



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**STUDI DINAMIKA ALIRAN MULTIFASE GELEMBUNG UDARA  
DAN AIR MENGGUNAKAN METODE KOMPUTASI DINAMIKA  
FLUIDA DAN TEKNIK PENCITRAAN *ELECTRICAL CAPACITANCE  
VOLUME TOMOGRAPHY (ECVT)***

**TESIS**

**Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Magister**

**SUTARTO  
0806421546**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI S2 FISIKA  
KEKHUSUSAN FISIKA MURNI DAN TERAPAN  
DEPOK  
DESEMBER 2010**



Karya ini saya dedikasikan untuk:

**Prof. Dr. rer. nat. Rosari Saleh**

*... seorang Ibu dan Pendidik yang telah memberikan pengaruh besar  
terhadap kehidupan saya ...*

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Sutarto

NPM : 0806421546

Tanda Tangan :

Tanggal : 22 Desember 2010



## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh

Nama : Sutarto  
NPM : 0806421546  
Program Studi : S2 Fisika  
Judul Tesis : Studi Dinamika Aliran Multifase Gelembung Udara dan Air Menggunakan Metode Komputasi Dinamika Fluida dan Teknik Pencitraan *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT)

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi S2 Fisika Murni dan Terapan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Warsito ( )

Pembimbing : Dr. Dedi Suyanto ( )

Penguji : Dr. Muhammad Hikam ( )

Penguji : Dr. Imam Fachruddin ( )

Penguji : Dr. Agus Salam ( )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 22 Desember 2010

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan pemahaman dan ilmu pengetahuan sehingga penelitian ini dapat menemukan ujungnya setelah melalui proses pembejalaran yang tidak sebentar. Atas peluang riset, penyediaan sarana dan prasarana, sumber daya manusia yang kompeten, bimbingan, serta kedalaman ilmu pengetahuannya, saya hendak menghaturkan terima kasih kepada **Dr. Warsito**. Suatu kebanggaan tersendiri dapat melakukan riset bersama–sama dengan peneliti kelas dunia seperti beliau. Saya juga mengucapkan terima kasih yang sebesar–besarnya kepada **Dr. Dedi Suyanto**, yang telah membimbing dan memberikan masukan–masukan penting dalam penelitian ini, sehingga permasalahan–permasalahan yang dihadapi dapat terselesaikan dengan baik.

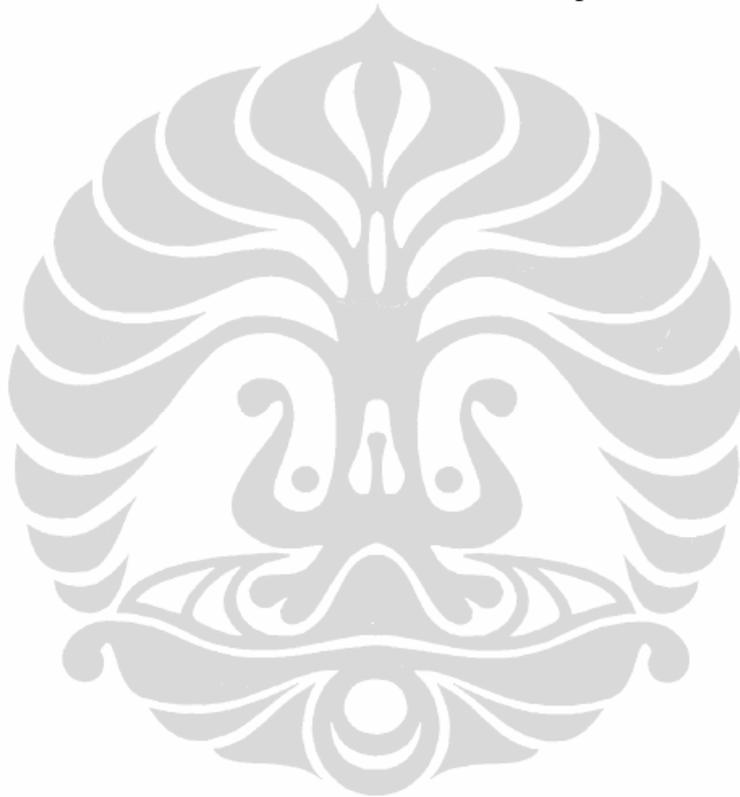
Aristoteles mengatakan, *“Seseorang yang tidak membutuhkan kehadiran orang lain (masyarakat) dalam hidupnya tentu ia adalah monster, atau Tuhan.”* Saya bukanlah salah satu dari keduanya. Setiap segmen aktivitas penelitian yang saya lakukan nyaris (seluruhnya) melibatkan kehadiran orang–orang tertentu dengan kompetensinya yang sungguh luar biasa. Oleh karena itu saya ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh staf dan peneliti di **PT Edwar Technology**, khususnya **Dr. Ratno Nuryadi** atas masukan, saran dan penanaman berdisiplin dalam riset, **Indrė Malakovskytė** (Lithuania) yang menemani setiap lembur malam dengan diskusi dan berbagi pengalaman yang sangat berharga, dan seluruh keluarga besar **Bapak Cipto – Ibu Rukinah** atas dukungan moral dan material yang tak terukur banyaknya.

Penelitian ini bertujuan untuk turut meramaikan perkembangan ilmu pengetahuan dalam bidang fluida, walaupun hanya sebutir buih di lautan luas. Dari yang sebutir itu, ternyata masih saja terdapat banyak hal yang perlu dibenahi walaupun saya sudah memaksimalkan potensi yang dimiliki, yang ujung–ujungnya penelitian ini menjadi tidak sempurna. Saya menghaturkan terima kasih yang sebesar–besarnya atas masukan, koreksi, dan gagasan–gagasan baru dari dewan penguji yang beranggotakan **Dr. Muhammad Hikam**, **Dr. Imam Fachruddin**, dan **Dr. Agus Salam**, serta peran moderasi yang luar biasa, berikut ide–ide segar dan inovatif, dari **Dr. Muhammad Aziz Majidi**.

Pepatah mengatakan, “*tak ada gading yang tak retak*” dan karya saya ini adalah salah satunya. Oleh karena masih “*retak*”, belum sempurna, maka segala masukan, koreksi, dan gagasan baru dari para pembaca menjadi bagian dari tugas berikutnya bagi saya untuk memperbaiki penelitian ini agar dapat memenuhi tujuannya dimasa mendatang.

Depok, 22 Desember 2010

**Sutarto**



**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK  
KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sutarto  
NPM : 0806421546  
Program Studi : S2 Fisika Murni dan Terapan  
Departemen : Fisika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Tesis

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Studi Dinamika Aliran Multifase Gelembung Udara dan Air  
Menggunakan Metode Komputasi Dinamika Fluida dan Teknik  
Pencitraan *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT)**

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada Bulan : 22 Desember 2010

Yang menyatakan

Sutarto

Nama : Sutarto  
Program Studi : S2 Fisika  
Judul Skripsi : Studi Dinamika Aliran Multifase Gelembung Udara dan Air Menggunakan Metode Komputasi Dinamika Fluida dan Teknik Pencitraan *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT)

## ABSTRAK

Simulasi dinamika aliran multifase telah dilakukan untuk sistem gelembung udara tunggal di dalam air, butiran air jatuh di permukaan air, dan kolom gelembung. Untuk mengklarifikasi hasil simulasi, eksperimen gelembung udara tunggal di dalam air dilakukan dengan menggunakan sensor *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT) 4D. Simulasi gelembung tunggal dan butiran air jatuh dilakukan dengan persamaan Navier–Stokes. Metode medan fase digunakan untuk melakukan penjejak lapisan antar muka gelembung udara–air dan butiran air–udara. Metode medan fase kurang stabil dalam memodelkan lapisan antar muka gelembung udara di dalam air. Selain hilangnya massa fase, persamaan medan fase juga tidak dapat mengendalikan deformasi gelembung udara sehingga menghasilkan evolusi gelembung yang tidak alamiah. Dengan menambahkan viskositas efektif udara, kehilangan massa dapat diminimalisir menjadi 0,15% sedangkan deformasi gelembung udara sangat teratur dan sesuai dengan data eksperimen.

Dengan menggunakan besaran–besaran fisis standar, metode medan fase ternyata menunjukkan performa yang baik ketika digunakan untuk memodelkan butiran air jatuh di permukaan air. Ketidak–stabilan yang muncul pada pemodelan gelembung udara di dalam air dipengaruhi oleh faktor lapisan antar muka dan gaya tegang permukaan yang bekerja padanya.

Model turbulen  $k-\varepsilon$  digunakan untuk mensimulasikan aliran gelembung pada kolom gelembung. Hasil simulasi menunjukkan munculnya sirkulasi air dan aliran gelembung yang koheren. Hasil simulasi menunjukkan kesesuaian dengan data eksperimen yang diambil menggunakan sensor ECVT 4D.

**Kata Kunci:** Aliran multifase, gelembung, kolom gelembung, ECVT 4D, laminar,  $k-\varepsilon$  turbulen, viskositas efektif, medan fase.

xviii + 158 hlm; gbr; tab.  
Daftar Referensi: 68 (1966 – 2010)

Name : Sutarto  
Field of Study : Postgraduate Program: Theoretical and Applied Physics  
Thesis Title : Studies of Dynamics Multiphase Flow of Bubble and Water System using Computational Fluid Dynamics Method and *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT) Imaging Technique

## ABSTRACT

A Series of transient simulations for multiphase flow system had been done for a single bubble rising through stagnant water, a single water droplet falling down to a liquid, and in bubble column reactor. Experimental studies also performed to clarify the simulation results using *Electrical 4D Capacitance Volume Tomography* (ECVT) with 16 Electrodes. Navier–Stokes was employed to simulate the single bubble rising and water droplet system. Phase field model is used to track the interface of the two phases but the bubble shape’s deformation shows unnatural behavior indicating that the phase field method could not hold the bubble–water interface. Moreover, the phase field method could not prevent the mass loss of the gas phase in quite significant amount. Different series of simulations had been done to clarify the problem by adding the so-called effective bubble’s viscosity constant. 4D ECVT experimental result shows good agreement with the simulations results. The unnatural behavior of the bubble rising maybe caused by an interface controlling parameter and the surface tension which is directly connected to the surface tension coefficient. In water droplet system, using standard physical properties of air and water, the phase field method shows an excellent performance. It is also found that water droplet system has laminar behavior rather than turbulence.

