neutron Berotasi

Pada kenyataannya sebuah bintang neutron tidaklah diam (statik), melainkan berotasi dengan frekuensi rotasi tertentu bergantung pada massa dan jari-jarinya yang dapat dirumuskan sebagai [19]

$$\nu_k = 1045 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right)^{3/2} \text{ Hz}, \quad (2.6)$$

di mana M adalah massa bintang neutron dalam M_\odot dan R adalah jari-jari bintang neutron dalam km.

Deformasi pulsar dan variasi mode osilasi dari bintang neutron berbentuk bola adalah sumber dari gelombang gravitasi bintang neutron. Amplitudo regangan gelombang gravitasi dari deformasi pulsar bergantung pada momen kuadrupol bintang yang ditentukan oleh persamaan keadaan materi nuklir yang didominasi oleh neutron. Amplitudo regangan gelombang gravitasi bintang neutron yang dideteksi di bumi karena deformasi pulsar dapat dirumuskan sebagai [20]

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{\varepsilon I_{zz} \nu^2}{r}, \quad (2.7)$$

di mana r adalah jarak bintang neutron ke bumi, ν adalah frekuensi rotasi bintang neutron, I_{zz} adalah momen inersia bintang neutron terhadap sumbu z (sumbu rotasi bintang neutron), dan $\varepsilon = (I_{xx} - I_{yy})/I_{zz}$ adalah eliptisitas equator dari bintang neutron yang menunjukkan seberapa besar bintang neutron terdeformasi karena rotasi. Eliptisitas equator bintang neutron berhubungan dengan momen kuadrupol maksimum bintang neutron, $\Phi_{22,max}$ (untuk $m = 2$) yang memenuhi

persamaan berikut [21]

$$\varepsilon_{max} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{\Phi_{22,max}}{I_{zz}}, \quad (2.8)$$

di mana untuk bintang neutron yang berotasi dengan pelan, $\Phi_{22,max}$ dapat dinyatakan sebagai [21]

$$\Phi_{22,max} = 2,4 \times 10^{38} \text{ g cm}^2 \left(\frac{\sigma}{10^{-2}}\right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^{6,26} \left(\frac{1,4M_{\odot}}{M}\right)^{1,2}, \quad (2.9)$$

di mana σ adalah regangan patah (*breaking strain*) dari *crust* bintang neutron yang nilainya adalah $\sigma = [10^{-5} - 10^{-2}]$ [20]. Sedangkan untuk momen inersia bintang neutron searah sumbu z, Bejger dan Haensel [22] menurunkan rumus pendekatan yaitu

$$I_{zz} \approx 9,2 \times 10^{44} \text{ g cm}^2 \left(\frac{M}{1,4M_{\odot}}\right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^2 \times \left[1 + 0,7 \left(\frac{M}{1,4M_{\odot}}\right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)\right], \quad (2.10)$$

sehingga persamaan (2.8) untuk eliptisitas ekuator maksimum bintang neutron dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_{max} = 3,4 \times 10^{-7} \left(\frac{\sigma_{max}}{10^{-2}}\right) \left(\frac{1,4M_{\odot}}{M}\right)^{2,2} \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^{4,26} \times \left[1 + 0,7 \left(\frac{M}{1,4M_{\odot}}\right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)\right]^{-1}, \quad (2.11)$$

dan persamaan (2.7) untuk amplitudo regangan gelombang gravitasi bintang neutron dapat ditulis sebagai

$$h_0 = \chi \frac{\Phi_{22}\nu^2}{r}, \quad (2.12)$$

dengan $\chi = \sqrt{\frac{2048\pi^5}{15}} \frac{G}{c^4}$.

Untuk bintang neutron yang berotasi dengan pelan, Lattimer dan Schutz [23] memperoleh rumus empiris untuk menghitung momen inersia (total) dari bintang neutron dengan persamaan

$$I \approx (0,237 \pm 0,008) MR^2 \left[1 + 4,2 \left(\frac{M \text{ km}}{M_{\odot} R}\right) + 90 \left(\frac{M \text{ km}}{M_{\odot} R}\right)^4\right]. \quad (2.13)$$

Pada penelitian ini akan dihitung properti dari bintang neutron berotasi tidak secara eksak (numerik) tetapi dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang sudah disebutkan di atas.

2.2 Quantum Hadrodynamics (QHD)

Untuk menjelaskan sifat-sifat dari materi inti dan nuklir maka diperlukan model nuklir. Dalam konstruksi model dilakukan pendekatan-pendekatan supaya memudahkan perhitungan. Pada tahun 1974 J. D. Walecka memperkenalkan model nuklir yang menggambarkan bahwa partikel-partikel dalam materi inti dan nuklir berinteraksi melalui pertukaran medan meson yang kemudian dikenal sebagai quantum hadrodynamics (QHD). Pada awalnya model QHD hanya menggunakan medan meson sigma (σ) skalar-isoskalar yang terkopel dengan $\bar{\psi}\psi$ untuk menggambarkan interaksi atraktif dan medan meson omega (ω) vektor-isoskalar yang terkopel dengan $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ untuk menggambarkan interaksi repulsif sehingga model ini dikenal sebagai model $\sigma - \omega$ atau QHD-I.

Pada perkembangan selanjutnya, untuk menggambarkan materi inti dan nuklir menjadi lebih baik dan akurat, maka ditambahkan medan meson rho (ρ) vektor-isovektor bermuatan yang terkopel dengan $\bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi$ untuk menggambarkan efek kebergantungan isospin (neutron-proton asimetrik) dan medan meson delta (δ) skalar-isovektor bermuatan yang terkopel dengan $\bar{\psi}\tau\psi$ untuk menggambarkan efek asimetrik skalar dari model. Juga suku-suku interaksi diri yang nonlinier perlu ditambahkan agar kompresibilitas dari materi dan deskripsi properti-properti dari *finite nuclei* menjadi lebih realistik. Sebuah materi nuklir jika memiliki jumlah neutron dan proton sama ($\rho_n = \rho_p$) disebut materi nuklir simetrik (*symmetric nuclear matter/SNM*), sedangkan jika jumlah neutron dan protonnya tidak sama ($\rho_n \neq \rho_p$) disebut materi nuklir asimetrik (*asymmetric nuclear matter/ANM*).

2.2.1 Kerapatan Lagrangian

Kerapatan Lagrangian standar untuk model relativistik dapat ditulis sebagai [24, 25, 26, 27, 28]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} , \quad (2.14)$$

di mana \mathcal{L}_B adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian barion, \mathcal{L}_L adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian lepton, \mathcal{L}_M adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian meson, dan \mathcal{L}_{int} adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian interaksi baik interaksi lini-

er maupun interaksi nonlinier. Dalam model QHD, kerapatan Lagrangian standar tersebut dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}_B = \sum_{B=p,n} \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_B) \psi_B, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}_L = \sum_{L=e,\mu} \bar{\psi}_L (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_L) \psi_L, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\delta, \quad (2.17)$$

di mana

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2), \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right), \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{\rho}_{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \right), \quad (2.20)$$

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\delta} \partial^\mu \vec{\delta} - m_\delta^2 \vec{\delta}^2), \quad (2.21)$$

sedangkan

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int \ lin} + \mathcal{L}_{int \ nonlin}, \quad (2.22)$$

dimana $\mathcal{L}_{int \ lin}$ adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian interaksi linier dan $\mathcal{L}_{int \ nonlin}$ adalah penjumlahan terhadap seluruh kerapatan Lagrangian interaksi nonlinier, yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int \ lin} = & - \sum_{B=p,n} g_\sigma \sigma \bar{\psi}_B \psi_B - \sum_{B=p,n} g_\omega \omega_\mu \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_B \\ & - \sum_{B=p,n} g_\rho \vec{\rho}_\mu \bar{\psi}_B \gamma^\mu \vec{\tau} \psi_B - \sum_{B=p,n} g_\delta \vec{\delta} \bar{\psi}_B \vec{\tau} \psi_B, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int\ nonlin} = & -\frac{1}{3}b_2\sigma^3 - \frac{1}{4}b_3\sigma^4 + \frac{1}{4}c_3(\omega_\mu\omega^\mu)^2 \\
& + d_2\sigma(\omega_\mu\omega^\mu) + \frac{1}{2}d_3\sigma^2(\omega_\mu\omega^\mu) + f_2\sigma(\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) \\
& + \frac{1}{2}g_3\sigma^2(\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) + \frac{1}{2}g_4(\omega_\mu\omega^\mu)(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}^\mu), \quad (2.24)
\end{aligned}$$

di mana tensor medan antisimetrik didefinisikan sebagai

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu \quad \text{dan} \quad \rho_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu\rho_\mu - \partial_\mu\rho_\nu. \quad (2.25)$$

Pada persamaan (2.15), m_B menyatakan massa barion yang dalam tesis ini hanya melibatkan proton dan neutron saja. Pada persamaan (2.16), m_L menyatakan massa lepton yang dalam tesis ini terdiri dari elektron dan muon saja. Pada persamaan (2.18), persamaan (2.19), persamaan (2.20), dan persamaan (2.21) berturut-turut m_σ , m_ω , m_ρ , dan m_δ menyatakan massa meson σ , massa meson ω , massa meson ρ , dan massa meson δ . Pada persamaan (2.23), g_σ , g_ω , g_ρ , dan g_δ menyatakan konstanta kopling tak berdimensi yang menunjukkan kuatnya interaksi linier. Pada persamaan (2.24) b_2 , b_3 , dan c_3 berturut-turut menyatakan konstanta interaksi-diri skalar kubik, skalar kuartik, dan vektor kuartik, sedangkan d_2 , d_3 , f_2 , g_3 , dan g_4 menyatakan konstanta kopling dari suku nonlinier yang terdiri dari kontribusi dua meson yang berbeda (*vector cross interaction*).

2.2.2 Pendekatan Medan Rata-rata Relativistik

Karena konstanta-konstanta kopling pada persamaan medan dalam model Walecka cukup besar, maka metode pendekatan perturbasi tidak dapat digunakan. Oleh karena itu diperlukan solusi nonperturbasi untuk mempelajari implikasinya terhadap kerapatan Lagrangian dari model tersebut [29]. Pendekatan medan rata-rata relativistik (*relativistic mean-field approximation/RMFA*) merupakan salah satu solusi nonperturbasi untuk menyelesaikan permasalahan ini [30, 31].

Pendekatan ini dapat dibayangkan dengan menganggap sebuah kotak besar bervolume V yang berisi barion B secara uniform. Jika jumlah barion yang terdapat dalam kotak terkonservasi, maka demikian juga dengan kerapatan jumlah barion $\rho_B = B/V$. Apabila volume kotak tersebut diperkecil, maka kerapatan jumlah barion akan meningkat. Akibatnya suku sumber dalam persamaan medan meson akan bertambah kuat (ada banyak kuantum), oleh karena itu kita dapat melakukan pendekatan medan meson dengan harga ekspektasinya [24]. Karena sistem materi nuklir harus invarian terhadap paritas dan inversi waktu, maka komponen ruang dari harga ekspektasi meson dihilangkan dan hanya tersisa komponen nol (waktu) seperti ω_0 dan ρ_0 . Sementara itu komponen ruang dari isovektor juga dihilangkan sehingga yang tersisa adalah komponen ketiganya saja seperti $\rho_0^{(3)}$ dan $\delta^{(3)}$. Dengan demikian, maka dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \langle \hat{\sigma} \rangle \equiv \sigma, \quad (2.26)$$

$$\hat{\omega}_\mu \rightarrow \langle \hat{\omega}_\mu \rangle \equiv \omega_0, \quad (2.27)$$

$$\hat{\rho}_\mu \rightarrow \langle \hat{\rho}_\mu \rangle \equiv \rho_0^{(3)}, \quad (2.28)$$

$$\hat{\vec{\delta}} \rightarrow \langle \hat{\vec{\delta}} \rangle \equiv \delta^{(3)}. \quad (2.29)$$

Setelah mengganti semua medan meson dengan harga ekspektasinya dan menghitung harga ekspektasi dari kerapatan Lagrangian dengan menggunakan determinan Slater untuk melukiskan *ground state* dari nukleon, maka diperoleh harga ekspektasi kerapatan Lagrangian dalam pendekatan medan rata-rata relativistik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{B=p,n} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_\alpha^B (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_B) \psi_\alpha^B + \sum_{L=e,\mu} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_\alpha^L (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_L) \psi_\alpha^L \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \left(\frac{1}{3} b_2 + \frac{1}{4} b_3 \sigma \right) \sigma^3 \\
& - \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_0 \partial^\mu \omega_0 - m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 + \left(d_2 + \frac{1}{2} d_3 \sigma \right) \sigma \omega_0^2 \\
& - \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho_0^{(3)} \partial^\mu \rho_0^{(3)} - m_\rho^2 \rho_0^{(3)2}) + \left(f_2 + \frac{1}{2} g_3 \sigma \right) \sigma \rho_0^{(3)2} \\
& + \frac{1}{2} g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta^{(3)} \partial^\mu \delta^{(3)} - m_\delta^2 \delta^{(3)2}) \\
& - g_\sigma \sigma \sum_{B=p,n} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_B \psi_B - g_\omega \omega_0 \sum_{B=p,n} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \\
& - g_\rho \rho_0^{(3)} \sum_{B=p,n} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_B \gamma_0 \tau_3 \psi_B - g_\delta \delta^{(3)} \sum_{B=p,n} \sum_{\alpha=1}^A \bar{\psi}_B \tau \psi_B. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Materi nuklir merupakan suatu sistem nukleon uniform tak hingga, sehingga meskipun jumlah nukleon $A \rightarrow \infty$ dan volume nuklir $V \rightarrow \infty$, kerapatan materi tersebut besarnya harus berhingga (*finite*). Oleh karena itu, operasi sumasi dalam Lagrangian pada persamaan (2.30) dapat diganti dengan integrasi terhadap momentum Fermi (limit termodinamika)

$$\sum_{\alpha=1}^A \rightarrow \frac{2J+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k, \quad (2.31)$$

di mana J merupakan bilangan spin.

Medan fermion untuk setiap barion dan lepton dapat dituliskan dalam bentuk spinornya yaitu

$$\psi_k = U_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (2.32)$$

Hal lain yang perlu diperhatikan adalah sistem meson dalam materi nuklir bersifat homogen terhadap ruang-waktu sehingga

$$\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma = \partial_\mu \omega_0 \partial^\mu \omega_0 = \partial_\mu \rho_0^{(3)} \partial^\mu \rho_0^{(3)} = \partial_\mu \delta^{(3)} \partial^\mu \delta^{(3)} \equiv 0. \quad (2.33)$$

Bentuk akhir dari kerapatan Lagrangian yang diperoleh setelah mempertimbangkan konsekuensi di atas adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{B=p,n} \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B (\gamma_\mu k^\mu - m_B) U_k^B \\
& + \sum_{L=e,\mu} \frac{2J_L + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^L} d^3k \bar{U}_k^L (\gamma_\mu k^\mu - m_L) U_k^L \\
& - \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 + \frac{1}{3} b_2 \sigma + \frac{1}{4} b_3 \sigma^2 \right) \sigma^2 \\
& + \left(\frac{1}{2} m_\omega^2 + d_2 \sigma + \frac{1}{2} d_3 \sigma^2 \right) \omega_0^2 + \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 \\
& + \left(\frac{1}{2} m_\rho^2 + f_2 \sigma + \frac{1}{2} g_3 \sigma^2 \right) \rho_0^{(3)2} + \frac{1}{2} g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)2} - \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta^{(3)2} \\
& - g_\sigma \sigma \sum_{B=p,n} \rho_s^B - g_\omega \omega_0 \sum_{B=p,n} \rho_0^B \\
& - g_\rho \rho_0^{(3)} \sum_{B=p,n} \rho_{00}^B - g_\delta \delta^{(3)} \sum_{B=p,n} \rho_{s0}^B, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

di mana J_B dan J_L masing-masing adalah bilangan spin barion dan bilangan spin lepton, sedangkan ρ_s^B , ρ_0^B , ρ_{00}^B , dan ρ_{s0}^B masing-masing adalah kerapatan skalar, kerapatan barion, kerapatan isovektor, dan kerapatan isovektor skalar yang memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$\rho_s^B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B U_k^B, \tag{2.35}$$

$$\rho_0^B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B \gamma_0 U_k^B, \tag{2.36}$$

$$\rho_{00}^B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B \gamma_0 \tau_3 U_k^B, \tag{2.37}$$

$$\rho_{s0}^B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B \tau_3 U_k^B. \tag{2.38}$$

2.2.3 Parameter Set

Parameterisasi konstanta kopling meson terhadap barion dalam pendekatan medan rata-rata relativistik diperoleh melalui fitting model terhadap data eksperimen yaitu energi ikat, distribusi muatan, splitting spin-orbit, dan observabel lain. Parameter set yang digunakan dalam penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Parameter set yang digunakan dalam penelitian ini [32].

Parameter	NL3	TM1[33]	FSUGold	FSUGZ03	FSUGZ06
g_σ	10,21743	10,02890	10,59217	10,76145	11,02412
g_ω	12,86764	12,61390	14,30207	14,11104	14,66595
g_ρ	8,94880	9,26440	11,76733	14,67414	14,52185
g_δ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
κ_3	1,46496	0,00518	0,619	1,337	0,62251
κ_4	5,66825	0,12419	9,730	3,90	10,43850
ζ_0	0,000	0,000	12,905	5,974	12,90540
η_1	0,000	0,000	0,000	0,124	0,006
η_2	0,000	0,000	0,000	0,291	0,033
η_ρ	0,000	0,000	0,000	4,129	3,405
Λ_s	0,000	0,000	0,000	7,445	9,840
Λ_v	0,000	0,000	24,711	8,709	9,941
m_B	939,000	938,000	939,000	939,000	939,000
m_σ	508,194	511,198	491,500	500,511	501,370
m_ω	782,501	783,000	782,500	782,500	782,500
m_ρ	763,000	770,000	770,000	770,000	770,000
m_δ [34]	980,000	980,000	980,000	980,000	980,000

Konstanta-konstanta dari suku-suku nonlinier pada persamaan (2.24) yang menunjukkan interaksi diri (yaitu konstanta b_2 , b_3 , c_3) dan konstanta kopling *vector cross interaction* (yaitu konstanta d_2 , d_3 , f_2 , g_3 , g_4) didefinisikan sebagai

$$b_2 \equiv \frac{g_\sigma \kappa_3 m_\sigma^2}{2m_B}, \quad b_3 \equiv \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{6m_B^2}, \quad c_3 \equiv \frac{g_\omega^2 \zeta_0}{6}, \quad (2.39)$$

dan

$$d_2 \equiv \frac{g_\sigma \eta_1 m_\omega^2}{2m_B}, \quad d_3 \equiv \frac{g_\sigma^2 \eta_2 m_\omega^2}{2m_B^2}, \quad f_2 \equiv \frac{g_\sigma \eta_\rho m_\rho^2}{2m_B},$$

$$g_3 \equiv 2\Lambda_s g_\rho^2 g_\sigma^2, \quad g_4 \equiv 2\Lambda_v g_\rho^2 g_\omega^2. \quad (2.40)$$

2.3 Gambaran Materi Bintang Neutron

Seperti sudah disebutkan sebelumnya, bahwa gaya yang mengikat sebuah bintang neutron berbeda dengan gaya yang mengikat sebuah inti atom normal, yaitu yang mengikat sebuah bintang neutron adalah gaya gravitasi, sedangkan yang mengikat sebuah inti atom normal adalah gaya kuat nuklir. Tetapi kerapatan materi bintang neutron hampir sama atau lebih besar dibanding kerapatan inti atom. Oleh karena itu untuk menggambarkan keadaan sebuah bintang neutron harus menggunakan teori relativitas umum. Hal ini karena tidak hanya massanya, tetapi juga karena energi dari materi yang sangat rapat perlu diperhitungkan. Untuk menyelesaikan persamaan TOV, maka EOS dari bintang neutron yaitu hubungan antara kerapatan energi dan tekanan di dalam bintang neutron harus diketahui sebelumnya. Bintang neutron juga diasumsikan dalam keadaan netral (tidak bermuatan listrik). Pada inti bintang neutron, partikel-partikelnya diasumsikan terdistribusi secara homogen sehingga pendekatan RMF pada keseimbangan termodinamika dapat digunakan.

