



UNIVERSITAS INDONESIA

**PERBANDINGAN KINERJA PENGENDALIAN SISTEM TIGA
TANGKI ANTARA METODE *POLE PLACEMENT*,
INCREMENTAL CONTROL DAN *MODEL PREDICTIVE
CONTROL***

SKRIPSI

HARRY NOFRIANZ PRAKASA

0405030427

**FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO
DEPOK
DESEMBER 2009**



UNIVERSITAS INDONESIA

**PERBANDINGAN KINERJA PENGENDALIAN SISTEM TIGA
TANGKI ANTARA METODE *POLE PLACEMENT*,
INCREMENTAL CONTROL DAN *MODEL PREDICTIVE
CONTROL***

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik

HARRY NOFRIANZ PRAKASA

0405030427

**FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO
DEPOK
DESEMBER 2009**

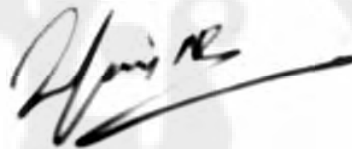
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Harry Nofrianz Prakasa

NPM : 0405030427

Tanda Tangan :



Tanggal : 30 Desember 2009

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Harry Nofrianz Prakasa

NPM : 0405030427

Program Studi : Teknik Elektro

Judul Skripsi : Perbandingan Kinerja Pengendalian Sistem Tiga Tangki antara Metode *Pole Placement*, *Incremental Control* dan *Model Predictive Control*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Teknik pada Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Ir. Aries Subiantoro, M.SEE (.....)

Penguji : Dr. Ir. Feri Yusivar, M.Sc. (.....)

Penguji : Dr. Ir. Abdul Halim, M.Eng (.....)

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 30 Desember 2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Teknik Jurusan Teknik Elektro pada Fakultas Teknik Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terimakasih kepada:

1. **Ir. Aries Subiantoro, M.SEE** selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, perhatian, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini.
2. Untuk Ayahanda, Firmansyah, dan Ibunda, Yenni, dengan rasa cinta dan tanggung jawabnya sehingga saya selalu bersyukur, kedua kakak saya, Gigin dan Dwi, yang selalu memotivasi tanpa lelah, terimakasih atas ilmunya yang mengubah saya untuk banyak belajar.
3. Biger selaku rekan bimbingan dan Dayat yang telah banyak membantu dalam proses pembuatan simulasi serta teman seperjuangan elektro dimanapun engkau berada, terimakasih.
4. Rekan-rekan semua yang telah membantu penyelesaian skripsi ini, tetap semangat.

Akhir kata, saya berharap Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan yang dilakukan oleh semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini memberikan kontribusi baru dalam dunia pendidikan.

Depok, 30 Desember 2009

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Harry Nofrianz Prakasa
NPM : 0405030427
Program Studi : Teknik Elektro
Fakultas : Teknik
Jenis karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-eksklusif Royalty-Free Right)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

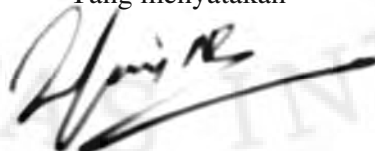
**PERBANDINGAN KINERJA PENGENDALIAN SISTEM TIGA
TANGKI ANTARA METODE *POLE PLACEMENT*,
INCREMENTAL CONTROL DAN *MODEL PREDICTIVE
CONTROL***

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 30 Desember 2009

Yang menyatakan



(Harry Nofrianz Prakasa)

ABSTRAK

Nama : Harry Nofrianz Prakasa
Program Studi : Teknik Elektro
Judul : Perbandingan Kinerja Pengendalian Sistem Tiga Tangki antara Metode *Pole Placement*, *Incremental Control* dan *Model Predictive Control*.

Skripsi ini membahas pemodelan linear dengan penyederhanaan model non-linear pada sistem tiga tangki menggunakan metode *AutoRegressive eXogeneous (ARX)*. Metode *ARX* tersebut didapat dengan mengambil data masukan dan keluaran dari sistem *open loop* kemudian memasukkan parameter orde dari sistem *linear* yang diinginkan. Desain pengendali yang dilakukan pada skripsi ini menggunakan metode *pole placement*, *incremental control*, dan *model predictive control*. Metode kontrol prediksi dipilih untuk sistem tiga tangki karena memiliki *settling time* yang lebih cepat dengan pengaturan nilai parameter Ψ , Γ , dan Θ yang dikonfigurasi berdasarkan horison prediksi (H_p) dan horison kontrol (H_u).

Kata kunci : *MPC*, kontrol prediksi, tiga tangki terhubung

ABSTRACT

Name : Harry Nofrianz Prakasa
Study Program : Electrical Engineering
Title : The Performance Comparison of System Controlling with Three Tanks on Pole Placement, Incremental Control, and Model Predictive Control Method.

This thesis discusses the simplification linear modeling of non-linear model of the three tanks system using the AutoRegressive eXogeneous (ARX) method. ARX method is obtained by taking the input and output data from open-loop system and then enters the order parameters of the desired linear system. Controller design is done in this thesis using the method of pole placement, incremental control, and model predictive control. Predictive Control methods is chosen for three-tank system because it has a settling time is faster by the parameter values Ψ , Γ , and Θ is configured based on prediction horizon (H_p) and the control horizon (H_u).

Key words: *MPC, predictive control, three tanks connected.*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI	v
ABSTRAK.....	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR	xi
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Sistematika Penulisan	4
BAB 2 SISTEM TIGA TANGKI, PEMODELAN, POLE PLACEMENT, INCREMENTAL CONTROL DAN MODEL PREDICTIVE CONTROL	5
2.1 Mekanika Fluida	5
2.1.1 FLUIDA BERGERAK.....	5
2.1.2 PERSAMAAN BERNOULLI.....	6
2.2 Pemodelan Tiga Tangki	7
2.2.1 MODEL DISKRIT ARX.....	7
2.2.2 VALIDASI MODEL.....	10
2.3 Desain Kendali dengan Metode <i>Pole Placement</i>	10
2.4 <i>Model Predictive Control</i>	14
2.4.1 <i>RECEDING HORIZON</i>	15
2.4.2 STRUKTUR PENGENDALI <i>MPC</i>	18
BAB 3 DESAIN PENGENDALI MPC PADA SISTEM TIGA TANGKI	19
3.1 Penurunan Model Matematis Tiga Tangki Terhubung	19
3.2 Uji Lup Terbuka Sistem Tiga Tangki Terhubung.....	21
3.3 Identifikasi Sistem Tiga Tangki Terhubung.....	24
3.4 Desain Pengendali Metode Penempatan Kutub	29
3.5 Desain Pengendali <i>MPC</i>	32

BAB 4 ANALISIS HASIL SIMULASI	40
BAB 5 KESIMPULAN	47
DAFTAR REFERENSI	48
LAMPIRAN	49



DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Keterangan simbol untuk membuat sistem tiga tangki	19
Tabel 3. 2 Parameter yang digunakan pada sistem tiga tangki	21
Tabel 3. 3 Data hasil masukan masukan <i>step</i> $u(t)$ dan keluarannya $y(t)$	23
Tabel 3. 4 Nilai Parameter letak kutub lup tertutup yang diinginkan	31
Tabel 3. 5 Nilai Parameter <i>Precompensator</i> dan <i>Controller</i>	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1	Blok diagram pengendali <i>MPC</i>	3
Gambar 2. 1	Pipa dengan ketinggian dan luas penampang berubah.....	6
Gambar 2. 2	Skema identifikasi berdasarkan kesalahan prediksi.....	8
Gambar 2. 3	Diagram blok <i>plant</i> lup tertutup dengan pengendali <i>2-DOF</i>	11
Gambar 2. 4	Diagram blok <i>plant</i> lup tertutup dengan parameter pengendali penempatan kutub..	12
Gambar 2. 5	Diagram blok <i>plant</i> lup tertutup dengan parameter-parameter pengendali.....	13
Gambar 2. 6	Ide dasar pengendali prediktif.....	17
Gambar 2. 7	Struktur pengendali <i>MPC</i>	18
Gambar 3. 1	Model tiga tangki terhubung.....	19
Gambar 3. 2	Respon sistem tiga tangki terhubung dengan masukan <i>step</i>	22
Gambar 3. 3	Perbandingan antara masukan dengan ketinggian air pada tangki ke-3.....	23
Gambar 3. 4	Daerah kerja sistem tiga tangki.....	24
Gambar 3. 5	Perbandingan keluaran model <i>ARX</i> dengan.....	26
Gambar 3. 6	Pemodelan dengan metode <i>ARX</i>	27
Gambar 3. 7	Diagram blok <i>incremental control</i>	32
Gambar 4. 1	Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak <i>pole</i> lup tertutup $k=0.2$	40
Gambar 4. 2	Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak <i>pole</i> lup tertutup $k=0.3$	41
Gambar 4. 3	Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak <i>pole</i> lup tertutup $k=0.4$	41
Gambar 4. 4	Perbandingan respon <i>plant</i> awal sistem tiga tangki dengan pengendali penempatan kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.2$	42
Gambar 4. 5	Perbandingan respon <i>plant</i> awal sistem tiga tangki dengan pengendali penempatan kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.3$	42
Gambar 4. 6	Perbandingan respon <i>plant</i> awal sistem tiga tangki dengan pengendali penempatan kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.4$	43
Gambar 4. 7	Hasil perubahan respon sistem penempatan kutub sebelum dan sesudah diberikan <i>integrator</i>	44
Gambar 4. 8	Keluaran ruang keadaan dengan kriteria <i>MPC</i> $H_p=5$ dan $H_u=1$	44
Gambar 4. 9	Keluaran ruang keadaan dengan kriteria <i>MPC</i> $H_p=8$ dan $H_u=1$	45
Gambar 4. 10	Keluaran ruang keadaan dengan kriteria <i>MPC</i> $H_p=12$ dan $H_u=1$	45
Gambar 4. 11	Keluaran terbaik dari <i>MPC</i> dengan model ruang keadaan.....	46

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada proses satu masukan dan satu keluaran, sebuah model proses yang diformulasikan berdasarkan informasi peralatan yang ada, dan sebuah masukan pengendali yang sesuai untuk diterapkan ke model proses diharapkan mampu mencapai kriteria kerja yang diinginkan. Masukan pengendali yang tepat akan menghasilkan proses keluaran yang tepat pula. Proses kontrol mungkin saja sulit pada proses otomatis, sebagai contoh untuk pendekatan model proses mungkin saja kurang bersesuaian sehingga akan menjadi sulit dalam pengendaliannya, atau ketika informasi yang didapat dari sensor tidak presisi sehingga proses pengendalian menjadi tidak benar. Beberapa fitur yang membuat model proses menjadi sulit dikontrol di dunia nyata karena adanya hambatan berupa:

- a. Tingkat minimal proses (*system order*) yang tidak diketahui.
- b. Model proses dimungkinkan dinamis, tetapi pada data operasi masukan dan keluaran mungkin saja tidak banyak dan tidak menampakkan karakteristik proses yang penting.
- c. Waktu tunda antara masukan dan keluaran mungkin tidak tetap atau tidak diketahui.
- d. Model proses lup terbuka dimungkinkan tidak stabil.
- e. Model proses mungkin tidak memberikan keterhubungan masukan dan keluaran seperti biasanya (*nonminimum-phase*).

Ada dua cara dalam melakukan pengendalian pada sistem yang *non-linear*, yaitu: cara pertama dengan membuat indentifikasi dan parameter estimasi dari sistem tersebut, kemudian merubahnya dalam bentuk pendekatan model proses yang linear. Cara kedua tetap menyelesaikan masalah *non-linear* tersebut dengan

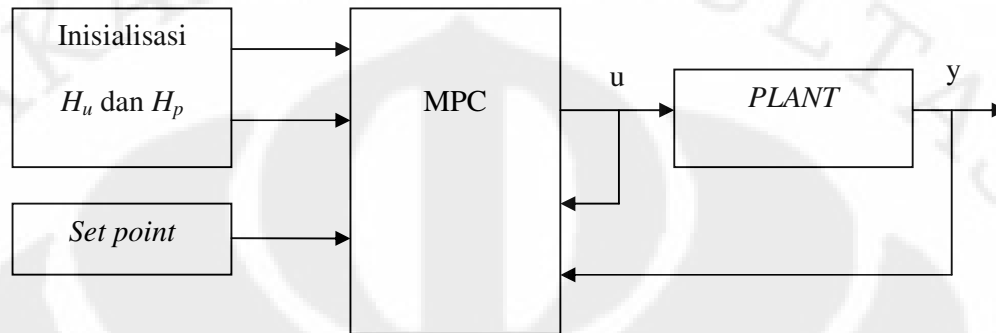
menggunakan metode pengendali yang *non-linear* juga. Akan terasa lebih sulit lagi jika diperhitungkan gangguan yang tidak diketahui pada sistem tersebut.

Metode *model predictive control* merupakan contoh sukses untuk menunjukkan kemampuan terhadap ketidakakurasian, ketidakkonsistenan, dan tingkat kesulitan yang dihadapi pada permasalahan tersebut.

Pada laporan skripsi ini model yang digunakan adalah model tiga tangki terhubung seri dengan pemodelan linear dalam bentuk *ARX*. Model *ARX* dapat memberikan karakteristik yang menyerupai sistem analog dengan pendekatan domain digital dengan asumsi kondisi sistem dianggap tetap. Maka, salah satu desain kontrol yang bersesuaian dengan model tersebut adalah pengendali dengan metode penempatan kutub. Hal ini bersesuaian juga dengan pernyataan P. Kanjilal, yaitu: desain kontrol dipengaruhi oleh pemodelan proses yang ada, tetapi kualitas dari kontrol sangat bergantung pada optimasi kriteria kerja. [PKan95]. Untuk itu kriteria kerja pun dirancang pada pengontrol lup tertutup, sehingga kesalahan yang terjadi pada masukan pengendali terus diminimalkan dengan umpan balik yang diberikan oleh sensor hingga mencapai nilai yang diinginkan dan tercapai kinerja terbaik.

Namun pengendali penempatan kutub masih memiliki kesalahan galat tunak dan *incremental control* memiliki *overshoot* yang cukup besar. Kinerja kontrol penempatan kutub akan bergantung kepada pilihan dari parameter desain, selain itu pada kenyataannya kecepatan komputasi pengendali haruslah lebih cepat dibandingkan dengan umpan balik yang diterima sehingga dihasilkan masukan ke sistem dengan benar. Untuk mengatasi permasalahan tentang kesalahan galat tunak dan *overshoot* digunakanlah pengendali *MPC* yang dapat beradaptasi terhadap perubahan nilai referensi yang diberikan pada waktu yang akan datang. Kemampuan pengendali ini dalam merespon menjadi karakter yang unik karena nilai keluaran yang diberikan dapat mendahului *set point* yang akan datang. Hal ini

memberikan keuntungan dengan semakin kecilnya waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kondisi tunak.