Transient simulation for the bubble column using  $k-\varepsilon$  turbulence model revealed water circulation and coherent bubble plume flows. Qualitatively, the simulations of the bubble column had shown well agreement with experimental data.

**Keywords:** multiphase flow, bubble, bubble column, 4D ECVT, laminar,  $k-\varepsilon$  turbulence, effective viscosity, phase field method.

xviii + 158 pages; fig; tab.  
References: 68 (1966 – 2010)

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS .....	iii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI .....	vi
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR DAN TABEL .....	xiii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Aliran Dua Fase di dalam Kolom Gelembung .....	2
1.2 Pemodelan Aliran Dua Fase .....	4
1.3 Pemodelan Aliran Turbulen .....	7
1.4 Validasi Pemodelan Aliran Multifase .....	11
1.5 Pencitraan Aliran Multifase dengan Teknik Tomografi .....	15
1.6 Tujuan dan Skema Penelitian .....	19
<b>BAB II ALIRAN MULTIFASE DAN KOMPUTASI DINAMIKA FLUIDA</b>	
2.1 Persamaan Navier – Stokes .....	23
2.2 Turbulensi .....	45
2.3 Persamaan Reynolds–Averaged Navier–Stokes (RANS) ...	47
2.4 Formulasi Persamaan Dinamika Aliran Multifase .....	51
2.5 <i>Interface Tracking</i> : Metode Medan Fase .....	56
2.6 Komputasi Dinamika Fluida .....	57
2.6.1 Diskritisasi .....	58
2.6.2 Finite Element Method (FEM) .....	58
2.6.3 Finite Volume Method (FVM) .....	61

2.6.4	Metode Numerik .....	63
2.6.5	<i>Mesh Generation</i> .....	65
2.6.6	Simulasi .....	70
2.7	Definisi Parameter dan Simulasi .....	74
2.7.1	Simulasi Gelembung Tunggal .....	76
2.7.2	Simulasi Kolom Gelembung .....	77
<b>BAB III ELECTRICAL CAPACITANCE VOLUME TOMOGRAPHY</b>		
3.1	Prinsip Dasar ECVT .....	79
3.2	Design Sensor ECVT .....	83
3.3	Sistem ECVT .....	83
3.4	Rekonstruksi Citra ECVT .....	85
3.5	Metode Iterasi Menggunakan Persamaan Landweber .....	87
<b>BAB IV PENGOLAHAN DATA, ANALISIS, DAN DISKUSI</b>		
4.1	Simulasi Dinamika Aliran Multifase: Gelembung Tunggal	90
4.1.1	Simulasi Gelembung Tunggal .....	90
4.1.2	Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan I .....	96
4.1.3	Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan II .....	101
4.1.4	Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan III .....	106
4.1.5	Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan IV .....	115
4.1.6	Analisis Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan IV .....	116
4.2	Teori Medan Fase, Gelembung Udara, dan Tetesan Air: <i>Perbandingan Performa Teori Medan Fase pada Gelembung Udara dan Tetesan Air</i> .....	125
4.3	Eksperimen Dinamika Aliran Multifase .....	135
4.3.1	Set Up Eksperimen Gelembung Tunggal pada Cairan .....	135
4.3.2	Eksperimen Gelembung Tunggal pada Cairan .....	136
4.3.3	Rekonstruksi Citra Sensor ECVT .....	138
4.4	Simulasi Dinamika Aliran Multifase: Kolom Gelembung ..	144
4.4.1	Simulasi Kolom Gelembung 2D dan 3D .....	145

<b>BAB V PENUTUP</b> .....	156
5.1 Kesimpulan .....	156
5.2 Saran .....	157

**DAFTAR ACUAN**



## DAFTAR GAMBAR DAN TABEL

### Daftar Gambar

#### Bab I Pendahuluan

1. **Gambar 1.1** Skema reaktor kolom gelembung sederhana (Darmana, 2006) ..... 1
2. **Gambar 1.2** Tipe aliran gelembung gas pada reaktor kolom gelembung, (a) aliran homogen, (b) aliran heterogen, (c) aliran *slug* . 3
3. **Gambar 1.3** Prinsip dasar PIV dan PTV ..... 13
4. **Gambar 1.4** Prinsip dasar LDA ..... 14
5. **Gambar 1.5** Sistem ECVT terdiri dari domain sistem yang diukur, sensor ECVT, *Data Acquisition System* (DAS), dan komputer untuk rekonstruksi citra ..... 18

#### Bab II Aliran Multifase dan Komputasi Dinamika Fluida

1. **Gambar 2.1** Klasifikasi sistem aliran gas–cairan ..... 22
2. **Gambar 2.2** Definisi sistem fluida dengan ukuran  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  pada sumbu koordinat  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  ..... 24
3. **Gambar 2.3** Gaya gravitasi bekerja pada segmen fluida ..... 26
4. **Gambar 2.4** Sebuah segmen fluida diambil pada bidang  $\Delta y \Delta z$ . Tekanan bekerja di sisi kiri dan kanan ..... 27
5. **Gambar 2.5** Gaya total yang bekerja pada segmen fluida di bidang  $\Delta y \Delta z$  ..... 28
6. **Gambar 2.6** Debit massa fluida yang melalui berbagai bidang ..... 30
7. **Gambar 2.7** Contoh aliran laminar dan turbulen pada asap rokok (Library and Archives Canada, 2005) ..... 45
8. **Gambar 2.8** Transisi aliran laminar ke turbulen dan terbentuknya *boundary layer* (Sayma, 2009) ..... 46
9. **Gambar 2.9** Fluktuasi kecepatan aliran fluida terhadap waktu (Sayma, 2009) ..... 48

10. <b>Gambar 2.10</b> Garis besar tahapan dan implementasi metode numerik untuk menyelesaikan persamaan Navier–Stokes .....	57
11. <b>Gambar 2.11</b> Diskritisasi domain 2D dan bagian–bagiannya .....	59
12. <b>Gambar 2.12</b> Dua grid/cell yang diskontinu .....	61
13. <b>Gambar 2.13</b> (a) Mesh terstruktur dan (b) mesh tidak terstruktur ....	65
14. <b>Gambar 2.14</b> (a) Diagram <i>Vornoj</i> dan (b) mesh hasil triangulasi .....	67
15. <b>Gambar 2.15</b> Triangulasi daerah batas/dinding 2D .....	68
16. <b>Gambar 2.16</b> Meletakkan titik baru pada segitiga hasil triangulasi awal .....	68
17. <b>Gambar 2.17</b> Menyisipkan titik $P_0$ pada metode <i>advancing front</i> untuk domain 2D. <i>Edge</i> yang bergaris tebal adalah <i>edge</i> aktif .....	69
18. <b>Gambar 2.18</b> Proses triangulasi dan pembuatan grid 2D menggunakan metode <i>advancing front</i> . Garis tebal menunjukkan <i>edge</i> aktif .....	70
19. <b>Gambar 2.19</b> Bagan alur simulasi dinamika fluida .....	71
20. <b>Gambar 2.20</b> Reaktor kolom gelembung sederhana dilengkapi dengan <i>sparger</i> .....	75
21. <b>Gambar 2.21</b> Kolom gelembung untuk simulasi aliran gelembung tunggal .....	76
22. <b>Gambar 2.22</b> Kolom gelembung untuk simulasi aliran banyak gelembung .....	77

### Bab III Electrical Capacitance Volume Tomography

1. <b>Gambar 3.1</b> (a) Susunan elektroda pada sensor ECVT, (b) Desain sensor ECVT .....	83
2. <b>Gambar 3.2</b> Bagan sistem ECVT sederhana terdiri dari sensor, DAS, dan komputer pengolah citra digital .....	84
3. <b>Gambar 3.3</b> Diagram metode <i>Back Projection</i> .....	86
4. <b>Gambar 3.4</b> Algoritma metode LBP .....	87
5. <b>Gambar 3.5</b> Langkah–langkah pengerjaan rekonstruksi citra menggunakan metode Landweber .....	87

## Bab IV Pengolahan Data, Analisis, dan Diskusi

1. <b>Gambar 4.1</b> Skema sistem gelembung di dalam air .....	90
2. <b>Gambar 4.2</b> Langkah–langkah yang digunakan dalam simulasi gelembung tunggal di dalam air .....	92
3. <b>Gambar 4.3</b> Ilustrasi sistem gelembung tunggal di dalam air .....	92
4. <b>Gambar 4.4</b> Domain sistem gelembung udara–air ( <i>axial symmetry</i> )	93
5. <b>Gambar 4.5</b> <i>Mesh</i> geometri dan parameter–parameter yang digunakan .....	94
6. <b>Gambar 4.6</b> Kondisi inisial pada $t = 0,5$ sekon. Gambar di atas telah diperkecil dari ukuran sebenarnya (60% dari ukuran sebenarnya) .....	95
7. <b>Gambar 4.7</b> Evolusi gelembung dari $t = 0$ sekon hingga $t = 80$ ms ..	96
8. <b>Gambar 4.8</b> Plot kecepatan gelembung dan air dari $t = 0$ ms hingga 800 ms .....	96
9. <b>Gambar 4.9</b> Gaya yang bekerja pada permukaan gelembung pada arah $z$ selama $t = 10$ ms hingga 30 ms .....	98
10. <b>Gambar 4.10</b> Gelembung pecah pada bagian tengahnya pada $t = 800$ ms. Gelembung berbentuk seperti <i>donut</i> .....	99
11. <b>Gambar 4.11</b> Grafik gaya tegang permukaan (sumbu $z$ ) terhadap waktu. Sekuen gambar menunjukkan deformasi gelembung antara $t = 0$ ms hingga 120 ms .....	100
12. <b>Gambar 4.12</b> Evolusi gelembung dari $t = 0$ ms hingga 550 ms. Tinggi air di dalam tabung diperpendek menjadi 10 cm sedangkan diameter gelembung dan tabung dipertahankan sama dengan sistem sebelumnya .....	101
13. <b>Gambar 4.13</b> Plot medan kecepatan aliran fluida dari $t = 0$ ms hingga $t = 550$ ms .....	102
14. <b>Gambar 4.14</b> Ukuran gelembung semakin lama semakin kecil dan kemudian menghilang setelah 790 ms .....	103
15. <b>Gambar 4.15</b> Grafik tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung terhadap waktu. Setelah 50 ms, tekanan cenderung konstan .....	104