2.3.1 Persamaan Keadaan untuk Barion, Lepton, dan Meson

Untuk melukiskan persamaan keadaan materi homogen di bintang neutron, kita mulai dari kerapatan Lagrangian dari materi seperti ditunjukkan dalam persamaan (2.30). Setelah memasukkan harga proyeksi isospin dari masing-masing barion dan lepton ke dalam persamaan (2.30), maka persamaan kerapatan Lagrangian menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{B=p,n} \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k \bar{U}_k^B (\gamma_\mu k^\mu - m_B) U_k^B \\
& + \sum_{L=e,\mu} \frac{2J_L + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^L} d^3k \bar{U}_k^L (\gamma_\mu k^\mu - m_L) U_k^L \\
& - \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 + \frac{1}{3} b_2 \sigma + \frac{1}{4} b_3 \sigma^2 \right) \sigma^2 \\
& + \left(\frac{1}{2} m_\omega^2 + d_2 \sigma + \frac{1}{2} d_3 \sigma^2 \right) \omega_0^2 + \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 \\
& + \left(\frac{1}{2} m_\rho^2 + f_2 \sigma + \frac{1}{2} g_3 \sigma^2 \right) \rho_0^{(3)2} + \frac{1}{2} g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)2} - \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta^{(3)2} \\
& - g_\sigma \sigma [\rho_s^p + \rho_s^n] - g_\omega \omega_0 [\rho_0^p + \rho_0^n] \\
& - \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} [\rho_{00}^p - \rho_{00}^n] - g_\delta \delta^{(3)} [\rho_s^p - \rho_s^n]. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange berikut

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = 0 \tag{2.42}$$

pada persamaan kerapatan Lagrangian (2.41) untuk medan barion, akan diperoleh persamaan Dirac dengan massa efektif di mana persamaan energi proton (E_p) dan energi neutron (E_n) dirumuskan sebagai berikut:

$$E_p(\vec{k}) = g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{k_p^2 + m_p^{*2}} \tag{2.43}$$

dan

$$E_n(\vec{k}) = g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{k_n^2 + m_n^{*2}}. \tag{2.44}$$

Di sini m_p^* dan m_n^* berturut-turut adalah massa efektif proton dan massa efektif neutron yang memenuhi persamaan:

$$m_p^* = m_p + g_\sigma \sigma + g_\delta \delta^{(3)} \tag{2.45}$$

dan

$$m_n^* = m_n + g_\sigma \sigma - g_\delta \delta^{(3)}. \tag{2.46}$$

Dari persamaan massa efektif barion di atas terlihat bahwa meson yang bertanggung jawab terhadap pergeseran massa efektif barion adalah meson skalar σ dan

δ . Meson σ berperan dalam setiap pergeseran massa efektif barion, sementara meson δ berperan dalam *splitting* massa efektif barion yang memiliki isospin bukan nol sehingga apabila meson δ tidak diperhitungkan, maka diperoleh $m_p^* = m_n^*$ yang merupakan karakteristik dari materi nuklir simetrik.

Persamaan gerak medan meson dalam bentuk persamaan Klein-Gordon dan Proca dengan sumber dapat ditentukan dengan memasukkan persamaan kerapatan Lagrangian ke dalam persamaan Euler-Lagrange untuk meson yang hasilnya adalah sebagai berikut:

$$m_\sigma^2 \sigma = -g_\sigma [\rho_s^p + \rho_s^n] - b_2 \sigma^2 - b_3 \sigma^3 + d_2 \omega_0^2 + d_3 \sigma \omega_0^2 + f_2 \rho_0^{(3)2} + g_3 \sigma \rho_0^{(3)2}, \quad (2.47)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega [\rho_0^p + \rho_0^n] - (2d_2 \sigma + d_3 \sigma^2) \omega_0 - c_3 \omega_0^3 - g_4 \rho_0^{(3)2} \omega_0, \quad (2.48)$$

$$m_\rho^2 \rho_0^{(3)} = \frac{1}{2} g_\rho [\rho_0^p - \rho_0^n] - (2f_2 \sigma + g_3 \sigma^2) \rho_0^{(3)} - g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)}, \quad (2.49)$$

$$m_\delta^2 \delta^{(3)} = -g_\delta [\rho_s^p - \rho_s^n]. \quad (2.50)$$

Kerapatan skalar barion ($\rho_s^B = \rho_s^p + \rho_s^n$) dapat disederhanakan menjadi

$$\rho_s^B = \frac{2J_p + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^p} d^3k \frac{m_p^*}{\sqrt{k^2 + m_p^{*2}}} + \frac{2J_n + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^n} d^3k \frac{m_n^*}{\sqrt{k^2 + m_n^{*2}}}, \quad (2.51)$$

sedangkan kerapatan barion total memenuhi persamaan

$$\rho_B = \sum_{B=p,n} \rho_B = \sum_{B=p,n} \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F^B} d^3k = \sum_{B=p,n} \frac{k_B^3}{3\pi^2}. \quad (2.52)$$

Persamaan tensor energi-momentum dirumuskan sebagai

$$T_{\mu\nu} = \sum_{B,L} \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \psi_k^{B,L})} \partial_\mu \psi_k^{B,L} + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \phi_i)} \partial_\mu \phi_i - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.53)$$

di mana variabel $\psi_k^{B,L}$ menunjukkan medan fermion untuk barion ($B = p, n$) dan lepton ($L = e, \mu$), sedangkan variabel ϕ_i menunjukkan medan boson untuk meson ($i = \sigma, \omega, \rho, \delta$). Kerapatan energi, ϵ diperoleh dari komponen nol dari tensor energi-momentum ($\epsilon = \langle T_{00} \rangle$), sedangkan tekanan, P diperoleh dari komponen ke- i dari tensor energi-momentum ($P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle$). Dengan memasukkan bilangan spin (J) untuk proton, neutron, elektron, dan muon masing-masing sebesar $\frac{1}{2}$, maka

persamaan kerapatan energi dan persamaan tekanan di dalam bintang neutron (tanpa *crust*) berturut-turut adalah:

$$\begin{aligned}
\epsilon = & \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^p} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_p^{*2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^n} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_n^{*2}} \\
& + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^e} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_e^{*2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^\mu} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_\mu^{*2}} \\
& + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} b_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} b_3 \sigma^2 \sigma^4 \\
& - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - d_2 \sigma \omega_0^2 - \frac{1}{2} d_3 \sigma^2 \omega_0^2 - \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 \\
& - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^{(3)2} - f_2 \sigma \rho_0^{(3)2} - \frac{1}{2} g_3 \sigma^2 \rho_0^{(3)2} - \frac{1}{2} g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)2} \\
& + \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta^{(3)2} + g_\omega \omega_0 [\rho_0^p + \rho_0^n] + \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} [\rho_0^p - \rho_0^n], \tag{2.54}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
P = & \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F^p} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_p^{*2}}} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F^n} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_n^{*2}}} \\
& + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F^e} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_e^{*2}}} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F^\mu} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_\mu^{*2}}} \\
& - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} b_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} b_3 \sigma^2 \sigma^4 \\
& + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + d_2 \sigma \omega_0^2 + \frac{1}{2} d_3 \sigma^2 \omega_0^2 + \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 \\
& + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^{(3)2} + f_2 \sigma \rho_0^{(3)2} + \frac{1}{2} g_3 \sigma^2 \rho_0^{(3)2} + \frac{1}{2} g_4 \omega_0^2 \rho_0^{(3)2} \\
& - \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta^{(3)2}. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Persamaan di atas digunakan untuk melukiskan kontribusi persamaan keadaan dari barion dan lepton di inti dari bintang neutron, jika momentum Fermi (k_F) dari barion dan lepton diketahui.

Energi ikat perbarion (E_B) dalam materi nuklir diberikan oleh persamaan

$$E_B = \frac{E}{A} - Y_i m_i = \frac{\epsilon}{\rho_0} - Y_i m_i, \tag{2.56}$$

di mana ϵ adalah kerapatan energi, ρ_0 adalah kerapatan jumlah barion, Y_i adalah fraksi relatif barion, dan m_i adalah massa diam dari barion.

Kompresibilitas didefinisikan sebagai kurvatur atau kelengkungan dari persamaan keadaan pada titik saturasi [11] dan berhubungan dengan kerapatan energi

tinggi dari persamaan keadaan (EOS). Jika kerapatan energi meningkat dengan cepat akibat dari meningkatnya tekanan, berarti EOS bersifat *stiff*. Sedangkan EOS bersifat *soft* jika kerapatan energi meningkat secara perlahan-lahan akibat dari meningkatnya tekanan [11]. Kompresibilitas, K , didefinisikan sebagai

$$K = 9 \left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]_{\rho=\rho_0}, \quad (2.57)$$

di mana ρ adalah kerapatan jumlah barion dengan $\rho = \rho_0^p + \rho_0^n$, sedangkan ρ_0 adalah kerapatan jumlah barion pada titik saturasi, dan ϵ adalah kerapatan energi.

2.3.2 Keseimbangan β

Neutron-neutron bebas adalah partikel-partikel yang tidak stabil dan mempunyai waktu paruh sekitar 10 menit [35]. Sebuah neutron bebas akan meluruh menjadi sebuah proton, sebuah elektron, dan sebuah antineutrino yang sering disebut sebagai peluruhan beta (*beta-decay*), yaitu:



Oleh karena itu neutron-neutron bebas dalam bintang neutron akan mengalami peluruhan beta membentuk sebuah proton dan sebuah elektron. Karena sebuah bintang neutron berada dalam periode yang jauh lebih panjang daripada waktu paruh sebuah neutron, maka jumlah neutron di dalam bintang neutron yang mengalami peluruhan beta adalah signifikan. Dan karena sebuah bintang neutron mengandung neutron dalam jumlah yang sangat besar, maka jumlah elektron yang dihasilkan dalam proses peluruhan beta dari neutron juga signifikan. Kemudian oleh karena kerapatan elektron-elektron di dalam bintang neutron bertambah besar, maka sebagian di antaranya akan mencapai energi relativistik, sehingga mengalami proses kebalikan dari peluruhan beta yang sering disebut reaksi inversi beta (*inverse beta*), yaitu sebuah proton menangkap sebuah elektron menjadi sebuah neutron dan dibebaskan sebuah neutrino:



Dua proses yang disebut di atas, yaitu reaksi peluruhan beta dan reaksi inversi beta adalah proses yang saling berlawanan dan saling berkompetisi. Oleh karena bintang neutron memiliki waktu hidup yang panjang dibandingkan dengan skala waktu kedua proses tersebut, maka seiring berjalannya waktu akan tercapai kondisi keseimbangan yang disebut keseimbangan β . Keadaan keseimbangan β adalah keadaan di mana untuk kerapatan jumlah barion tertentu ($\rho = \rho_p + \rho_n$), yaitu kerapatan jumlah proton (ρ_p) dan kerapatan jumlah neutron (ρ_n) akan sedemikian sehingga kerapatan energi (ϵ) dari sistem itu minimum. Dari referensi [11], kondisi untuk keseimbangan beta dapat ditentukan berdasarkan potensial kimianya (energi Fermi), μ . Jika μ_x menyatakan potensial kimia dari partikel tertentu jenis x, maka

$$\mu_x = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_x}. \quad (2.60)$$

Dalam keadaan keseimbangan β , efek dari neutrino dapat diabaikan selama panjang lintasan bebas rata-ratanya lebih panjang dari jari-jari bintang [11], dan oleh karena itu keadaan keseimbangan β dapat dirumuskan sebagai

$$\mu_n = \mu_p + \mu_L. \quad (2.61)$$

Kerapatan jumlah partikel x (ρ_x) dapat dinyatakan dalam suku momentum Fermi (k_x), yaitu

$$\rho_x = \frac{k_x^3}{3\pi^2}. \quad (2.62)$$

Dengan menggunakan persamaan kerapatan energi yang ditunjukkan dalam persamaan (2.54), maka rumus potensial kimia dari partikel-partikel yang berbeda dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mu_n = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_0^n} = g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{k_F^{n2} + m_n^{*2}}, \quad (2.63)$$

$$\mu_p = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_0^p} = g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{k_F^{p2} + m_p^{*2}}, \quad (2.64)$$

$$\mu_L = \sqrt{k_L^2 + m_L^2}, \quad L = e, \mu. \quad (2.65)$$

Dari kekekalan muatan berlaku persamaan

$$\rho_0^p = \rho_e + \rho_\mu, \quad (2.66)$$

dengan kerapatan lepton (ρ_L) adalah

$$\rho_L = \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \left[-g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^n)^{2/3} + m_n^{*2}} - \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^p)^{2/3} + m_p^{*2}} \right]^2 - m_L^2 \right\}^{3/2}, \quad (2.67)$$

sehingga kerapatan proton (ρ_0^p) memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} \rho_0^p = & \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \left[-g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^n)^{2/3} + m_n^{*2}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^p)^{2/3} + m_p^{*2}} \right]^2 - m_e^2 \right\}^{3/2} \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \left[-g_\rho \rho_0^{(3)} + \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^n)^{2/3} + m_n^{*2}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{(3\pi^2 \rho_0^p)^{2/3} + m_p^{*2}} \right]^2 - m_\mu^2 \right\}^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

dengan

$$\rho_0^{(3)} = -\frac{\frac{1}{2}g_\rho [\rho_0^p - \rho_0^n]}{m_\rho^2 + 2f_2\sigma + g_3\sigma^2 + g_4\omega_0^2}. \quad (2.69)$$

Dengan mensubstitusikan $\rho_0^{(3)}$ dan $\rho_0^n = \rho_0 - \rho_0^p$ ke dalam persamaan kerapatan barion kemudian dibagi dengan kerapatan total barion, maka diperoleh fraksi dari barion tertentu ($Y_B = \rho_0^B/\rho_0$), yaitu

$$\begin{aligned} Y_p = & \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{g_\rho^2 \rho_0^{2/3}}{m_\rho^2 + 2f_2\sigma + g_3\sigma^2 + g_4\omega_0^2} [1 - 2Y_p] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{(3\pi^2 [1 - Y_p])^{2/3} + \frac{m_n^{*2}}{\rho_0^{2/3}}} - \sqrt{(3\pi^2 Y_p)^{2/3} + \frac{m_p^{*2}}{\rho_0^{2/3}}} \right]^2 - \frac{m_e^2}{\rho_0^{2/3}} \right\}^{3/2} \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{g_\rho^2 \rho_0^{2/3}}{m_\rho^2 + 2f_2\sigma + g_3\sigma^2 + g_4\omega_0^2} [1 - 2Y_p] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{(3\pi^2 [1 - Y_p])^{2/3} + \frac{m_n^{*2}}{\rho_0^{2/3}}} - \sqrt{(3\pi^2 Y_p)^{2/3} + \frac{m_p^{*2}}{\rho_0^{2/3}}} \right]^2 - \frac{m_\mu^2}{\rho_0^{2/3}} \right\}^{3/2} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dengan persamaan terakhir di atas, fraksi dari proton dan neutron bisa ditentukan, selanjutnya juga diperoleh fraksi untuk elektron dan muon, sehingga momentum fermi (k_F) dari tiap konstituen pada materi bisa dihitung. Dari sini

persamaan keadaan total untuk inti dari bintang neutron, yaitu kontribusi dari barion dan selanjutnya ditambah dengan kontribusi dari elektron dan muon yang sudah dibahas pada sub bab sebelumnya dapat dihitung.

2.3.3 Efek *Crust*

Crust atau kulit dari bintang neutron biasanya dibagi dua, yaitu *crust* bagian dalam (*inner crust*) dan *crust* bagian luar (*outer crust*). *Outer crust* adalah bagian paling luar dari bintang neutron yaitu dari daerah dengan kerapatan inti-inti atom yang dipenuhi ion-ion pada tekanan sekitar 10^4 g/cm^3 (10^{-8} MeV/fm^3) sampai daerah dengan kerapatan yang mulai kaya neutron (*neutron drip line*) [36]. Sedangkan *inner crust* berada di bawah *outer crust* dimulai dari daerah *neutron drip line* sampai daerah yang mengalami transisi fase dimana inti-inti atom habis karena berubah menjadi neutron yang serba sama (homogen) [37].

Pada tahun 1971 G. Baym, C. Pethick, dan P. Sutherland memperkenalkan persamaan keadaan *outer crust* dari bintang neutron yang kemudian dikenal sebagai persamaan keadaan BPS [37]. Persamaan keadaan BPS menjelaskan bahwa inti-inti atom dalam *outer crust* bintang neutron tersusun dalam bentuk lapisan *body-centered cubic (bcc)* yang terbenam dalam lautan elektron bebas dan energi sistem dapat diturunkan dengan cara peluruhan inversi beta yaitu proton menangkap elektron berubah menjadi neutron dan memancarkan neutrino [37]. Peluruhan beta dari neutron di dalam *outer crust* dibatasi oleh terisi penuhnya keadaan elektron.

Pada tekanan yang diberikan di *outer crust*, sifat-sifat dari keseimbangan inti bersama-sama dengan energi elektron-elektron menentukan besarnya kerapatan energi. Hal ini sesuai dengan data eksperimen maupun model teoritis dari inti. Karena tekanan dalam *outer crust* bintang neutron meningkat secara *smooth* sebagai fungsi kedalaman, maka setiap transisi dari keseimbangan inti yang satu ke keadaan yang lain akan dikompensasi oleh diskontinuitas dalam kerapatan energi [37]. Hal ini bisa dilihat pada Tabel D.1 dan Tabel D.2 Lampiran D.

Rangkaian keseimbangan inti yang digunakan dalam paper BPS asli ditunjukkan dalam Tabel D.1, di mana sifat-sifat dari keseimbangan inti dihitung dalam [36], menggunakan data nuklir yang digunakan dalam paper BPS asli (Re-

ferensi [37] dipublikasikan pada tahun 1971 dan menggunakan data nuklir dari tahun 1960). Kemudian karena teknik eksperimen telah berkembang dengan baik, ada beberapa perbaikan sejak tahun 1960 pada rangkaian keseimbangan inti antara kerapatan massa (energi) 10^4 g/cm^3 (10^{-8} MeV/fm^3) dan 10^{10} g/cm^3 (10^{-2} MeV/fm^3) yang ditentukan dari data eksperimen [36]. Rangkaian keseimbangan inti dalam Tabel D.2 dihitung dalam Referensi [36] menggunakan data nuklir eksperimen modern dan model nuklir. Bagian atas Tabel D.2 ditentukan dari data eksperimen oleh G. Audi *et al.* [36], sedangkan bagian bawah Tabel D.2 dihitung menggunakan model berdasarkan medan nuklir rata-rata relativistik oleh L. S. Geng *et al.* [36] yang disebut TMA. Persamaan keadaan BPS dapat ditentukan dari Tabel D.1 atau Tabel D.2. Hal ini dapat dilakukan dengan interpolasi (persamaan fit) dari kerapatan energi pada tekanan yang diberikan. Dalam penelitian ini persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) untuk daerah *outer crust* yang berupa persamaan fit ditentukan dengan menggunakan data Tabel D.2 (TMA) dengan alasan datanya relatif lebih baru dan juga lebih banyak.

Persamaan keadaan BBP (oleh G. Baym, H. A. Bethe, dan C. J. Pethick [38]) untuk daerah *inner crust* mengasumsikan bahwa kerapatan di atas *neutron drip line* sampai ρ_t (kerapatan di daerah transisi fase dari inti ke *crust*), materi nuklir terdiri dari lapisan inti yang terbenam dalam gas neutron bebas. Persamaan keadaan ini dihitung dengan mencocokkan tekanan dan kerapatan energi dari lapisan inti sampai gas neutron bebas [38]. Data untuk persamaan keadaan daerah (*inner crust*) diberikan dalam Tabel D.3 Lampiran D. Nilai kerapatan pada daerah *inner crust* menjadi cairan homogen (ρ_t) bergantung pada model dan parameter set yang digunakan untuk menggambarkan materi dari daerah *crust* dan bagian dalam bintang neutron. J. Carriere *et al.* menghitung nilai ρ_t untuk parameter set QHD yang berbeda dalam referensi [39] dan menggunakan pendekatan fase acak relativistik (*relativistic random-phase approximation*) untuk menganalisis sistem yang terdiri dari proton, neutron, dan elektron akan berada dalam transisi fase orde kedua. Untuk daerah *inner crust*, mereka mengasumsikan sebuah persamaan keadaan politropik, yaitu

$$P(\epsilon) = A + B\epsilon^{4/3}, \quad (2.71)$$

dimana A dan B adalah konstanta yang dapat ditentukan sehingga persamaan di atas cocok atau *matches* dengan persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) *outer crust* pada *neutron drip line* dan juga persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) pada ρ_t [45]. Dalam penelitian ini persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) untuk daerah *inner crust* dihitung dengan menggunakan persamaan politropik tersebut di atas (persamaan (2.71)).