Gambar 1. 1 Blok diagram pengendali *MPC*

Pada **Gambar 1.1** Cara kerja pengendali *MPC* menggunakan dua buah lup yang bekerja secara *online*. Kedua lup berfungsi untuk meminimumkan kesalahan pada fungsi biaya dan mengatur parameter pengendali *MPC*.

1.2 Tujuan

Tujuan dari pembuatan skripsi ini adalah:

1. Mengidentifikasi model matematis non-linear sistem tiga tangki terhubung dengan metode *ARX* untuk mendapatkan model linear ber-*orde* tiga.
2. Membuat pengendali berupa metode *pole placement*, *incremental control*, dan *MPC*.
3. Membandingkan sistem dengan menggunakan pengendali dengan berbagai kriteria pada setiap pengendali menggunakan simulasi SIMULINK 7.6.0.324 (R2008a).

1.3 Batasan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah proses identifikasi *ARX* pada sistem tiga tangki terhubung seri. Teknik *ARX* bertujuan untuk memodelkan sistem analog menjadi bentuk linear dalam domain digital. Metode kendali yang

digunakan adalah metode *pole placement*, *incremental control* dan *model predictive control* sehingga sistem tiga tangki dapat memberikan keluaran bersesuaian dengan *set point* berdasarkan analisa kriteria dan lup tertutup.

1.4 Sistematika Penulisan

Bab 1 Pendahuluan. Pada bagian ini dibahas latar belakang, tujuan, batasan masalah, dan sistematika penulisan dari penulisan skripsi ini.

Bab 2 Dasar Teori. Berisi dasar teori, menjelaskan mekanika fluida, indentifikasi bentuk pemodelan menggunakan *ARX*, desain kendali dengan metode *pole placement*, *incremental control*, dan *Model Predictive Control (MPC)*.

Bab 3 Metodologi Penelitian. Menjelaskan sistem secara terperinci, mulai dari model matematis, validasi pemodelan *ARX*, simulasi *simulink*, dan respon sistem analog menggunakan pengendali penempatan kutub (*pole placement*), *incremental control* dan pada bagian ini dijelaskan juga desain *MPC* untuk pengendalian ketinggian air dengan model ruang keadaan.

Bab 4 Analisis Hasil Simulasi. Pada bagian ini dijelaskan hasil pengujian dan evaluasi untuk perbaikan kinerja tiga tangki berbasis *pole placement*, *incremental control*, dan *MPC* yang dijalankan menggunakan simulasi MATLAB 2008a.

Bab 5 Kesimpulan.

BAB 2

SISTEM TIGA TANGKI, PEMODELAN, *POLE PLACEMENT*, *INCREMENTAL CONTROL* DAN *MODEL PREDICTIVE CONTROL*

2.1 Mekanika Fluida

Fluida memiliki sifat mengalir. Aliran tersebut dikarenakan adanya gaya gravitasi sehingga air memiliki sifat untuk mengisi daerah yang lebih rendah sesuai dengan wadah yang menampungnya. Air memiliki nilai kerapatan, dimana kerapatan adalah perbandingan massa terhadap volume.

Kerapatan diberi simbol (ρ) = massa (m) / volume (V), dengan satuan (ρ) dalam gr/cm^3 , (m) dalam gr, dan (V) dalam cm^3 sehingga kerapatan air dalam standar cgs adalah 1 gr/cm^3 . [TPaul98]

Kerapatan air ini dipengaruhi oleh temperatur, berdasarkan sifat anomali air pada suhu 4 derajat celcius merupakan nilai maksimum kerapatannya. Walaupun cairan mengembang bila dipanaskan dan menyusut jika diberi tekanan, perubahan volume yang terjadi sering kali diabaikan. Sehingga dalam pemodelan nantinya faktor tekanan dan temperatur tidak diperhitungkan karena tidak signifikan. Hal ini akan sangat berbeda jika yang dianalisis adalah aliran gas.

2.1.1 Fluida Bergerak

Sebenarnya aliran air cukup rumit diperhitungkan jika air tersebut mengalami turbulensi. Turbulensi ini merupakan gaya yang berputar-putar secara sembarang. Masalah ini dikenal dengan aliran turbulen. Pada perhitungan matematis nantinya turbulensi ini tidak diperhitungkan dikarenakan air yang

terdapat pada tangki diasumsikan bergerak konstan dan memiliki kerapatan yang tetap.

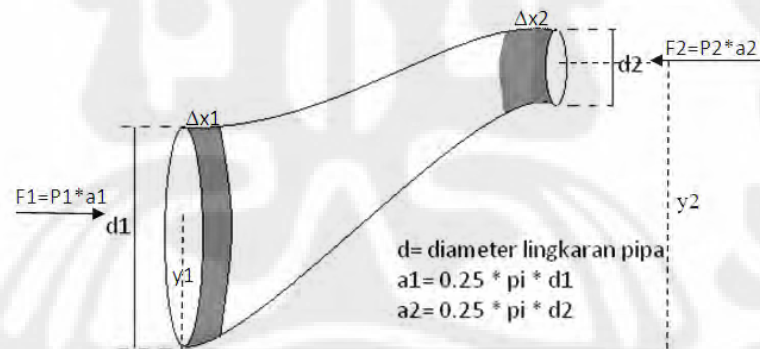
Volume air yang mengalir antara tangki dengan melewati pipa, dimana besarnya volume air yang terukur dalam satuan waktu adalah

$$\Delta V = (a \cdot v) \Delta t \quad (2.1)$$

Jadi, ketika menghitung laju aliran air dari tangki 1 ke tangki 2 akan memenuhi persamaan aliran volume (I_v) akan sama dengan kelajuan (v) dikalikan dengan luas penampang pipa (a). Persamaan tersebut dikenal dengan persamaan kontinuitas, yaitu laju aliran air terjadi secara konstan.

2.1.2 Persamaan Bernoulli

Pada aliran air dengan pipa yang tidak sejajar dan luas penampang pipa yang berbeda.



Gambar 2.1 Pipa dengan ketinggian dan luas penampang berubah

Pada **Gambar 2.1** terdapat a_1 yang merupakan penampang awal dan a_2 merupakan penampang akhir. Dari gambar 2.1 didapat gaya yang bekerja

$$W_1 = F_1 (\Delta x_1) = P_1 a_1 (\Delta x_1) = P_1 \Delta V. \quad (2.2)$$

Fluida bergerak ke kanan berlawanan dengan arah gaya yang berkerja pada a_2 sehingga

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = P_2 \cdot a_2 \cdot \Delta x_2 = P_2 \cdot \Delta V. \quad (2.3)$$

Jadi gaya total yang bekerja

$$W_{total} = W_1 + W_2. \quad (2.4)$$

$$W_{total} = P_1 \cdot \Delta V - P_2 \cdot \Delta V \quad (2.5)$$

$$W_{total} = (P_1 - P_2) \Delta V \quad (2.6)$$

berdasarkan hukum kerja dan energi

$$W_{total} = \Delta U + \Delta K; \quad (2.7)$$

$\Delta U \rightarrow$ perubahan energi potensial massa.

$\Delta K \rightarrow$ perubahan energi kinetik

$\Delta m =$ massa fluida $= \rho \Delta V$

sehingga persamaan Bernouli dapat dibuktikan sebagai berikut,

$$(P_1 - P_2) \Delta V = \rho \Delta V \cdot g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} (\rho \Delta V) (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.8)$$

$$(P_1 - P_2) = (\rho g y_2 - \rho g y_1) + \rho \left(\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) \quad (2.9)$$

$$P_1 + \rho g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2.10)$$

$$P + \rho g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \text{konstan} \quad (2.11)$$

2.2 Pemodelan Tiga Tangki

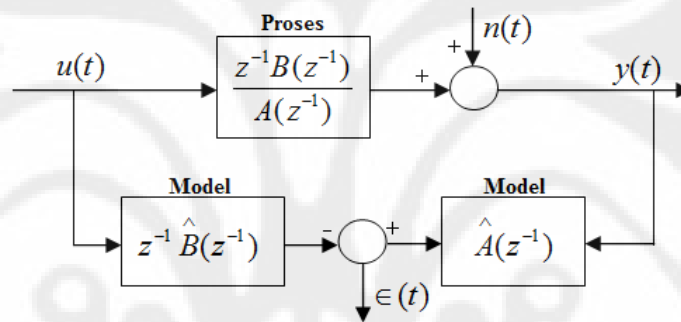
2.2.1 Model Diskrit ARX

Proses identifikasi adalah dengan mengambil keluaran data dari keluaran proses sebenarnya kemudian nilai tersebut didekati dengan sinyal keluaran pada model. Pendekatan nilai tersebut merupakan usaha untuk meminimumkan kesalahan yang terjadi. Salah satu metode yang digunakan adalah *least square*, dengan metode ini model dan sistem akan teridentifikasi berdasarkan jumlah N data sehingga diperoleh nilai parameter yang konvergen. Nilai kuadrat *error*

(selisih keluaran sistem dan model *plant* pada kondisi lup terbuka) adalah fungsi biaya (*cost function*) yang disimbolkan dengan huruf J .

$$J = \sum_{i=1}^N \epsilon^2(t_i) = \sum_{i=1}^N [y(t_i) - \hat{y}(t_i)]^2 \quad (2.12)$$

Dari penjelasan diatas metode ini cocok untuk metode yang statis artinya tidak ada perubahan parameter kerja sistem yang disebabkan oleh berubahnya kondisi lingkungan. Metode ini dapat digunakan untuk model yang non-linear. Jika digambarkan nilai estimasi kesalahan dari sinyal keluaran sistem dengan keluaran model akan menjadi skema dibawah ini. [Sbtr07]



Gambar 2. 2 Skema identifikasi berdasarkan kesalahan prediksi

Bentuk persamaan *error* dari gambar 2.2 dapat ditulis menjadi

$$\epsilon(t) = \hat{A}(z^{-1})y(t) - z^{-1}\hat{B}(z^{-1})u(t) \quad (2.13)$$

$$= (1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_{n_a} z^{-n_a})y(t) - z^{-1}(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_{n_b} z^{-n_b})u(t) \quad (2.14)$$

$$= y(t) - (-\hat{a}_1 y(t-1) - \dots - \hat{a}_{n_a} y(t-n_a)) + (\hat{b}_0 u(t-1) + \dots + \hat{b}_{n_b} u(t-n_b-1)) \quad (2.15)$$

Persamaan *error* tersebut merupakan persamaan linear dengan keluaran yang terprediksi satu langkah kedepan, disederhanakan menjadi,

$$\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \quad (2.16)$$

Pada simulasi akan terlihat pengukuran baru diukur berdasarkan pengukuran sebelumnya dan prediksi satu langkah ke depan diukur pada saat waktu sekarang. Fungsi kriteria (J) dapat dicari dengan perkalian matriks *error* prediksi transpost dengan matriks *error* prediksi.

$$J = \sum_{i=m}^{m+n} \epsilon^2(t_m) \quad (2.17)$$

$$= \epsilon^T(m+N) \epsilon(m+N) \quad (2.18)$$

$$= (y - \psi\theta)^T (y - \psi\theta) \quad (2.19)$$

$$= (y^T - \theta^T \psi^T)(y - \psi\theta) \quad (2.20)$$

$$= y^T y - y^T \psi\theta - \theta^T \psi^T y + \theta^T \psi^T \psi\theta \quad (2.21)$$

Nilai *error* tersebut diminimalkan dengan mencari turunan terhadap matriks parameter modelnya sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -\psi^T y - \psi^T y + \psi^T \psi\theta + \psi^T \psi\theta = 0 \quad (2.22)$$

sehingga parameter a dan b dapat dicari setelah parameter θ disederhanakan dari persamaan (2.22)

$$\theta = (\psi^T \psi)^{-1} (\psi^T y) \quad (2.23)$$

dan diubah kebentuk persamaan estimasi parameter

$$\theta(m+N-1) = P(m+N) \psi^T(m+N) y(m+N) \quad (2.24)$$

dengan menyesuaikan persamaan (2.23) dan (2.24) nilai dari matriks varian adalah

$$P(m+N) = (\psi^T(m+N) \psi(m+N))^{-1} \quad (2.25)$$

2.2.2 Validasi Model

Validasi model dilakukan terhadap sistem tiga tangki yaitu dengan cara membandingkan keluaran antara *plant* dengan model sehingga terdapat selisih nilai (*error*) yang kemudian dirumuskan berdasarkan kriteria berikut:

$$VAF = \left[1 - \frac{\text{var}(y - \hat{y})}{\text{var}(y)} \right] \times 100 \% \quad (2.26)$$

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^2}{N}} \quad (2.27)$$

dimana,

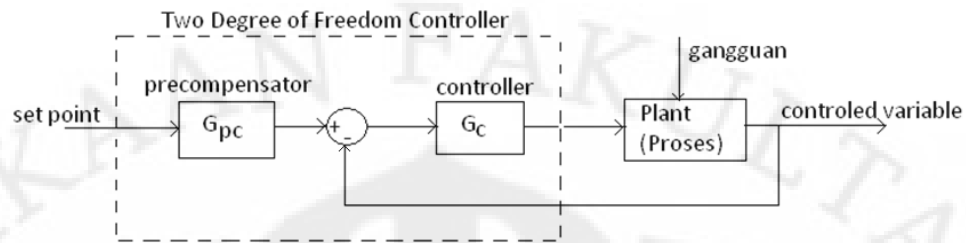
$y(i)$ adalah sinyal keluaran sistem tiga tangki ke- i

$\hat{y}(i)$ adalah sinyal keluaran model ARX ke- i

N adalah jumlah data yang diambil

2.3 Desain Kendali dengan Metode *Pole Placement*

Pole placement adalah menambahkan kutub baru yang diinginkan sehingga mendapat kinerja atau respon sistem lup tertutup yang lebih baik. Bentuk umum dari pengendali penempatan kutub terdiri dari *precompensator* dan *controller*. Pengendali dengan struktur tersebut merupakan pengendali *2-DOF* (*Degree of Freedom*). Peran dari *precompensator* adalah untuk mengurangi kesalahan galat tunak dan lebih cepat mencapai nilai acuan. Selanjutnya peran *controller* adalah memperbaiki kinerja sistem, meningkatkan kehandalan sistem dan kestabilan system lup tertutup. Berikut merupakan diagram blok sistem pengendali penempatan kutub (*pole placement*) pada *plant*.