16. <b>Gambar 4.16</b> Grafik kecepatan pada titik yang diberi tanda merah, biru, dan hijau (arah $z$ ). Kecepatan di titik hijau lebih besar dibanding di titik yang lain .....	104
17. <b>Gambar 4.17</b> Grafik fraksi volume udara terhadap air pada $t = 0$ s hingga 1 s .....	105
18. <b>Gambar 4.18</b> Evolusi gelembung dari $t = 0$ ms hingga 260 ms. Tinggi air di dalam tabung 12 cm dengan diameter tabung 5,5 cm. $\mu_{\text{gelembung}}$ sebesar 5 Pa.s .....	108
19. <b>Gambar 4.19</b> Grafik tekanan terhadap waktu. Tekanan internal gelembung mengalami perubahan karena adanya tekanan oleh air ....	109
20. <b>Gambar 4.20</b> Grafik perubahan tekanan pada permukaan gelembung pada arah vertikal dan horizontal .....	110
21. <b>Gambar 4.21</b> Grafik kecepatan gelembung. Terlihat bahwa gelembung yang mula-mula diam kemudian dipercepat hingga mencapai kecepatan maksimum pada $t = 0,11$ s dengan besar kecepatan 0,34 s .....	111
22. <b>Gambar 4.22</b> Perbandingan gaya yang bekerja pada permukaan gelembung dengan gaya viskositas .....	113
23. <b>Gambar 4.23</b> Grafik fraksi volume udara terhadap waktu .....	113
24. <b>Gambar 4.24</b> Plot profile kecepatan aliran fluida dari $t = 0$ ms hingga 260 ms .....	114
25. <b>Gambar 4.25</b> Geometri tabung beserta ukuran gelembung dan air ...	116
26. <b>Gambar 4.26</b> Sekuen hasil simulasi gelembung tunggal tahap IV ....	117
27. <b>Gambar 4.27</b> Grafik gaya tegang permukaan yang bekerja pada gelembung .....	118
28. <b>Gambar 4.28</b> Grafik kecepatan gelembung terhadap waktu .....	119
29. <b>Gambar 4.29</b> Plot kecepatan aliran fluida dari $t = 0$ ms hingga 295 ms .....	119
30. <b>Gambar 4.30</b> Distribusi tekanan pada permukaan dan rasio diameter gelembung .....	120

31. <b>Gambar 4.31</b> Grafik fraksi volume udara. Volume udara berkurang sebesar 0,15%. Nilai ini jauh lebih kecil dibanding disipasi volume pada simulasi sebelumnya yaitu 5,8% .....	122
32. <b>Gambar 4.32</b> Grafik gaya tegangan permukaan yang bekerja pada seluruh bagian gelembung. Tekanan permukaan maksimum sebesar 10,2 Pa pada $t = 0,12$ s .....	122
33. <b>Gambar 4.33</b> Grafik gaya viskositas per satuan luas yang bekerja pada permukaan gelembung .....	123
34. <b>Gambar 4.34</b> Definisi <i>mesh</i> dan geometri setelah di <i>mesh</i> .....	127
35. <b>Gambar 4.35</b> Evolusi bentuk butiran air ketika jatuh dari ketinggian 11 cm ke permukaan air setebal 2 cm .....	127
36. <b>Gambar 4.36</b> Plot kecepatan fluida pada $t = 0$ ms hingga 300 ms ....	128
37. <b>Gambar 4.37</b> Sekuen evolusi butiran air dari $t = 0$ ms hingga 140 ms .....	129
38. <b>Gambar 4.38</b> Grafik fraksi volume air (integrasi seluruh domain) ...	129
39. <b>Gambar 4.39</b> Grafik fraksi volume udara (integrasi seluruh domain) .....	130
40. <b>Gambar 4.40</b> Grafik gaya tegang permukaan yang bekerja pada butiran air pada arah horizontal dan vertikal .....	131
41. <b>Gambar 4.41</b> Grafik kecepatan arah vertikal (pelonjongan) dan horizontal (pemipihan) .....	132
42. <b>Gambar 4.42</b> Grafik tekanan yang bekerja pada butiran air .....	133
43. <b>Gambar 4.43</b> Definisi parameter dan besaran eksperimen gelembung tunggal .....	136
44. <b>Gambar 4.44</b> Grafik nilai kapasitansi yang telah dinormalisasi (sumbu $y$ ) dan kombinasi sensor (sumbu $x$ ) .....	138
45. <b>Gambar 4.45</b> Hasil citra ECVT saat tabung diisi dengan air setinggi 11 cm dan dibiarkan dalam keadaan diam/tidak ada gelembung .....	139
46. <b>Gambar 4.46</b> Grafik kapasitansi saat gelembung udara dialirkan .....	139
47. <b>Gambar 4.47</b> Grafik kapasitansi saat gelembung telah mencapai permukaan .....	140

48. <b>Gambar 4.48</b> (a) Gelembung udara pada saat keluar dari lubang udara dan (b) gelembung udara pada saat mencapai permukaan .....	140
49. <b>Gambar 4.49</b> Penampang lintang gelembung udara hasil simulasi dan rekonstruksi citra ECVT .....	141
50. <b>Gambar 4.51</b> Geometri kolom gelembung. (a) Kolom gelembung 3D, (b) Dilihat pada bidang $xy$ (c). Pemodelan 3D kolom gelembung direduksi menjadi 2D .....	144
51. <b>Gambar 4.52</b> Sekuen hasil simulasi dinamika aliran multifase pada kolom gelembung. Gambar di atas menunjukkan fraksi volume udara terhadap air .....	146
52. <b>Gambar 4.53</b> Plot vektor kecepatana aliran fluida .....	147
53. <b>Gambar 4.54</b> Profil kecepatan gelembung gas untuk seluruh domain .....	147
54. <b>Gambar 4.55</b> Profil kecepatan air untuk keseluruhan domain .....	148
55. <b>Gambar 4.56</b> Pola aliran gelembung udara pada kolom gelembung. Gambar di atas dihasilkan dari simulasi 3D (Zhang, 2005) .....	149
56. <b>Gambar 4.57</b> Simulasi 3D aliran gelembung pada air menggunakan metode turbulen $k-\varepsilon$ .....	149
57. <b>Gambar 4.58</b> Hasil eksperimen aliran gelembung udara menggunakan sensor ECVT (Warsito, 2005) .....	150
58. <b>Gambar 4.59</b> Perbandingan hasil simulasi aliran bergelembung (3D) dengan hasil eksperimen menggunakan ECVT .....	151

## Bab V Kesimpulan

—

### *Daftar Tabel*

1. <b>Tabel 2.1</b> Parameter simulasi menggunakan model Euler–Euler (turbulen $k-\varepsilon$ ) .....	75
2. <b>Tabel 4.1</b> Model dan parameter simulasi gelembung tunggal di dalam air .....	91

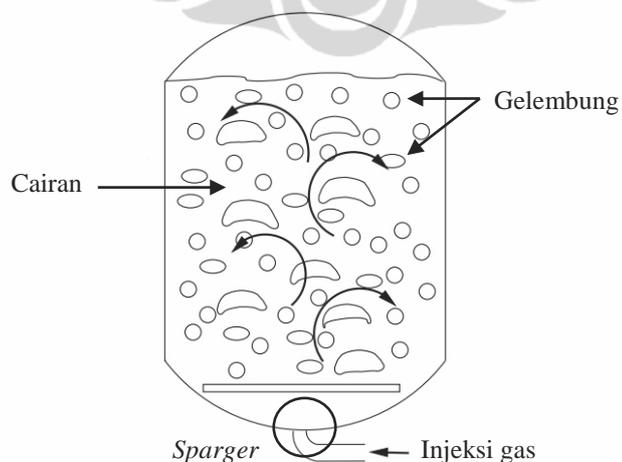
3. <b>Tabel 4.2</b> Model dan parameter simulasi gelembung tunggal di dalam air .....	125
4. <b>Tabel 4.3</b> Kondisi dan syarat batas domain simulasi .....	126



## BAB I PENDAHULUAN

Aliran cairan disertai gelembung gas sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari misalnya aliran gelembung pada saat merebus air, riak gelombang di lautan, hingga proses-proses rumit seperti pengeboran minyak dan pembangkit tenaga listrik. Dalam bidang riset dan industri, pemahaman mengenai dinamika aliran fluida menjadi sangat penting. Hal ini berdasarkan fakta bahwa terdapat banyak sekali proses-proses baik yang bersifat alami atau buatan, dimana aliran multifase memegang peranan yang signifikan. Aliran multifase adalah aliran fluida yang terdiri dari dua komponen fase atau lebih (Brennen, 2003).

Dalam industri bio/petrokimia, aliran multifase muncul pada peristiwa absorpsi, fermentasi, bio-reaksi, pencairan batubara, dan pengolahan limbah air (Shah, Godbole, dan Decker, 1982; Prakash, Margaritis, dan Li, 2001; Mouza, Kazakis, dan Paras, 2004). Aliran dua fase yang terdiri dari cairan dan gas adalah contoh aliran multifase. Pada sistem cairan-gas, gas digunakan untuk memicu terjadinya aliran pada zat cair. Aliran semacam itu biasanya digunakan untuk mengadakan reaksi antara gas dan cairan yang bertujuan untuk menghasilkan produk tertentu (Delnoij, 2001).