Dengan adanya persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) untuk daerah *outer crust*, daerah *inner crust*, dan daerah inti (*core*) seperti diuraikan di atas, maka persamaan keadaan (relasi tekanan dan kerapatan energi) yang lengkap untuk sebuah bintang neutron dengan memperhitungkan efek daerah *crust* dapat ditulis sebagai

$$P(\epsilon) = \begin{cases} P_{TMA}(\epsilon) & \text{jika } \epsilon_{outer-min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{outer-max} \rightarrow \text{outer crust} \\ A + B\epsilon^{4/3} & \text{jika } \epsilon_{outer-max} < \epsilon \leq \epsilon_t \rightarrow \text{inner crust} \\ P_{RMF}(\epsilon) & \text{jika } \epsilon > \epsilon_t \rightarrow \text{core} \end{cases} \quad (2.72)$$

Karena fraksi momen inersia pada daerah *crust* penting untuk menentukan limit jari-jari dari Vela pulsar, maka pada kesempatan ini kami akan menyinggung sedikit mengenai hal tersebut. Fraksi momen inersia dari daerah *crust* sebuah bintang neutron terhadap momen inersia total, $\Delta I/I$, dapat dinyatakan dengan rumus pendekatan sebagai berikut [41, 42]:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{28\pi P_t R^3 (1 - 1.67\xi - 0.6\xi^2)}{3Mc^3} \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{2P_t(1 + 5\xi - 14\xi^2)}{\rho_t m c^2 \xi^2} \right]^{-1}, \quad (2.73)$$

di mana ΔI adalah momen inersia daerah *crust*, I adalah momen inersia total bintang neutron, P_t adalah tekanan di daerah transisi dari inti ke *crust*, R adalah jari-jari bintang neutron, M adalah massa bintang neutron, c adalah cepat rambat cahaya, ρ_t adalah kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke *crust*, m adalah massa barion, dan $\xi = \frac{GM}{Rc^2}$. Dengan memasukkan harga $\xi = \frac{GM}{Rc^2}$ dan mendefinisikan $\frac{\Delta I}{I} \equiv T$ dan $M \equiv xM_\odot$, maka persamaan (2.73) dapat ditulis

sebagai

$$T \left[1 + \frac{2P_t \left(1 + \frac{5GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{14G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right)}{\rho_t m_b \frac{G^2 M_\odot^2 x^2}{c^2 R^2}} \right] = \frac{28\pi P_t R^3}{3M_\odot c^2 x} \left[1 - \frac{1,67GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{0,6G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right] \frac{GM_\odot x}{c^2 R}, \quad (2.74)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{T \rho_t m_b \frac{G^2 M_\odot^2 x^2}{c^2 R^2} + 2TP_t \left(1 + \frac{5GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{14G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right)}{\rho_t m_b \frac{G^2 M_\odot^2 x^2}{c^2 R^2}} = \frac{28\pi P_t R^4}{3GM_\odot^2 x^2} \left[1 - \frac{1,67GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{0,6G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right], \quad (2.75)$$

sehingga

$$\frac{T \rho_t m_b G^2 M_\odot^2 x^2}{c^2 R^2} + 2TP_t \left(1 + \frac{5GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{14G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right) = \frac{28\pi P_t \rho_t m_b G R^2}{3c^2} \left[1 - \frac{1,67GM_\odot x}{c^2 R} - \frac{0,6G^2 M_\odot^2 x^2}{c^4 R^2} \right]. \quad (2.76)$$

Dengan mendefinisikan:

$$A_1 \equiv \frac{T \rho_t m_b G^2 M_\odot^2}{c^2 R^2}, \quad K \equiv 2TP_t, \quad A_2 \equiv \frac{28\pi P_t \rho_t m_b G R^2}{3c^2}, \\ B_1 \equiv \frac{GM_\odot}{c^2 R}, \quad \text{dan} \quad B_2 \equiv \frac{G^2 M_\odot^2}{c^4 R^2},$$

maka persamaan (2.76) dapat ditulis menjadi

$$A_1 x^2 + K + 5KB_1 x - 14KB_2 x^2 = A_2 - 1,67A_2 B_1 x - 0,6A_2 B_2 x^2, \quad (2.77)$$

dan setelah disederhanakan, persamaan (2.77) menjadi

$$[A_1 - 14KB_2 + 0,6A_2 B_2]x^2 + [5KB_1 + 1,67A_2 B_1]x + [K - A_2] = 0. \quad (2.78)$$

Kemudian dengan mendefinisikan lagi:

$$a \equiv A_1 - 14KB_2 + 0,6A_2 B_2, \quad b \equiv 5KB_1 + 1,67A_2 B_1, \quad \text{dan} \quad c \equiv K - A_2,$$

maka persamaan (2.78) menjadi persamaan kuadrat dalam variabel x yaitu:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2.79)$$

Dengan memberi input harga jari-jari bintang neutron R , maka setiap nilai R akan menghasilkan nilai akar persamaan kuadrat yang bisa ditentukan dengan rumus abc, yaitu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.80)$$

Kemudian dengan memilih nilai akar x yang berharga positif saja, maka bisa dibuat kurva relasi x (massa bintang neutron dalam M_{\odot}) dan R (jari-jari dari bintang neutron dalam km) pada harga $T = 0,014$, yaitu limit yang diijinkan oleh observasi jari-jari dari Vela pulsar.

Bab 3

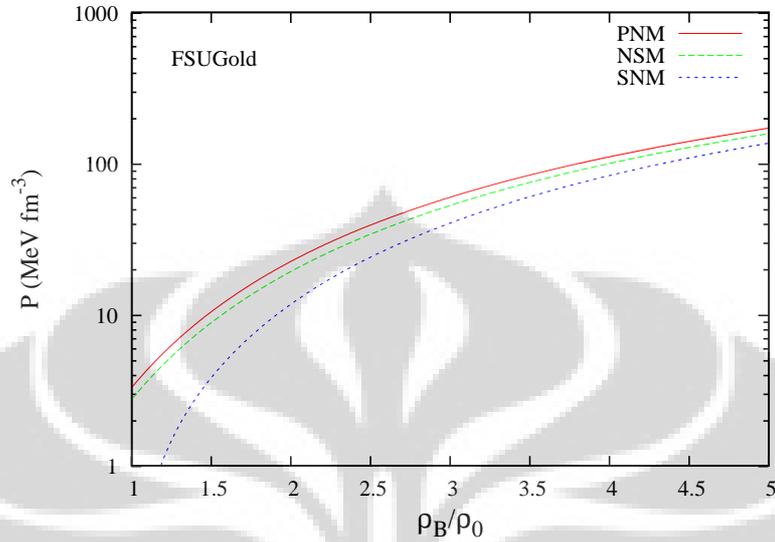
Hasil dan Pembahasan

Semua persoalan numerik dalam penelitian tesis ini diselesaikan dengan menggunakan bahasa pemrograman FORTRAN77. Kemudian data-data hasil penelitian yang ditampilkan dalam bentuk gambar-gambar grafik dan akan dibahas dalam bab ini dikelompokkan menjadi tiga bagian, yaitu bagian pertama tentang persamaan keadaan bintang neutron, bagian kedua tentang sifat-sifat bintang neutron statik, dan bagian ketiga tentang sifat-sifat bintang neutron berotasi.

3.1 Persamaan Keadaan Bintang Neutron

Pada subbab ini akan dibahas persamaan keadaan (*equation of state*/EOS) dari materi nuklir yang menyusun bintang neutron, yaitu hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron terhadap kerapatan jumlah bariannya dengan menggunakan model RMF, parameter set FSUGold, dan tiga persamaan keadaan (EOS) yang berbeda: EOS *pure neutron matter* (EOS PNM) yaitu persamaan keadaan bintang neutron di mana bintang neutron dianggap tersusun dari 100% neutron semua yang saling berinteraksi, EOS *symmetric nuclear matter* (EOS SNM) yaitu persamaan keadaan bintang neutron di mana bintang neutron dianggap tersusun dari neutron dan proton saja dalam jumlah yang sama dan saling berinteraksi, dan EOS *neutron star matter* (EOS NSM) yaitu persamaan keadaan bintang neutron di mana bintang neutron tersusun dari neutron, proton, elektron, dan muon yang saling berinteraksi dan dalam keseimbangan β . Kemudian membandingkan hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron terhadap kerapatan jumlah bariannya dengan menggunakan model RMF, EOS

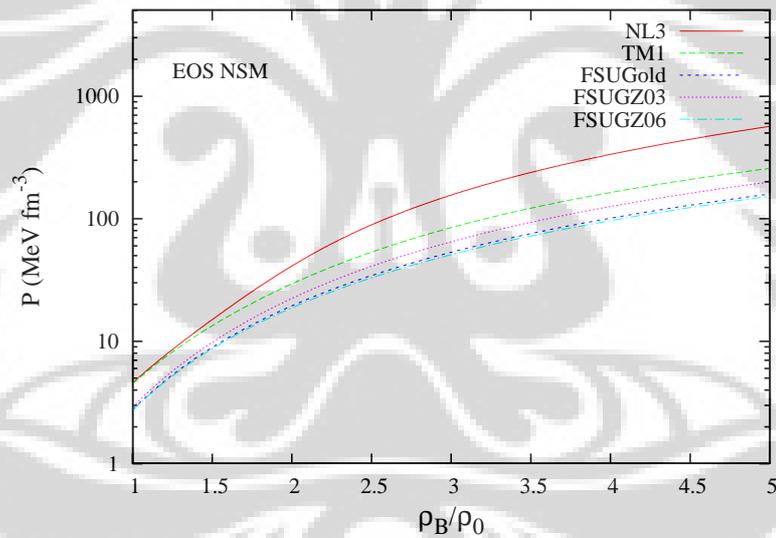
NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.



Gambar 3.1: Hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm^{-3} terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF, EOS (PNM, NSM, SNM), dan parameter set FSUGold.

Gambar 3.1 menunjukkan hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm^{-3} terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B yang dinyatakan dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF dan parameter set FSUGold untuk EOS PNM, EOS SNM, dan EOS NSM. Dari gambar tersebut, ketiga kurva menginformasikan bahwa makin besar kerapatan jumlah barionnya, makin besar pula tekanannya. Kemudian secara umum pada kerapatan jumlah barion yang sama, ternyata tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron untuk EOS PNM lebih besar dari EOS NSM dan untuk EOS NSM lebih besar dari EOS SNM. Hal ini berarti bahwa tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron selain bergantung pada kerapatannya, juga sangat dipengaruhi oleh komposisi dari materi nuklir yang menyusun bintang neutron tersebut. Makin besar kandungan neutron suatu materi nuklir, makin besar pula tekanan di dalam materi nuklir tersebut. Tekanan di dalam materi nuklir akan paling besar jika materi nuklir itu mengandung 100% neutron (EOS PNM) dan paling kecil jika materi nuklir itu mengandung neutron dan proton dalam jumlah yang

sama (EOS SNM). Tentunya jika komposisi dari materi nuklir itu sebagian besar mengandung neutron dan sebagian kecil mengandung proton dan lepton (elektron dan muon) yang tidak lain adalah komposisi dari EOS NSM, maka tekanan di dalamnya akan lebih kecil dari EOS PNM tetapi lebih besar dari EOS SNM. Jadi tekanan materi nuklir dengan EOS PNM relatif paling *stiff*, sedangkan tekanan materi nuklir dengan EOS SNM relatif paling *soft*. Dari Gambar 3.1 tampak bahwa perbedaan tekanan materi nuklir untuk EOS NSM dan EOS PNM relatif tetap besarnya baik pada kerapatan jumlah barion kecil maupun pada kerapatan jumlah barion besar. Hal ini berbeda dengan tekanan materi nuklir untuk EOS NSM dan EOS SNM, di mana pada kerapatan jumlah barion kecil, perbedaan tekanannya relatif besar dan kemudian perbedaan tekanan itu mengecil seiring bertambahnya kerapatan jumlah barion.



Gambar 3.2: Hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm^{-3} terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06.

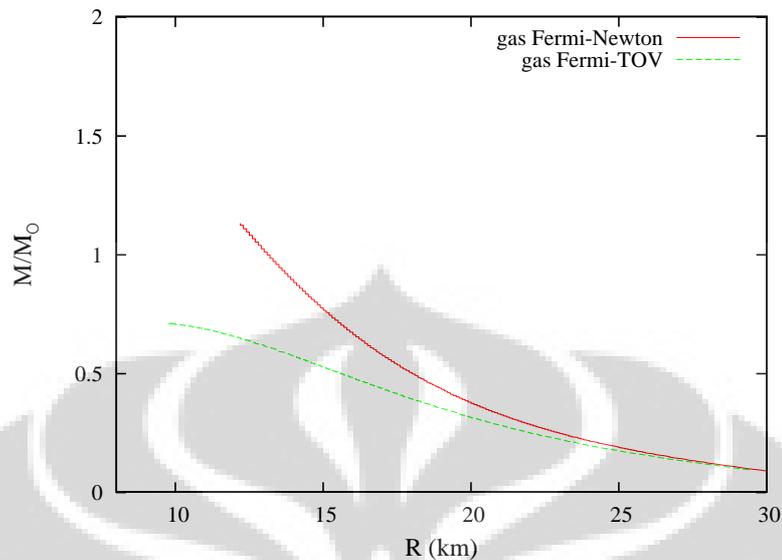
Sekarang kita akan membandingkan hubungan tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron P dalam MeV fm^{-3} terhadap kerapatan jumlah barion ρ_B yang dinyatakan dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan berbagai parameter set, yaitu NL3, TM1, FSUGold, FSU-

GZ03, dan FSUGZ06 seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2. Seperti hasil pada Gambar 3.1, kelima kurva pada Gambar 3.2 juga menginformasikan bahwa makin besar kerapatan jumlah barionnya, makin besar pula tekanannya, di mana tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron untuk parameter set NL3 paling *stiff* dan untuk parameter set FSUGZ06 paling *soft*. Pada kerapatan jumlah barion yang relatif sangat rendah (pada Gambar 3.2 tidak tampak karena terpotong), tekanan materi nuklir untuk kelima parameter set adalah sama. Kemudian seiring dengan kenaikan kerapatan jumlah barion, tekanan dari kelima parameter set itu menjadi berbeda. Secara umum, pada kerapatan jumlah barion yang sama, tekanan dengan parameter set NL3 adalah paling tinggi, kemudian berturut-turut diikuti oleh tekanan dengan parameter set TM1, FSUGZ03, FSUGold, dan FSUGZ06. Dari kerapatan jumlah barion rendah ke kerapatan jumlah barion tinggi (dari $\rho_B/\rho_0 = 1$ sampai 5), perbedaan tekanan dari kurva yang menggunakan parameter set FSUGZ06 dibanding dengan kurva yang menggunakan parameter set FSUGold adalah relatif kecil dan konstan. Perbedaan tekanan dari kurva yang menggunakan parameter set TM1 dibanding dengan kurva yang menggunakan parameter set FSUGold adalah relatif besar dan konstan. Perbedaan tekanan dari kurva yang menggunakan parameter set FSUGZ03 dibanding dengan kurva yang menggunakan parameter set FSUGold adalah relatif makin besar tetapi tidak signifikan, sedangkan perbedaan tekanan dari kurva yang menggunakan parameter set NL3 dibanding dengan kurva yang menggunakan parameter set FSUGold adalah relatif makin besar dan signifikan.

3.2 Sifat-sifat Bintang Neutron Statik

Pada subbab ini akan dibahas sifat-sifat bintang neutron statik. Salah satu sifat bintang neutron statik yang akan dibahas dan dipelajari adalah relasi massa dan jari-jari bintang neutron, seperti ditunjukkan oleh Gambar 3.3, Gambar 3.4, Gambar 3.5, dan Gambar 3.6. Relasi massa dan jari-jari bintang neutron statik dapat diperoleh dengan menyelesaikan atau mengintegrasikan persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff (persamaan TOV) [44]. Untuk daerah *outer crust*, sebagai input untuk menyelesaikan persamaan TOV digunakan persamaan keadaan (equation of state/EOS) BPS, yaitu relasi tekanan dan kerapatan energi di daerah *outer crust* yang ditentukan berdasarkan data Tabel D.1 (disebut data BPS) atau data Tabel D.2 (disebut data TMA). Dalam penelitian ini digunakan data Tabel D.2/data TMA sebagai EOS di daerah *outer crust* dengan persamaan $P(\epsilon) = P_{TMA}(\epsilon)$ untuk $\epsilon_{outer-min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{outer-max}$, dengan alasan selain datanya relatif lebih baru juga jumlah datanya relatif lebih banyak. Untuk daerah *inner crust*, sebagai input untuk menyelesaikan persamaan TOV dapat digunakan EOS BBP dengan data Tabel D.3 atau dengan menggunakan EOS politropik, yaitu relasi tekanan dan kerapatan energi di daerah *inner crust* yang memenuhi persamaan $P(\epsilon) = A + B\epsilon^{4/3}$, untuk $\epsilon_{outer-max} < \epsilon \leq \epsilon_t$, dimana konstanta A dan B dapat ditentukan sehingga persamaan tersebut *matches* dengan EOS TMA dari daerah *outer crust* pada *neutron drip line* dan juga EOS dari daerah inti pada ρ_t [45]. Sedangkan untuk daerah inti, sebagai input untuk menyelesaikan persamaan TOV secara umum digunakan model RMF dan salah satu dari tiga EOS (EOS PNM/EOS SNM/EOS NSM) dengan persamaan $P(\epsilon) = P_{RMF}(\epsilon)$ untuk $\epsilon > \epsilon_t$ dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06. EOS yang dianggap menggambarkan keadaan bintang neutron yang sebenarnya adalah EOS NSM, yaitu komposisi materi inti bintang neutron terdiri dari neutron, proton, elektron, dan muon yang muatan totalnya netral dan berada dalam kondisi keseimbangan β .

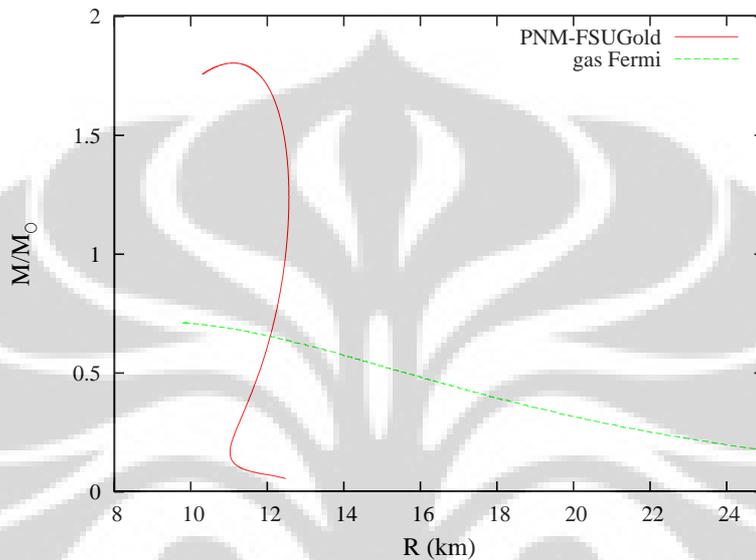
Gambar 3.3 menunjukkan relasi massa bintang neutron M dalam satuan massa matahari (M_{\odot}) terhadap jari-jarinya R dalam km untuk EOS gas Fermi-TOV (menggunakan relativitas umum) dibandingkan dengan EOS gas Fermi-Newton



Gambar 3.3: Relasi massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam km untuk persamaan keadaan gas Fermi-TOV (relativitas umum) dan gas Fermi-Newton.

(menggunakan mekanika klasik/Newton). Kedua kurva pada jari-jari besar (30 km atau lebih) dan massa yang kecil (di bawah $0,1 M_{\odot}$) berimpit, ini berarti bahwa pada jari-jari besar dan massa yang kecil efek relativitas umum belum berpengaruh sehingga efeknya terhadap relasi massa dan jari-jari bintang neutron sama seperti efek mekanika klasik atau Newton. Kemudian berkurangnya jari-jari bintang neutron yang diikuti dengan kenaikan massa bintang neutron mulai menunjukkan adanya perbedaan pengaruh dari relativitas umum di banding mekanika Newton, walaupun mengecilnya jari-jari bintang neutron sama-sama diikuti dengan kenaikan massa bintang neutron. Perbedaan yang signifikan atau mencolok antara kedua kurva adalah massa maksimum yang dicapai oleh kedua kurva. Pada kurva relasi massa dan jari-jari bintang neutron dengan EOS gas Fermi-TOV diperoleh massa maksimum bintang neutron sebesar $0,71 M_{\odot}$ dengan jari-jari sebesar 9,8 km. Hal ini sesuai dengan hasil perhitungan yang dilakukan oleh Oppenheimer dan Volkoff [1], yaitu bintang neutron dengan keadaan gas Fermi neutron memiliki massa maksimum $\sim 0,7 M_{\odot}$ dengan jari-jari ~ 10 km, seperti sudah disinggung di depan. Massa maksimum ini lebih kecil dibanding dengan massa maksimum yang dicapai oleh kurva relasi massa dan jari-jari bintang

neutron dengan EOS gas Fermi-Newton. Hal ini berarti makin tinggi tekanan di pusat bintang neutron yang berarti makin besar massanya, tetapi makin kecil jari-jarinya, maka koreksi dari relativitas umum dalam persamaan TOV makin signifikan.



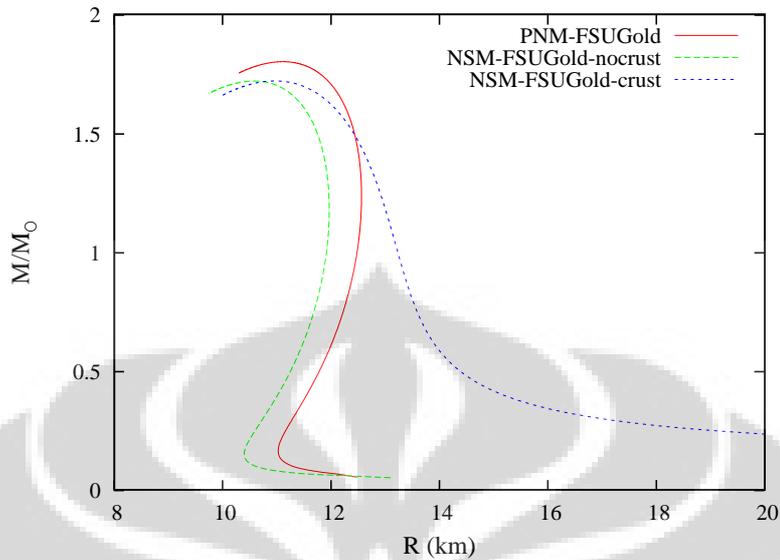
Gambar 3.4: Relasi massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam km untuk persamaan keadaan neutron berinteraksi (EOS PNM) dengan parameter set FSUGold dan untuk persamaan keadaan neutron tidak berinteraksi (EOS gas Fermi-TOV).

Gambar 3.4 menunjukkan relasi massa bintang neutron M yang dinyatakan dalam massa matahari (M_{\odot}) terhadap jari-jarinya R dalam km untuk keadaan neutron berinteraksi (EOS PNM) dengan model RMF dan menggunakan parameter set FSUGold dibandingkan dengan keadaan neutron tidak berinteraksi (EOS gas Fermi-TOV). Dari gambar tersebut jelas sekali terlihat perbedaan kedua kurva, yaitu kurva relasi massa dan jari-jari bintang neutron dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold sangat *stiff*, sedangkan kurva relasi massa dan jari-jari bintang neutron dengan EOS gas Fermi-TOV sangat *soft*, walaupun keduanya sama-sama mempunyai massa maksimum pada jari-jari tertentu. Untuk kurva relasi massa dan jari-jari dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold, bintang neutron mempunyai massa maksimum sebesar $1,8 M_{\odot}$ dengan jari-jari sebesar 11,1 km, sedangkan untuk kurva relasi massa dan jari-jari dengan EOS

gas Fermi-TOV, bintang neutron mempunyai massa maksimum sebesar $0,71 M_{\odot}$ dengan jari-jari sebesar 9,8 km. Jadi massa maksimum bintang neutron dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold jauh lebih besar dari massa maksimum bintang neutron dengan EOS gas Fermi-TOV, yaitu sekitar 2,5 kalinya. Adanya perbedaan yang signifikan antara massa maksimum bintang neutron dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold dibanding dengan EOS gas Fermi-TOV adalah karena sebenarnya neutron-neutron yang menyusun bintang neutron saling berinteraksi, sehingga keadaan bintang neutron dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold jauh lebih padat dan kompak karena neutron-neutron pembentuknya saling berinteraksi dibanding dengan keadaan bintang neutron dengan EOS gas Fermi-TOV yang neutron-neutron penyusunnya tidak saling berinteraksi. Jadi, model RMF dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold lebih realistis dalam menggambarkan keadaan bintang neutron dibanding model gas Fermi-TOV.