Gambar 2. 3 Diagram blok *plant close loop* dengan pengendendali 2-DOF

1. **Plant (proses)** biasanya disimbolkan dengan G_p , jika masukan (u) sebagai *set point* masukan dan y sebagai keluaran maka akan didapat persamaan fungsi alih

$$G_p(Z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} \quad (2.28)$$

Dengan nilai parameter

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na} \quad (2.29)$$

$$B(Z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb} \quad (2.30)$$

2. **Menentukan letak *pole destination* (P_d)** yang merupakan persamaan karakteristik pada sistem orde dua. Karakteristik ini menentukan kinerja sistem lup tertutup dalam mengikuti acuan. *Pole destination* bernilai positif, misalnya dua kutub kembar lup tertutup bernilai 0.3 ($k_1=0.3$ dan $k_2=0.3$). Semakin kecil nilai kutub kembar tersebut (mendekati nilai nol) maka gain yang dihasilkan semakin besar dan dapat menimbulkan *overshoot* hingga ketidakstabilan. Berikut bentuk *pole destination* orde dua yang dipilih karena dapat mewakili berbagai macam *plant* yang ada

$$P_d(Z^{-1}) = (1 - k_1z^{-1})(1 - k_2z^{-2}) \quad (2.31)$$

$$P_d(Z^{-1}) = 1 - (k_1 + k_2)z^{-1} + (k_1 \cdot k_2)z^{-2} \quad (2.32)$$

sedangkan bentuk parameter umum adalah

$$P_d(Z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \quad (2.33)$$

Jika persamaan (2.32) dan (2.33) disesuaikan akan didapat nilai parameter

$$p_1 = -(k_1 + k_2) \text{ dan } p_2 = (k_1 \cdot k_2) \quad (2.34)$$

- 3. Aturan Kendali** menggunakan pengendali linear satu masukan dan dua keluaran. Masukan disimbolkan dengan u , keluaran berupa sinyal acuan w dan sinyal proses y . Hubungan tersebut dapat ditulis menjadi

$$F(Z^{-1})u(t) = H(Z^{-1})w(t) - G(Z^{-1})y(t) \quad (2.35)$$

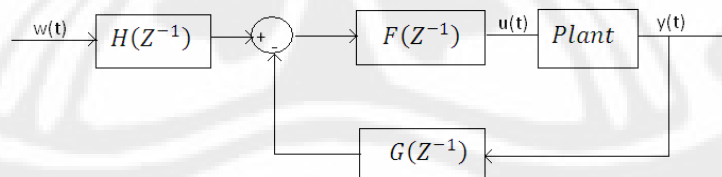
dengan nilai – nilai parameter

$$F(Z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{nf} z^{-nf} \quad (2.36)$$

$$G(Z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{ng} z^{-ng} \quad (2.37)$$

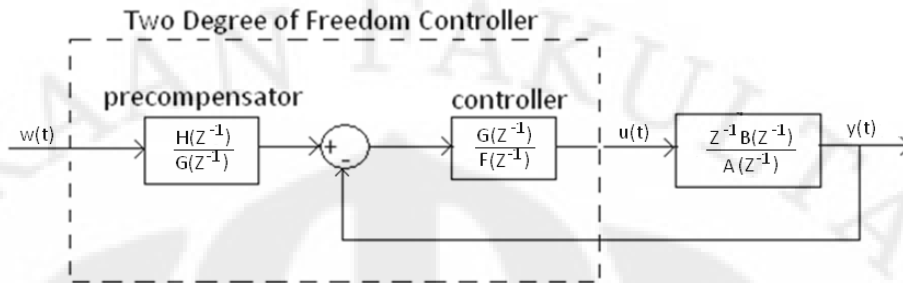
$$H(Z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{nh} z^{-nh} \quad (2.38)$$

Jika digambarkan dalam bentuk diagram blok sistem tertutup akan terlihat sebagai berikut:



Gambar 2. 4 Diagram blok *plant* close loop dengan parameter pengendali penempatan kutub

- 4. Mencari parameter F, G, dan H** jika disusun ulang blok diagram pada gambar 2.4 akan menjadi diagram blok yang bersesuaian dengan gambar 2.5, menjadi:



Gambar 2. 5 Diagram blok *plant* lup tertutup dengan parameter-parameter pengendali perlu diperhatikan pada sistem ini gangguan tidak diperhitungkan, sehingga persamaan sinyal kendali yang didapat

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{H}(z^{-1})}{\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{F}(z^{-1}) + z^{-1}\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1})} \quad (2.39)$$

dimana,

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{F}(z^{-1}) + z^{-1}\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1}) = \mathbf{P}_d(z^{-1}) \quad (2.40)$$

Kemudian dengan memasukkan parameter (2.29), (2.30) dan (2.36-38) ditambah dengan pemenuhan syarat *Diophantine* unik ($n_f = n_b$, $n_g = n_a - 1$, A dan B tidak mempunyai faktor sekutu, dan $n_p \leq n_a + n_b$) pada persamaan (2.40). Tentukan orde n_a dan n_b berdasarkan *plant* yang akan dimodelkan (misal jika diminta orde 3 $\rightarrow n_a = 3$ berarti terdiri dari parameter a_1, a_2, a_3 ; maka $n_b = 2$ terdiri dari b_0, b_1, b_2 karena dimulai dari nol maka parameter b adalah orde tiga pula, dan pole yang diinginkan $n_{pd} = 2$ (terdiri dari parameter p_1 dan p_2) akan didapat nilai $n_f = n_b$, $n_g = n_a - 1$, dan $n_p \leq n_a + n_b \rightarrow np = 2$. Maka akan terbentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & b_{nb} & \ddots & b_0 \\ a_{na} & \ddots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & b_{nb} \\ 0 & 0 & a_{na} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{nf} \\ g_0 \\ \vdots \\ g_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ -a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Parameter dibawah ini merupakan langkah terakhir desain pengendali penempatan kutub setelah disusun seperti pada gambar 2.5.

$$F(Z^{-1})=1+f_1z^{-1}+\dots+f_nz^{-n} \quad (2.42)$$

$$G(Z^{-1})=g_0+g_1z^{-1}+\dots+g_nz^{-n} \quad (2.43)$$

$$\text{dan } H(Z^{-1})=\left. \frac{P_d(Z^{-1})}{B(Z^{-1})} \right|_{z=1} \quad (2.44)$$

2.4 Model Predictive Control

MPC dapat digunakan untuk sistem yang stabil dan tidak stabil. Sistem yang tidak stabil ditandai dengan *respon pulse* atau respon impuls tak berhingga (pada sistem yang kontinu pole berada disebelah kanan bidang, pada sistem diskrit pole berada diluar unit lingkaran). Masalahnya adalah model yang bekerja pada *open loop*, karakteristik model sangat berbeda dan secara cepat berubah dari karakteristik *plant* sebenarnya, dan nilai kesalahan pada simulasi secara cepat membesar dalam keadaan tidak stabil, sehingga nilai prediksi dari karakteristik *plant* benar-benar tidak berguna. [MAC00]

Cara untuk menstabilkan model membutuhkan penyusunan keluaran *plant*. Artinya, ketika sistem berjalan untuk menghasilkan prediksi karakteristik *plant*, inisial kondisi diberikan kepada *plant* bukan model dengan masukan *step*. Model *unstable* memiliki persamaan yang berbeda,

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y_m(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (2.45)$$

kemudian penyusunan model untuk mendapatkan prediksi berdasarkan

$$\hat{y}(k+1|k) = -\sum_{i=1}^n a_i y_p(k+1-i) + b_1 \hat{u}(k|k) + \sum_{i=2}^n b_i u(k+1-i) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+2|k) &= -a_1 y_p(k+1-i) - \sum_{i=2}^n a_i y_p(k+2-i) \\
&+ b_1 \hat{u}(k+1|k) + b_2 \hat{u}(k|k) + \sum_{i=3}^n b_i u(k+2-i) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Keluaran aktual *plant* sebelumnya dan masukan digunakan kapan pun data tersebut tersedia. Diperlihatkan sebelumnya kestabilan model, dan diinterpretasikan sebagai implementasi *observer* untuk *plant*, sehingga model menjadi tidak konvergen. Dikarenakan model tidak saja memberikan masukan $u(k)$, tetapi juga keluaran *plant* $y_p(k)$, data tersebut dapat digunakan sebagai masukan model.

Penstabilan dapat juga dilakukan dengan mendapatkan pelacakan nilai offset dengan penyusunan model, yaitu membuat aksi integral pada pengendali. Penstabilan model dapat juga dilakukan dengan merubah model tidak stabil ke dalam bagian stabil dan tidak stabil, kemudian meninggalkan bagian yang sudah stabil dan menstabilkan yang tidak stabil.

2.4.1 Receding Horizon

Pengendali untuk satu masukan dan satu keluaran pada *plant* diasumsikan sebagai waktu diskrit, dan waktu kerja yang sedang berlangsung ditandai dengan k . Keluaran *plant* pada saat waktu sekarang adalah $y(k)$. Nilai *set point* trajektori untuk setiap waktu t dinotasikan sebagai $s(t)$.

Dimulai dari *set point* trajektori yang merupakan trajektori referensi. Jika keluaran *plant* $y(k)$, dan didefinisikan sebagai trajektori ideal selama *plant* mengikuti trajektori *set point*. Nilai yang diberikan untuk referensi trajektori harus disesuaikan dengan kinerja sistem pada saat lup tertutup dalam pengendalian *plant*. Sehingga *error* dapat didefinisikan sebagai

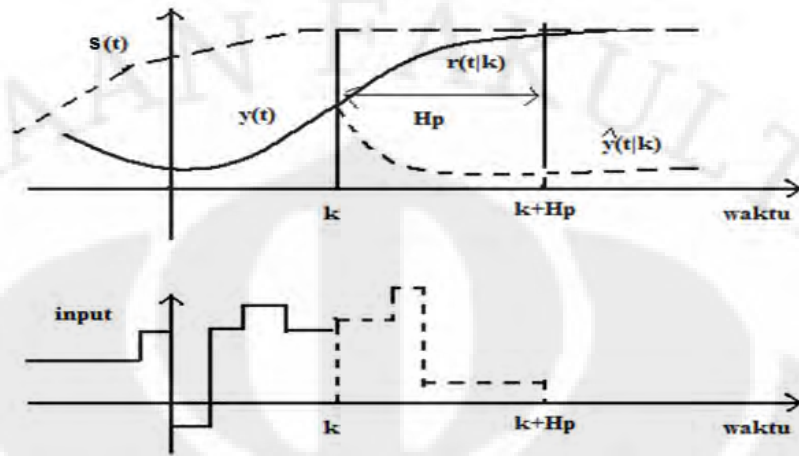
$$\epsilon(k) = s(k) - y(k) \quad (2.48)$$

Kemudian nilai trajektori referensi dipilih berdasarkan kesalahan langkah ke- i sebelumnya. Nilai trajektori referensi didefinisikan sebagai

$$r(k+i|k) = s(k+i) - \epsilon(k+i) \quad (2.49)$$

Pengendali prediktif memiliki model internal yang digunakan untuk memprediksi perilaku dari *plant*, dimulai pada waktu sekarang, hingga mencapai horison prediksi. Perilaku yang diprediksi berdasarkan asumsi masukan trajektori $\hat{u}(k+i|k); (i=0,1,\dots,H_p-1)$. Diasumsikan model internal adalah linear sehingga selalu didapat masukan terbaik. Untuk notasi \hat{u} akan berbeda dengan u . Masukan aktual pada waktu tertentu, $u(k+i)$. Asumsikan juga keluaran yang terukur $y(k)$ tersedia ketika nilai masukan $u(k)$ tersedia. Implikasinya model internal yang digunakan haruslah pantas, jadi model $y(k)$ bergantung masukan sebelumnya $u(k-1), u(k-2), \dots$, tetapi tidak untuk masukan $u(k)$.

Implikasi yang dipilih untuk masukan trajektori seperti membawa keluaran *plant* hingga akhir horison prediksi, dinamakan dengan waktu $k+H_p$, yang dibutuhkan nilai $r(k+H_p)$. Sehingga dapat dikatakan, dengan menggunakan terminologi [Ric93] bahwa diberikan sebuah nilai pada waktu $k+H_p$. Ada beberapa masukan trajektori yang digunakan $\{\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+H_p-1|k)\}$ dengan menerapkan ini, dipilih satu dari nilai prediksi tersebut, khususnya yang memiliki kebutuhan energy yang paling sedikit. Biasanya masukan tersebut cukup untuk menentukan struktur dari masukan trajektori dengan parameter dari variabel angka yang lebih kecil.



Gambar 2. 6 Ide dasar pengendali prediktif

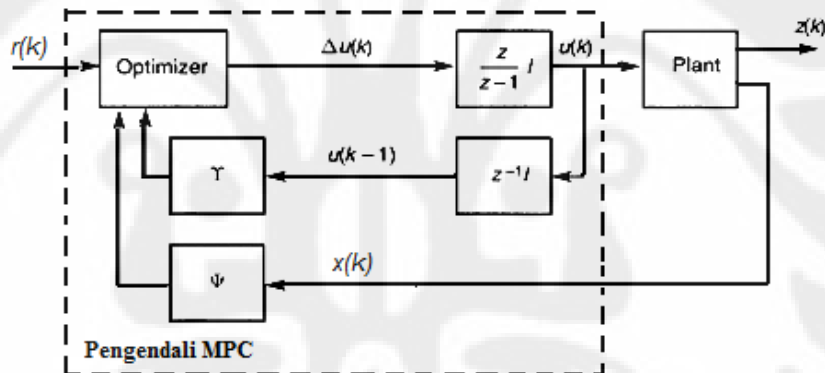
Pada Gambar 2.6 diperlihatkan masukan yang mengasumsikan banyaknya tiga masukan pertama dari horison prediksi, tetapi yang perlu diingat konstanta setelahnya, yaitu: $\hat{u}(k+2|k) = \hat{u}(k+3|k) = \dots, \hat{u}(k+Hp-1|k)$ sehingga ada tiga parameter yang dipilih: $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \hat{u}(k+2|k)$. Kemungkinan sederhana pada struktur untuk mengasumsikan masukan yang akan konstan setelah horison prediksi: $\hat{u}(k|k) = \hat{u}(k+1|k) = \dots = \hat{u}(k+Hp-1|k)$. Dalam masalah ini hanya ada satu parameter, yang dinamakan dengan $\hat{u}(k|k)$ dikarenakan hanya ada satu persamaan yang sesuai yaitu $\hat{y}(k+Hp|k) = r(k+Hp|k)$ sebagai seleksi unik.