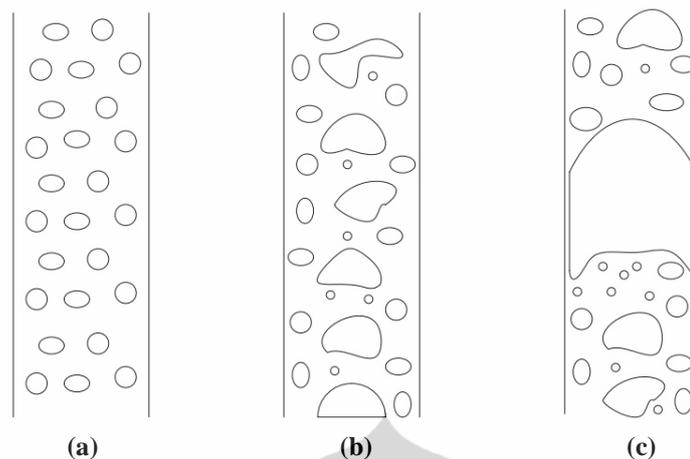


**Gambar 1.1** Skema reaktor kolom gelembung sederhana (Darmana, 2006).

Pada proses pengolahan minyak, reaktor kolom gelembung digunakan untuk memproduksi dan memisahkan komponen-komponen minyak dimana gelembung gas digunakan untuk mengangkat komponen minyak kental ke permukaan. Kolom gelembung, termasuk dalam kategori reaktor multifase (Kantarci, Borak, dan Ulgen, 2005), adalah sebuah reaktor sederhana berbentuk tabung yang dilengkapi dengan penginjeksi gas (*sparger*) pada bagian bawahnya. Tabung diisi dengan zat cair dengan volume tertentu dan gas diinjeksi dari *sparger* untuk menghasilkan aliran gelembung gas-cairan, lihat **Gambar 1.1**. Reaktor jenis ini banyak digunakan dalam bidang industri (kimia, bio/petrokimia, dan metalurgi) sebagai kontak multifase karena memiliki kelebihan antara lain konstruksi dan pengoperasian yang sederhana, biaya operasional yang murah, transfer panas dan massa yang baik, dan mudah digunakan untuk melakukan pencampuran zat (Joshi, 2002; Mouza, Kazakis, dan Paras, 2004; Kantarci, Borak, dan Ulgen, 2005; Zhang, 2005).

### 1.1 Aliran Dua Fase di dalam Kolom Gelembung

Di dalam kolom gelembung, gas diinjeksi melalui *sparger* sebagai fase gelembung terdispersi pada medium kontinu cairan. Berdasarkan sifat natural dispersinya, terdapat tiga tipe aliran gelembung gas-cairan yaitu aliran homogen, heterogen, dan *slug* (Zahradnik, 1997; Hyndman, Larachi, dan Guy, 1997). Pada aliran homogen, gelembung-gelembung gas yang berbentuk bola memiliki ukuran yang relatif sama dimana konsentrasi gelembung gas pada fase kontinu hampir seragam (Schumpe dan Grund, 1986). Tipe aliran ini biasanya muncul pada kisaran kecepatan *superficial* gas antara 0,18 m/s hingga 0,3 m/s (Zhang, 2005). Aliran cairan pada arah vertikal ke atas muncul pada daerah di sekitar jalur aliran gelembung sedangkan aliran fase cairan pada arah vertikal ke bawah muncul pada daerah di sekitar dinding reaktor. Secara praktis, tidak terjadi proses penggabungan dan fragmentasi gelembung sehingga ukuran gelembung, sepanjang yang telah dipelajari, hanya dipengaruhi oleh ukuran *sparger* dan besaran fisis sistem (Thorat dan Joshi, 2004; Kantarci, Borak, dan Ulgen, 2005; Zhang, 2005).



**Gambar 1.2** Tipe aliran gelembung gas pada reaktor kolom gelembung, (a) aliran homogen, (b) aliran heterogen, (c) aliran *slug*.

Dengan meningkatnya debit gas, proses penggabungan dan pemecahan gelembung–gelembung gas terjadi lebih intens, menyebabkan gelembung–gelembung gas memiliki bentuk dan dimensi yang bervariasi (Schumpe dan Grund, 1986). Tipe aliran ini ditandai dengan meningkatnya turbulensi gelembung dan resirkulasi cairan (Kantarci, Borak, dan Ulgen, 2005). Biasanya, gelembung gas yang berukuran relatif lebih besar akan bergerak naik dan bersirkulasi sepanjang bagian tengah reaktor sedangkan gelembung gas yang berukuran kecil cenderung bersirkulasi di sekitar dinding reaktor atau mengikuti jalur sirkulasi gelembung gas yang berukuran lebih besar. Dimensi dan ukuran gelembung rata–rata dipengaruhi secara signifikan oleh laju disipasi energi pada debit gas (Thorat dan Joshi, 2004).

Ketika laju *superficial* gas diperbesar, ukuran gelembung gas dapat menjadi lebih besar atau sama dengan luas penampang reaktor. Tipe aliran semacam ini dikenal dengan aliran *slug*, yang juga dapat muncul jika luas penampang reaktor kurang dari  $0,018 \text{ m}^2$  (Hills, 1976; Miller, 1980; Hyndman, Larachi, dan Guy, 1997). Aliran *slug* biasanya muncul pada pipa yang digunakan untuk memindahkan campuran minyak dan gas.

Pemahaman terhadap prinsip–prinsip fundamental aliran multifase sangat penting untuk berbagai aplikasi baik dalam bidang pengembangan sains,

teknologi, dan industri. Pemahaman dinamika aliran multifase dibutuhkan antara lain dalam bidang industri kimia (efisiensi reaksi pada reaktor kolom gelembung untuk meningkatkan area kontak antar fase), penyediaan sumber energi (produksi uap dari proses pendidihan cairan untuk menggerakkan turbin), dan lain sebagainya (Mazzitelli, 2003). Hingga saat ini pemahaman mengenai dinamika aliran multifase masih jauh dari memuaskan (Delnoij, 2001; Zhang, 2005). Model-model fisika yang sekarang digunakan masih bersifat parsial.

## 1.2 Pemodelan Aliran Dua Fase

Saat ini, terdapat tiga model pendekatan yang umum digunakan untuk menganalisis dinamika aliran multifase yaitu Euler–Euler (disebut juga *two fluid model*), Euler–Lagrange (disebut juga *discreet bubble model*), dan *Volume Tracking Model*. Model Euler–Euler menggunakan persamaan kontinuitas dan kekekalan momentum untuk mendeskripsikan dinamika fase cairan–gas. Model Euler–Euler membutuhkan persamaan tambahan yang disebut *constitutive equation* (persamaan konstitutif) untuk memodelkan perpindahan massa, momentum, dan panas antar fase. Hingga saat ini, status keabsahan model persamaan konstitutif tersebut masih diperdebatkan. Model Euler–Lagrange mendeskripsikan dinamika aliran tiap fase menggunakan persamaan gerak Newton dan persamaan *volume-averaged Navier–Stokes*. Seperti halnya model Euler–Euler, persamaan konstitutif juga dibutuhkan untuk melengkapi model Euler–Lagrange dimana status persamaan–persamaan tersebut hingga sekarang juga masih diperdebatan keabsahannya.

Di samping itu, model Euler–Lagrange membutuhkan algoritma tambahan untuk memetakan data spasial gelembung ke dalam *mesh* Eulerian. Model *Volume Tracking Model* (VTM) tidak membutuhkan persamaan konstitutif. VTM memodelkan aliran multifase menggunakan persamaan Navier–Stokes untuk memperoleh medan aliran tiap fase dimana evolusi antar–muka gas–cairan dihitung dengan metode *volume tracking*. Model VTM dapat digunakan untuk mengakses informasi spasial dinamika aliran gelembung dengan tingkat ketelitian yang tinggi. Setiap metode memiliki level penerapannya masing–masing. Metode

Euler–Euler biasanya diterapkan pada aplikasi praktis yang tidak terlalu membutuhkan informasi detail mengenai sistem multifase tertentu.

Metode Euler–Lagrange dan VTM digunakan untuk menganalisis aspek fundamental aliran multifase. Saat ini pengembangan kedua model itu menjadi topik penelitian yang gencar dilakukan. Salah satu tujuan penggunaan model tersebut adalah untuk merumuskan persamaan–persamaan fundamental yang mengatur dinamika aliran fluida seperti halnya hukum Newton yang menjelaskan secara komplit fenomena gerak benda–benda makro dan persamaan Maxwell yang menjelaskan secara lengkap fenomena listrik–magnet.

Dinamika sistem gas–cairan dipengaruhi oleh gaya–gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Gaya–gaya yang bekerja pada sistem tersebut antara lain *drag force* (gaya yang hambat yang bekerja akibat efek gesekan dan viskositas), *virtual mass force* (gaya yang menyebabkan percepatan suatu fase yang terbenam pada cairan tertentu), dan *lift force* (gaya angkat yang memiliki arah tegak lurus terhadap kecepatan relatif gas dan cairan) serta gaya–gaya yang bekerja pada proses penggabungan dan fragmentasi gelembung gas.

Pada aliran multifase gelembung tunggal, Becker (1994) dan Oey *et al.* (2003) menyimpulkan bahwa *drag force* berperan penting pada proses terjadinya aliran turbulen. Sedangkan gaya difusif yang menyebabkan turbulensi, *virtual mass force*, hanya memberikan semacam *tuning effect* terhadap dinamika sistem. *Lift force* memiliki bentuk persamaan yang bervariasi, hingga saat ini diketahui bahwa varian–varian persamaan tersebut bergantung pada ukuran gelembung, medan aliran fase kontinu, dan karakteristik fisis sistem (Zhang, 2005). Hal ini menyebabkan persamaan komponen *interfacial force closure* menjadi rumit. *Interfacial force closure* sendiri merupakan fungsi dari bilangan Reynolds ( $Re$ ), bilangan Eötvös, ( $Eö$ ), dan bilangan Morton ( $M$ ).

Tomiyama (2004), mengusulkan satu set persamaan *closure law* untuk *drag force*, *lift force*, dan *virtual mass force* dengan merujuk pada data–data eksperimen. Menurut Tomiyama, untuk gelembung tunggal, ketiga komponen *closure law* tersebut tidak hanya bergantung pada bilangan Reynolds dan bilangan

Eötvös, akan tetapi juga bergantung pada aspek rasio gelembung yaitu rasio antara diameter terpanjang dan terpendek gelembung. Untuk gelembung–gelembung dengan memiliki diameter yang seragam, Welleck *et al.* (1966) mengusulkan nilai  $E$  sebesar 0,77. Oleh Dijkhuizen *et al.* (2005), melalui simulasi *front tracking*, gelembung memiliki dimensi yang agak pipih dengan nilai  $E$  sebesar 0,375.