Setelah kita menganalisis kurva-kurva pada Gambar 3.3 yang menunjukkan pentingnya efek relativitas umum dalam menggambarkan keadaan bintang neutron dengan model gas Fermi-TOV dibanding efek mekanika klasik dengan model gas Fermi-Newton, kemudian Gambar 3.4 yang menunjukkan pentingnya korelasi antarnukleon berdasarkan model RMF dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold, sekarang kita akan membandingkan dua EOS bintang neutron yang berbeda, yaitu EOS PNM dan EOS NSM yang masing-masing menggunakan model RMF dan parameter set FSUGold, di mana untuk EOS NSM akan dibandingkan bintang neutron tanpa *crust* dan dengan *crust* seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.5.

Kurva yang menggunakan EOS PNM dan parameter set FSUGold bentuknya hampir sama dengan kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter FSUGold tanpa *crust*, tetapi sangat berbeda dengan kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter set FSUGold dengan memperhitungkan *crust*. Baik kurva yang menggunakan EOS PNM dan parameter set FSUGold maupun kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter set FSUGold tanpa *crust*, keduanya bisa memiliki massa yang relatif kecil dengan jari-jari yang relatif kecil pula dan pada jari-jari yang sama kedua kurva bisa memiliki tiga harga massa yang berbeda, sedangkan kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter set FSUGold



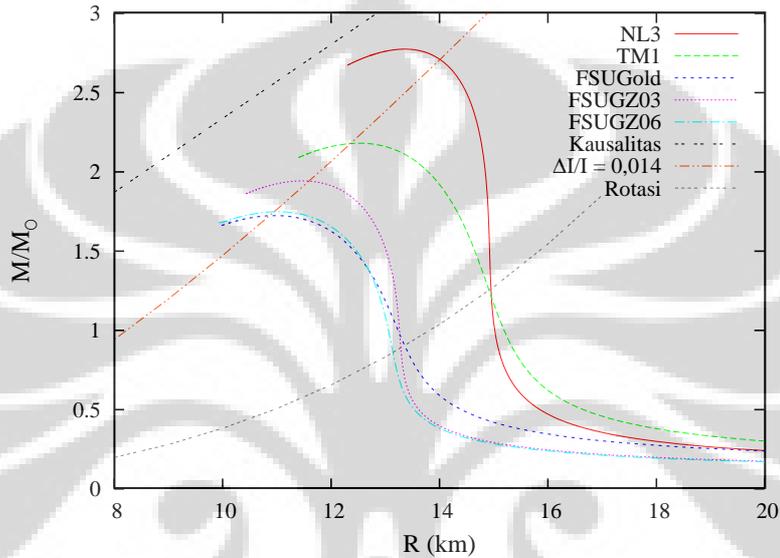
Gambar 3.5: Relasi massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam km dengan menggunakan EOS PNM dan parameter set FSUGold, EOS NSM dan parameter set FSUGold tanpa *crust*, dan EOS NSM dan parameter set FSUGold dengan memperhitungkan *crust*.

dengan memperhitungkan *crust*, baik pada jari-jari yang relatif kecil (sebelum mencapai massa maksimum) maupun pada jari-jari yang relatif besar massanya terangkat menjadi lebih besar dibanding kedua kurva lain yang tidak memperhitungkan efek *crust* dan setiap harga jari-jarinya hanya memiliki satu harga massa. Baik kurva yang menggunakan EOS PNM dan parameter set FSUGold maupun kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter set FSUGold tanpa *crust*, keduanya memiliki jari-jari yang relatif kecil, sedangkan kurva yang menggunakan EOS NSM dan parameter set FSUGold dengan memperhitungkan *crust* bisa memiliki jari-jari yang relatif sangat besar dengan massa yang semakin kecil. Seperti sudah dibahas di atas (Persamaan Keadaan Bintang Neutron), yaitu bahwa untuk kerapatan yang sama, EOS PNM mempunyai tekanan lebih tinggi dibanding dengan EOS NSM, yang berarti juga EOS PNM lebih kompak dibanding dengan EOS NSM, maka pada Gambar 3.5, bintang neutron yang digambarkan oleh kurva dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold mempunyai massa maksimum lebih tinggi dibanding bintang neutron yang digambarkan oleh kurva dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold baik tanpa *crust* maupun de-

ngan *crust*. Kurva dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold memberikan prediksi massa maksimum bintang neutron sebesar $1,80128934 M_{\odot}$ pada jari-jari sebesar $11,110001$ km, sedangkan kurva dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold tanpa *crust* memberikan prediksi massa maksimum bintang neutron sebesar $1,71950313 M_{\odot}$ pada jari-jari sebesar $10,575201$ km, dan kurva dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold serta memperhitungkan *crust* memberikan prediksi massa maksimum bintang neutron sebesar $1,71958488 M_{\odot}$ pada jari-jari sebesar $10,962601$. Jadi, prediksi massa maksimum bintang neutron dengan EOS PNM dan parameter set FSUGold lebih besar dari prediksi massa maksimum bintang neutron dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold karena materi nuklir dengan EOS PNM lebih kompak dibanding dengan materi nuklir dengan EOS NSM, sedangkan bintang neutron dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold, baik yang tanpa *crust* maupun yang memperhitungkan *crust* keduanya mempunyai massa maksimum yang hampir sama, hanya sedikit lebih besar massa maksimum bintang neutron dengan EOS NSM dan parameter set FSUGold yang memperhitungkan *crust* termasuk jari-jari pada massa maksimumnya juga sedikit lebih besar, karena dengan adanya *crust* yang kerapatannya relatif jauh lebih kecil dibanding kerapatan inti tetapi tetap akan memberi efek tekanan yang relatif lebih besar ke inti bintang neutron sehingga massa maksimumnya relatif sedikit lebih besar dan begitu juga jari-jarinya.

Gambar 3.6 menunjukkan relasi massa bintang neutron M dalam satuan M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam satuan km dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta dengan memperhitungkan efek *crust*. Sedangkan tiga kurva yang lain adalah kurva-kurva yang membatasi berlakunya relasi massa dan jari-jari bintang neutron tersebut. Kurva yang pertama adalah kausalitas dengan $R > 2,9GM/c^2$ [40] yang berarti relasi massa dan jari-jari bintang neutron yang diperbolehkan adalah yang terletak di sebelah kanan kurva $R = 2,9GM/c^2$. Kurva yang kedua adalah $\Delta I/I = 0,014$ [41, 42] yaitu limit yang diijinkan oleh observasi jari-jari dari Vela pulsar yang berarti relasi massa dan jari-jari bintang neutron yang diperbolehkan adalah yang terletak di sebelah kanan kurva $\Delta I/I = 0,014$. Dan kurva yang ketiga adalah pembatas frekuensi rotasi yang dihitung dengan

menggunakan persamaan (2.6), di mana frekuensi rotasi ν_k diambil 641 Hz [32] yang merupakan hasil observasi laju rotasi tertinggi dari pulsar PSR B1937+21 yang berarti relasi massa dan jari-jari bintang neutron yang diperbolehkan adalah yang terletak di sebelah kiri kurva rotasi tersebut. Adapun prediksi lebih lengkap mengenai sifat-sifat dari bintang neutron statik dengan model RMF,



Gambar 3.6: Relasi massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap jari-jarinya R dalam km dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan memperhitungkan *crust*. Tiga kurva yang lain adalah kurva-kurva pembatas berlakunya relasi M - R bintang neutron tersebut, yaitu kausalitas ($R > 2,9GM/c^2$), $\Delta I/I = 0,014$, dan rotasi.

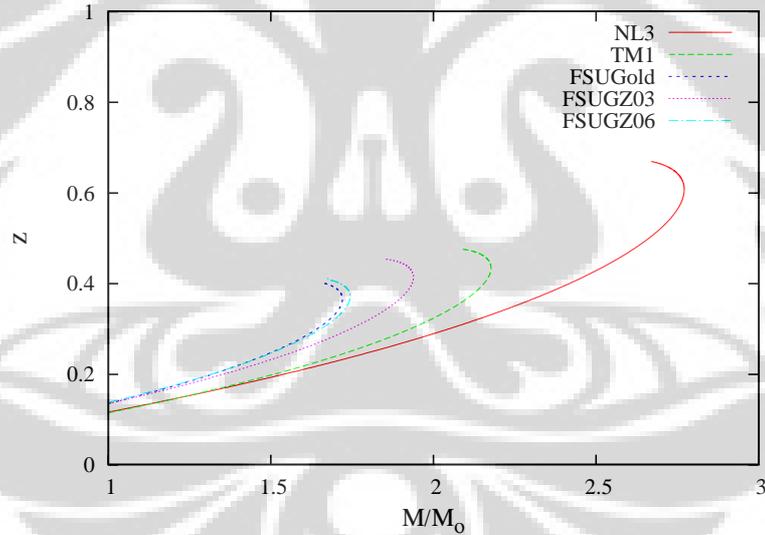
EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta dengan memperhitungkan efek *crust* ditunjukkan dalam Tabel 3.1. Dari gambar 3.6 diperoleh informasi bahwa kurva dengan parameter set NL3 bersifat paling *stiff* sedangkan kurva dengan parameter set FSUGold bersifat paling *soft* sehingga massa maksimum yang diprediksi oleh parameter set NL3 lebih besar dibandingkan parameter set FSUGold. Hal ini (*stiff* dan *softnya* kurva) disebabkan oleh nilai parameter nonlinier vektor kuartik, ζ_0 , yang pada kerapatan tinggi memberi efek menurunkan potensial vektor dan membuat EOS lebih *soft* [32, 43]. Dari Tabel 2.1, nilai ζ_0 untuk parameter set NL3 = 0,000, TM1 = 0,000, FSUGold = 12,905, FSUGZ03 = 5,974, dan FSUGZ06 = 12,90540. Itulah

Tabel 3.1: Prediksi sifat-sifat bintang neutron statik dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta memperhitungkan efek *crust*. M_{max} adalah massa maksimum bintang neutron, $R (M_{max})$ adalah jari-jari bintang neutron ketika massanya maksimum, $R (1,4M_{\odot})$ adalah jari-jari kanonikal bintang neutron, $R_{\infty} (1,4M_{\odot})$ adalah jari-jari radiasi bintang neutron, $z (M_{max})$ adalah *redshift* bintang neutron ketika massanya maksimum, ρ_0 adalah kerapatan jumlah barion pada titik saturasi, ρ_c^{max} adalah kerapatan jumlah barion di pusat bintang neutron ketika massanya maksimum, ρ_{DU} dan M_{DU} adalah kerapatan jumlah barion dan massa minimum bintang neutron agar terjadi proses *direct Urca*, ρ_t , P_t , dan ϵ_t adalah kerapatan jumlah barion, tekanan, dan kerapatan energi di daerah transisi dari inti ke *crust*.

Besaran	NL3	TM1	FSUGold	FSUGZ03	FSUGZ06
M_{max}/M_{\odot}	2,771	2,177	1,720	1,938	1,743
$R (M_{max})$ (km)	13,356	12,522	10,963	11,462	11,007
$R (1,4M_{\odot})$ (km)	14,929	14,754	12,640	13,093	12,646
$R_{\infty} (1,4M_{\odot})$ (km)	17,557	17,391	15,409	15,828	15,415
$z (M_{max})$	0,607	0,434	0,365	0,413	0,371
ρ_0 (fm ⁻³)	0,148	0,149	0,151	0,149	0,145
ρ_c^{max} (fm ⁻³)	0,668	0,859	1,181	1,014	1,131
ρ_{DU} (fm ⁻³)	0,206	0,212	0,471	0,387	0,415
M_{DU}/M_{\odot}	0,824	0,799	1,295	1,304	1,221
ρ_t (fm ⁻³)	0,049	0,058	0,074	0,070	0,071
P_t (MeV fm ⁻³)	0,177	0,287	0,368	0,261	0,261
ϵ_t (MeV fm ⁻³)	46,181	54,596	68,872	66,013	67,246

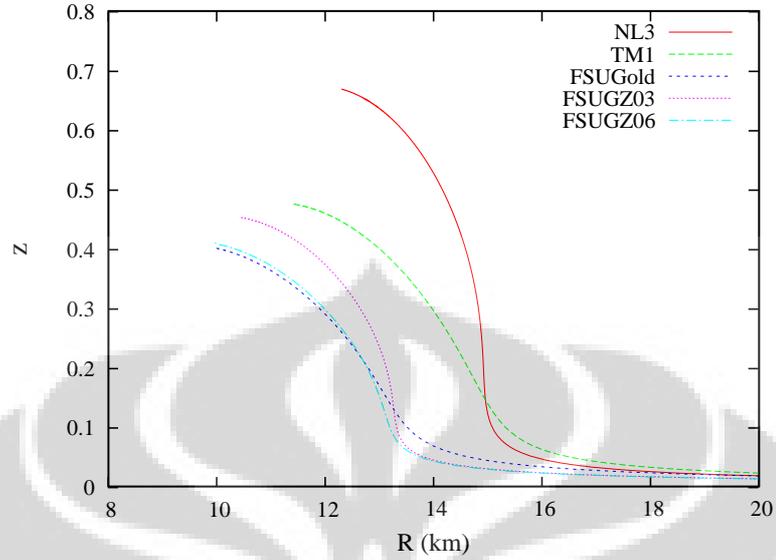
sebabnya kurva dengan parameter set NL3 dan TM1 berifat lebih *stiff* karena nilai ζ_0 -nya 0,000 sedangkan kurva dengan parameter set FSUGold dan FSUGZ06 berifat lebih *soft* karena nilai ζ_0 -nya relatif hampir sama dan paling besar dibandingkan yang lain dan kurva dengan parameter set FSUGZ03 bersifat sedang karena nilai ζ_0 -nya juga sedang (di tengah-tengah antara nilai ζ_0 NL3/TM1 dan FSUGold/FSUGZ06). Dari kurva-kurva pada Gambar 3.6 didapat hasil massa maksimum bintang neutron dan jari-jarinya berturut-turut untuk parameter set NL3 adalah 2,771 M_{\odot} dan 13,356 km, untuk parameter set TM1 adalah 2,177 M_{\odot} dan 12,522 km, untuk parameter set FSUGold adalah 1,720 M_{\odot} dan 10,963 km, untuk parameter set FSUGZ03 adalah 1,938 M_{\odot} dan 11,462 km, dan untuk parameter set FSUGZ06 adalah 1,743 M_{\odot} dan 11,007 km. Dari hasil ini jelas tampak bahwa jari-jari bintang neutron pada saat massanya maksimum adalah proporsional dengan massa maksimumnya, maksudnya adalah karena M_{max} (NL3)

$> M_{max}(\text{TM1}) > M_{max}(\text{FSUGZ01}) > M_{max}(\text{FSUGZ06}) > M_{max}(\text{FSUGGold})$, maka $R(M_{max}\text{NL3}) > R(M_{max}\text{TM1}) > R(M_{max}\text{FSUGZ01}) > R(M_{max}\text{FSUGZ06}) > R(M_{max}\text{FSUGGold})$. Untuk perbandingan, di sini kami tampilkan hasil penelitian dari beberapa peneliti lain. Hasil perhitungan dalam penelitian yang dilakukan oleh J. Piekarewicz [45] dengan menggunakan parameter set NL3 mendapatkan hasil massa maksimum bintang neutron sebesar $2,78 M_{\odot}$ dan dengan menggunakan parameter set FSUGGold mendapatkan hasil massa maksimum bintang neutron sebesar $1,72 M_{\odot}$. Kemudian hasil perhitungan dalam penelitian yang dilakukan oleh J. P. W. Diener [50] dengan menggunakan parameter set NL3 mendapatkan hasil massa maksimum bintang neutron sebesar $2,768 M_{\odot}$ dengan jari-jari $13,337 \text{ km}$ dan dengan menggunakan parameter set FSUGGold mendapatkan hasil massa maksimum bintang neutron sebesar $1,718 M_{\odot}$ dengan jari-jari $10,893 \text{ km}$. Ini menunjukkan perhitungan dalam tesis ini cukup *reasonable*.



Gambar 3.7: Hubungan massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap *redshift* z yang dihitung dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06, serta memperhitungkan efek *crust*.

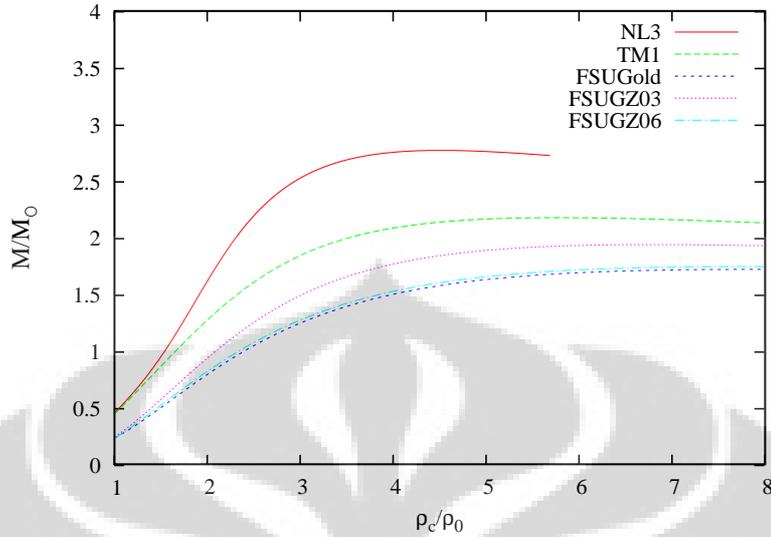
Gambar 3.7 menunjukkan hubungan massa bintang neutron M dalam massa matahari M_{\odot} terhadap *redshift* z yang dihitung dengan persamaan (2.4) dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan berbagai parameter set yaitu NL3, TM1, FSUGGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta dengan memperhitungkan efek



Gambar 3.8: Hubungan jari-jari bintang neutron R dalam satuan km terhadap *redshift* z yang dihitung dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta memperhitungkan *crust*.

crust. Dari gambar tersebut kurva dengan parameter set NL3 adalah paling *stiff*, sedangkan kurva dengan parameter set FSUGold adalah paling *soft*. Dari gambar tersebut secara umum menggambarkan semakin besar massa bintang neutron semakin besar pula nilai *redshift*-nya. Nilai-nilai *redshift* ketika massa bintang neutron maksimum bisa dilihat dalam Tabel 3.1. Nilai-nilai tersebut sesuai dengan hasil yang ditentukan oleh Linblom [46] yaitu nilai *redshift* maksimum bintang neutron adalah 0,863. Sedangkan Gambar 3.8 menunjukkan hubungan jari-jari bintang neutron R dalam satuan km terhadap *redshift* z yang dihitung dengan persamaan (2.4) dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta dengan memperhitungkan efek *crust*. Dari gambar tersebut kurva dengan parameter set NL3 juga paling *stiff* dan kurva dengan parameter set FSUGold juga paling *soft*. Berbeda dengan relasi massa bintang neutron terhadap *redshift*, Gambar 3.8 menunjukkan semakin besar jari-jari bintang neutron, semakin kecil nilai *redshift*-nya.

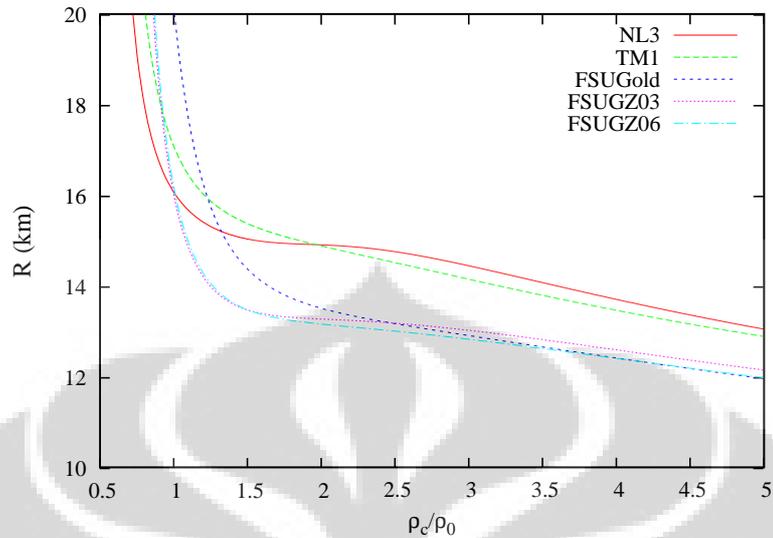
Gambar 3.9 menunjukkan hubungan massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06



Gambar 3.9: Hubungan massa bintang neutron M dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

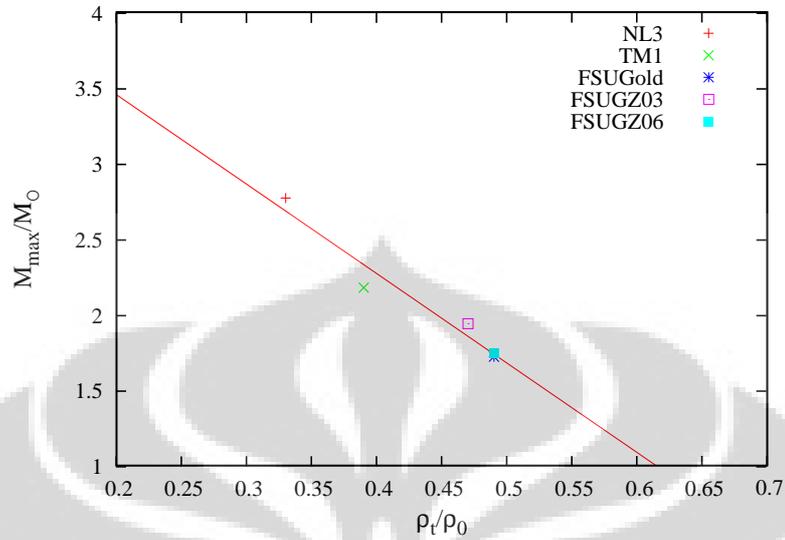
dengan persamaan keadaan bintang neutron yang lengkap (model RMF, EOS NSM, dan memperhitungkan efek *crust*). Dari gambar tersebut kurva dengan parameter set NL3 bersifat paling *stiff*, sedangkan kurva dengan parameter set FSUGold bersifat paling *soft*. Secara umum Gambar 3.9 menginformasikan semakin besar kerapatan jumlah barion di pusatnya (ρ_c), semakin besar pula massa bintang neutron sampai harga maksimum tertentu. Harga ρ_c/ρ_0 pada saat massa bintang neutron maksimum untuk parameter set NL3 adalah 5,511, untuk parameter set TM1 adalah 5,762, untuk parameter set FSUGold adalah 7,823, untuk parameter set FSUGZ03 adalah 6,809, dan untuk parameter set FSUGZ06 adalah 7,799.