Satu masukan yang akan datang dari masukan trajektori yang telah dipilih, hanya elemen pertama dari trajektori yang dipilih sebagai masukan sinyal pada *plant*. Dengan menerapkan $u(k) = \hat{u}(k|k)$ dimana $u(k)$ menyatakan sinyal aktual yang diterapkan. Kemudian ketika siklus keluaran, prediksi, dan masukan trajektori terukur maka diperlukan pengulangan dengan satu jarak cuplik kemudian yang dinyatakan dengan keluaran baru terukur $y(k+1)$, dengan memberikan trajektori referensi yang baru $r(k+i|k+1)$ dengan $(i=2,3,\dots)$ didefinisikan, prediksi yang berada pada horison $k+1+i$, dengan $i=1,2,\dots, Hp$.

Sebuah masukan trajektori baru $\hat{u}(k+1+i|k+i)$ dengan $i=0,1,\dots,H_p-1$ yang dipilih, dan akhirnya masukan berikutnya yang yang diberikan ke *plant* adalah $u(k+1) = \hat{u}(k+1|k+1)$ yang dipilih. Dikarenakan horison prediksi memiliki panjang yang sama dari sebelumnya, tetapi pergeseran sepanjang satu cuplik setiap interval adalah satu langkahnya, sehingga pengendalian *plant* sering disebut sebagai metode *receding horizon*. [MAC00]

2.4.2 Struktur Pengendali MPC

Selama nilai constraint tidak diaktifkan, maka solusi dari pengendali prediktif menjadi permasalahan tanpa constraint.

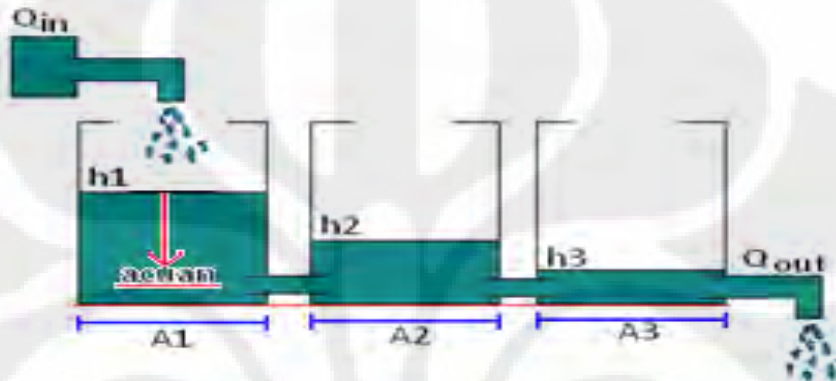


Gambar 2. 7 Struktur pengendali MPC

Struktur pengendali *MPC* merupakan bentuk simulasi ketika nilai dari seluruh state diketahui. Nilai referensi yang diberikan menjadi acuan pengendali dengan parameter Ψ , dan Γ digunakan untuk meminimasi kesalahan yang terjadi pada keluaran *plant* sedangkan Θ akan banyak mempengaruhi dari fungsi biaya. Ketiga parameter tersebut yang akan mengatur pemberian sinyal kendali berdasarkan perubahan sinyal kendali yang terjadi selama perhitungan pengendali *MPC* berlangsung.

BAB 3
DESAIN PENGENDALI MPC
PADA SISTEM TIGA TANGKI

3.1 Penurunan Model Matematis Tiga Tangki Terhubung



Gambar 3. 1 Model tiga tangki terhubung

Dengan mengasumsikan air nonturbulensi maka sistem memenuhi persamaan Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (3.1)$$

Pergerakan air terjadi dikarenakan adanya pengaruh massa dan gravitasi. Pada tabel 3.1 keterangan simbol yang digunakan ketika mencari rumus *state space* untuk menghitung ketinggian air pada setiap tangki terhadap debit air yang masuk.

Tabel 3. 1 Keterangan simbol untuk membuat sistem tiga tangki

simbol	keterangan	simbol	keterangan
P	tekanan fluida (dyne/cm ²)	A	luas alas penampang tangki (cm ²)
ρ	massa jenis fluida (gram/cm ³)	Q _{in}	debit air yang masuk (cm ³ /s)

v	kecepatan fluida (cm/s)	Q_{out}	debit air yang keluar (cm ³ /s)
g	konstanta gravitasi (980 cm/s ²)	$d(\rho Ah)$	perubahan volum air (cm ³)
h	ketinggian fluida (cm)	dt	perubahan waktu (s)

Berdasarkan kesetimbangan massa yang terjadi antara debit air yang masuk dan keluar dihitung berdasarkan

$$\frac{d(\rho Ah)}{dt} = \rho Q_{in} - \rho Q_{out} \quad (3.2)$$

$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (3.3)$$

Dari persamaan umum tersebut dapat ditentukan kondisi setiap tangki yang tersusun seri menjadi

$$A1 \frac{dh1}{dt} = Q_{in(1)} - Q_{out(1 \rightarrow 2)} \quad (3.4)$$

$$A2 \frac{dh2}{dt} = Q_{out(1 \rightarrow 2)} - Q_{out(2 \rightarrow 3)} \quad (3.5)$$

$$A3 \frac{dh3}{dt} = Q_{out(2 \rightarrow 3)} - Q_{out(3 \rightarrow \text{end})} \quad (3.6)$$

Bentuk rumus (3.4) memberikan informasi bahwa debit air yang masuk mempengaruhi ketinggian air, dan ketinggian air ini mempengaruhi debit air yang keluar dengan kecepatan setiap detiknya. Adanya keluaran air dari tangki 1 ke tangki 2 dan seterusnya hingga berakhir adalah saling berkaitan, sehingga didapat hubungan keluaran air terhadap selisih ketinggian air sebagai berikut:

$$Q_{out(1 \rightarrow 2)} = k_1 \text{sign}(h1-h2) \sqrt{|(h1-h2)|} \quad (3.7)$$

$$Q_{out(2 \rightarrow 3)} = k_2 \text{sign}(h2-h3) \sqrt{|(h2-h3)|} \quad (3.8)$$

$$Q_{out(3 \rightarrow \text{end})} = k_3 \sqrt{h3} \quad (3.9)$$

Parameter k_n ini merupakan perkalian luas alas penampang tangki-n dikalikan dengan akar dari dua kali nilai gravitasi ($A\sqrt{2g}$). Nilai debit tersebut

kemudian disubstitusikan ke persamaan umum kondisi tangki sehingga didapat perubahan ketinggian air dari setiap tangki yaitu

$$\text{Tangki 1} \rightarrow \frac{dh_1}{dt} = \frac{Q_{in(1)} - \left(k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|} \right)}{A_1} \quad (3.10)$$

$$\text{Tangki 2} \rightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{\left[\left(k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|} \right) - \left(k_2 \text{sign}(h_2 - h_3) \sqrt{|h_2 - h_3|} \right) \right]}{A_2} \quad (3.11)$$

$$\text{Tangki 3} \rightarrow \frac{dh_3}{dt} = \frac{\left(k_2 \text{sign}(h_2 - h_3) \sqrt{|h_2 - h_3|} \right) - Q_{out(3 \rightarrow \text{end})}}{A_3} \quad (3.12)$$

Setelah didapat rumus *state space* ketinggian dari setiap tangki langkah selanjutnya adalah merubah bentuk persamaan tersebut kedalam bentuk program *ladder* pada simulink. Bentuk sistem analog *plant* tiga tangki tersebut dapat dilihat pada *Lampiran A*. Bentuk pemodelan terdiri dari tiga tangki yang tersusun seri dengan pipa penghubung dengan kondisi horisontal [YMar04].

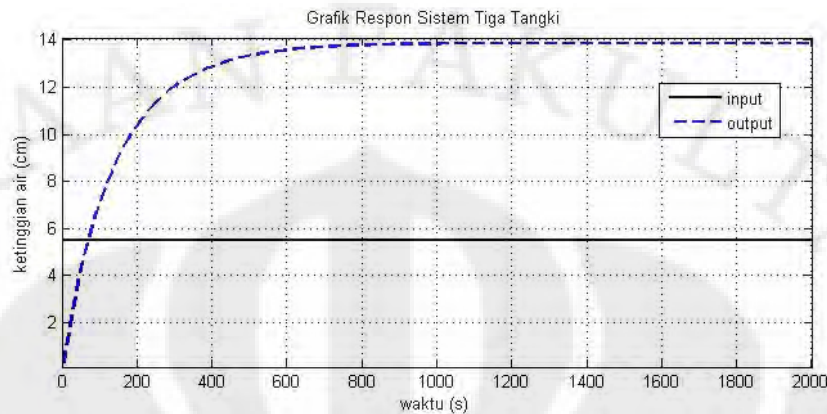
3.2 Uji Lup Terbuka Sistem Tiga Tangki Terhubung

Nilai parameter yang digunakan pada simulasi, yaitu

Tabel 3. 2 Parameter yang digunakan pada sistem tiga tangki

Luas permukaan pipa	Luas permukaan tangki
$a_1 = 0.4 \text{ cm}^2$	$A_1 = 60 \text{ cm}^2$
$a_2 = 0.3 \text{ cm}^2$	$A_2 = 50 \text{ cm}^2$
$a_3 = 0.2 \text{ cm}^2$	$A_3 = 40 \text{ cm}^2$

Respon *step* digunakan untuk menentukan besar cuplik yang akan digunakan pada pemodelan *ARX*. Respon *step* dapat dilihat pada gambar berikut:

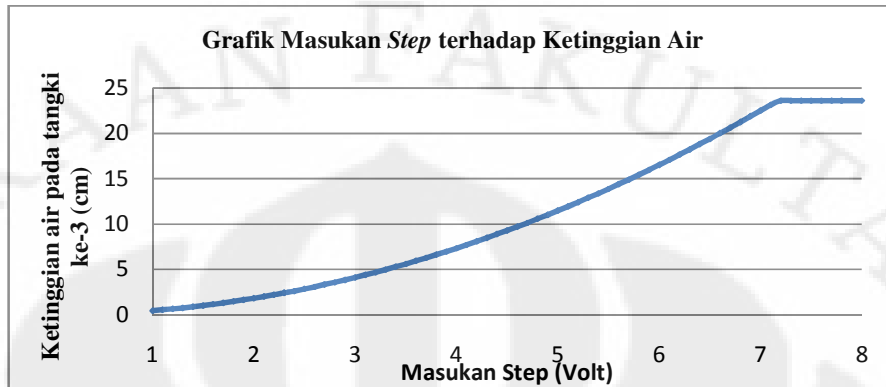


Gambar 3. 2 Respon sistem tiga tangki terhubung dengan masukan *step*

Pada grafik masukan yang diberikan berupa fungsi *step* dengan masukan 5,5 V akan didapat respon keluaran berupa ketinggian air pada tangki yang ketiga. Nilai steady state yang didapat adalah 13.88. Kemudian untuk menghitung waktu pencuplikan diukur dari keadaan 5% sebelum nilai *steady state*, dengan kata lain cukup dengan mengalikan 0.95 dengan 13.88 yaitu 13.2. Nilai 0.95 dipakai karena respon tidak terjadi *overshoot*, jika terjadi *overshoot* nilai yang dipakai adalah 1.05. Penentuan batas waktu pencuplikan berada pada:

$$1/20 T_s < h < 1/5 T_s \quad (3.13)$$

Pada saat ketinggian air 13.2 waktu *settling*-nya (T_s) adalah 463.5 s, sehingga dengan menggunakan rumus (3.13) didapat waktu pencuplikan berada pada $(23.15 < h < 92.6)$. Pada simulasi *plant* tiga tangki terhubung waktu pencuplikan yang dipilih adalah 25. Nilai pencuplikan ini kemudian digunakan ke model matematis sistem tiga tangki sehingga sistem dapat mewakili sistem sebenarnya.



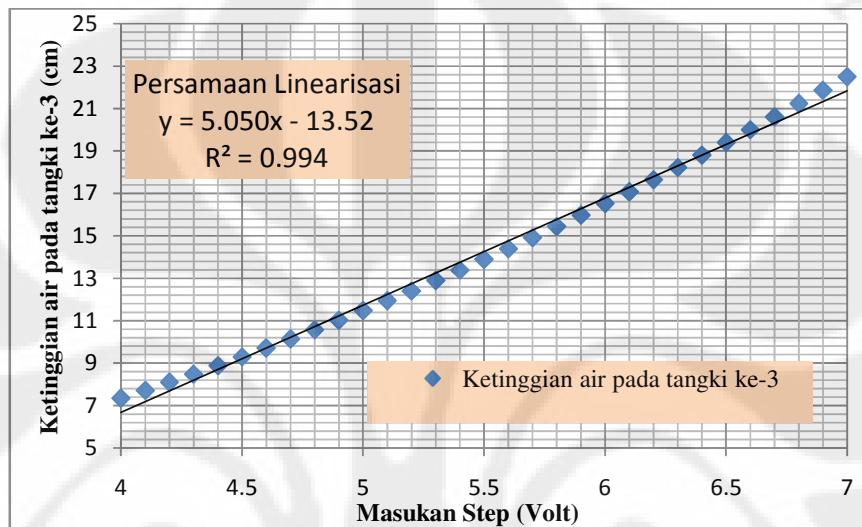
Gambar 3.3 Perbandingan antara masukan dengan ketinggian air pada tangki ke-3

Dari perbandingan gambar di atas terlihat pada masukan 8 volt terjadi saturasi sehingga terlihat respon seperti grafik yang terpancung. Sehingga dapat diketahui dari sistem tersebut daerah kerja berada pada 0 sampai dengan 7 volt. Jika data-data tersebut dirangkum dalam tabel akan terlihat titik kerja sistem sebagai berikut:

Tabel 3.3 Data hasil masukan masukan *step* $u(t)$ dan keluarannya $y(t)$

masukan	keluaran	masukan	Keluaran	masukan	keluaran
4	7.3463	5	11.4759	6	16.5295
4.1	7.7183	5.1	11.9427	6.1	17.0721
4.2	8.0979	5.2	12.4060	6.2	17.6497
4.3	8.4890	5.3	12.8978	6.3	18.2235
4.4	8.8895	5.4	13.3887	6.4	18.8058
4.5	9.2949	5.5	13.8877	6.5	19.3985
4.6	9.7157	5.6	14.3951	6.6	20.0003
4.7	10.1415	5.7	14.9155	6.7	20.6064
4.8	10.5778	5.8	15.4447	6.8	21.2296
4.9	11.0244	5.9	15.9826	6.9	21.8600

Nilai-nilai tersebut kemudian diplot sehingga menjadi grafik daerah kerja yang berbentuk persamaan linear. Persamaan linear tersebut dipilih karena mempunyai pendekatan yang paling baik pada gambar (3.3) yaitu berada pada rentang masukan antara 4 sampai 7 volt.



Gambar 3. 4 Daerah kerja sistem tiga tangki

Bentuk linear dari gambar 3.4 selanjutnya akan menjadi referensi untuk membuat model *ARX*. Dengan kata lain pada saat membuat model *ARX* nilai masukan indentifikasi pemodelan (lihat Lampiran B), diberikan masukan 4 sampai 7 Volt saja. Masukan inilah yang dijadikan batasan dalam membentuk model linear.