Untuk sistem yang terdiri dari banyak gelembung, *gas hold-up* memberikan pengaruh signifikan terhadap dinamika gelembung gas dan cairan. Oleh karena itu, faktor *gas hold-up* harus disertakan dalam *closure law*. Berdasarkan penelitian ekstensif terhadap data–data eksperimen, Ishii and Zuber (1979) mengusulkan bahwa nilai koefisien *drag* merupakan hasil perkalian antara faktor koreksi dengan koefisien *drag* gelembung tunggal untuk tiga jenis aliran (homogen, heterogen, dan *slug*). Dengan meningkatnya *void fraction*, kecepatan relatif yang dimiliki gelembung menurun (pada pola aliran Newtonian dan aliran gelembung terdistorsi).

Sebaliknya, pada tipe aliran *spherical cap*, Simonnet *et al.* (2007) menyimpulkan bahwa dengan meningkatnya *void fraction*, kecepatan relatif gelembung juga meningkat. Saat *gas hold-up* lokal lebih kecil dari 15%, *void fraction* memberikan efek penghambatan (disebut *hindrance effect*) pada kecepatan relatif gelembung (Simonnet *et al.*, 2007). Di luar rentang nilai ini, efek aliran gelembung lebih dominan dibanding *void effect* dan oleh karena itulah kecepatan relatif gelembung meningkat (Zhang, 2005). Hipotesis tersebut bertolak belakang dengan kesimpulan yang diperoleh Behzadi *et al.* (2004) yang menyatakan bahwa *void effect* memberikan pengaruh progresif terhadap *drag coefficient*.

Behzadi *et al.* (2004) menyatakan bahwa setiap konfigurasi aliran multifase memiliki nilai koefisien *lift force*–nya masing–masing. Kesimpulan ini berdasarkan hipotesis yang menyatakan bahwa *lift force coefficient* bergantung pada *void fraction* namun tidak bergantung terhadap *lift force* itu sendiri. Pada saat melakukan analisisnya, Behzadi *et al.* (2004) menggunakan persamaan *lift force coefficient* sederhana tanpa menyertakan bilangan  $E$  dan bilangan Reynolds lokal. Hal ini berbeda dengan model yang diajukan Tomiyama (2004), dimana

dalam analisisnya Tomiyama menyertakan bilangan  $E$  dan bilangan Reynolds. Akan tetapi perlu dicatat bahwa bilangan  $E$  dan bilangan Reynolds ini mungkin saja memberikan efek dinamik terhadap sistem namun belum tentu pengaruhnya bersifat langsung dan signifikan terhadap *lift force coefficient*.

Walaupun telah banyak digunakan dalam bidang industri dan telah banyak penelitian dilakukan, aspek-aspek fundamental hidrodinamika dari sistem gelembung gas-cairan belum juga dapat dipahami secara komprehensif (Delnoij, 2001). Secara umum, aliran fluida diklasifikasikan menjadi dua yaitu aliran laminar dan turbulen. Pada aliran laminar, struktur aliran fluida terdiri dari lapisan-lapisan tipis yang bergerak relatif satu sama lain dimana, secara makroskopik, antara lapisan satu dengan yang lainnya tidak terjadi pencampuran atau dispersi. Aliran turbulen ditandai dengan adanya fluktuasi kecepatan yang mengakibatkan terjadinya transfer momentum, energi, dan konsentrasi spesies/lapisan aliran. Akibat fluktuasi tersebut, momentum, energi, dan besaran lainnya juga turut berfluktuasi dengan frekuensi tertentu. Fluktuasi tersebut disebabkan antara lain karena gaya inersia fluida cukup besar dibanding gaya viskositasnya. Perbandingan gaya inersia dan viskositas disebut bilangan Reynolds. Jika bilangan Reynolds rendah, aliran yang terjadi cenderung laminar. Sebaliknya jika bilangan Reynolds besar, aliran yang terjadi cenderung turbulen.

### 1.3 Pemodelan Aliran Turbulen

Proses dan dinamika aliran turbulen adalah salah satu aspek yang membuat *blunder* riset bidang fluida hingga sekarang. Di samping sifat naturalnya yang belum dapat diprediksi baik secara kualitatif maupun kuantitatif, pemodelan aliran turbulen menjadi salah satu permasalahan yang belum terpecahkan (Zhang, 2005). Hingga saat ini, beberapa model aliran turbulensi telah dikembangkan di antaranya model  $k-\varepsilon$ , *Large Eddy Simulation (sub grid scale dan wall adapted local eddy)*, *Reynolds Stress Turbulence Model*, model  $k-\omega$ , yang berbuntut pada model *Baseline (BSL)* dan *Shear Stress Transport (SST)*, model Spalart-Allmaras, model transisi  $k-kl-\omega$ , model transisi SST, model  $v^2-f$ , dan model *Detached Eddy Simulation*. Model-model tersebut terbatas pada sistem-sistem

tertentu, belum ada satu model yang disepakati sebagai model universal yang dapat digunakan untuk mengakses semua jenis dan level permasalahan dalam pemodelan dinamika fluida.

Pemilihan model aliran turbulen bergantung pada fenomena fisika yang ingin diketahui dari sistem, data eksperimen, tingkat akurasi perhitungan, sumber daya komputasi, dan waktu yang tersedia untuk melakukan simulasi. Karakteristik terpenting dari aliran multifase adalah adanya permukaan (*interface*) yang memisahkan antara fase kontinum dengan fase terdispersi. Permukaan tersebut menandai munculnya sifat diskontinuitas besaran-besaran fisis fase yang terletak di kedua sisinya. Induksi aliran dan transfer momentum antara satu fase dengan fase yang lain dalam satu sistem selalu melewati permukaan tersebut. Mekanisme transfer momentum dan induksi aliran ini dipengaruhi oleh tipe aliran yang muncul dalam sistem multifase. Pada kasus aliran multifase gelembung gas-cairan, fenomena transport dipengaruhi oleh interaksi antar gelembung (penggabungan dan fragmentasi), interaksi gelembung dengan fase kontinu (cairan), dan interaksi kolektif yang terjadi antara keduanya. Hingga saat ini, model interaksi antar fase tersebut belum sepenuhnya selesai dan masih terus dikembangkan.

Model  $k-\varepsilon$  adalah salah satu model aliran turbulen yang sering digunakan dalam aplikasi praktis dan telah memperoleh konfirmasi data-data eksperimen terkait dengan keabsahan model persamaan yang digunakan (Sokolichin dan Eigenberger, 1999; Borchers *et al.*, 1999; Mudded dan Simonin, 1999; Pflieger *et al.*, 1999; Pflieger dan Becker, 2001; Deen *et al.*, 2001). Dalam batas-batas tertentu, model  $k-\varepsilon$  termasuk model yang cukup akurat untuk memprediksi dinamika aliran multifase baik yang bersifat laminar maupun turbulen.

Model  $k-\varepsilon$  termasuk dalam kelas *two equation models*, dua di antaranya adalah model  $k-\omega$  dan SST. Ketiga model tersebut dapat digunakan untuk berbagai sistem aliran dengan akurasi yang bagus (Wilcox, 1998; Cebeci, 2003). Basis model  $k-\varepsilon$  adalah formulasi persamaan energi kinetik turbulen ( $k$ ) dan laju disipasi turbulensi ( $\varepsilon$ ). Aliran fluida memiliki perilaku yang berbeda untuk

daerah–daerah yang berbeda, misalnya daerah aliran di pusat domain berbeda dengan aliran di daerah dekat dengan dinding/batas. Oleh karena itu, persamaan yang digunakan pun harus disesuaikan dengan kondisi–kondisi tersebut. Model  $k-\varepsilon$  mengantisipasi hal ini dengan menambahkan persamaan *dumping* yang berfungsi untuk mengendalikan nilai  $k$  dan  $\varepsilon$  pada daerah di dekat dinding/batas agar tidak terlalu besar atau terlalu kecil.

Becker *et al.* (1994) menggunakan model  $k-\varepsilon$  2D untuk memprediksi dinamika aliran multifase dengan ukuran grid ( $18 \times 25$ ). Hasil eksperimen menunjukkan terdapat tiga pusaran kecil pada sistem. Pusaran tersebut tidak muncul dalam simulasi. Untuk menghasilkan pusaran–pusaran tersebut, viskositas fluida dijadikan 100 kali lipat dari nilai awal untuk keseluruhan domain. Namun hal ini justru menghasilkan viskositas turbulen yang terlampau besar, hingga orde 20.000, yang malah meredam munculnya pusaran–pusaran dalam fluida. Pada laju aliran rendah, 1,6 liter/menit, hasil simulasi baru menunjukkan hasil yang koheren secara kualitatif, walaupun masih dalam kondisi stasioner. Dengan meningkatkan jumlah grid domain menjadi ( $36 \times 50$ ), Becker *et al.* (1994) memperoleh hasil simulasi transien yang sesuai dengan hasil eksperimen (Joshi, 2002).

Mudded dan Simonin (1999) memodelkan aliran multifase data eksperimen yang diperoleh Becker *et al.* (1994) menggunakan model turbulen  $k-\varepsilon$  3D. Sifat osilasi sebagai akibat peregangan pada pusaran–pusaran turbulen diprediksi memiliki periode sekitar 4,44 s, terpaut 36,66 s lebih rendah dibanding data eksperimen. Kecepatan rata–rata aliran fluida yang diperoleh dari simulasi sebesar 334 mm/s, sangat kontras dengan hasil eksperimen yang hanya –38 mm/s. Mengacu pada simulasi yang telah dilakukan Becker *et al.* (1994), variasi grid pun dilakukan akan tetapi tidak memberikan hasil yang (walaupun sekedar) mendekati eksperimen. Struktur aliran gelembung yang teramati dari hasil simulasi 2D berbeda dengan 3D walaupun parameter dan data eksperimen pembandingnya sama. Hasil simulasi 3D menunjukkan struktur aliran gelembung yang lebih kecil dibanding simulasi 2D. Mudded dan Simonin (1999) melaporkan bahwa ini merupakan efek viskositas turbulen yang terlalu kecil.