Gambar 3.10 menunjukkan hubungan jari-jari bintang neutron R dalam km terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan persamaan keadaan bintang neutron yang lengkap. Gambar tersebut secara umum menggambarkan semakin besar kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c , semakin kecil jari-jari bintang neutron.

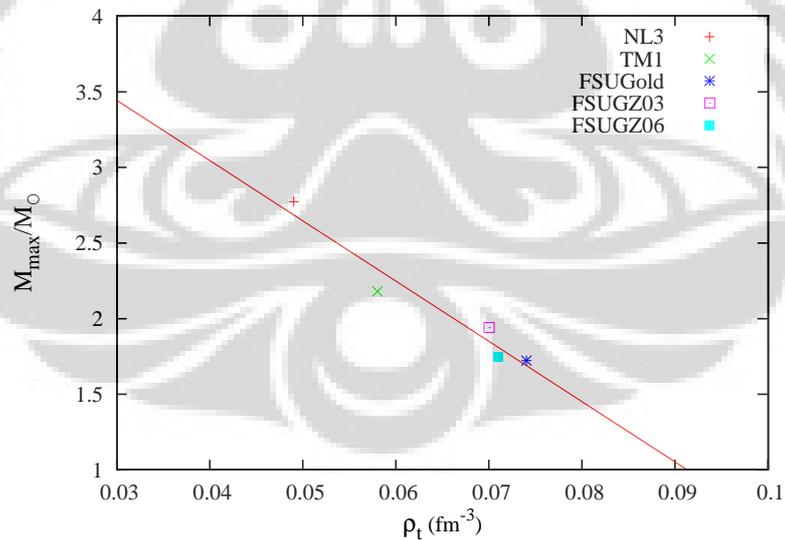


Gambar 3.10: Hubungan jari-jari bintang neutron R dalam km terhadap kerapatan jumlah barion di pusatnya ρ_c dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

Gambar 3.11 menunjukkan grafik hubungan massa maksimum bintang neutron M_{\max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke *crust* ρ_t dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan persamaan keadaan bintang neutron yang lengkap, sedangkan Gambar 3.12 menunjukkan grafik hubungan massa maksimum bintang neutron M_{\max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dalam fm^{-3} menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan persamaan keadaan bintang neutron yang lengkap. Kedua grafik secara umum menunjukkan bahwa semakin besar kerapatan jumlah barion di daerah transisi bintang neutron, semakin kecil massa maksimum dari bintang neutron itu.



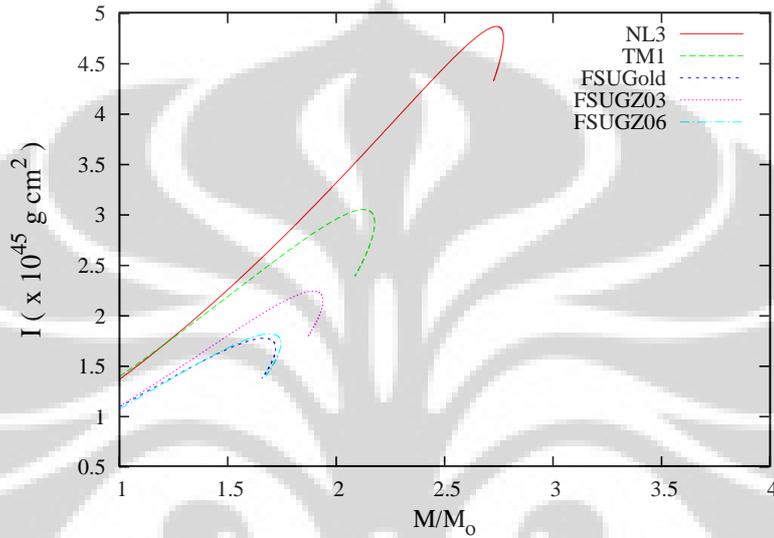
Gambar 3.11: Hubungan massa maksimum bintang neutron M_{max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke *crust* ρ_t dalam kerapatan saturasi barion ρ_0 dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.



Gambar 3.12: Hubungan massa maksimum bintang neutron M_{max} dalam M_{\odot} terhadap kerapatan jumlah barion di daerah transisi dari inti ke *crust* ρ_t dalam fm^{-3} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

3.3 Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi

Pada subbab ini akan dibahas sifat-sifat bintang neutron berotasi, yaitu momen inersia (I), momen kuadrupol (Φ_{22}), eliptisitas equator (ε), dan amplitudo regangan gelombang gravitasi (h_0).



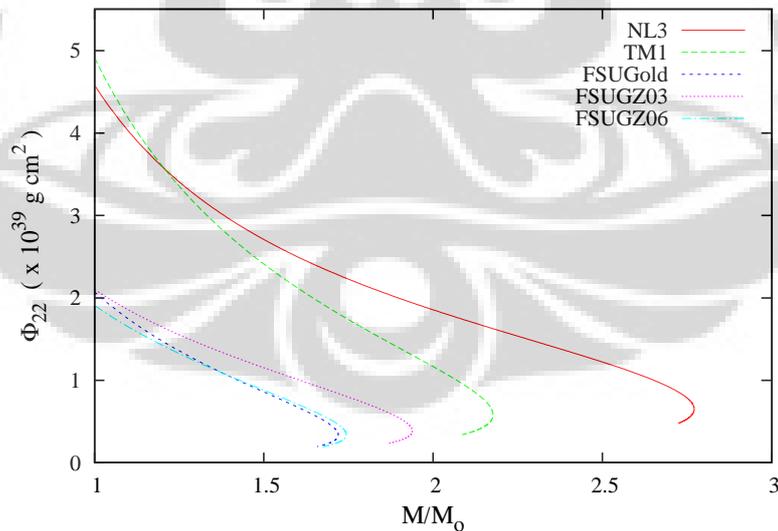
Gambar 3.13: Hubungan momen inersia I ($\times 10^{45}$ g cm²) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

Tabel 3.2: Momen inersia maksimum (I_{max}) yang dicapai oleh setiap parameter set dan massa bintang neutron M yang bersesuaian.

Parameter set	I_{max} (g cm ²)	M (I_{max})
NL3	$4,865 \times 10^{45}$	$2.738 M_{\odot}$
TM1	$3,047 \times 10^{45}$	$2.123 M_{\odot}$
FSUGold	$1,769 \times 10^{45}$	$1.665 M_{\odot}$
FSUGZ03	$2,236 \times 10^{45}$	$1.893 M_{\odot}$
FSUGZ06	$1,812 \times 10^{45}$	$1.692 M_{\odot}$

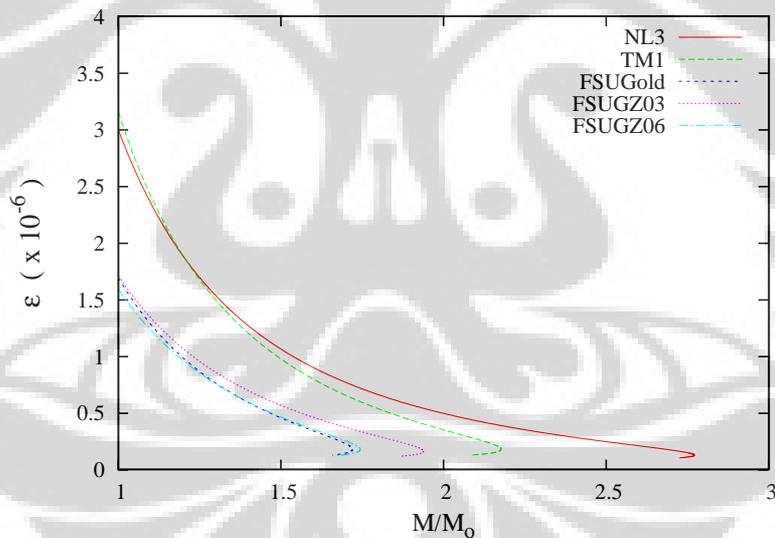
Gambar 3.13 menunjukkan hubungan momen inersia I ($\times 10^{45}$ g cm²) dari bintang neutron terhadap massanya M dalam M_{\odot} dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan memperhitungkan efek *crust* yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.13).

Relasi I dan M dalam persamaan (2.13) adalah valid untuk model bintang neutron yang berotasi dengan lambat. Gambar 3.13 secara umum menunjukkan bahwa semakin besar massa bintang neutron semakin besar momen inersianya dan setiap kurva mencapai harga momen inersia maksimum tertentu. Kurva dengan parameter set NL3 adalah paling *stiff*, kemudian berturut-turut diikuti kurva dengan parameter set TM1, FSUGZ03, FSUGZ06, dan yang paling *soft* adalah kurva dengan parameter set FSUGold. Harga momen inersia maksimum yang dicapai oleh setiap parameter set dan massa bintang neutron yang bersesuaian bisa dilihat pada Tabel 3.2. Ternyata harga momen inersia maksimum (I_{max}) dicapai bukan di harga massa maksimum (M_{max}) bintang neutron dari setiap parameter setnya, tetapi pada massa bintang neutron yang sedikit lebih rendah dari harga M_{max} (untuk harga M_{max} bintang neutron yang dicapai oleh setiap parameter set bisa dilihat kembali dalam Tabel 3.1). Hal ini terjadi karena selain bergantung pada massa M , momen inersia I juga bergantung pada jari-jari R dari bintang neutron. Harga M dan R inilah yang secara bersama-sama menentukan harga momen inersia maksimum (I_{max}).



Gambar 3.14: Hubungan momen kuadrupol Φ_{22} ($\times 10^{39}$ g cm²) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

Gambar 3.14 menunjukkan hubungan momen kuadrupol bintang neutron Φ_{22} ($\times 10^{39}$ g cm²) terhadap massanya M dalam M_{\odot} dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan memperhitungkan efek *crust* serta dihitung dengan persamaan (2.9) yang hanya cocok untuk model bintang neutron berotasi dengan pelan. Dari Gambar 3.14 ternyata momen kuadrupol bintang neutron nilainya menurun terhadap kenaikan massa bintang neutron untuk semua parameter set. Laju penurunan momen kuadrupol terhadap massa bintang neutron ditentukan oleh parameter setnya. Dari Gambar 3.14 tampak bahwa laju penurunan momen kuadrupol terhadap massa bintang neutron paling tajam adalah kurva dengan parameter set TM1 dan yang paling lambat adalah kurva dengan parameter set FSUGZ03. Besarnya momen kuadrupol pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ adalah berkisar antara $1,039 \times 10^{39}$ g cm² - $2,942 \times 10^{39}$ g cm².



Gambar 3.15: Hubungan eliptisitas equator ε ($\times 10^{-6}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap.

Gambar 3.15 menunjukkan hubungan eliptisitas equator bintang neutron ε ($\times 10^{-6}$) terhadap massanya M dalam M_{\odot} dengan menggunakan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan memperhitungkan efek *crust* serta dihitung dengan persamaan (2.11)

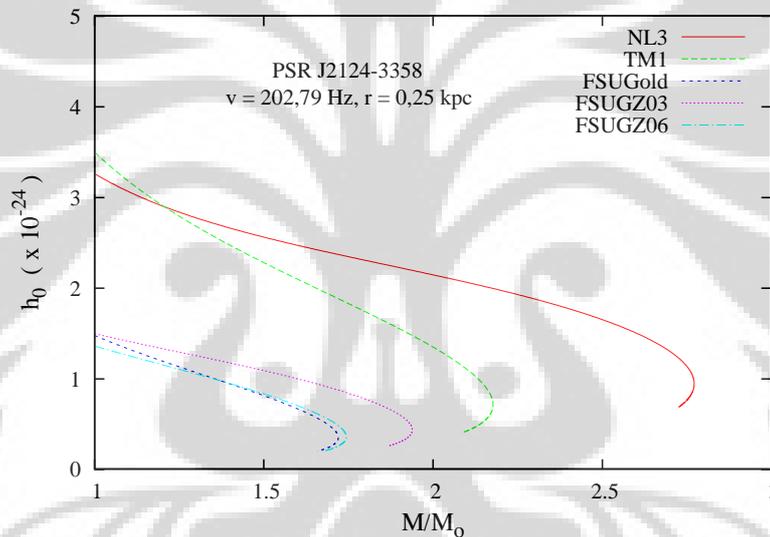
yang hanya cocok untuk model bintang neutron berotasi dengan pelan. Bentuk-bentuk kurva pada Gambar 3.15 hampir sama dengan bentuk-bentuk kurva pada Gambar 3.14 untuk parameter set yang sama, tetapi tentunya untuk sumbu vertikal berbeda skala dan satuannya di mana momen kuadrupol (Φ_{22}) berorde 10^{39} dengan satuan g cm^2 , sedangkan eliptisitas equator (ε) berorde 10^{-6} dan tidak bersatuan. Hal ini bisa dijelaskan dengan melihat persamaan (2.8) yang merupakan bentuk sederhana dari persamaan (2.11) tentang eliptisitas equator. Dari persamaan (2.8), jelas bahwa eliptisitas equator (ε) adalah fungsi dari momen kuadrupol (Φ_{22}) dan momen inersia terhadap sumbu z (I_{zz}) dari bintang neutron, di mana ε berbanding lurus dengan Φ_{22} (hal inilah yang menyebabkan bentuk-bentuk kurva pada Gambar 3.15 hampir sama dengan bentuk-bentuk kurva pada Gambar 3.14), tetapi ε berbanding terbalik dengan I_{zz} (hal inilah yang menyebabkan ε berorde 10^{-6} dan tidak bersatuan karena satuan Φ_{22} sama dengan satuan I_{zz}). Besarnya eliptisitas equator pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ yang diprediksi oleh model RMF adalah berkisar antara $0,588 \times 10^{-6} - 1,261 \times 10^{-6}$.

Gambar 3.16, Gambar 3.17, dan Gambar 3.18 menampilkan kurva-kurva amplitudo regangan gelombang gravitasi, h_0 , sebagai fungsi massa M dari bintang neutron dengan model RMF, EOS NSM, dan parameter set NL3, TM1, FSU-Gold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 serta memperhitungkan efek *crust* dan dihitung dengan menggunakan persamaan (2.12). Prediksi besarnya amplitudo regangan gelombang gravitasi ditunjukkan oleh tiga pulsar terpilih yang jaraknya relatif dekat dengan bumi ($r < 0,4 \text{ kpc}$) dan mempunyai frekuensi rotasi di bawah 300 Hz. Sifat-sifat dari ketiga pulsar tersebut dapat dilihat pada Tabel 3.3. Secara umum kurva-kurva pada ketiga gambar tersebut menginformasikan semakin besar massa bintang neutron semakin kecil amplitudo regangan gelombang gravitasinya. Perbedaan kurva-kurva dengan parameter set yang sama pada Gambar 3.16, Gambar 3.17, dan Gambar 3.18 disebabkan oleh perbedaan frekuensi rotasi dan jaraknya ke bumi dari ketiga pulsar tersebut. Besarnya amplitudo regangan gelombang gravitasi pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ untuk pulsar PSR J2124-3358 adalah berkisar antara $0,937 \times 10^{-24} - 2,655 \times 10^{-24}$, untuk pulsar PSR J1024-0719 adalah berkisar antara $0,611 \times 10^{-24} - 1,731 \times 10^{-24}$, dan untuk

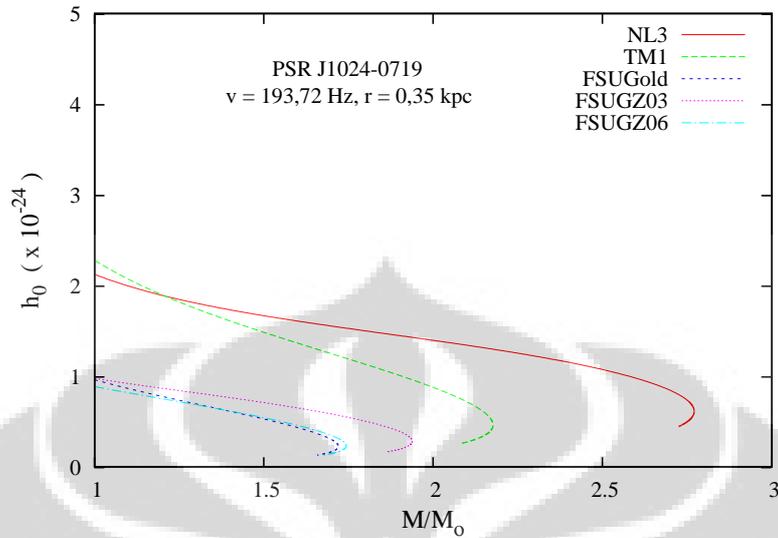
pulsar PSR J0437-4715 adalah berkisar antara $0,957 \times 10^{-24}$ - $2,708 \times 10^{-24}$.

Tabel 3.3: Sifat-sifat pulsar yang dijadikan objek dalam penelitian ini. Kolom pertama menunjukkan nama atau identitas pulsar, kolom kedua menunjukkan frekuensi rotasi pulsar, kolom ketiga menunjukkan massa pulsar (jika diketahui), kolom keempat menunjukkan jarak pulsar ke bumi, kolom kelima atau terakhir menunjukkan acuan atau referensi yang dipakai.

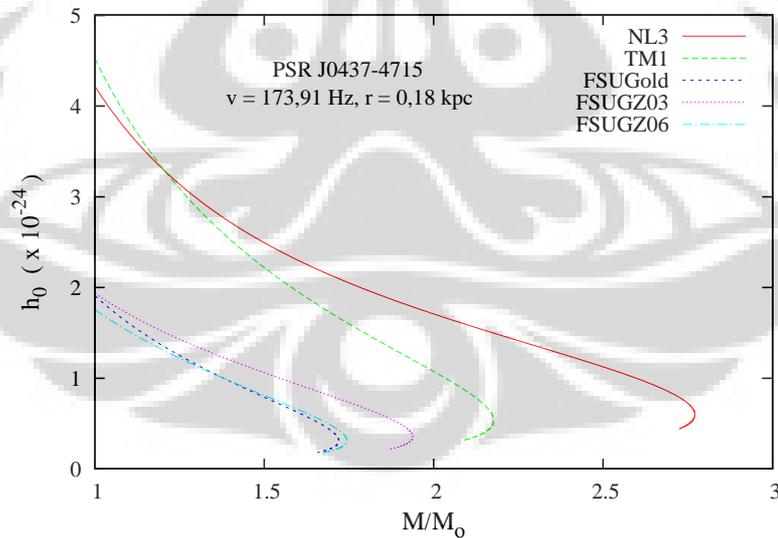
Nama pulsar	ν (Hz)	$M(M_{\odot})$	r (kpc)	Referensi
PSR J2124-3358	202,79	-	0,25	[47]
PSR J1024-0719	193,72	-	0,35	[47]
PSR J0437-4715	173,91	$1,3 \pm 0,2$	0,18	[48, 49]



Gambar 3.16: Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J2124-3358 dengan frekuensi rotasi $\nu = 202,79$ Hz dan $r = 0,25$ kpc.



Gambar 3.17: Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J1024-0719 dengan frekuensi rotasi $\nu = 193,72$ Hz dan $r = 0,35$ kpc.



Gambar 3.18: Hubungan amplitudo regangan gelombang gravitasi h_0 ($\times 10^{-24}$) terhadap massa bintang neutron M dalam M_{\odot} dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap untuk pulsar PSR J0437-4715 dengan frekuensi rotasi $\nu = 173,91$ Hz dan $r = 0,18$ kpc.