3.3 Identifikasi Sistem Tiga Tangki Terhubung

Sistem tiga tangki merupakan sistem *non-linear* berorde tiga. Sifat sistem seperti ini harus didekati pula dengan kriteria parameter orde tiga pula. Metode *ARX* dipilih karena kemampuannya dalam menyederhanakan sistem *non-linear* tersebut menjadi pendekatan linear diskrit. Dari perhitungan sebelumnya (pers 3.13) diambil waktu pencuplikan (h) sebesar 25, kemudian orde parameter n_a dan n_b diberikan orde tiga caranya pada *matlab* $n_b=2$ karena dimulai dari b_0z^{-1} , b_1z^{-2} ,

b_2z^{-3}), kemudian $n_a=3$ dengan pencuplikan data 2000. Didapat nilai linearisasi berupa kriteria sebagai berikut:

Model Pendekatan

Discrete-time IDPOLY model: $A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$

$A(q) = 1 - 1.066 q^{-1} + 0.2902 q^{-2} - 0.04083 q^{-3}$

$B(q) = 0.2737 q^{-1} + 0.1914 q^{-2}$

Estimated using ARX

Loss function 0.0360831 and FPE 0.0379335

Sampling interval: 25

Kemudian model ARX tersebut divalidasi dengan keluaran model tiga tangki yang sebenarnya. Perbandingan ini dikenal dengan persamaan *Variance Accounted For (VAF)* dan *Root-Mean-Square (RMS) error*, dapat dituliskan berupa

$$VAF = \left[1 - \frac{\text{var}(y - \hat{y})}{\text{var}(y)} \right] \times 100 \% \quad (3.14)$$

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left(y(i) - \hat{y}(i) \right)^2}{N}} \quad (3.15)$$

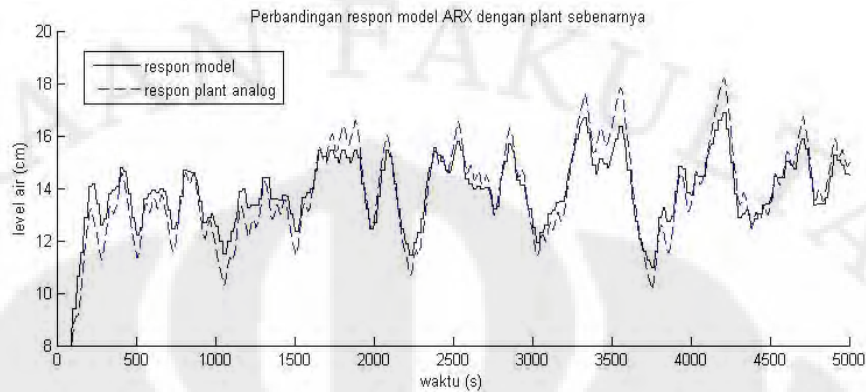
dimana,

$y(i)$ adalah sinyal keluaran sistem tiga tangki ke- i

$\hat{y}(i)$ adalah sinyal keluaran model ARX ke- i

N adalah jumlah data yang diambil

Dengan mengkalkulasikan data berdasarkan persamaan (3.14) dan (3.15) akan didapatkan nilai validasi model ARX dengan $VAF = 99.76272 \%$ dan $RMS = 0.479932$

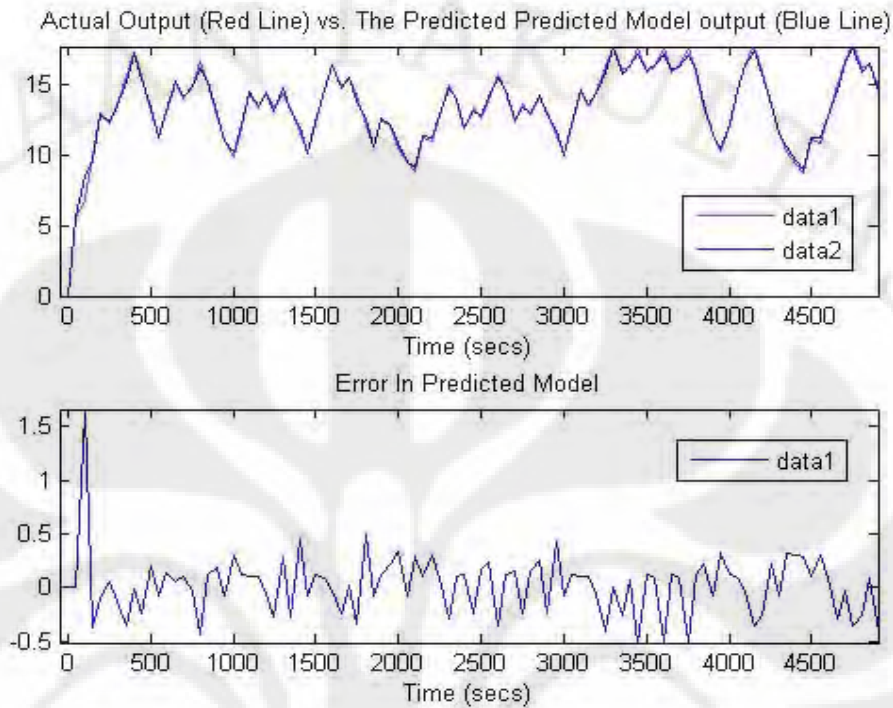


Gambar 3. 5 Perbandingan keluaran model ARX dengan model tiga tangki sebenarnya

Parameter yang telah didapatkan dari perhitungan model ARX tersebut kemudian dibentuk menjadi fungsi alih proses sistem tiga tangki, yaitu:

$$\frac{z^{-1}B(Z)}{A(Z)} = \frac{z^{-1} (0.2737 + 0.1914 z^{-1})}{1 - 1.066 z^{-1} + 0.2902 z^{-2} - 0.04083 z^{-3}} \quad (3.16)$$

Jika diambil pemodelan sistem tiga tangki tersebut memiliki parameter sebagai berikut yaitu: $b_0=0.2737$, $b_1=0.1914$, $a_1=-1.066$, $a_2=0.2902$, dan $a_3=-0.04083$. Parameter ini digunakan untuk model *plant* pada desain pengendali pada bab berikutnya. Grafik dibawah ini merupakan bentuk pendekatan model ARX dengan waktu pencuplikan 25 detik sehingga menyerupai sistem tiga tangki sebenarnya.



Gambar 3. 6 Pemodelan dengan metode ARX

Perhitungan model dengan metode ARX dapat dicari dari bentuk persamaan waktu tundanya sebagai berikut:

$$y(t|t-1) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - a_3y(t-3) + b_0u(t-1) + b_1u(t-2) + b_2u(t-3) \quad (3.17)$$

$$y(t|t-1) = \psi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1) \quad (3.18)$$

Kemudian bentuk persamaan (3.17) dan (3.18) tersebut dibuat dalam bentuk matrik yang disusun menjadi bentuk hubungan masukan dan keluaran seperti persamaan (3.19)

$$\psi^T(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad y(t-3) \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u(t-3)] \quad (3.19)$$

Dari persamaan (3.17-18) juga dibentuk matrik parameter untuk nilai denominator dan numerator sistem pada persamaan (3.20),

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pada sistem orde tiga dapat ditulis persamaan model dalam perkalian vektor yaitu:

$$y(t) = [-y(t-1) \ -y(t-2) \ -y(t-3) \ u(t-1) \ u(t-2) \ u(t-3)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Pada persamaan (3.21) tersebut merupakan bentuk umum dalam mendapatkan parameter numerator dan denominator sistem. Biasanya dalam membuat model *ARX* tidak perlu terlalu banyak data yang diambil cukup 200 data saja. Hal ini dilakukan karena sifat dari bentuk model itu sendiri yang memiliki kelemahan dalam mencapai nilai kesalahan minimumnya.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(4) \\ \vdots \\ y(200) \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(3) & -y(2) & -y(1) & u(3) & u(2) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(199) & -y(198) & -y(197) & u(199) & u(198) & u(197) \end{bmatrix}}_\psi \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_\theta \quad (3.22)$$

Berdasarkan persamaan 3.22 parameter n_a dan n_b dapat dicari:

$$\theta = (\psi^T \psi)^{-1} (\psi^T y) \quad (3.23)$$

3.4 Desain Pengendali Metode Penempatan Kutub

Pada pemodelan ARX diberi kriteria $n_b=2$ $n_a=3$ dan $n_p \leq n_a+n_b=2$ dengan syarat Diophantine unik ($n_f=n_b=2$, $n_g=n_a-1=2$) dihasilkan model:

$$A(Z^{-1})=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3} \quad (3.24)$$

$$B(Z^{-1})=b_0+b_1z^{-1} \quad (3.25)$$

karena pada persamaan didapat

$$\text{nilai dari } p_1=-(k_1+k_2) \text{ dan } p_2=(k_1.k_2); \quad (3.26)$$

k = nilai penambahan *pole* lup tertutup yang diinginkan berupa angka real.

$$P_d(Z^{-1})=1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2} \quad (3.27)$$

$$F(Z^{-1})=1+f_1z^{-1}+f_2z^{-2} \quad (3.28)$$

$$G(Z^{-1})=g_0+g_1z^{-1} \quad (3.29)$$

Berdasarkan persamaan (3.27) $A(Z^{-1})F(Z^{-1})+Z^{-1}B(Z^{-1})G(Z^{-1})=P_d(Z^{-1})$ maka dapat disubstitusikan menggunakan pers (3.16), (3.17) dan (3.18) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} & (1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3})(1+f_1z^{-1}+f_2z^{-2})+\dots \\ & \dots+z^{-1}(b_0+b_1z^{-1})(g_0+g_1z^{-1})=1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Kemudian dikelompokkan berdasarkan waktu tundanya, sehingga menjadi persamaan (3.31)

$$\begin{aligned} & 1+(f_1+a_1+b_0g_0)z^{-1}+(f_2+a_1f_1+a_2+b_0g_1+b_1g_0)z^{-2}+ \\ & (a_1f_2+a_2f_1+a_3+b_1g_1)z^{-3}+(a_2f_2+a_3f_1)z^{-4}+(a_3f_2)z^{-5}=1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Bentuk persamaan (3.20) kemudian disusun berdasarkan persamaan umum (3.21) menjadi bentuk matriks (3.22), yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & b_{nb} & \ddots & b_0 \\ a_{na} & \ddots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & b_{nb} \\ 0 & 0 & a_{na} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{nf} \\ g_0 \\ \vdots \\ g_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ -n_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Bentuk matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ -a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Untuk mendapatkan nilai parameter f dan g maka *matriks parameter a dan b (S)* harus dapat diinvers, caranya menggunakan *pseudoinverse* yaitu mengalikan matriks A tersebut dengan transposnya sehingga menjadi bentuk *square*. Perhatikan ilustrasi berikut:

$$Ax=b \quad (3.34)$$

$$(A^T A)x = A^T b \quad (3.35)$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (3.36)$$

Dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ -a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.37)$$

Dari persamaan (3.16) telah diketahui parameter dari $b_0 = 0.2737$, $b_1 = 0.1914$, $a_1 = -1.066$, $a_2 = 0.2902$, dan $a_3 = -0.04083$. Jika parameter ini disubstitusikan ke persamaan (3.26) dengan *pole* lup tertutup tujuan (k) bernilai kembar 0.2 atau 0.3 atau 0.4. Maka akan didapat parameter $P_d (Z^{-1})$ pada table berikut ini:

Tabel 3. 4 Nilai Parameter letak kutub lup tertutup yang diinginkan

$k_1=k_2$ (real)	p_1	p_2
0.2	-0.4	0.04
0.3	-0.6	0.09
0.4	-0.8	0.16

Tabel 3. 5 Nilai Parameter *Precompensator* dan *Controller*

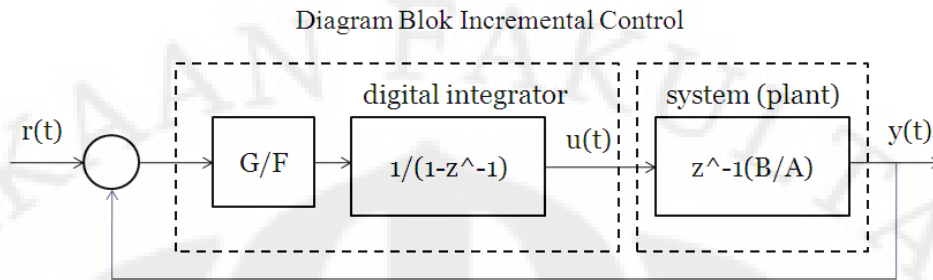
$k_1=k_2$	f_1	f_2	g_0	g_1	H
0.2	0.4223	0.05805	0.8902	-0.1038	1.376
0.3	0.3188	0.04382	0.5378	-0.02603	1.054
0.4	0.2048	0.02808	0.2253	0.05991	0.774

Parameter yang telah didapat tersebut kemudian dimasukkan ke persamaan *Diophantine* sehingga didapat blok dari *precompensator* $\frac{H(z^{-1})}{G(z^{-1})}$ dan blok *controller* $\frac{G(z^{-1})}{F(z^{-1})}$. Kemudian parameter desain ini dimasukkan ke blok diagram pengendali penempatan kutub. Lihat *Lampiran C*.

Adapun ada beberapa syarat yang harus dipenuhi dalam penambahan *integrator* tersebut berupa derajat polinomial G harus dinaikkan satu untuk mendapatkan persamaan identitas yang unik.

$$\mathbf{A}(Z^{-1})\mathbf{F}(Z^{-1})(1-z^{-1})+Z^{-1}\mathbf{B}(Z^{-1})\mathbf{G}(Z^{-1})=\mathbf{P}_d(Z^{-1}) \quad (3.38)$$

Persamaan (3.38) merupakan persamaan lup tertutup dari diagram blok pengendali *incremental control* yang ide dasarnya berasal dari penempatan kutub.



Gambar 3. 7 Diagram blok *incremental control*

Parameter Polinomial F dan G pada *incremental control* akan berbeda dari perhitungan peletakan kutub pada perhitungan awal. Hal ini menyebabkan parameter letak lup tertutup digeser agak lebih jauh untuk menghindari sifat *integrator* yang lebih agresif. Untuk itu parameter yang digunakan adalah $g_0=1.437$, $g_1=-1.286$, $g_2=0.1984$, $f_1=0.4727$, dan $f_2=0.05728$. Hasil ini didapatkan dengan menyelesaikan persamaan (3.38) menjadi bentuk matriks (3.39).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ (a_1-1) & 1 & b_1 & b_0 & 0 \\ (a_2-a_1) & (a_1-1) & 0 & b_1 & b_0 \\ (-a_2+a_3) & (-a_1+a_2) & 0 & 0 & b_1 \\ (-a_3) & (-a_2+a_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-a_3) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & p_1-a_1+1 \\ f_2 & p_2-a_2+1 \\ g_0 & a_2-a_3 \\ g_1 & (-a_3) \\ g_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

Polinomial F , G tersebutlah yang digunakan untuk mendapatkan kutub-kutub dapat terletak pada lokasi yang diinginkan.