Dengan hasil simulasi yang kurang memuaskan tersebut, berdasarkan pertimbangan tertentu, bilangan Reynolds pada model turbulen  $k-\varepsilon$  diturunkan nilainya menjadi lebih kecil. Ketika dibandingkan dengan model  $k-\varepsilon$  standar, tidak ditemukan perbedaan yang signifikan akibat perubahan bilangan tersebut. Simulasi lainnya yang telah dilakukan oleh Sokolichin *et al.* (1997) dan Delnoij *et al.* (1997b) menyimpulkan bahwa simulasi numerik aliran multifase pada kasus eksperimen Becker *et al.* (1994), aliran gelembung udara pada air, bergantung pada ukuran grid, selang waktu simulasi (*time step*), metode diskritisasi, viskositas fluida, model turbulen, dan persamaan gerak (random) gelembung.

Simulasi untuk sistem yang lebih sederhana dilakukan oleh Lapin dan Lubbert (1994) dengan mengacu pada data eksperimen Chen *et al.* (1989). Mereka menggunakan kolom gelembung yang berdimensi 1 m  $\times$  1,5 m dengan ukuran grid 60  $\times$  200. Aliran fase cairan diasumsikan laminar dan simetris. Gas *hold up* diset 3% dan kecepatan slip diasumsikan konstan sebesar 5 cm/s. Dengan mengabaikan efek dispersi gas, yang berakibat pada tidak disertakannya persamaan kekekalan momentum fase gas dalam simulasi, menyebabkan efek difusi numerik mendominasi hasil simulasi Lapin dan Lubbert (1994).

Deen *et al.* (2001) melakukan eksperimen aliran gelembung gas pada cairan, sekaligus melakukan simulasi dengan model aliran turbulen  $k-\varepsilon$  dan LES, menyimpulkan bahwa data-data yang menerangkan keadaan *quasi*-stasioner dan transien aliran turbulen dapat diakses. Selain itu Deen *et al.* (2001) juga menyimpulkan bahwa efek *virtual mass force* tidak terlihat sama sekali. Hal ini bertolak belakang dengan kesimpulan Delnoij *et al.* (1999) yang merekomendasikan bahwa *virtual mass force* haruslah disertakan dalam simulasi karena, berdasarkan hasil yang ia peroleh, memberikan efek yang signifikan terhadap aliran sistem. Investigasi numerik yang dilakukan Pflieger dan Becker (2001) menemukan bahwa aliran turbulen yang diinduksi oleh gelembung (*bubble-induced turbulence, BIT*) mempengaruhi hasil simulasi. Berbeda dengan hasil yang mereka peroleh, Delnoij *et al.* (1999) dan Deen *et al.* (2001) justru bersepakat bahwa efek *BIT* memberikan efek minor terhadap hasil simulasi, tentu berdasarkan hasil simulasi yang telah diperoleh.

Penelitian Deen *et al.* (2001) dilanjutkan oleh Zhang (2005, 2006) untuk mengevaluasi model *shear-induced turbulence* dan persamaan *interfacial closure*. Model  $k-\varepsilon$  memberikan prediksi yang cukup baik terhadap dinamika aliran multifase gelembung gas-cairan pada kolom gelembung. Namun demikian, *interfacial closure law*, yaitu model Tomiyama (2004), yang digunakan oleh Zhang (2005) memberikan hasil yang tidak konsisten untuk dua kolom gelembung yang berdimensi berbeda (aspek rasio  $H/D = 3$  dan  $H/D = 6$ ). Model Tomiyama (2004) valid untuk kolom gelembung yang lebih tinggi sedangkan untuk kolom gelembung yang pendek model tersebut menghasilkan prediksi yang tidak sesuai dengan hasil eksperimen.

#### 1.4 Validasi Pemodelan Aliran Multifase

Model *drag coefficient* Izhii dan Zuber (1979) berhasil memprediksi data-data eksperimen dengan akurasi yang cukup tinggi dibanding model *drag* Tomiyama (2004) untuk kolom gelembung yang pendek. Pada kolom gelembung yang lebih tinggi, model Izhii dan Zuber (1979) gagal mengkonfirmasi hasil eksperimen, justru model Tomiyama (2004) yang memberikan hasil lebih baik. Fenomena ketidak-konsistenan model-moodel tersebut juga muncul pada model gaya-gaya yang bekerja pada sistem seperti *lift force* dan *virtual mass force*., lihat Zhang (2007). Dari sekian banyak penelitian baik eksperimen maupun simulasi numerik yang didominasi ketidak-konsistenan antara hasil yang satu dengan yang lain memperlihatkan dengan jelas adanya kemungkinan ketidakberesan pada data-data eksperimen dan model simulasi. Karena (memang) simulasi ditujukan untuk memodelkan sifat natural fluida maka parameter-parameter yang digunakan sebagai *input* simulasi-pun harus dikonsultasikan dengan fenomena alam yang muncul. Jika data yang digunakan sebagai tolok ukur keabsahan model dinamika fluida bermasalah maka permasalahan tersebut tidak akan kunjung selesai.

Untuk mengetahui validitas model dan hasil simulasi dibutuhkan data-data eksperimen yang valid dan komprehensif yang meliputi antara lain kecepatan aliran fase-fase dalam sistem dan perubahannya terhadap waktu (*instantaneous velocity*), fraksi volume lokal, dan struktur koheren yang mendominasi dinamika

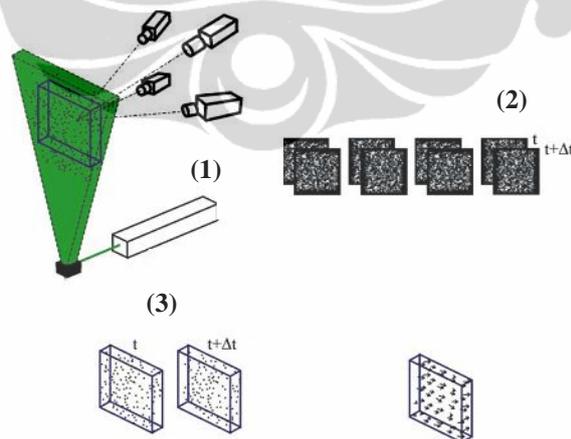
aliran sistem multifase (Delnoij, 2001). Beberapa penelitian yang berkonsentrasi pada studi eksperimental aliran multifase telah cukup banyak dihasilkan, misalnya penelitian struktur koheren pada (*pseudo*) aliran multifase 2D dan 3D (Chen *et al.*, 1989; Chen *et al.*, 1994; dan Becker *et al.*, 1995). Hasil penelitian tersebut memang memberikan penjelasan kualitatif yang cukup signifikan terhadap pemahaman dinamika aliran multifase. Namun demikian data–data yang dihasilkan dari penelitian tersebut belum dapat digunakan untuk mengkonfirmasi model aliran multifase secara detail (Delnoij, 2001).

Penelitian lain yang lebih ekstensif juga dilakukan antara lain oleh Devanathan *et al.* (1990) dan Cassanello *et al.* (1995), menggunakan metode *Radioactive Particle Tracking* (RPT), Becker *et al.* (1995) dan Groen *et al.* (1996), menggunakan metode *Laser Doppler Velocimetry* (LDV). Metode lainnya yang juga digunakan untuk memperoleh data kuantitatif aliran multifase antara lain *Laser Doppler Anemometry* (LDA) (Joshi *et al.*, 2004), *Phase Doppler Anemometry* (PDA) (Miller *et al.*, 2006), dan *Electrical Impedance Tomography* (EIT) (Beck dan Williams, 1996). Zat radioaktif juga memiliki potensi untuk melakukan penjejakan aliran sistem multifase, seperti yang telah buktikan oleh Bemrose *et al.* (1988) yang menggunakan *Positron Emission Tomography* (PET). Gladden (1994) dan Holland *et al.* (2009) menggunakan *Magnetic Resonance Imaging* (MRI) untuk mengamati dinamika aliran multifase.

Teknik dan metodologi eksperimental baru terus diteliti dan dikembangkan untuk menghasilkan instrumen yang mampu menyediakan data–data dinamika aliran multifase. Teknik pencitraan yang cukup terkenal dan banyak digunakan para peneliti bidang fluida antara lain *Particle Tracing Velocimetry* (PTV) dan *Particle Image Velocimetry* (PIV). Secara umum, PIV dan PTV adalah dua metode eksperimen berbeda yang menggunakan cara yang sama untuk mengetahui dinamika aliran multifase yaitu dengan menginjeksikan partikel penjejak (*tracer particle*) pada sistem yang sedang diamati. Prinsip dasar PIV dan PTV dapat dilihat pada **Gambar 1.3**. Walaupun teknik pencitraan yang digunakan tergolong maju (pada saat itu) akan tetapi teknik–teknik tersebut belum dapat menyediakan data–data kecepatan aliran fase–fase dalam sistem dan

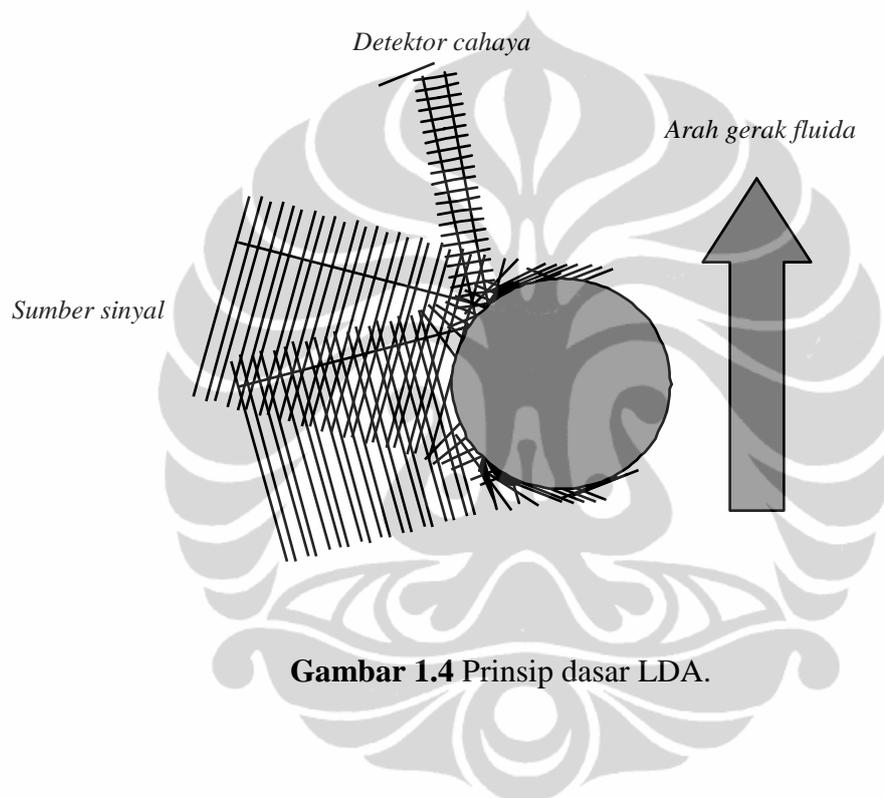
perubahannya terhadap waktu (*instantaneous velocity*), fraksi volume lokal, dan struktur koheren yang menentukan dinamika aliran multifase sistem.