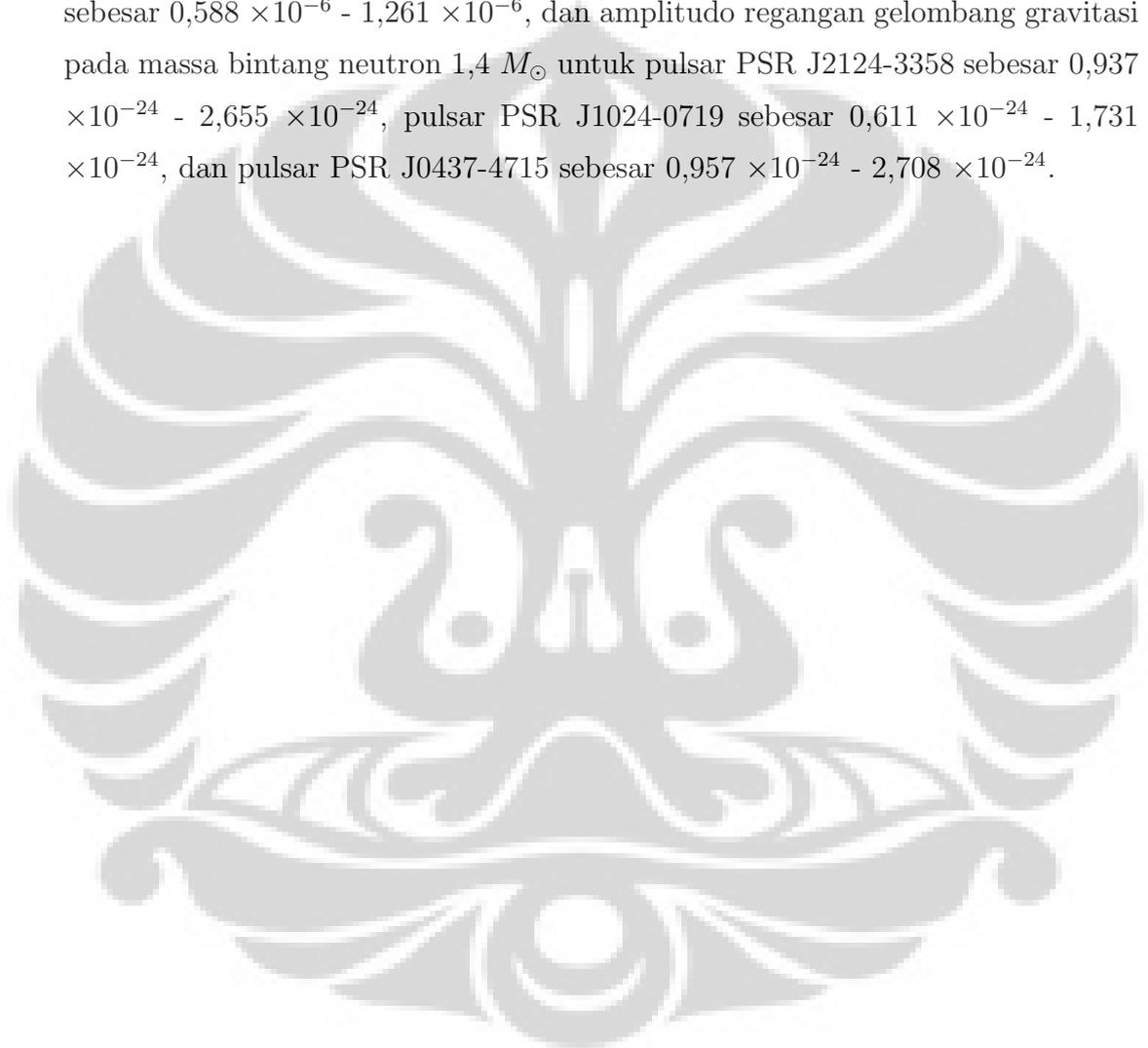
Bab 4

Kesimpulan

Telah diturunkan persamaan keadaan (EOS) materi bintang neutron dengan menggunakan pendekatan medan rata-rata relativistik (RMF) untuk parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06. Dari EOS tersebut diperoleh informasi bahwa tekanan materi nuklir di pusat bintang neutron bergantung pada kerapatan dan komposisi dari materi nuklir yang menyusun bintang neutron. Pada kerapatan jumlah barion yang sama tekanan materi nuklir dengan EOS PNM (*pure neutron matter*) paling besar, diikuti dengan EOS NSM (*neutron star matter*), dan EOS SNM (*symmetric nuclear matter*) tekanannya paling kecil. Untuk EOS NSM, tekanan materi nuklir dengan parameter set NL3 bersifat paling *stiff* diikuti tekanan materi nuklir dengan parameter set TM1, FSUGZ03, FSUGold, dan tekanan dengan parameter set FSUGZ06 bersifat paling *soft*.

Relasi massa dan jari-jari bintang neutron dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan TOV, baik tanpa *crust* maupun dengan *crust* dengan masukan EOS bintang neutron. Prediksi sifat-sifat bintang neutron statik dengan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan menggunakan EOS bintang neutron yang lengkap menghasilkan massa maksimum bintang neutron $1,720 M_{\odot} - 2,771 M_{\odot}$ dengan jari-jari 10,963 km - 13,356 km, kerapatan saturasi jumlah barion $0,145 \text{ fm}^{-3} - 0,151 \text{ fm}^{-3}$, kerapatan jumlah barion di pusat bintang neutron pada saat massanya maksimum $0,668 \text{ fm}^{-3} - 1,181 \text{ fm}^{-3}$, kerapatan jumlah barion di daerah transisi $0,049 \text{ fm}^{-3} - 0,074 \text{ fm}^{-3}$, dan tekanan materi nuklir di daerah transisi $0,177 \text{ MeV fm}^{-3} - 0,368 \text{ MeV fm}^{-3}$.

Prediksi sifat-sifat bintang neutron berotasi dengan parameter set NL3, TM1, FSUGold, FSUGZ03, dan FSUGZ06 dengan EOS bintang neutron yang lengkap menghasilkan momen inersia maksimum sebesar $1,769 \times 10^{45} \text{ g cm}^2 - 4,865 \times 10^{45} \text{ g cm}^2$, momen kuadrupol pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ sebesar $1,039 \times 10^{39} \text{ g cm}^2 - 2,942 \times 10^{39} \text{ g cm}^2$, eliptisitas equator pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ sebesar $0,588 \times 10^{-6} - 1,261 \times 10^{-6}$, dan amplitudo regangan gelombang gravitasi pada massa bintang neutron $1,4 M_{\odot}$ untuk pulsar PSR J2124-3358 sebesar $0,937 \times 10^{-24} - 2,655 \times 10^{-24}$, pulsar PSR J1024-0719 sebesar $0,611 \times 10^{-24} - 1,731 \times 10^{-24}$, dan pulsar PSR J0437-4715 sebesar $0,957 \times 10^{-24} - 2,708 \times 10^{-24}$.



Lampiran A

Satuan dan Konstanta

Tesis ini menggunakan sistem satuan alami (*natural system of units*), di mana $\hbar = c = 1$ dan tidak berdimensi. Dalam sistem satuan alami, besaran energi, momentum, dan massa memiliki dimensi yang sama dengan dimensi energi dan bersatuan MeV, sehingga besaran panjang berdimensi energi⁻¹ dengan satuan MeV⁻¹ dan besaran luas berdimensi energi⁻² dengan satuan MeV⁻². Untuk mendapatkan nilai dan mengembalikan dimensi besaran yang ingin diketahui dari besaran hasil perhitungan digunakan analisis dimensi dan faktor konversi sebagai berikut [24]:

$$\hbar = 6,58212233(49) \times 10^{-22} \text{ MeVs}, \quad (\text{A.1})$$

$$\hbar c = 197.327053(59) \text{ MeVfm}, \quad (\text{A.2})$$

$$c = 2.998 \times 10^{10} \text{ cm/s}. \quad (\text{A.3})$$

Tabel A.1: Konstanta yang digunakan dalam tesis ini [50].

Nama	Simbol	Nilai
Massa matahari	M_{\odot}	$1.98892 \times 10^{30} \text{ kg}$
		$1.1155 \times 10^{60} \text{ MeV}$
Konstanta gravitasi	G	$6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
		$1.325 \times 10^{-42} \text{ fm/MeV}$
Panjang	1 fm	$1 \times 10^{-15} \text{ m}$
Energi	1 MeV	
Kerapatan energi	1 MeV/fm^3	$1.7827 \times 10^{12} \text{ g/cm}^3$
Tekanan	1 MeV/fm^3	$1.6022 \times 10^{33} \text{ dyne/cm}^2$

Lampiran B

Penurunan Persamaan TOV

Berikut ini adalah penurunan persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff (disingkat persamaan TOV) dari persamaan medan Einstein dengan menggunakan teori relativitas umum. Dalam teori relativitas khusus, ruang-waktu adalah datar karena tidak ada efek gravitasi, sedangkan dalam teori relativitas umum, ruang-waktu adalah lengkung karena ada efek gravitasi, di mana semakin kuat efek gravitasi, semakin lengkung pula ruang-waktu. Interval invarian ($d\tau$) yang disebut juga elemen garis atau waktu pasti (*proper time*) atau formula pemisahan (*separation formula*) dalam teori relativitas khusus dirumuskan sebagai

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (\text{B.1})$$

di mana x^μ adalah sebuah titik ruang-waktu yang dalam koordinat Cartesian dirumuskan sebagai $x^\mu = (ct, x, y, z)$, sedangkan $\eta_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik dari ruang Minkowski yang dirumuskan sebagai

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Dalam teori relativitas umum, interval invarian ($d\tau$) atau elemen garis atau *proper time* statik dan ruang-waktu isotropik dirumuskan sebagai

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B.3})$$

di mana $\nu(r)$ dan $\lambda(r)$ adalah fungsi yang akan ditentukan dan x^μ adalah titik ruang-waktu yang dalam satuan alam digambarkan sebagai $x^\mu = [t, r, \theta, \phi]$.

Dalam persamaan (B.3) komponen-komponen tensor metrik ($g_{\mu\nu}$) dalam ruang Riemannian dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= e^{2\nu(r)}, \\
 g_{11} &= -e^{2\lambda(r)}, \\
 g_{22} &= -r^2, \\
 g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, \\
 g^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{untuk } \mu \neq \nu).
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

Untuk mengubah dari teori relativitas khusus ke teori relativitas umum, tensor metrik relativitas khusus, $\eta^{\mu\nu}$ harus diganti dengan tensor metrik relativitas umum, $g^{\mu\nu}$, dan derivatif normal diganti dengan derivatif kovarian. Dalam teori relativitas khusus (ruang Minkowski/ruang-waktu datar) tensor metrik $\eta^{\mu\nu}$ adalah tetap (*fixed*) seperti diberikan oleh persamaan (B.2), sedangkan dalam teori relativitas umum (ruang Riemannian/ruang-waktu lengkung) tensor metrik $g^{\mu\nu}$ tidak konstan, tetapi bergantung pada geometri ruang.

Persamaan gerak dari partikel dalam kerangka sembarang ketika partikel bergerak dalam medan gravitasi sembarang dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,
 \tag{B.5}$$

di mana $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ adalah *affine connection* yang didefinisikan sebagai

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.
 \tag{B.6}$$

Affine connection tidak lain adalah simbol Christoffel jenis kedua yang indeks bawahnya bersifat simetrik. Lintasan yang didefinisikan oleh persamaan (B.5) disebut *geodesic*, yaitu lintasan ekstrim dalam ruang-waktu medan gravitasi sembarang. Dalam kerangka lokal lintasan *geodesic* berupa garis lurus.

Untuk menguraikan persamaan medan Einstein menjadi persamaan TOV, diperlukan beberapa konsep dan persamaan seperti diuraikan di bawah ini.

B.1 Simbol Christoffel

Simbol Christoffel jenis kedua, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, dirumuskan sebagai:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{\lambda_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right], \quad (\text{B.7})$$

atau

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{\lambda_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (\text{B.8})$$

sedangkan simbol Christoffel jenis pertama, $\Gamma_{\kappa\mu\nu}$, dirumuskan sebagai:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa\mu\nu} &= g_{\kappa\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \rightarrow g_{\kappa\lambda} = g_{\lambda\kappa} \text{ dan } g_{\lambda\kappa} = \frac{1}{g^{\lambda\kappa}} \\ &= \frac{1}{g^{\lambda\kappa}} \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}). \\ \therefore \Gamma_{\kappa\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right] = \frac{1}{2}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Tensor Kurvatur Riemann-Christoffel

Tensor kurvatur Riemann-Christoffel (disingkat tensor kurvatur) menggambarkan kurvatur ruang dan dirumuskan sebagai

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}. \quad (\text{B.10})$$

Dari persamaan tensor kurvatur di atas dapat diturunkan sifat-sifat berikut:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = -R_{\nu\sigma\rho}^{\mu},$$

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha} + R_{\sigma\nu\rho}^{\alpha} + R_{\rho\sigma\nu}^{\alpha} = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha}R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha}, \quad (\text{B.12})$$

dan

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho},$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu}. \quad (\text{B.13})$$

Tensor kurvatur = 0 jika dan hanya jika ruang-waktu datar [51] yang berarti tidak ada efek gravitasi atau efek gravitasinya sangat kecil sehingga bisa diabaikan.

B.3 Identitas Bianchi

Dari sifat-sifat tensor kurvatur dalam referensi [52], dapat ditunjukkan bahwa identitas Bianchi dirumuskan sebagai

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (\text{B.14})$$

dapat dipenuhi. Identitas Bianchi ini dapat digunakan untuk menentukan tensor metrik jika kurvaturnya diketahui.

B.4 Tensor Ricci dan Kurvatur Skalar

Tensor Ricci, $R_{\mu\nu}$, adalah kontraksi dari tensor kurvatur:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}_{\alpha\nu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (\text{B.15})$$

Kurvatur skalar (R), didefinisikan sebagai kontraksi tensor metrik dan tensor Ricci [11]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}. \quad (\text{B.16})$$

Karena tensor Ricci bersifat simetrik [52], maka ketika menaikkan sebuah indeks pada tensor Ricci, berlaku

$$R^{\mu}_{\nu} = R_{\nu}^{\mu} = R^{\mu}_{\nu}. \quad (\text{B.17})$$

Dari definisi tensor Ricci dalam suku tensor Riemann, berlaku persamaan berikut:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \quad (\text{B.18})$$

B.5 Tensor Einstein

Jika identitas Bianchi dikontraksi dua kali [52], yaitu:

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\nu}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (\text{B.19})$$

dan

$$g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu}] = R_{;\lambda} - R^{\nu}_{\lambda;\nu} - R^{\mu}_{\lambda;\mu} = 0, \quad (\text{B.20})$$

maka persamaan terakhir dapat ditulis sebagai:

$$(2R_{\lambda}^{\mu} - \delta_{\lambda}^{\mu} R)_{;\mu} = 0. \quad (\text{B.21})$$

Dengan mendefinisikan $G^{\mu\nu}$ sebagai berikut

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R, \quad (\text{B.22})$$

maka persamaan (B.21) dapat ditulis menjadi

$$(G^{\mu\nu})_{;\mu} = 0. \quad (\text{B.23})$$

$G^{\mu\nu}$ dikenal sebagai tensor Einstein. Tensor Einstein ini memainkan peranan yang fundamental dalam teori relativitas umum. Karena tensor Ricci dan tensor metrik bersifat simetrik, maka tensor Einstein juga bersifat simetrik.

B.6 Tensor Energi-Momentum

Tensor energi-momentum ($T^{\mu\nu}$) menggambarkan sifat-sifat internal dari distribusi massa-energi dan merupakan sumber dari kurvatur ruang-waktu. Untuk dapat memberi akurasi, gambaran kovarian dari sifat-sifat internal materi dengan kerangka kerja relativistik, tidak hanya distribusi energi, tetapi distribusi momentum dari materi juga perlu diperhitungkan.

Tensor energi-momentum didefinisikan dalam suku fluks momentum-4 melintasi permukaan konstan. Elemen, $T^{\mu\nu}$, dapat digambarkan sebagai komponen- μ dari fluks momentum yang melintasi permukaan x^{ν} . Dengan demikian komponen-komponennya dapat disebut secara eksplisit sebagai:

$$T^{00} = \text{kepadatan energi,}$$

$$T^{0i} = \text{fluks energi melintasi permukaan } x^i,$$

$$T^{i0} = \text{kepadatan momentum } i,$$

$$T^{ij} = \text{fluks dari momentum } i \text{ yang melintasi permukaan } j.$$

Komponen-komponen tensor energi-momentum (T^{ij}) bersifat simetrik.

Secara umum dalam teori relativitas khusus, tensor energi-momentum untuk fluida ideal simetri bola dan dalam keadaan statik (tidak ada viskositas dan konduksi panas), bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} adalah [11, 53]:

$$T^{\mu\nu} = -P\eta^{\mu\nu} + (P + \epsilon)u^\mu u^\nu, \quad (\text{B.24})$$

di mana

- ϵ adalah kerapatan energi,
- P adalah tekanan, dan
- u^μ adalah kecepatan-empat,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \sqrt{1 - v^2}(1, v^1, v^2, v^3), \quad (\text{B.25})$$

di mana $u^\mu u_\mu = 1$.

Sedangkan dalam teori relativitas umum, tensor energi-momentum dapat ditulis menggunakan prinsip kovarian umum, yaitu

$$T^{\mu\nu} = -Pg^{\mu\nu} + (P + \epsilon)u^\mu u^\nu, \quad (\text{B.26})$$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1.$$

Kekekalan massa-energi dalam teori relativitas khusus dengan rumus suku tensor energi-momentum yang dapat diekspresikan dalam bentuk persamaan

$$T_{\mu\nu,\kappa} = 0, \quad (\text{B.27})$$

dapat digeneralisasi untuk teori relativitas umum menjadi

$$T_{\mu\nu;\kappa} = 0. \quad (\text{B.28})$$

B.7 Persamaan Medan Einstein

Persamaan medan Einstein mempunyai tiga bentuk, yaitu:

- pertama persamaan medan Einstein untuk ruang kosong di luar sebuah bintang statik dirumuskan sebagai

$$G^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.29})$$

- kedua persamaan medan Einstein untuk ruang-waktu di dalam distribusi massa dan energi dari sebuah bintang dirumuskan sebagai

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (\text{B.30})$$

di mana $T^{\mu\nu}$ adalah tensor energi-momentum dan k adalah konstanta yang ditentukan dengan membandingkan relativitas umum dengan mekanika Newton dalam limit Newton [11],

- dan ketiga persamaan medan Einstein untuk kosmologi statik sebelum diketahui bahwa jagat raya sedang mengembang dirumuskan sebagai

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.31})$$

di mana Λ adalah konstanta kosmologi.

B.8 Bintang Relativistik

Sekarang akan dicari solusi dari persamaan medan Einstein dalam daerah isotropik statik dari ruang-waktu di dalam dan di luar bintang statik di bawah kondisi $g_{\mu\nu}$ yang independen terhadap waktu ($x^0 \equiv t$) dan $g^{om} = 0$. Kita pilih koordinat ruang $x^1 = r, x^2 = \theta$, dan $x^3 = \phi$. Bentuk yang paling umum dari elemen garis dapat ditulis sebagai

$$d\tau^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{B.32})$$

Dengan mengganti $U(r) \equiv e^{2\nu(r)}$, $V(r) \equiv e^{2\lambda(r)}$, dan $W(r) \equiv 1$, maka persamaan (B.32) bisa ditulis menjadi

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (\text{B.33})$$

di mana λ dan ν hanya merupakan fungsi r saja. Kemudian dengan membandingkan persamaan (B.33) dengan persamaan $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, atau

$$d\tau^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dr^2 - g_{22}d\theta^2 - g_{33}d\phi^2,$$

maka kita dapatkan

$$g_{00} = e^{2\nu(r)}, \quad g_{11} = -e^{2\lambda(r)}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta,$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (\text{B.34})$$

Karena $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$, di mana $\delta_\mu^\rho = 1$ jika $\rho = \mu$ dan $\delta_\mu^\rho = 0$ jika $\rho \neq \mu$, maka kita dapatkan relasi $g_{\mu\mu}g^{\mu\mu} = 1$ atau $g_{\mu\mu} = 1/g^{\mu\mu}$ (bukan sumasi).