3.5 Desain Pengendali MPC

Hal pertama yang harus dilakukan dalam mendesain MPC adalah menganalisis Model Ruang Keadaan Model Tiga Tangki, yang didapat dari fungsi alih ARX:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0103 & 0.006 & 0.001 \\ -0.17 & -0.098 & -0.018 \\ 2.93 & 1.704 & 0.3287 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.17 \\ 2.93 \\ 104.8 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.0963 \quad -0.0541 \quad 0.0163] \quad D = 0 \quad (3.40)$$

Berikut nilai eigen (λ) dari model tiga tangki

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.2413 \\ -0.0004 + 0.0006i \\ -0.0004 - 0.0006i \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Dari persamaan (3.41) nilai eigen tersebut semuanya masih didalam *unit circle*, tidak ada nilai real dari kutub *pole* yang melebihi 1. Dengan demikian model yang didapatkan memiliki pole yang stabil artinya desain pengendali akan lebih cepat diselesaikan ketimbang harus menstabilkan dulu *pole* yang diluar *unit circle* tersebut.

Ada dua hal lagi yang penting untuk dipertimbangkan dalam medesain pengendali dengan model ruang keadaan ini, yaitu *controllability* dan *observerability*. Sifat dari *controllability* adalah kemampuan model untuk dapat dikendalikan untuk setiap statenya, sedangkan *observerability* berfungsi untuk membuat suatu observer untuk berbagai keperluan seperti untuk mengestimasi beberapa keluaran dengan cepat kepengendali sistem tanpa harus menggunakan sensor. Keunggulan observer ini lebih kepada penghematan waktu dan biaya karena cukup menggunakan perhitungan matematis untuk mendapatkan keluaran yang dimaksud berdasarkan data-data yang tersedia dari sensor.

Controllability dan *observerability* ini haruslah dalam kondisi *full rank*, jika tidak berarti sistem kehilangan kemampuan untuk dikendalikan ataupun kemampuan untuk dibuatkan desain *observer state*-nya. Berikut merupakan nilai *controllability* (*co*) dan *observerability* (*ob*) dari model ruang keadaan, yaitu:

$$co = \begin{bmatrix} -0.1702 & 0.1302 & 0.0304 \\ 2.9300 & -2.2268 & -0.5337 \\ 104.8000 & 38.9418 & 9.3871 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$ob = \begin{bmatrix} 0.0963 & -0.0541 & 0.0163 \\ 0.0578 & 0.0336 & 0.0065 \\ 0.0138 & 0.0081 & 0.0016 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Dari bentuk matriks (3.42) dan (3.43) dapat dicari nilai determinannya (tidak nol) yang merupakan indikator dari sifat *full rank* tersebut. Dapat langsung ditentukan karena nilai dari baris matriks bukan kelipatan dari matriks baris yang lain. Setelah model dirasa sudah cukup mewakili karakter dari *plant* tiga tangki tahap selanjutnya adalah merancang pengendali *MPC* dengan menghitung matrik kriteria pengendali Ψ , Γ , dan Θ .

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x} + B\hat{u}(k) \quad (3.44)$$

$$\hat{z}(k) = C_z \hat{x}(k) \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_u|k) \\ \hat{x}(k+H_u+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ A^{H_u} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix}}_K x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix}}_L u(k-1) + \dots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB+B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B & \dots & AB+B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+\hat{H}_{u-1}|k) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Jika persamaan (3.46) dan persamaan (3.47) disederhanakan akan didapat (3.50) dengan persamaan keluaran model ruang keadaan (3.48) akan didapat hubungan menjadi persamaan (3.51).

$$Z(k) = \Psi x(k) + \Gamma u(k-1) + \Theta \Delta u(k) \quad (3.48)$$

$$C_z x(k) = \Psi x(k) + \Gamma u(k-1) + \Theta \Delta u(k) \quad (3.49)$$

$$x(k) = Kx(k) + Lu(k-1) + M\Delta u(k) \quad (3.50)$$

$$C_z x(k) = C_z Kx(k) + C_z Lu(k-1) + C_z M\Delta u(k) \quad (3.51)$$

Mencari Ψ , Γ , Θ yang baru jika keluaran dipengaruhi masukan secara langsung

$$\hat{z} x(k+1|k) = C_z \hat{x}(k+1|k) + D[\Delta u(k) + u(k-1)]$$

$$\hat{z} x(k+2|k) = C_z \hat{x}(k+1|k) + D[\Delta u(k) + \Delta u(k) + u(k-1)]$$

$$\vdots$$

$$\hat{z} x(k+H_u|k) = C_z \hat{x}(k+H_u|k) + D[\Delta u(k+H_u) + \dots + \Delta u(k) + u(k-1)]$$

$$\vdots$$

$$\hat{z} x(k+H_p|k) = C_z \hat{x}(k+H_p|k) + D[\Delta u(k+H_u) + \dots + \Delta u(k) + u(k-1)]$$

$$(3.52)$$

$$\begin{bmatrix} z(x+1|k) \\ z(k+2|k) \\ \vdots \\ z(k+H_u|k) \\ \vdots \\ z(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_z \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ \vdots \\ x(k+H_p) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D \\ D \\ \vdots \\ D \end{bmatrix}}_O u(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ D & D & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D & D & \dots & D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D & D & D & D \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+H_u) \\ \vdots \\ \Delta u(k+H_p) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

kemudian dari persamaan (3.46) dan (3.53) menjadi bentuk (3.54) dan (3.55)

$$\hat{x}(k+1|k) = K \hat{x}(k) + L \hat{u}(k-1) + M \Delta u(k) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} N \hat{x}(k+1|k) &= NK \hat{x}(k) + NL \hat{u}(k-1) + NM \Delta u(k) \\ &\quad + O u(k-1) + P \Delta u(k) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Persamaan hasil keluaran dari ruang keadaan dapat ditentukan yaitu $z(k)$.

$$z(k) = NK \hat{x}(k) + (NL + O) \hat{u}(k-1) + (NM + P) \Delta u(k) \quad (3.56)$$

$$z(k) = \Psi_{baru} \hat{x}(k) + \Gamma_{baru} \hat{u}(k-1) + \Theta_{baru} \Delta \hat{u}(k-1) \quad (3.57)$$

Setelah mendapatkan persamaan keluaran yang baru kemudian langkah selanjutnya adalah mencari sinyal pengendali berdasarkan *cost function* dari pengendali MPC. Penjelasannya adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{E}(k) = r(k+i|k) - \Psi x(k) - \Theta u(k-1) \quad (3.58)$$

Hasil pengurangan persamaan (3.56) dengan persamaan (3.57) akan didapatkan penyelesaian dari fungsi biaya $V(k)$, yaitu:

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \left\| \hat{z}(k+i|k) - r(k+i) \right\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \left\| \hat{\Delta u}(k+i|k) \right\|_R^2 \quad (3.59)$$

$$V(k) = \|z(k) - r(k)\|_Q^2 + \|\Delta u(k)\|_R^2 \quad (3.60)$$

$$V(k) = \|\Theta \Delta u(k) - \varepsilon(k)\|_Q^2 + \|\Delta u(k)\|_R^2 \quad (3.61)$$

$$V(k) = [\Delta u(k)^T \Theta^T - \varepsilon(k)^T] Q [\Theta \Delta u(k) - \varepsilon(k)] + \Delta u(k)^T R \Delta u(k) \quad (3.62)$$

$$V(k) = \varepsilon(k)^T Q \varepsilon(k) - 2\Delta u(k)^T \Theta^T Q \varepsilon(k) + \Delta u(k)^T (\Theta^T Q \Theta + R) \Delta u(k) \quad (3.63)$$

sehingga persamaan dari fungsi biaya menjadi

$$V(k) = \text{const} - \Delta u(k)^T G + \Delta u(k)^T H \Delta u(k) \quad (3.64)$$

dimana,

$$G = 2\Theta^T Q \varepsilon(k) \quad (3.65)$$

$$H = \Theta^T Q \Theta + R \quad (3.66)$$

Solusi optimal dari persamaan fungsi biaya adalah ketika sinyal kendali yang paling memberikan keuntungan terbesar yaitu dengan

$$\nabla_{\Delta u(k)} V(k) = -G + 2H \Delta u(k) \quad (3.67)$$

$$\Delta u(k)_{opt} = \frac{1}{2} H^{-1} G \quad (3.68)$$

Sehingga dapat ditentukan sinyal kendali yang akan diberikan ke model ruang keadaan berdasarkan perubahan sinyal kendali dan masukan sinyal kendali sebelumnya, yaitu:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)_{opt} \quad (3.69)$$

Pada pengendali MPC nilai horison kontrol (H_u) dan horison prediksi (H_p) yang dipilih secara berurutan adalah 4 dan 5, sehingga matriks dapat dihitung berdasarkan bentuk umum berikut ini:

$$\Psi = \begin{bmatrix} C_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ A^4 \\ A^5 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B+AB \\ B+AB+A^2B \\ B+AB+A^2B+A^3B \\ B+AB+A^2B+A^3B+A^4B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D \\ D \\ D \\ D \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} C_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B+AB \\ B+AB+A^2B \\ B+AB+A^2B+A^3B \\ B+AB+A^2B+A^3B+A^4B \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 \\ B+AB & B & 0 \\ B+AB+A^2B & B+AB & B \\ B+AB+A^2B+A^3B & B+AB+A^2B & B+AB \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ D & D & 0 & 0 \\ D & D & D & 0 \\ D & D & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix}$$

(3.72)

Kriteria pengendali ini dicari ketika proses inisialisasi dilakukan dan bernilai konstan selama simulasi dijalankan.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.0578 & 0.0336 & 0.0065 \\ 0.0138 & 0.0081 & 0.0016 \\ 0.0033 & 0.0019 & 0.0004 \\ 0.0008 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1.5280 \\ 2.2939 \\ 2.4782 \\ 2.5227 \\ 2.5335 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

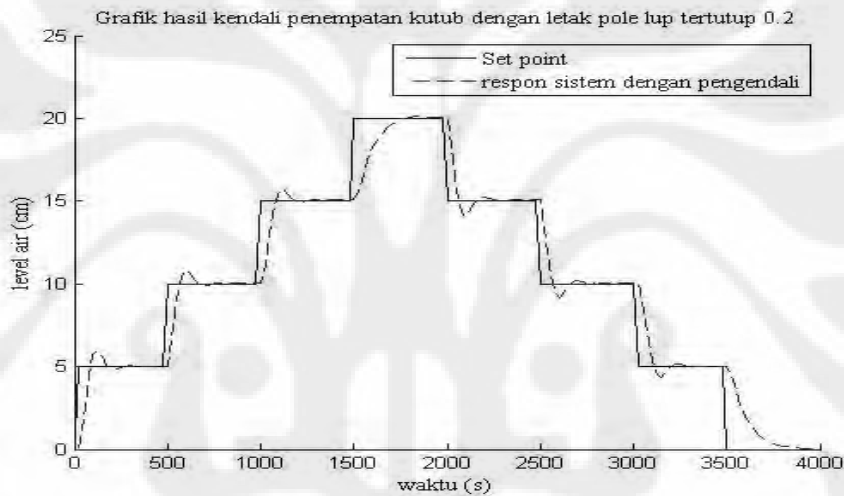
$$\Theta = \begin{bmatrix} 1.5280 & 0 & 0 & 0 \\ 2.2939 & 1.5280 & 0 & 0 \\ 2.4782 & 2.2939 & 1.5280 & 0 \\ 2.5227 & 2.4782 & 2.2939 & 1.5280 \\ 2.5335 & 2.5227 & 2.4782 & 2.2939 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Hasil perhitungan kriteria pada hasil perhitungan (3.73), (3.74) dan (3.75) kemudian digunakan untuk mendapatkan penyelesaian persamaan (3.58) sebagai perhitungan *error* dan persamaan (3.65) sehingga didapat parameter kriteria G dan H yang dibutuhkan juga oleh MPC untuk menentukan perubahan sinyal kendali optimum. Sinyal kendali $u(k)$ pada persamaan (3.69) dihitung berdasarkan perubahan sinyal kendali optimum tersebut ditambah dengan sinyal kendali satu pencuplikan sebelumnya. Sehingga sistem ini bersifat *integrator* atau dihasilkan kesalahan galat tunak bernilai nol dengan keunggulan berupa sifat memprediksi sinyal kendali terhadap informasi referensi yang akan datang sehingga respon yang diharapkan semakin cepat dan terlihat mendahului perubahan *set point* yang terjadi pada waktu tersebut.

BAB 4

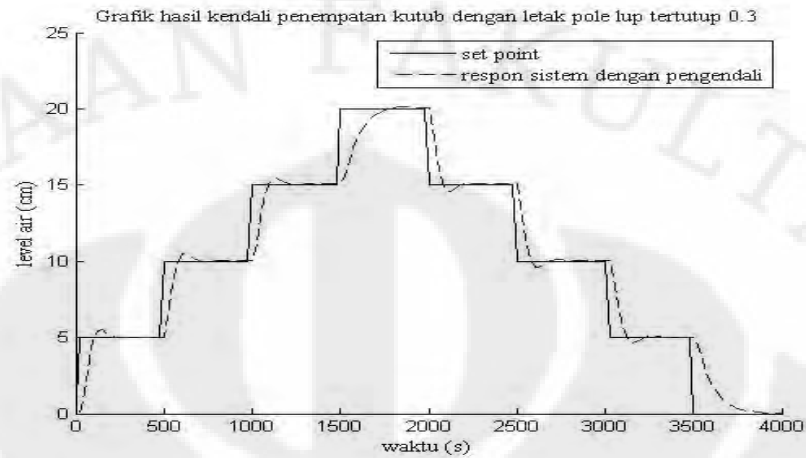
ANALISIS HASIL SIMULASI

Berikut merupakan hasil respon model *ARX* dengan pengendali lup tertutup, secara berurut menjadi tiga bentuk respon yang bervariasi, variasi pertama pada letak lup tertutup berada di sumbu real 0.2.