Kamera diletakkan pada posisi tertentu berdasarkan pertimbangan seperti bentuk sistem (kotak atau tabung), segmen sistem yang akan diukur, dan lain sebagainya. Proses merekam dilakukan selama jangka waktu tertentu. Hasil rekaman yang terdiri dari deretan gambar kemudian dirangkai menjadi gambar 3D. Metode PIV dan PTV pada prinsipnya adalah sama dan memiliki kelemahan fundamental yang sama pula. Selain menggunakan partikel penjejak yang berpeluang menginterferensi besaran–besaran sistem yang hendak diukur, metode PIV dan PTV menggunakan kamera *Charge Coupled Device* (CCD) untuk merekam aliran fluida. Kelemahan–kelemahan metode tersebut antara lain gambar yang *overlap*, pendeteksian partikel yang tidak akurat (tidak bisa membedakan partikel penjejak dan fluida yang sedang diukur dengan akurat), *misalignment* dan distorsi gambar hasil rekonstruksi, tidak dapat digunakan pada sistem yang terhalang oleh logam atau benda tidak tembus cahaya lainnya, membutuhkan jumlah kamera yang banyak untuk mengamati sistem dari berbagai sisi (dan oleh karenanya membutuhkan biaya yang tidak sedikit), tidak dapat menangani sistem–sistem asimetrik, dan resolusi spasial yang jelek (Elsinga *et al.*, 2006).



**Gambar 1.3** Prinsip dasar PIV dan PTV.

Metode LDA memiliki kelebihan yang dapat menutupi kelemahan pada metode PIV dan PTV. Keunggulan metode LDA antara lain akurasi yang tinggi karena mampu mengukur segmen volume fase yang sangat kecil dan hasil pengukuran adalah absolut sehingga tidak perlu melakukan kalibrasi alat berulang kali seperti halnya PIV dan PTV. Prinsip kerja LDA adalah mentransmisi sinar laser terhadap obyek yang diukur kemudian menangkap kembali transmisi laser setelah melalui obyek menggunakan detektor cahaya, lihat **Gambar 1.4**.



**Gambar 1.4** Prinsip dasar LDA.

Pada saat partikel bergerak dan melewati daerah irisan yang dibentuk oleh dua sinar laser koheren, cahaya yang dihamburkan oleh partikel tersebut terdeteksi oleh detektor. Komponen-komponen cahaya tersebut saling berinterferensi pada permukaan detektor. Perbedaan lintasan cahaya yang disebabkan hamburan cahaya oleh partikel menghasilkan sinyal-sinyal cahaya yang kemudian menjadi “bahan baku” untuk melakukan rekonstruksi gambar. Untuk memperoleh gambar obyek secara keseluruhan dibutuhkan *transmitter* dan *receiver* dalam jumlah yang banyak dan hal ini kurang praktis. Selain itu LDA tidak dapat membedakan arah gerak aliran fluida karena yang diukur adalah perubahan intensitas dari gelombang elektromagnetik yang dipancarkan sedangkan untuk, misalnya,

segmen volume fase yang memiliki kecepatan dan densitas yang sama akan memantulkan intensitas yang sama walaupun arah geraknya berbeda. Di dalam sistem aliran fluida, apalagi aliran multifase, sangat jarang ditemui sistem yang seluruh bagiannya mengalir dalam arah yang sama. Hal itu yang menjadi kelemahan mendasar LDA.

### 1.5 Pencitraan Aliran Multifase dengan Teknik Tomografi

Fenomena aliran fluida memang sangat menarik dan menantang untuk dipelajari. Studi eksperimental dan simulasi yang tidak jarang menuai hasil yang inkonsisten dapat dipahami karena (memang) aliran fluida memiliki sifat natural yang inheren sehingga sulit untuk diprediksi. Untuk melakukan eksperimen dengan data hasil yang sama pun bukanlah pekerjaan yang gampang. Derajat kebebasan peregangan tak berhingga yang dimiliki fluida menyebabkan fluida sangat sensitif dengan perubahan-perubahan walaupun dalam orde kecil. Saat dikenai gaya eksternal sama besar, air 1 liter yang diletakkan dalam sebuah gelas akan memiliki respon yang berbeda dibanding ketika air tersebut diletakkan dalam baskom. Fluida juga sangat mudah mengalami deformasi geometri akibat gaya eksternal. Berdasarkan studi dan penelitian yang telah dilakukan banyak ilmuwan, telah disepakati bahwa belum ada satu model aliran fluida multifase yang berlaku secara universal.

Simulasi, instrumentasi (alat ukur), dan eksperimen saling bergantung satu sama lain. Simulasi digunakan untuk memprediksi fenomena aliran multifase fluida yang muncul baik dalam kehidupan sehari-hari atau dalam proses industri. Untuk menghasilkan sebuah metode universal dibutuhkan data-data eksperimen yang dapat mengkonfirmasi hasil-hasil simulasi. Data-data eksperimen ini sangat bergantung pada instrumentasi ukur yang digunakan. Jika instrumen yang digunakan memiliki kemampuan ukur yang terbatas maka data yang dihasilkan pun juga terbatas. Karena hasil-hasil simulasi harus sesuai (d disesuaikan) dengan fenomena alamiah maka mau tidak mau metode-metode simulasi tersebut di-*adjust* dan diadaptasi sesuai dengan data-data eksperimen yang tersedia. Pada akhirnya, data-data yang terbatas akan menghasilkan kesimpulan dan model yang

terbatas pula. Dalam hal ini, instrumen ukur memegang peranan yang sangat krusial dalam penelitian dinamika aliran multifase.

Fenomena aliran multifase yang kompleks dan inheren membutuhkan pengukuran yang bersifat multidimensi yang mampu memonitor dinamika aliran dan mengakses besaran-besaran fisis yang dimiliki sistem. Sensor-sensor tradisional yang telah disinggung pada pembahasan sebelumnya tidak mampu mengakomodasi kebutuhan tersebut. *Electrical Capacitance Tomography* (ECT), termasuk dalam kelas sensor EIT, tampaknya memiliki potensi yang menjanjikan untuk dikembangkan menjadi sensor yang dapat menjawab tantangan tersebut sejak pertama kali dikembangkan pada tahun 1980an oleh kelompok penelitian *Morgantown Energy Technology Center* (METC). METC mengembangkan sensor ECT 2D untuk mengamati sistem *fluidized bed*. Pada awal 1990an, para peneliti di *University of Manchester Institute of Science and Technology* (UMIST) menggunakan ECT untuk meneliti aliran minyak pada pipa-pipa.

Sensor ECT berbasis pada konsep pengukuran dielektrik medium non-konduktor. Hasil-hasil penelitian telah menunjukkan bahwa sensor berbasis ECT ini memiliki kemampuan yang luar biasa untuk menangani berbagai sistem termasuk sistem aliran multifase. Selain bersifat *non-invasive*, sensor ECT mampu membedakan substansi-substansi yang berada dalam sistem berdasarkan permitivitas yang dimilikinya tanpa memberikan partikel penjejak, tidak seperti pada PIV dan PTV. Sensor ECT juga mampu digunakan untuk “mengintip” sistem-sistem yang tidak tembus pandang, misalnya gas di dalam tabung logam atau aliran cairan pada pipa. Namun sayangnya, sensor ECT tersebut belum mampu menghasilkan citra 3D dan *real time*. ECT menghasilkan citra 3D dengan cara menyusun citra 2D menjadi satu sekuen citra 3D. Kelemahan sensor ECT terletak pada resolusi spasial yang kurang baik dan obyek yang diukur masih terbatas pada sistem-sistem non-konduktif.

Pada dekade berikutnya, perkembangan sensor ECT cukup signifikan dengan semakin membaiknya teknik rekonstruksi citra yang digunakan, walaupun masih 2D. Teknik rekonstruksi tersebut memungkinkan dibuatnya sensor ECT yang mampu menghasilkan citra 3D secara langsung, tidak seperti sensor ECT 2D

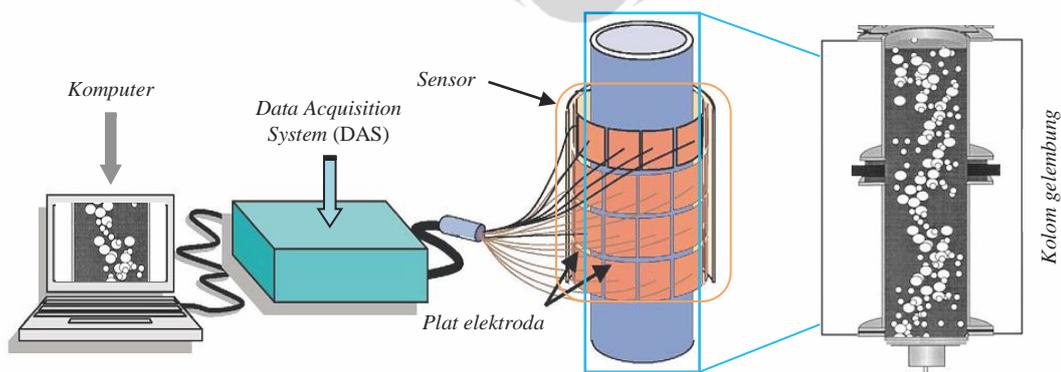
yang menginterpolasi citra 2D untuk membentuk citra 3D. ECT 3D, dikenal sebagai *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT), merupakan sensor yang dapat menghasilkan citra 3D secara langsung dan *real time* (4D). Ini adalah sebuah lompatan intelektual yang luar biasa. Peletak dasar-dasar fundamental teknik pencitraan ECVT 3D dan design sensor pastilah mereka yang memiliki otak yang sangat subur. Publikasi pertama yang menginisiasi penemuan tersebut adalah dihasilkan oleh Warsito dan Fan (2003).