Dari persamaan *affine connection* atau simbol Christoffel jenis kedua, yaitu

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}),$$

didapat hasil berikut:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) \rightarrow g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} (0 + 0 - \frac{\partial}{\partial r}[e^{2\nu(r)}]) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-e^{2\lambda(r)}} (-2\nu'(r)e^{2\nu(r)}) \\ &= \nu'(r)e^{2[\nu(r)-\lambda(r)]}. \end{aligned}$$

$$\therefore \Gamma_{00}^1 = \nu' e^{2(\nu-\lambda)}. \quad (\text{B.35})$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, akan didapat pula hasil sebagai berikut:

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda', \quad (\text{B.36})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-2\lambda}, \quad (\text{B.37})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}, \quad (\text{B.38})$$

$$\Gamma_{10}^0 = \nu', \quad (\text{B.39})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1/r, \quad (\text{B.40})$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta, \quad (\text{B.41})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta. \quad (\text{B.42})$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan tensor Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (\text{B.43})$$

dan mengingat sifat simetrik dari dua indeks di bawah dari *affine connection*, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0, \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} [\nu' e^{2(\nu-\lambda)}] - \nu'^2 e^{2(\nu-\lambda)} - \lambda' \nu' e^{2(\nu-\lambda)} - \frac{\nu'}{r} e^{2(\nu-\lambda)} - \frac{\nu'}{r} e^{2(\nu-\lambda)} \\ &\quad + \nu'^2 e^{2(\nu-\lambda)} + \nu'^2 e^{2(\nu-\lambda)}, \\ &= [-\nu'' - \nu' \cdot 2(\nu' - \lambda')] e^{2(\nu-\lambda)} + \nu'^2 e^{2(\nu-\lambda)} - \lambda' \nu' e^{2(\nu-\lambda)} - \frac{2\nu'}{r} e^{2(\nu-\lambda)}, \end{aligned}$$

sehingga setelah disederhanakan menjadi

$$\therefore R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)}. \quad (\text{B.44})$$

Dengan cara yang sama seperti di atas diperoleh juga hasil-hasil sebagai berikut:

$$R_{11} = \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \quad (\text{B.45})$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1, \quad (\text{B.46})$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (\text{B.47})$$

B.8.1 Solusi Schwarzschild

Persamaan medan Einstein dalam ruang kosong di luar sebuah bintang statik dirumuskan sebagai $G_{\mu\nu} = 0$ dengan $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, sehingga

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad \text{atau} \quad R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{B.48})$$

Kalikan persamaan (B.48) dengan $g^{\alpha\mu}$ dan kemudian jumlahkan indeks dummy, maka akan didapat

$$g^{\alpha\mu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}R \Leftrightarrow R_{\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\alpha}R. \quad (\text{B.49})$$

Dengan mengambil $\alpha = \nu = \mu$, maka

$$R = \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}R \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}(4)R \Leftrightarrow R = 2R \implies R = 0 \quad \text{dan} \quad R_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.50})$$

Karena $R_{\mu\nu} = 0$, maka $R_{00} = 0$ dan $R_{11} = 0$, sehingga $R_{00} + R_{11} = 0$ atau

$$\begin{aligned} [\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}] + [-\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}] &= 0 \\ -\frac{2}{r}[\nu' + \lambda'] &= 0 \Leftrightarrow \nu' + \lambda' = 0 \implies \nu' = -\lambda'. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Untuk r yang besar, maka pengaruh gravitasi bintang adalah kecil dan bisa diabaikan, sehingga ruang menjadi datar. Oleh karena itu berlaku

$$\lambda + \nu = 0 \implies \lambda = -\nu. \quad (\text{B.52})$$

Kemudian gunakan hasil $R_{22} = 0$, maka di dapat hasil

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1. \quad (\text{B.53})$$

Karena medannya statik, maka derivatif terhadap waktu dari g_{00} hilang, sehingga

$$\Gamma_{00}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(2g_{\nu 0,0} - g_{00,\nu}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\nu}(1 - \delta_{0}^{\nu}). \quad (\text{B.54})$$

Kemudian karena medan gravitasinya lemah, kita bisa mengambil harga

$$g_{00} = (1 + \delta)\eta_{00}, \quad (\text{B.55})$$

di mana $\delta \ll 1$ dan hal ini juga berlaku untuk $g_{\mu\nu}$ yang lain, sehingga persamaan (B.53) dapat ditulis menjadi

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{00}\frac{d\delta}{dx^{\nu}}(1 - \delta_0^{\nu}). \quad (\text{B.56})$$

Oleh karena itu persamaan *geodesic* menjadi

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^{\mu} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla \delta, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0. \quad (\text{B.57})$$

Karena $\frac{dt}{d\tau} \approx 1$, maka persamaan (B.56) menjadi

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \nabla \delta. \quad (\text{B.58})$$

Persamaan Newton dirumuskan sebagai

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = -\nabla V, \quad (\text{B.59})$$

di mana V adalah potensial gravitasi yang memenuhi rumus

$$V = -\frac{GM}{r}, \quad (\text{B.60})$$

di mana G adalah konstanta gravitasi Newton. Dengan membandingkan persamaan (B.58) dan (B.59), didapat relasi $\delta = 2V$, sehingga persamaan (B.55) menjadi

$$g_{00} = 1 + 2V = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (\text{B.61})$$

Dari persamaan (B.61), akhirnya didapat hasil-hasil sebagai berikut:

$$g_{00} \equiv e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (r > R), \quad (\text{B.62})$$

$$g_{11} \equiv -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (r > R), \quad (\text{B.63})$$

sehingga persamaan *proper time* bisa ditulis menjadi

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B.64})$$

di mana $r > R$, dengan R adalah jari-jari bintang.

Jadi, solusi Schwarzschild medan Einstein dalam ruang kosong di luar sebuah bintang statik adalah

$$\begin{aligned} g_{00}(r) &= e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad r > R, \\ g_{11}(r) &= -e^{2\lambda} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad r > R, \\ g_{22}(r) &= -r^2, \quad \text{dan} \quad g_{33}(r, \theta) = -r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

B.8.2 Persamaan TOV

Untuk membentuk persamaan TOV akan lebih mudah dilakukan dengan tensor berindeks campuran atas-bawah (tensor *mixed*), sehingga persamaan medan Einstein ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 G_{\mu}^{\nu} &= g_{\mu\alpha} G^{\alpha\nu} \\
 &= g_{\mu\alpha} \left[R^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} R \right] \\
 &= g_{\mu\alpha} R^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} R \\
 &= R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R \implies R_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\alpha} R^{\alpha\nu} \\
 &= k T_{\mu}^{\nu},
 \end{aligned} \tag{B.66}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
 &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
 &= e^{-2\nu} \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)} \\
 &\quad - e^{-2\lambda} \left(\nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} [(1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1] \\
 &\quad - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [(1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1] \sin^2 \theta \\
 &= \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \left(\nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} \\
 &\quad - \frac{2}{r^2} [(1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1] \\
 &= \left(-2\nu'' + 2\lambda' \nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2},
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

kemudian

$$\begin{aligned}
 R_0^0 &= g^{00} R_{00} \\
 &= e^{-2\nu} \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)},
 \end{aligned} \tag{B.68}$$

$$\begin{aligned}
 R_1^1 &= g^{11} R_{11} \\
 &= -e^{-2\lambda} \left(\nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right),
 \end{aligned} \tag{B.69}$$

$$\begin{aligned}
R_2^2 &= g^{22} R_{22} \\
&= -\frac{1}{r^2} [(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1],
\end{aligned} \tag{B.70}$$

$$\begin{aligned}
R_3^3 &= g^{33} R_{33} \\
&= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1] \sin^2 \theta \\
&= -\frac{1}{r^2} [(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1] \\
&= R_2^2,
\end{aligned} \tag{B.71}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= R_0^0 - \frac{1}{2}R \\
&= e^{-2\nu} \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \right\} \\
&= \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} \\
&\quad + \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2},
\end{aligned} \tag{B.72}$$

$$\begin{aligned}
G_1^1 &= R_1^1 - \frac{1}{2}R \\
&= -e^{-2\lambda} \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \right\} \\
&= -e^{-2\lambda} \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
&\quad + \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2},
\end{aligned} \tag{B.73}$$

dan

$$\begin{aligned}
G_2^2 &= R_2^2 - \frac{1}{2}R \\
&= -\frac{1}{r^2} [(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \right\} \\
&= \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} \\
&\quad + \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \\
&= \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda},
\end{aligned} \tag{B.74}$$

juga

$$G_3^3 = G_2^2. \tag{B.75}$$

Hasil-hasil di atas dapat kita rangkumkan sebagai berikut:

$$r^2 G_0^0 = e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda') - 1 = -\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})],$$

$$r^2 G_1^1 = e^{-2\lambda} (1 + 2r\nu') - 1,$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right),$$

dan

$$G_3^3 = G_2^2. \tag{B.76}$$

Karena diasumsikan bintangnya statik, maka kecepatan-tiga dari setiap elemen fluida adalah nol, sehingga

$$u^\mu = 0 \quad (\mu \neq 0) \quad \text{dan} \quad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \tag{B.77}$$

Untuk tensor energi-momentum dinyatakan sebagai tensor *mixed* mempunyai komponen-komponen:

$$T_0^0 = \epsilon, \quad T_\mu^\mu = -P \quad (\mu \neq 0). \tag{B.78}$$

Oleh karena itu, komponen (00) persamaan medan Einstein dapat ditulis kembali sebagai

$$G_0^0 = kT_0^0 \implies r^2 G_0^0 = -\frac{d}{dr}[r(1 - e^{-2\lambda})] = kr^2 T_0^0 = kr^2 \epsilon(r). \quad (\text{B.79})$$

Persamaan terakhir ini jika diintegral menghasilkan

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 + \frac{k}{r} \int_0^r \epsilon(r) r^2 dr. \quad (\text{B.80})$$

Jika didefinisikan:

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r \epsilon(r) r^2 dr, \quad (\text{B.81})$$

dan notasi R sebagai jari-jari bintang, maka massa bintang $M \equiv M(R)$ dan persamaan (B.80) menjadi

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 + \frac{kM(r)}{4\pi r}. \quad (\text{B.82})$$

Bandingkan persamaan (B.82) dan persamaan (B.62):

$g_{00} \equiv e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{r}$, didapat nilai konstanta k , yaitu

$$k = -8\pi G. \quad (\text{B.83})$$

Oleh karena itu, persamaan medan Einstein sekarang bisa ditulis sebagai

$$G^{\mu\nu} = -8\pi GT^{\mu\nu}, \quad (\text{B.84})$$

sehingga persamaan diferensial dari (B.76) menjadi

$$G_0^0 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi G\epsilon(r), \quad (\text{B.85})$$

$$G_1^1 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G\rho(r), \quad (\text{B.86})$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi GP(r), \quad (\text{B.87})$$

dan

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi GP(r). \quad (\text{B.88})$$

Untuk menyederhanakan notasi, dipilih satuan alami sehingga $G = c = 1$. Dari persamaan (B.85) diperoleh hasil

$$-2r\lambda' = (1 - 8\pi r^2 \epsilon) e^{2\lambda} - 1, \quad (\text{B.89})$$

dan dari persamaan (B.86) diperoleh hasil

$$2r\nu' = (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1. \quad (\text{B.90})$$

Turunkan terhadap r persamaan (B.89) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(2r\nu') &= 2\nu' + 2r\nu'' \\ &= (16\pi r P + 8\pi r^2 P')e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 P)2\lambda'e^{2\lambda} \\ &= [(16\pi r P + 8\pi r^2 P') + (1 + 8\pi r^2 P)2\lambda']e^{2\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

Kemudian kalikan persamaan (B.91) dengan r menjadi

$$\begin{aligned} r(2\nu' + 2r\nu'') &= 2r\nu' + 2r^2\nu'' \\ &= (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 P)2r\lambda'e^{2\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

dan substitusikan persamaan (B.89) ke persamaan (B.92) menjadi

$$\begin{aligned} 2r^2\nu'' &= (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 P)2r\lambda'e^{2\lambda} - 2r\nu' \\ &= (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 P) \\ &\quad \times [(-1 + 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} + 1]e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + 1 \\ &= 1 + (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

Kemudian kuadratkan persamaan (B.90) menjadi

$$\begin{aligned} (2r\nu')^2 &= [(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1]^2 \\ &= (1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} - 2(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + 1, \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

atau

$$2r^2\nu'^2 = \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.95})$$

Akhirnya persamaan (B.89), (B.90), (B.93), dan (B.95) berturut-turut dapat dinyatakan dalam λ' , ν' , ν'' , dan ν'^2 , yaitu sebagai berikut:

$$\lambda' = \frac{-1}{2r} \{(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1\}, \quad (\text{B.96})$$

$$\nu' = \frac{1}{2r} \{(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1\}, \quad (\text{B.97})$$

$$\nu'' = \frac{1}{2r^2} [1 + (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda}], \quad (\text{B.98})$$

dan

$$\nu'^2 = \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P(r))^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{B.99})$$

Sekarang persamaan TOV dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (B.96), (B.97), (B.97), dan (B.98) ke dalam persamaan (B.87), yaitu :

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi P,$$

atau persamaan

$$\nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} = 8\pi P e^{2\lambda}, \quad (\text{B.100})$$

menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r^2} \left[1 + (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} \right] \\ & + \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P(r))^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right] \\ & - \left[\frac{-1}{2r} \{ (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1 \} \right] \left[\frac{1}{2r} \{ (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1 \} \right] \\ & + \frac{1}{2r^2} \left[(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1 + (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1 \right] = 8\pi P e^{2\lambda}. \end{aligned}$$

Kalikan ruas kanan dan kiri dengan $2r^2$ lalu disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} & 1 + (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} \\ & + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{2} \left[(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1 \right] \left[(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1 \right] \\ & + (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1 + (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - 1 = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

kemudian dikelompokkan dalam suku dengan eksponensial yang sama

$$\begin{aligned} & (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} \\ & + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} \\ & + \frac{1}{2} \left[(1 - 8\pi r^2 \epsilon)(1 + 8\pi r^2 P)e^{4\lambda} - (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} \right] \\ & + (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} & (16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P')e^{2\lambda} - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)^2 e^{4\lambda} \\ & + \frac{1}{2}(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} \\ & - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

kemudian

$$\begin{aligned} & 16\pi r^2 P + 8\pi r^3 P' - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} \\ & + \frac{1}{2}(1 - 8\pi r^2 \epsilon) + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{2\lambda} - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P) = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

lalu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)(1 + 8\pi r^2 P)e^{2\lambda} - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} \\ & 12\pi r^2 P + 8\pi r^3 P' - 4\pi r^2 \epsilon = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P) [(1 + 8\pi r^2 P) - (1 - 8\pi r^2 \epsilon)] e^{2\lambda} \\ & + 4\pi r^2 (3P - \epsilon) + 8\pi r^3 P' = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

dan akhirnya diperoleh

$$\frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 P) [(8\pi r^2)(P + \epsilon)] e^{2\lambda} + 4\pi r^2 (3P - \epsilon) + 8\pi r^3 P' = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}.$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$4\pi r^2 (1 + 8\pi r^2 P)(P + \epsilon)e^{2\lambda} + 4\pi r^2 (3P - \epsilon) + 8\pi r^3 P' = 16\pi r^2 P e^{2\lambda}$$

atau

$$P' = \frac{2P}{r} + \frac{1}{2r}(\epsilon - 3P) - \frac{1}{2r}(1 + 8\pi r^2 P)(P + \epsilon)e^{2\lambda} \rightarrow e^{2\lambda} = \frac{r}{r - 2M},$$

sehingga

$$P' = \frac{4P}{2r} + \frac{\epsilon - 3P}{2r} - \frac{(1 + 8\pi r^2 P)(P + \epsilon)}{2r} \times \frac{r}{r - 2M},$$

atau

$$P' = \frac{P + \epsilon}{2r} - \frac{(1 + 8\pi r^2 P)(P + \epsilon)}{2(r - 2M)},$$

kemudian

$$P' = \frac{(P + \epsilon)(r - 2M) - r(P + \epsilon)(1 + 8\pi r^2 P)}{2r(r - 2M)},$$

lalu

$$P' = \frac{(P + \epsilon) [(r - 2M) - r(1 + 8\pi r^2 P)]}{2r(r - 2M)},$$

dan selanjutnya

$$P' = \frac{(P + \epsilon)(-2M - 8\pi r^3 P)}{2r(r - 2M)},$$

atau

$$P' = \frac{(\epsilon + P)(M + 4\pi r^3 P)}{r(2M - r)}.$$

Akhirnya, persamaan TOV dapat ditulis secara kompak sebagai

$$P' = \frac{dP(r)}{dr} = -\frac{[\epsilon(r) + P(r)] [M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r [r - 2M(r)]}, \quad (\text{B.101})$$

di mana

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\epsilon(r)r^2. \quad (\text{B.102})$$

Dengan memasukkan faktor tetapan gravitasi G dan kecepatan rambat cahaya c , persamaan TOV dapat ditulis sebagai

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}, \quad (\text{B.103})$$

di mana

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi\epsilon(r)r^2}{c^2}. \quad (\text{B.104})$$

Persamaan (B.103) dan (B.104) inilah yang akan digunakan untuk memperoleh relasi massa dan jari-jari bintang neutron statik.

Untuk menyelesaikan persamaan (B.103) dan (B.104) guna mendapatkan relasi massa dan jari-jari bintang neutron, maka nilai pada kondisi awal (nilai pada $r = 0$) untuk $P(r)$ dan $M(r)$ harus diketahui. Karena persamaan $M(r)$ [persamaan (B.104)] mengacu pada massa bintang neutron dalam ruang tertutup oleh jari-jari r dan $r = 0$ mengacu pada pusat bintang neutron, maka nilai awal untuk keduanya, baik $M(r)$ maupun r di pusat bintang neutron diketahui berharga nol (atau sangat kecil). Sedangkan pilihan nilai awal untuk P bergantung pada dugaan atau tebakan harga kerapatan barion di pusat bintang neutron. Dengan menggunakan nilai awal untuk r , P , dan M , maka dengan menggunakan persamaan (B.102) nilai tekanan [$P(r')$] pada harga r yang bertambah naik katakanlah pada harga $r' = r + dr$ dapat dihitung. Dengan menggunakan persamaan keadaan (EOS), kerapatan energi yang bersesuaian, $\epsilon(r')$, dapat dihitung. Kemudian dengan menggunakan persamaan (B.103) nilai untuk $M(r')$ dapat dihitung. Siklus perhitungan ini diulang terus sampai pada $r' = R$ di mana $P(r')$ bernilai nol tercapai, yang berarti telah sampai pada batas permukaan luar bintang neutron dan R adalah jari-jari bintang neutron. $M(R)$ adalah massa tertutup oleh jari-jari bintang neutron, yang tidak lain menyatakan massa bintang neutron.

Dalam bahasa pemrograman FORTRAN77, persamaan TOV [sepasang persamaan diferensial: persamaan (B.103) dan (B.104)] diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat.

Untuk sepasang persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= F(r, P, M) \\ &= -\frac{G\epsilon M}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\epsilon} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{M} \right] \left[1 - \frac{2GM}{r} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr} &= G(r, P, M) \\ &= 4\pi\epsilon r^2, \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

metode Runge-Kutta orde keempat mendefinisikan sebuah step integrasi tunggal

sebesar h [54, 55] dengan

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4,$$

$$M_{n+1} = M_n + \frac{1}{6}d_1 + \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{3}d_3 + \frac{1}{6}d_4,$$

di mana

$$k_1 = hF(r_n, P_n, M_n),$$

$$k_2 = hF(r_n + h/2, P_n + k_1/2, M_n + d_1/2),$$

$$k_3 = hF(r_n + h/2, P_n + k_2/2, M_n + d_2/2),$$

$$k_4 = hF(r_n + h, P_n + k_3, M_n + d_3),$$

dan

$$d_1 = hG(r_n, P_n, M_n),$$

$$d_2 = hG(r_n + h/2, P_n + k_1/2, M_n + d_1/2),$$

$$d_3 = hG(r_n + h/2, P_n + k_2/2, M_n + d_2/2),$$

$$d_4 = hG(r_n + h, P_n + k_3, M_n + d_3).$$

Lampiran C

Penyelesaian Integral

C.1 Kerapatan Energi

Persamaan kerapatan energi materi nuklir dalam bintang neutron mengandung integral berbentuk

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2},$$

di mana k_F adalah momentum Fermi dari partikel tertentu (misal proton atau neutron) dan m adalah massa partikel tersebut. Berikut ini penyelesaian secara analitik dari $\int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk$. Misal $I_1 = \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk$, maka

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \\ &= \int_0^{k_F} k(k^2 + m^2)^{1/2} k dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{k_F} k(k^2 + m^2)^{1/2} d(k^2 + m^2) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{k_F} k d(k^2 + m^2)^{3/2} \\ &= \frac{1}{3} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{3} \int_0^{k_F} (k^2 + m^2)^{3/2} dk \\ &= \frac{1}{3} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{3} \int_0^{k_F} (k^2 + m^2) \sqrt{k^2 + m^2} dk \\ &= \frac{1}{3} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{3} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk - \frac{1}{3} \int_0^{k_F} m^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{3}k_F(k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{3}I_1 - \frac{m^2}{3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk$$

$$\frac{4}{3}I_1 = \frac{1}{3}k_F(k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{m^2}{3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk$$

$$I_1 = \frac{1}{4}k_F(k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{m^2}{4} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk.$$

Bentuk $\frac{m^2}{4} \int \sqrt{k^2 + m^2} dk$ diselesaikan secara terpisah berikut ini.

Misal : $I_{1a} = \frac{m^2}{4} \int \sqrt{k^2 + m^2} dk$ dan $k = m \tan t$, maka

$$I_{1a} = \frac{m^2}{4} \int \sqrt{m^2 \tan^2 t + m^2} d m \tan t$$

$$= \frac{m^2}{4} \int \sqrt{m^2(\tan^2 t + 1)} m \sec^2 t dt$$

$$= \frac{m^2}{4} \int \sqrt{m^2 \sec^2 t} m \sec^2 t dt$$

$$= \frac{m^4}{4} \int \sec^3 t dt$$

$$= \frac{m^4}{4} \int \sec t \sec^2 t dt$$

$$= \frac{m^4}{4} \int \sec t d \tan t$$

$$= \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - \frac{m^4}{4} \int \tan t d \sec t$$

$$= \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - \frac{m^4}{4} \int \tan t \sec t \tan t dt$$

$$= \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - \frac{m^4}{4} \int \sec t \tan^2 t dt$$

$$= \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - \frac{m^4}{4} \int \sec t (\sec^2 t - 1) dt$$

$$I_{1a} = \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - \frac{m^4}{4} \int \sec^3 t dt + \frac{m^4}{4} \int_0^{k_F} \sec t dt$$

$$I_{1a} = \frac{m^4}{4} \sec t \tan t - I_{1a} + \frac{m^4}{4} \int \sec t \times \frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t} dt$$

$$\begin{aligned}
2I_{1a} &= \frac{m^4}{4} \sec t \tan t + \frac{m^4}{4} \int \frac{\sec t \tan t + \sec^2 t}{\sec t + \tan t} dt \\
I_{1a} &= \frac{m^4}{8} \sec t \tan t + \frac{m^4}{8} \int \frac{d(\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)} \\
I_{1a} &= \frac{m^4}{8} \sec t \tan t + \frac{m^4}{8} \ln(\sec t + \tan t) + c \\
I_{1a} &= \frac{m^4}{8} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{m} \frac{k}{m} + \frac{m^4}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{m} + \frac{k}{m} \right) + c \\
I_{1a} &= \frac{m^4}{8} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{m} \frac{k}{m} + \frac{m^4}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2} + k}{m} \right) + c \\
I_{1a} &= \frac{1}{8} m^2 k \sqrt{k^2 + m^2} + \frac{1}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2} + k}{m} \right) + c.
\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
I_{1a} &= \frac{m^2}{4} \int \sqrt{k^2 + m^2} dk \\
&= \frac{1}{8} m^2 k \sqrt{k^2 + m^2} + \frac{1}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2} + k}{m} \right) + c,
\end{aligned}$$

maka

$$\frac{m^2}{4} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk = \frac{1}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{1}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right).$$

Jadi,

$$\int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk =$$

$$\frac{1}{4} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right). \quad (C.1)$$

C.2 Tekanan

Seperti halnya dalam persamaan kerapatan energi materi nuklir dalam bintang neutron yang mengandung integral, persamaan tekanan materi nuklir dalam bintang neutron juga mengandung integral dalam bentuk yang berbeda, yaitu

$$\frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk.$$

Berikut ini penyelesaian secara analitik dari $\frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk$.