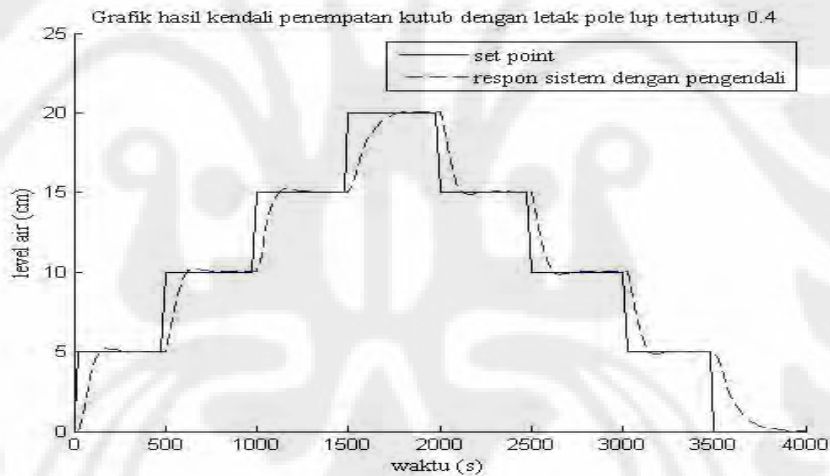


Gambar 4. 1 Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak *pole* lup tertutup $k=0.2$

Dari grafik di atas terlihat keluaran sistem mengikuti nilai acuan yang diberikan, sehingga pengendali dapat bekerja sesuai dengan tujuan yang diinginkan. Kemudian dengan mengubah parameter kutub lup tertutup *plant* tiga tangki menjadi 0.3 diperoleh sistem lup tertutup yang tetap stabil. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar dibawah ini:



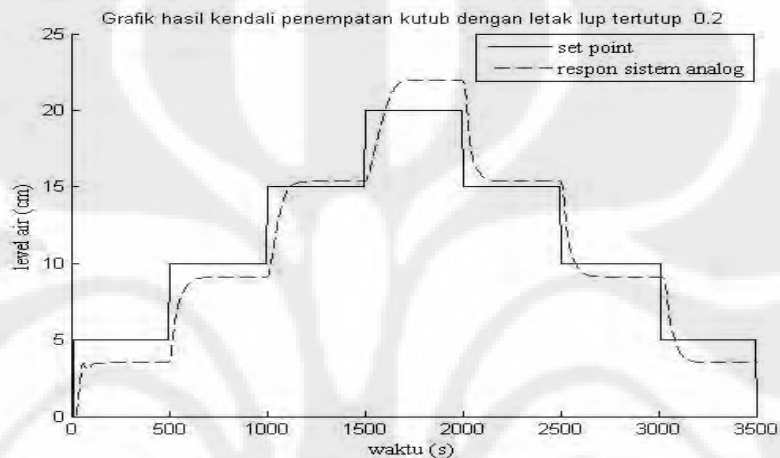
Gambar 4. 2 Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak *pole* lup tertutup $k=0.3$



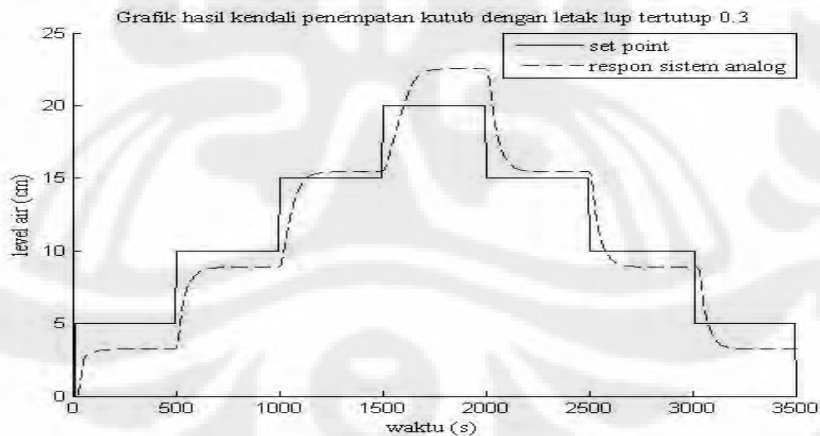
Gambar 4. 3 Grafik hasil kendali penempatan kutub dengan letak *pole* lup tertutup $k=0.4$

Dengan mengubah letak kutub lup tertutup menjadi 0.4 pada gambar 4.3 (c) berarti letak kutub tersebut memiliki redaman yang lebih besar menyebabkan nilai *overshoot* berkurang. Dari ketiga pamater perlu diketahui kesalahan galat tunak yang dihasilkan bernilai nol. Dengan waktu respon menuju galat tunak yang tidak jauh berbeda.

Berikut pada gambar 4.4, 4.5 dan 4.6 merupakan hasil respon dari sistem *plant* tiga tangki yang awal. Dapat dilihat respon yang berada pada daerah kerja air berkisar di level 15 cm memberikan respon yang baik, sedangkan ketika level air di set menjauhi dari daerah kerjanya maka kesalahan yang dihasilkan akan semakin besar.



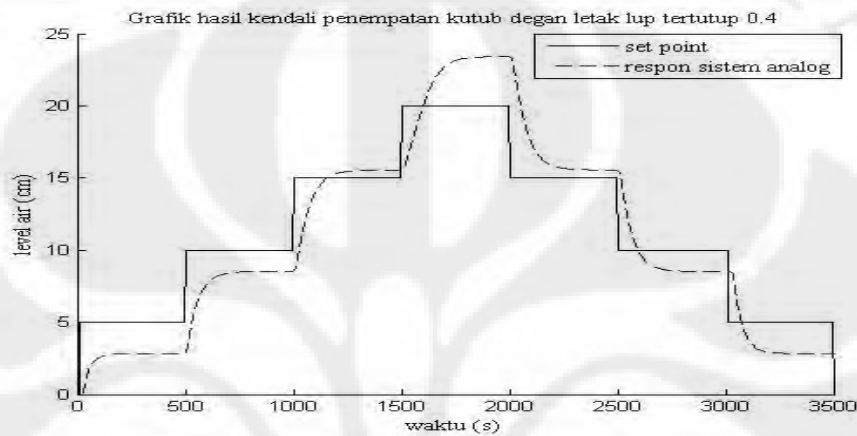
Gambar 4. 4 Perbandingan Respon *Plant* Awal Sistem Tiga Tangki dengan Pengendali Penempatan Kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.2$



Gambar 4. 5 Perbandingan respon *plant* awal sistem tiga tangki dengan pengendali penempatan kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.3$

Timbulnya kesalahan galat tunak pada sistem tiga tangki paling besar ketika letak lup tertutup berada di 0.4. Jika dihitung ketika sistem diharapkan

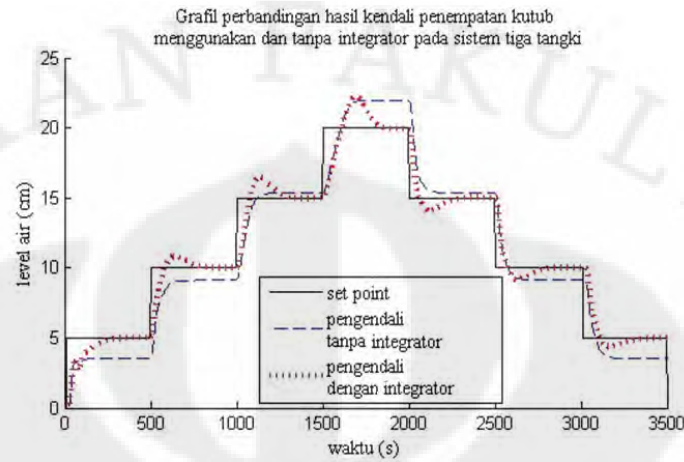
memiliki ketinggian referensi 20 cm, respon sistem tiga tangki *steady state* pada 23,41 cm. Jadi besarnya *overshoot* yang terjadi $(3,41/20)*100\% = 17.05\%$.



Gambar 4. 6 Perbandingan respon *plant* awal sistem tiga tangki dengan pengendali penempatan kutub dengan kutub lup tertutup berada pada $k=0.4$

Dengan demikian pengendali yang telah dirancang bekerja berdasarkan titik kerjanya pada level berkisar 15 cm dan untuk mengatasi permasalahan *error* tersebut dapat ditambahkan *integrator*. Pengendali tersebut dikenal dengan nama *incremental control* dimana tidak memerlukan *pre-compensator* dan dapat digunakan untuk sistem dengan *orde* sembarang

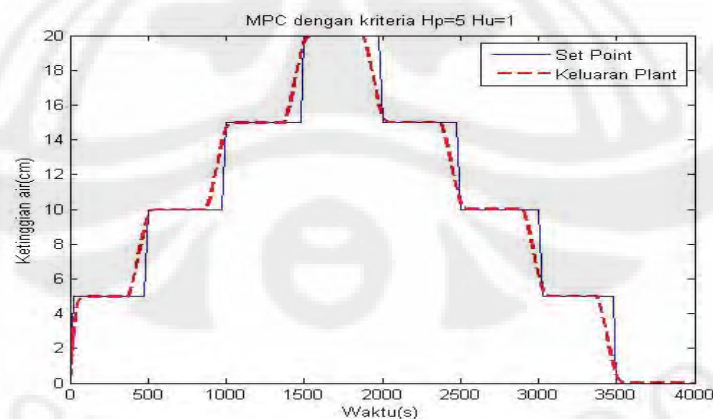
Pada pengendali *incremental* diberikan letak kutub lup tertutup di 0.6 dan dibandingkan dengan respon pengendali penempatan kutub tanpa *integrator* pada lup tertutup di 0.2 akan didapatkan hasil sebagai berikut:



Gambar 4. 7 Hasil perubahan respon sistem penempatan kutub sebelum dan sesudah diberikan *integrator*

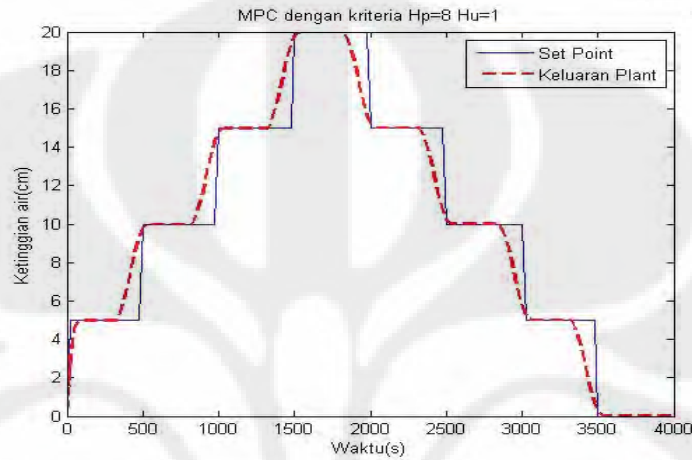
Dari gambar 4.7 terlihat pada *incremental control* kesalahan galat tunak dapat dijadikan nol untuk setiap nilai referensi yang diberikan, sedangkan penempatan kutub tanpa *integrator* kesalahan galat tunak akan semakin besar jika semakin jauh dari titik kerjanya yang berkisar di level 15 cm.

Pada saat awal penentuan nilai prediksi diperbandingkan antara *prediction* horison bernilai 5, 8, dan 12 dengan nilai horison kontrol (H_u) bernilai 1 adalah sebagai berikut:



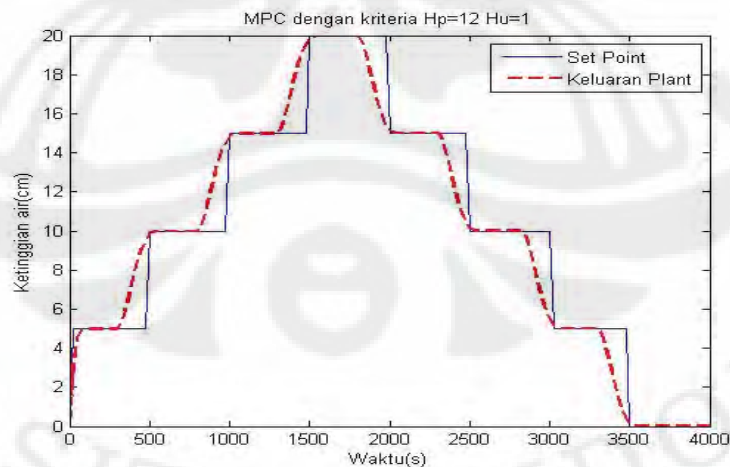
Gambar 4. 8 Keluaran ruang keadaan dengan kriteria MPC $H_p=5$ dan $H_u=1$

Kemudian dibandingkan lagi dengan prediksi yang lebih besar sebagai perbandingan untuk melihat waktu perubahan sehingga mencapai nilai galat tunak yang bervariasi pada kedua gambar berikut ini:



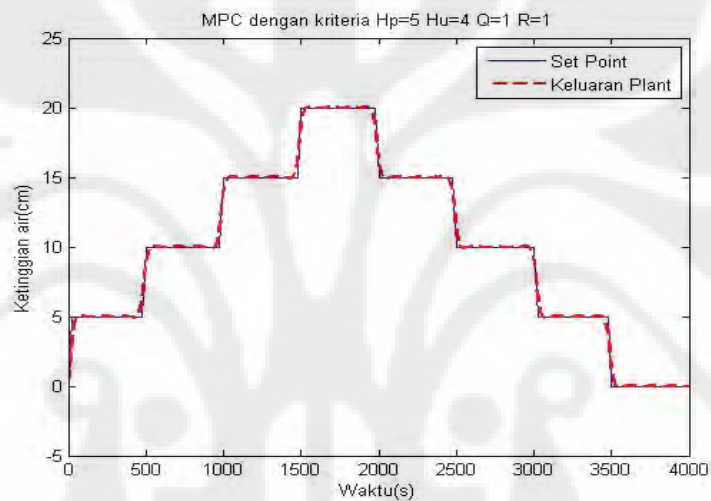
Gambar 4. 9 Keluaran ruang keadaan dengan kriteria MPC $H_p=8$ dan $H_u=1$

Terlihat pada gambar diatas semakin besar nilai prediksi berarti keluaran dari model ruang keadaan semakin cepat berubah sebelum refrensi berubah dimasa yang akan datang. Untuk lebih jelasnya perubahan tersebut dapat dilihat ketika horison prediksi (H_p) diberi nilai 12 dan horison kontrol dijaga konstan.



Gambar 4. 10 Keluaran ruang keadaan dengan kriteria MPC $H_p=12$ dan $H_u=1$

Pada gambar 4.10 dapat dianalogikan jika terlalu besar nilai prediksi maka sistem akan terlalu cepat berubah artinya kesalahan pemberian informasi yang salah untuk masa yang akan datang akan sangat memperburuk keadaan, sehingga perlu untuk membuat pemilihan pengendali *MPC* horison prediksi cukup beralasan dipilih pada nilai 5 dan horison kontrol yang diperbesar hingga bernilai 4 dengan bobot Q dan R bernilai 1 akan menghasilkan kesalahan galat tunak sama dengan nol dengan respon yang lebih cepat.



Gambar 4. 11 Keluaran terbaik dari *MPC* dengan model ruang keadaan

Pada Gambar 4.11 terlihat keluaran dari model ruang keadaan berubah terlebih dahulu sebelum *set point* berubah dikarenakan masukan referensi yang diberikan telah diketahui oleh pengendali *MPC*. Pengendali *MPC* yang telah diberi referensi yang akan datang mendapatkan informasi berdasarkan prediksi yang telah diperhitungkan pada waktu sekarang dan cakupan horison kontrol yang terdapat pada pengendali. Jadi, pengendali *MPC* dapat dijadikan salah satu strategi untuk mendapatkan hasil respon yang lebih cepat daripada *integrator* tanpa kemampuan memprediksi sinyal kendali yang akan datang.

BAB 5

KESIMPULAN

Dari simulasi untuk model tiga tangki terbung diperoleh kesimpulan penting, yaitu:

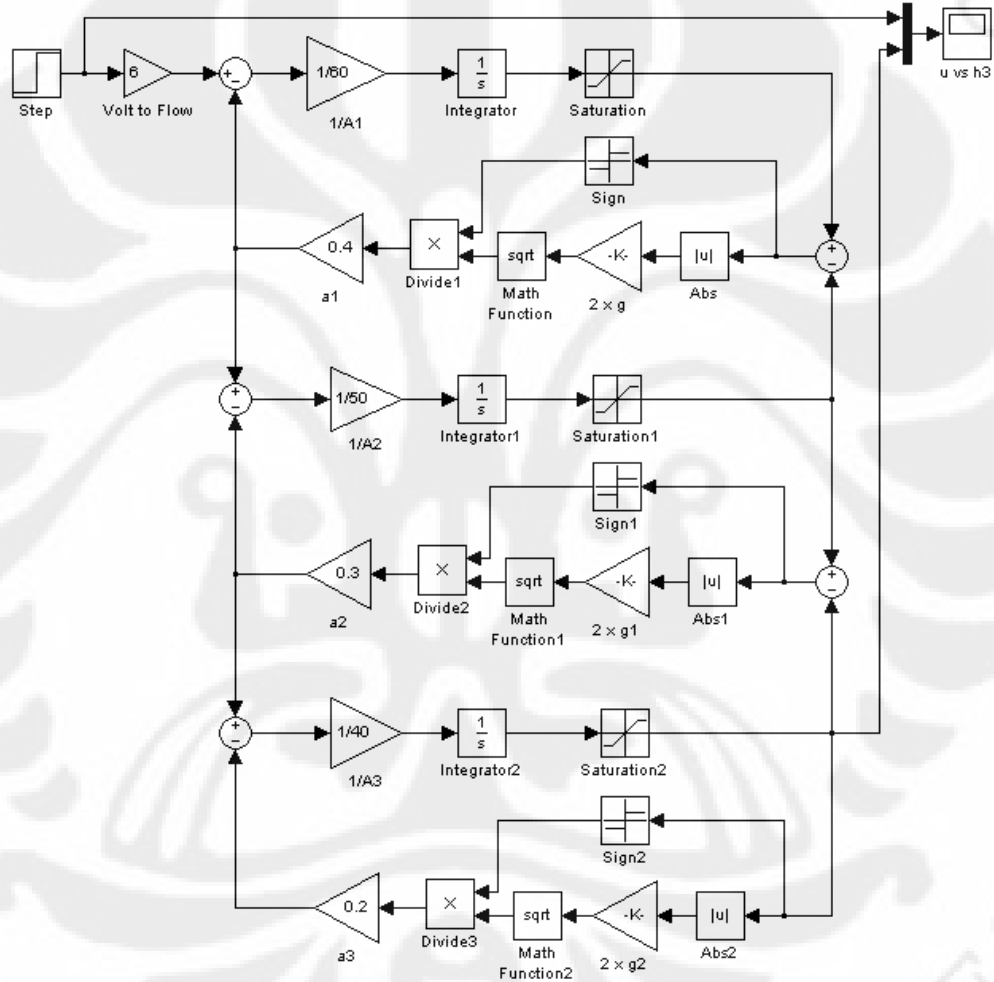
1. Berdasarkan analisa lup terbuka didapat waktu cuplik model bernilai 25.
2. Hasil validasi pemodelan *ARX* pada simulasi ini dengan $VAF = 92,60\%$ dan $RMS = 0.42$ dapat mendekati *plant* aslinya.
3. Model sistem dengan parameter $b_0=0.2737$, $b_1=0.1914$, $a_1=-1.066$, $a_2=0.2902$, dan $a_3=0.04083$ merupakan bentuk pemodelan tiga tangki.
4. Letak kedua kutub lup tertutup di titik 0.2 bidang z akan menghasilkan nilai parameter $f_1=0.4223$, $f_2=0.05805$, $g_0=0.8902$, $g_1=-0.1038$, $h=1.376$ didapatkan hasil respon tercepat dibandingkan kutub lup tertutup yang berada pada 0.3 atau 0.4.
5. Pengendali penempatan kutub masih memberikan kesalahan kesalahan paling besar 17,05 %, kesalahan tersebut dapat diatasi setelah *precompensator* diganti dengan *integrator*.
6. Pada pengendali *MPC* horison prediksi (H_p) bernilai 5 dan horison kontrol (H_u) bernilai 4 menghasilkan respon terbaik dibandingkan *pole placement* dan *incremental control* berdasarkan analisa nilai *overshoot* dan waktu galat tunak.

DAFTAR REFERENSI

- [MAC00] Maciejowski, J.M. “*Predictive Control with Constraints*“. Prentice Hall, 2000.
- [PKan95] Kanjilal, P. P., “*IEE Control Engineering: Adaptive Prediction and Predictive Control*”, England, Short Run Press, 1995.
- [Ric93] Richalet, J. “*Industrial Application of Model Based Predictive Control*”. Automatica 1993.
- [Sbtr07] Subiantoro, A., “Diktat Kuliah : Sistem Kendali Adaptif dan Nonlinear”. Departemen Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Indonesia, 2007.
- [TPaul98] Tipler, Paul A., “*Fisika untuk Sains dan Teknik*”, Jakarta, Erlangga 1998.
- [YMar04] Maraden, Y., “Identifikasi Sistem Tiga Tangki Terhubung dengan Menggunakan Algoritma *Fuzzy Clustering Gustafson-Kessel*”, Departemen Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Indonesia, 2004.

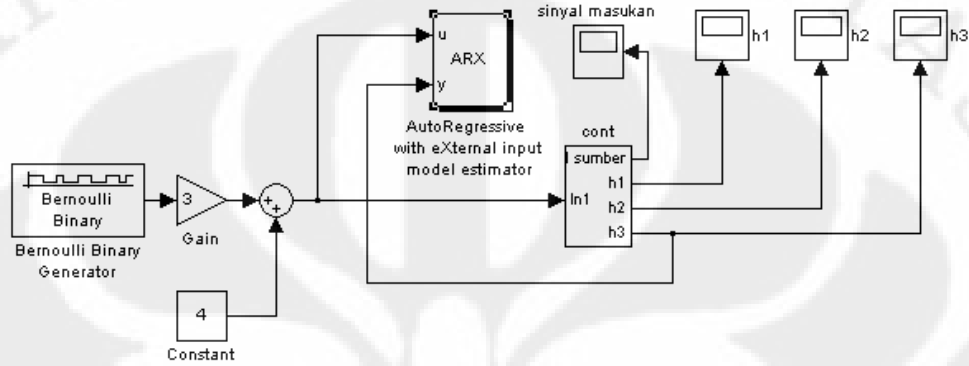
LAMPIRAN A

Simulasi Model Tiga Tangki Terhubung

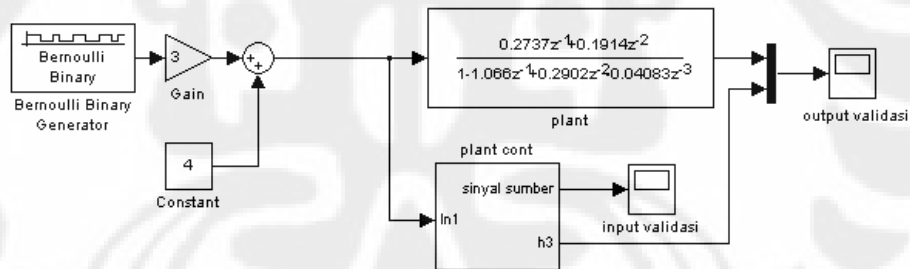


LAMPIRAN B

Pemodelan Tiga Tangki Terhubung dengan Metode ARX



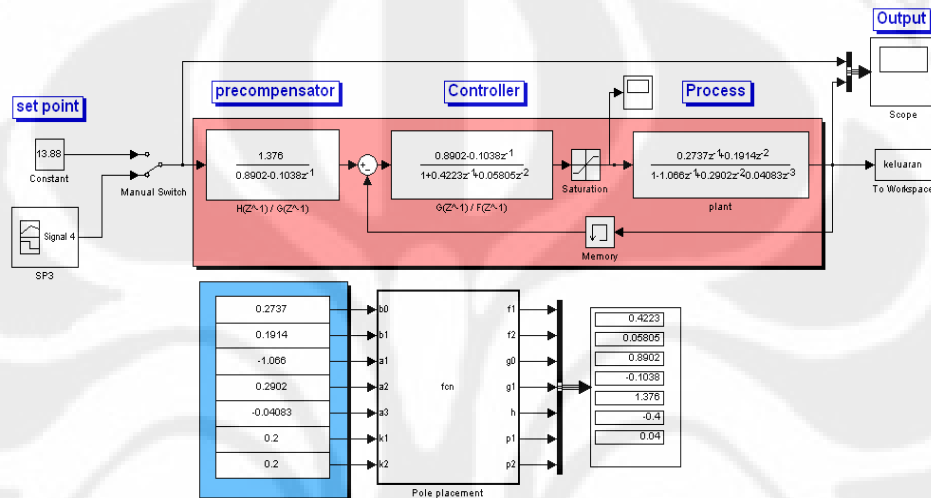
Validasi Model ARX dengan Model Matematis Tiga Tangki



LAMPIRAN C

Desain Pengendali *Pole Placement*

pada Model ARX



Source Code Pengendali *Pole Placement*

```
function [f1,f2,g0,g1,h,p1,p2] = fcn(b0,b1,a1,a2,a3,k1,k2)
% Menentukan parameter na, nb, nf, dan ng
% dari fungsi alih didapat na=3, nb=2, nf=nb=2, ng=na-1=2

matrix_A = [1 0 b0 0 ; ...
            a1 1 b1 b0 ; ...
            a2 a1 0 b1 ; ...
            a3 a2 0 0 ; ...
            0 a3 0 0 ]

p1= -(k1+k2)
p2= (k1*k2)

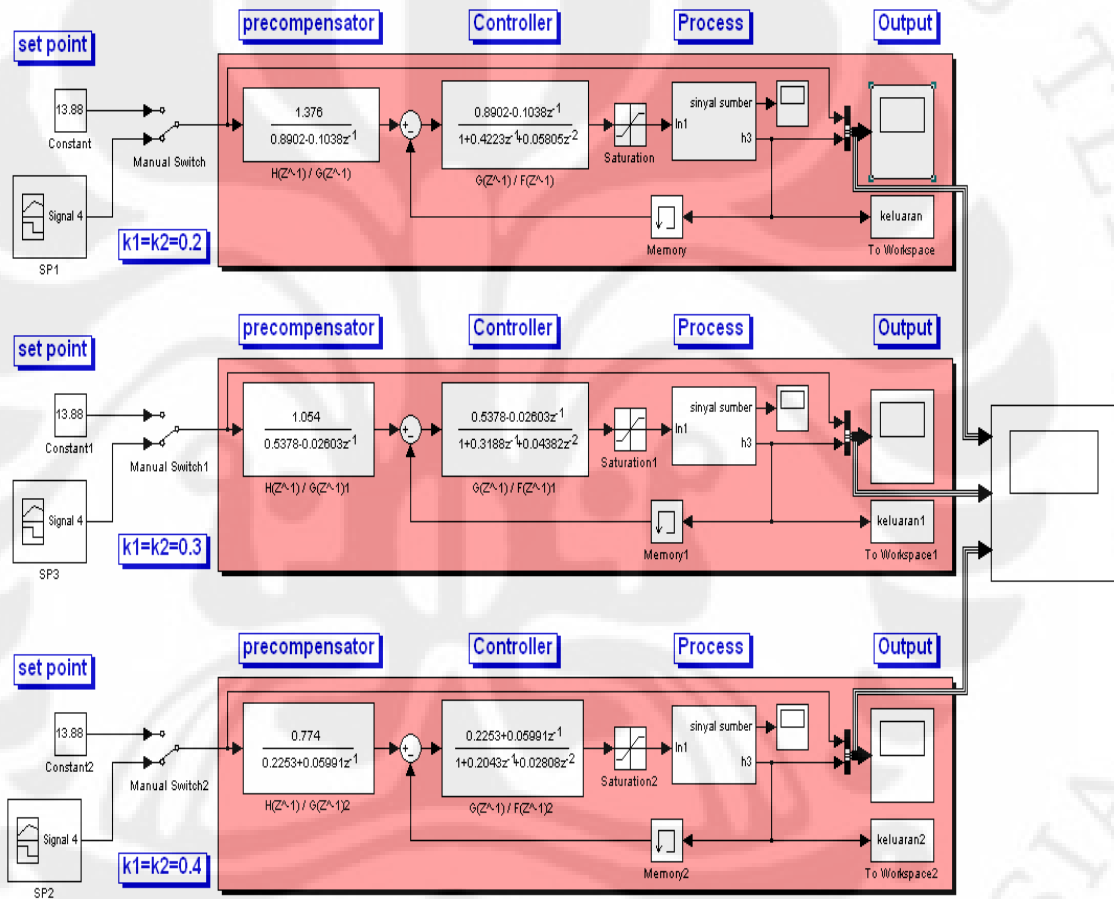
matrix_B=[p1-a1; p2-a2; -a3; 0 ; 0] % 2DOF

AT_A=(matrix_A)'*(matrix_A)
AT_B=(matrix_A)'*(matrix_B)
matrix_fg=(inv(AT_A))* AT_B

f1=matrix_fg(1)
f2=matrix_fg(2)
g0=matrix_fg(3)
g1=matrix_fg(4)
h = (1+p1+p2)/(b0+b1)
end
```

LAMPIRAN D

Penggunaan Pengendali Penempatan Kutub pada Model Matematis Tiga Tangki



LAMPIRAN E

Blok Simulasi Perbandingan Pengendali

Pole Placement, Incremental Control dan MPC