Misal $I_2 = \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk$, maka

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk \\ &= \int_0^{k_F} k^3 (k^2 + m^2)^{-1/2} k dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{k_F} k^3 (k^2 + m^2)^{-1/2} d(k^2 + m^2) \\ &= \int_0^{k_F} k^3 d\sqrt{k^2 + m^2} \\ &= k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk^3 \\ &= k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - 3 \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk &= \\ \frac{1}{4} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right), \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} I_2 &= k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{4} k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} \\ &\quad + \frac{3}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{4} k_F (k_F^2 + m^2) \sqrt{k_F^2 + m^2} \\
&\quad + \frac{3}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \\
&= k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{4} k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{4} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} \\
&\quad + \frac{3}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \\
&= \frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right).
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk = \\
&\frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{8} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right). \quad (\text{C.2})
\end{aligned}$$

C.3 Medan Meson Skalar

Persamaan gerak medan meson skalar mengandung kerapatan skalar barion yang di dalamnya mengandung integral berbentuk

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2 m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk.$$

Berikut penyelesaian analitik $\int_0^{k_F} \frac{k^2 m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk$.

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} \frac{k^2 m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk &= m \int_0^{k_F} k(k^2 + m^2)^{-1/2} k dk \\ &= \frac{1}{2} m \int_0^{k_F} k(k^2 + m^2)^{-1/2} d(k^2 + m^2) \\ &= m \int_0^{k_F} k d\sqrt{k^2 + m^2} \\ &= mk_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - m \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk. \end{aligned}$$

Penyelesaian dari $\int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk$ bisa dilihat pada bagian C.1, yaitu

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} dk &= \frac{4I_{1a}}{m^2} \\ &= \frac{1}{2} k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{1}{2} m^2 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right), \end{aligned}$$

sehingga

$$\int_0^{k_F} \frac{k^2 m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk = mk_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{2} mk_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{2} m^3 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right).$$

Jadi,

$$\int_0^{k_F} \frac{k^2 m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk = \frac{1}{2} mk_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{2} m^3 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right). \quad (\text{C.3})$$

Lampiran D

Data untuk Mereproduksi Persamaan Keadaan di *crust*

Tabel D.1: Data yang menggambarkan rangkaian keseimbangan inti dari referensi [36] yang digunakan untuk mereproduksi persamaan keadaan yang asli dari daerah *outer crust* bintang neutron seperti dalam referensi [37].

μ (MeV)	μ_e (MeV)	$\epsilon_{max}(g.cm^3)$	$P(dn.cm^{-2})$	$\rho_b(cm^{-3})$	Unsur	Z	N
930.60	0.95	8.09×10^6	5.29×10^{23}	4.88×10^{30}	^{56}Fe	26	30
931.31	2.60	2.69×10^8	6.91×10^{25}	1.62×10^{32}	^{62}Ni	28	34
932.00	4.24	1.24×10^9	5.20×10^{26}	7.48×10^{32}	^{64}Ni	28	36
933.33	7.69	8.15×10^9	5.78×10^{27}	4.90×10^{33}	^{84}Se	34	50
934.42	10.61	2.23×10^{10}	2.12×10^{28}	1.34×10^{34}	^{82}Ge	32	50
935.48	13.58	4.88×10^{10}	5.70×10^{28}	2.93×10^{34}	^{80}Zn	30	50
937.68	19.97	1.63×10^{11}	2.68×10^{29}	9.74×10^{34}	^{78}Ni	28	50
937.78	20.25	1.78×10^{11}	2.84×10^{29}	1.07×10^{35}	^{76}Fe	26	50
938.57	22.86	2.67×10^{11}	4.55×10^{29}	1.60×10^{35}	^{122}Zr	40	82
939.29	25.25	3.73×10^{11}	6.79×10^{29}	2.23×10^{35}	^{120}Sr	38	82
939.57	26.19	4.32×10^{10}	7.87×10^{29}	2.59×10^{35}	^{118}Kr	36	82

Tabel D.2: Data yang menggambarkan rangkaian keseimbangan inti yang dihitung dengan menggunakan data atom modern dan model inti TMA relativistik dari referensi [36] yang digunakan untuk menghitung persamaan keadaan dari daerah *outer crust* bintang neutron.

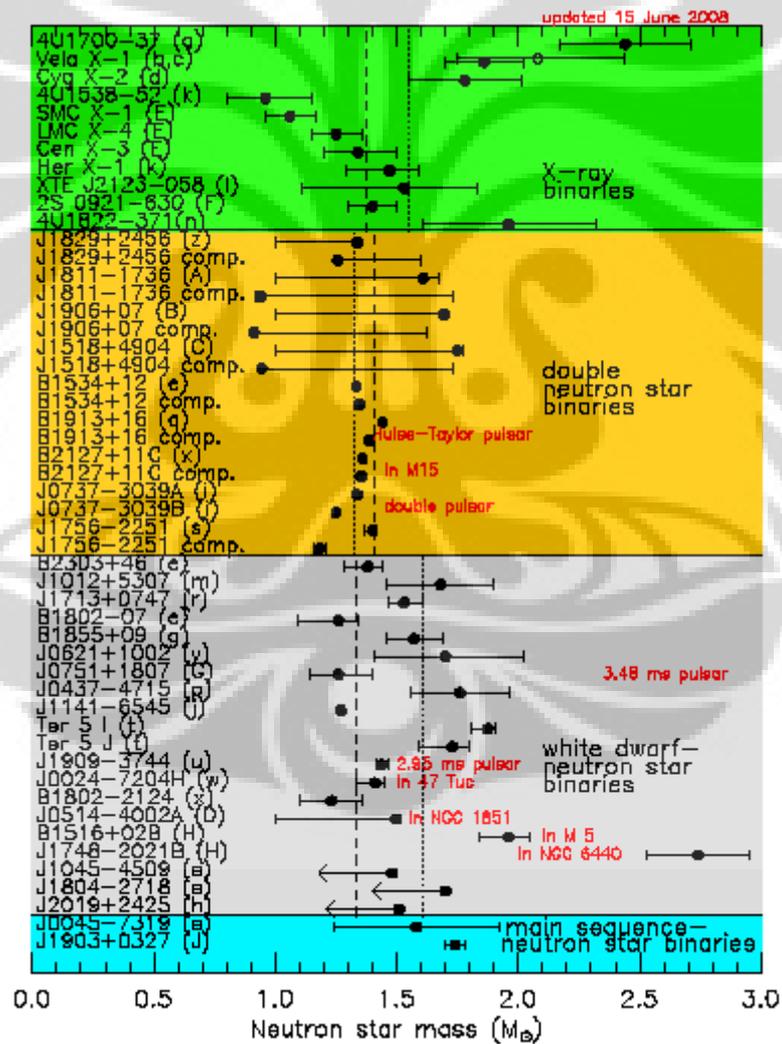
μ (MeV)	μ_e (MeV)	$\epsilon_{max}(g.cm^3)$	$P(dn.cm^{-2})$	$\rho_b(cm^{-3})$	Unsur	Z	N
930.60	0.95	8.02×10^6	5.22×10^{23}	4.83×10^{30}	^{56}Fe	26	30
931.31	2.61	2.71×10^8	6.98×10^{25}	1.63×10^{32}	^{62}Ni	28	34
932.04	4.34	1.33×10^9	5.72×10^{26}	8.03×10^{32}	^{64}Ni	28	36
932.09	4.46	1.50×10^9	6.44×10^{27}	9.04×10^{33}	^{66}Ni	28	38
932.56	5.64	3.09×10^9	1.65×10^{27}	1.86×10^{33}	^{86}Kr	36	50
933.62	8.38	1.06×10^{10}	8.19×10^{27}	6.37×10^{33}	^{84}Se	34	50
934.75	11.43	2.79×10^{10}	2.85×10^{28}	1.68×10^{34}	^{82}Ge	32	50
935.93	14.71	6.21×10^{10}	7.86×10^{28}	3.73×10^{34}	^{80}Zn	30	50
937.28	18.64	1.32×10^{11}	2.03×10^{29}	7.92×10^{34}	^{78}Ni	28	50
937.63	19.80	1.68×10^{11}	2.55×10^{29}	1.01×10^{35}	^{124}Mo	42	82
938.13	21.38	2.18×10^{11}	3.48×10^{29}	1.31×10^{35}	^{122}Zr	40	82
938.67	23.19	2.89×10^{11}	4.82×10^{29}	1.73×10^{35}	^{120}Sr	38	82
939.18	24.94	3.73×10^{11}	6.47×10^{29}	2.23×10^{35}	^{118}Kr	36	82
939.57	26.29	4.55×10^{11}	8.00×10^{29}	2.72×10^{35}	^{116}Se	34	82

Tabel D.3: Data untuk persamaan keadaan BBP dari materi dalam *inner crust* dari bintang neutron [38].

$\epsilon_{max}(g.cm^3)$	$P(dn.cm^{-2})$	$\rho_b(cm^{-3})$	Z	N
4.46×10^{11}	7.89×10^{29}	2.67×10^{35}	126	40
5.23×10^{11}	8.35×10^{29}	3.13×10^{35}	128	40
6.61×10^{11}	9.10×10^{29}	3.95×10^{35}	130	40
7.96×10^{11}	9.83×10^{29}	4.76×10^{35}	132	41
9.73×10^{11}	1.08×10^{30}	5.81×10^{35}	135	41
1.20×10^{12}	1.22×10^{30}	7.14×10^{35}	137	42
1.47×10^{12}	1.40×10^{30}	8.79×10^{35}	140	42
1.80×10^{12}	1.64×10^{30}	1.08×10^{36}	142	43
2.20×10^{12}	1.95×10^{30}	1.31×10^{36}	146	43
2.93×10^{12}	2.59×10^{30}	1.75×10^{36}	151	44
3.83×10^{12}	3.51×10^{30}	2.29×10^{36}	156	45
4.93×10^{12}	4.77×10^{30}	2.94×10^{36}	163	46
6.25×10^{12}	6.48×10^{30}	3.73×10^{36}	170	48
7.80×10^{12}	8.75×10^{30}	4.65×10^{36}	178	49
9.61×10^{12}	1.17×10^{31}	5.73×10^{36}	186	50
1.25×10^{13}	1.69×10^{31}	7.42×10^{36}	200	52
1.50×10^{13}	2.21×10^{31}	8.91×10^{36}	211	54
1.78×10^{13}	2.85×10^{31}	1.06×10^{37}	223	56
2.21×10^{13}	3.93×10^{31}	1.31×10^{37}	241	58
2.99×10^{13}	6.18×10^{31}	1.78×10^{37}	275	63
3.77×10^{13}	8.77×10^{31}	2.24×10^{37}	311	67
5.08×10^{13}	1.39×10^{32}	3.02×10^{37}	375	74
6.19×10^{13}	1.88×10^{32}	3.67×10^{37}	435	79
7.73×10^{13}	2.66×10^{32}	4.58×10^{37}	529	88
9.83×10^{13}	3.90×10^{32}	5.82×10^{37}	683	100
1.26×10^{14}	5.86×10^{32}	7.47×10^{37}	947	117
1.59×10^{14}	8.59×10^{32}	9.37×10^{37}	1390	143
2.00×10^{14}	1.29×10^{33}	1.18×10^{38}	2500	201
2.52×10^{14}	1.90×10^{33}	1.48×10^{38}		
2.76×10^{14}	2.24×10^{33}	1.62×10^{38}		
3.08×10^{14}	2.75×10^{33}	1.81×10^{38}		
3.43×10^{14}	3.37×10^{33}	2.02×10^{38}		
3.89×10^{14}	4.29×10^{33}	2.28×10^{38}		
4.64×10^{14}	6.10×10^{33}	2.71×10^{38}		
5.09×10^{14}	7.39×10^{33}	2.98×10^{38}		

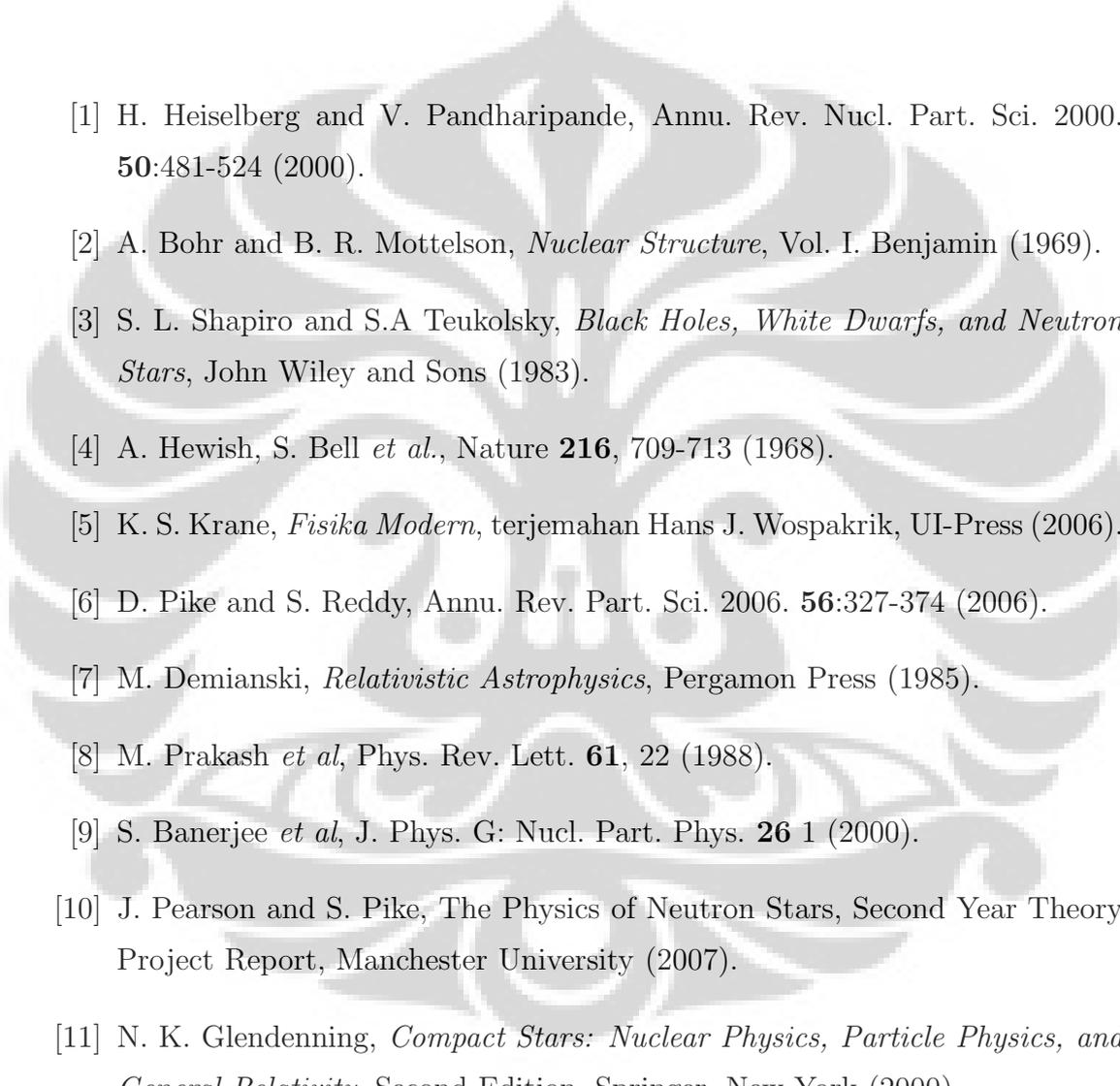
Lampiran E

Tabel Massa Bintang Neutron



Gambar E.1: Tabel massa bintang neutron [56].

Daftar Pustaka

- 
- [1] H. Heiselberg and V. Pandharipande, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2000. **50**:481-524 (2000).
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. I. Benjamin (1969).
- [3] S. L. Shapiro and S.A Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, John Wiley and Sons (1983).
- [4] A. Hewish, S. Bell *et al.*, *Nature* **216**, 709-713 (1968).
- [5] K. S. Krane, *Fisika Modern*, terjemahan Hans J. Wospakrik, UI-Press (2006).
- [6] D. Pike and S. Reddy, *Annu. Rev. Part. Sci.* 2006. **56**:327-374 (2006).
- [7] M. Demianski, *Relativistic Astrophysics*, Pergamon Press (1985).
- [8] M. Prakash *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 22 (1988).
- [9] S. Banerjee *et al.*, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **26** 1 (2000).
- [10] J. Pearson and S. Pike, *The Physics of Neutron Stars*, Second Year Theory Project Report, Manchester University (2007).
- [11] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*, Second Edition, Springer, New York (2000).
- [12] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing (1999).
- [13] F. Weber, *Prog. Pat. Nucl. Phys.* **54**, 193 (2005).
- [14] M. Prakash *et al.*, *Phys. Rep.* **280**, 1 (1997).

- [15] R. C. Tolman, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).
- [16] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [17] R. R. Silbar and S. Reddy, Am. J. Phys. **72**, 892 (2004).
- [18] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, M. Prakash, and P. Haensel, Phys. Rev. Lett. **66**, 2701 (1991).
- [19] J. M. Lattimer and M. Prakash, Science **304**, 536 (2004).
- [20] B. Haskell, N. Andersson, D.I. Jones, and L. Samuelson, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 231101.
- [21] B. J. Owen, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 211101.
- [22] M. Bejger and P. Haensel, Astron. Astrophys. **396**,917 (2002).
- [23] J. M. Lattimer and B.F. Schutz, Astrophys. J. **629** (2005) 979.
- [24] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Sub-nuclear Physics*, Oxford Univ. Press (1995).
- [25] B. D. Serot and J. D. Walecka, Int. J. Mod. Phys. **E6** (1997) 515.
- [26] I. Bednarek and R. Manka, nucl-th/0601022 (2006).
- [27] J. Schaffner and I. N. Mishustin, Phys. Rev. **C53** (1996) 1416; nucl-th/9506011.
- [28] R. Knoren, M. Prakash, and P. J. Ellis, Phys. Rev. **C52** (1995) 3470; nucl-th/9506016.
- [29] B. D. Serot and J. D. Walecka, nucl-th/9701058 (1986).
- [30] S. Reddy and M. Prakash, astro-ph/9610115 (1996).
- [31] C. Akcay, Thesis, College of William and Mary, Virginia (2002).
- [32] Raj Kumar, B. K. Agrawal, and Shashi K. Dhiman, Phys. Rev. C **74**, 034323 (2006).

- [33] K. C. Chung, C. S. Wang, A. J. Santiago, and J. W. Zhang, nucl-th/0102003 (2001).
- [34] J. K. Bunta, Ph.D. Thesis, Slovak Academy of Sciences, 2003; Phys. Rev. C **68** 054309 (2003).
- [35] R. B. Firestone, *Table of Isotopes*, 8th edition, John Wiley & Sons (1999).
- [36] S. B. Rüster, M. Hempel, and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. C **73**, 035804 (2006).
- [37] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, *Astrophys. J.* **70**, 299 (1971).
- [38] G. Baym, H. A. Bethe, and C. J. Pethick, *Nuc. Phys.* **A175**, 225 (1971).
- [39] J. Carriere, C. J. Horowitz, and J. Piekarewics, *Astrophys. J.* **593**, 463 (2003).
- [40] J. M. Lattimer and M. Prakash, astro-ph/0612440 (2006).
- [41] J. M. Lattimer and M. Prakash, *Phys. Rep.* **442**, 109 (2007).
- [42] J. M. Lattimer and M. Prakash, *Phys. Rep.* **121**, 333-334, (2000); *Astrophys. J.* **550**, 426 (2001).
- [43] M. Del Estal, M. Centelles, X. Vinas, and S. K. Patra, *Phys. Rev. C* **63**, 024314 (2001).
- [44] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [45] J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **76**, 064310 (2007); J. Carriere, C. J. Horowitz and J. Piekarewicz, *Astrophys. J.* **593**, 463 (2003).
- [46] L. Lindblom, *ApJ* **278**, 364 (1984).
- [47] M. Bailes *et al.*, *Astrophys. J.* **481**, 386 (1997).
- [48] W. Van Stratan, M. Bailes, M. C. Britton, S. R. Kulkarni, S. B. Anderson, R. N. Manchester, and J. Sarkissian, *Nature* **412**, 158 (2001).

- [49] A. W. Hotan, M. Bailes, and S. M. Ord, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **369** (2006).
- [50] J. P. W. Diener, *nucl-th/0806.0747* (2008).
- [51] H. Stephani, *Relativity*, 3rd edition, Cambridge University Press (2004).
- [52] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (1990).
- [53] B. D. Serot and J. D. Walecka, *Adv. Nuc. Phys.* **16**, 1 (1986).
- [54] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (1972).
- [55] S. Nakamura, *Applied Numerical Methods With Software*, Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, New Jersey (1991).
- [56] M. Prakash, *astro-ph/0812.2002* (2008).