Dengan ditemukannya teknologi tomografi, *Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT), yang dapat digunakan untuk pencitraan 4D, pemodelan dinamika fluida memiliki masa depan yang optimis (Warsito, Marshdeh, dan Fan, 2007). ECVT merupakan salah satu metode pencitraan *non-invasive* yang berbasis pada interaksi medan elektrostatik. Metode pencitraan ECVT telah banyak digunakan untuk mengamati dan mengontrol sistem-sistem yang melibatkan aliran multifase seperti gelembung-minyak, gelembung-air, pasir-air, dan *gas-solid fluidized bed*, transpor partikel terdispersi, dan lain sebagainya (Arko *et al.*, 1999; Scott dan Gutsche, 1999; Wang, Yin, dan Hooliday, 2002; Olmos, Primicia, dan Marron, 2006; Warsito, Marshdeh, dan Fan, 2007).

Walaupun masih tergolong baru, metode ECVT telah banyak digunakan untuk menganalisis berbagai sistem, terutama aliran multifase. Bing, Warsito, dan Fan (2004), berhasil mengamati aliran partikel solid cincin ganda (*double solid ring flow*) dan gumpalan partikel di daerah alas (*bed*) pada sistem *fluidized bed* menggunakan sensor ECVT. Dalam penelitian lainnya, Bing, Warsito, dan Fan (2005) menggunakan sensor ECVT untuk menganalisis *gas-solid fluidized bed*. Data-data eksperimen yang dihasilkan sensor ECVT konsisten dan bersesuaian dengan data yang diperoleh menggunakan sensor fiber optik. Dinamika aliran multifase pada kolom gelembung dan sistem *fluidized bed* memiliki tingkat kesulitan ekstrim baik dalam hal eksperimen maupun simulasi. Warsito dan Fan (2005), berhasil membuktikan ketangguhan ECVT hasil temuan mereka untuk menangani sistem multifase. Dinamika aliran dan seluruh data elemen volume domain sistem dapat diakses. Aliran gelembung pada kolom gelembung

didominasi oleh aliran gelembung berbentuk spiral dan pusaran–pusaran pada cairan (Warsito dan Fan, 2005).

Metode ECVT dapat digunakan untuk mengakses informasi distribusi spasial dari suatu campuran pada ruang tertutup, misalnya campuran gas dan air pada pipa atau tabung, dengan cara mengukur kapasitansi dari satu atau beberapa set elektroda yang dipasang pada dinding tabung (Olmos, Primicia, dan Marron, 2006; Warsito, Marashdeh, dan Fan, 2007). Elektroda–elektroda tersebut berfungsi sebagai sensor yang mendeteksi perubahan atau dinamika sistem dengan cara mengukur fluktuasi nilai permitivitas atau resistivitas sistem tersebut. Data hasil pengukuran kemudian dikonversi menjadi citra dengan terlebih dahulu melakukan pengubahan sinyal–sinyal analog menjadi digital, lihat **Gambar 1.5**. Kelebihan dari sensor ECVT, selain bersifat *non-invasive*, adalah juga kemampuannya memonitor proses–proses secara *real time* (sensor 4D). Hal ini tentu saja menjadi sebuah kabar gembira terhadap permasalahan *closure laws* yang hingga hari ini masih diperdebatkan keabsahannya. Dengan kehadiran alat ini, data–data eksperimen yang lebih detail dan representatif dapat diperoleh berikut citra *real time* dinamika aliran multifase pada sistem yang diamati. Data–data tersebut dapat digunakan untuk membenahi atau bahkan merombak secara total *closure laws* untuk mendapatkan persamaan–persamaan baru yang lebih universal dan solutif.



**Gambar 1.5** Sistem ECVT terdiri dari domain sistem yang diukur, sensor ECVT, *Data Acquisition System* (DAS), dan komputer untuk rekonstruksi citra.

## 1.6 Tujuan dan Skema Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dan menganalisis dinamika aliran turbulen gelembung gas–cairan pada kolom gelembung menggunakan metode simulasi dinamika fluida dan eksperimen ECVT 4D 32 Cahnnel. Dua sistem aliran multifase yang dipelajari antara lain aliran gelembung tunggal pada air dan aliran banyak gelembung (homogen) dalam air. Pemilihan komponen fluida sistem berdasarkan pertimbangan agar pemodelan dan eksperimen yang dilakukan mendekati fenomena alamiah yang terjadi dalam kehidupan sehari–hari. Studi gelembung tunggal menggunakan ECVT 12 Cahnnel dilakukan oleh Wang *et al.* (2010) dan telah menunjukkan hasil yang cukup akurat. Wang *et al.* (2010) menggunakan udara sebagai fase terdispersi dan cairan *paratherm* (densitas  $867,9 \text{ kg/m}^3$ ) sebagai fase kontinu.

Simulasi banyak gelembung yang mengalir pada medium kontinu air memang telah banyak dilakukan oleh para peneliti baik simulasi maupun eksperimen. Namun demikian, studi eksperimen aliran banyak gelembung pada medium air menggunakan ECVT masih tergolong sedikit. Salah satu hasil penelitian yang cukup terkenal adalah publikasi Warsito dan Fan (2005) yang menggunakan ECT 3D 12 Cahnnel untuk meneliti dinamika aliran bergelembung pada air. Ketika dikonfirmasi dengan data kamera berkecepatan tinggi (*High Speed Camera*) dan simulasi, hasil eksperimen yang diperoleh Warsito dan Fan (2005) sangat bersesuaian dan cukup akurat.

Eksperimen dilakukan dengan menggunakan sensor ECVT 32 Cahnnel berbentuk silinder. Citra yang dihasilkan sensor pada saat pengukuran tidak ditampilkan secara *online* karena kecepatan pembacaan frame oleh DAS belum bisa mengimbangi kecepatan sirkulasi gelembung di dalam air. Data kapasitansi hasil pengukuran direkonstruksi secara terpisah. Data hasil eksperimen ini akan digunakan untuk memverifikasi hasil simulasi sekaligus mengevaluasi citra hasil rekonstruksi sensor yang digunakan.

Model aliran turbulen  $k-\varepsilon$  (Becker *et al.*, 1994; Sokolicin dan Eigenberger, 1999; Pflieger dan Becker, 1999) digunakan untuk menganalisis dinamika aliran

gelembung gas pada cairan melalui simulasi. Pada simulasi gelembung tunggal, digunakan metode *phase field* untuk melakukan penjejakan gerak gelembung (*interface tracking*). Sejauh ini terdapat dua metode penjejakan yang biasa digunakan untuk sistem aliran multifase yaitu *level set* dan *phase field*. Metode *phase field* dipilih karena selain mengakomodasi aliran konvektif antar muka fluida juga memastikan bahwa total energi sistem selalu konstan. Metode *level set* hanya melakukan penjejakan dan mengkonveksikan antar muka fluida dengan medan aliran fluida.

Rancangan kolom gelembung, kondisi–kondisi batas, persamaan konstitutif berikut koefisien–koefisiennya dan besaran–besaran fisika lainnya, baik eksperimen maupun simulasi, dibuat berdasarkan penelitian yang telah dipublikasi di beberapa jurnal internasional. Data hasil simulasi akan dikonfrontasikan dengan data eksperimen untuk mengetahui keabsahan model aliran turbulen yang digunakan. Studi aliran fluida multifase dimulai dengan mempelajari dinamika gelembung tunggal di dalam air dilanjutkan dengan pemodelan aliran banyak gelembung (tipe aliran homogen) pada kolom gelembung sederhana.

Kronologi pembahasan topik–topik dalam penelitian ini dibagi ke dalam lima bab. Bab I Pendahuluan, berisi latar belakang dan tinjauan literatur antara lain perkembangan penelitian dalam bidang dinamika fluida, model–model simulasi aliran multifase, komponen gaya–gaya yang mengendalikan gerak gelembung gas dan cairan, teknologi ECVT, dan tujuan penelitian. Bab II Teori, menjelaskan model persamaan yang digunakan untuk analisis aliran fluida multifase, komponen–komponen gaya yang bekerja pada sistem gelembung gas–cairan berikut konstanta persamaannya, dan asumsi–asumsi yang digunakan untuk memodelkan sistem. Teori, desain, dan pembuatan sensor ECVT untuk aliran fluida multifase dijelaskan pada Bab III diikuti dengan pengambilan dan pengolahan data berikut analisisnya yang diketengahkan pada Bab IV. Pada bab tersebut juga dijelaskan parameter dan variabel sistem yang digunakan pada saat simulasi dan eksperimen serta alur simulasi dan pengambilan data. Kesimpulan, saran, dan arahan untuk penelitian tahap selanjutnya diberikan pada Bab V yang sekaligus menjadi bab penutup tesis ini.

## BAB II ALIRAN MULTIFASE DAN KOMPUTASI DINAMIKA FLUIDA

Dalam konteks mekanika fluida, aliran multifase dapat didefinisikan sebagai sembarang sistem aliran fluida yang terdiri dari dua fase zat berbeda atau lebih yang mengalir secara simultan dimana fase-fase tersebut memiliki tingkat separasi tertentu di atas level molekuler. Aliran multifase dapat muncul dalam berbagai bentuk yang berbeda. Bergantung pada kombinasi fase-fasenya, sistem aliran dua fase dapat diklasifikasikan menjadi beberapa macam antara lain aliran gas-padatan, gas-cairan dan cairan-padatan.

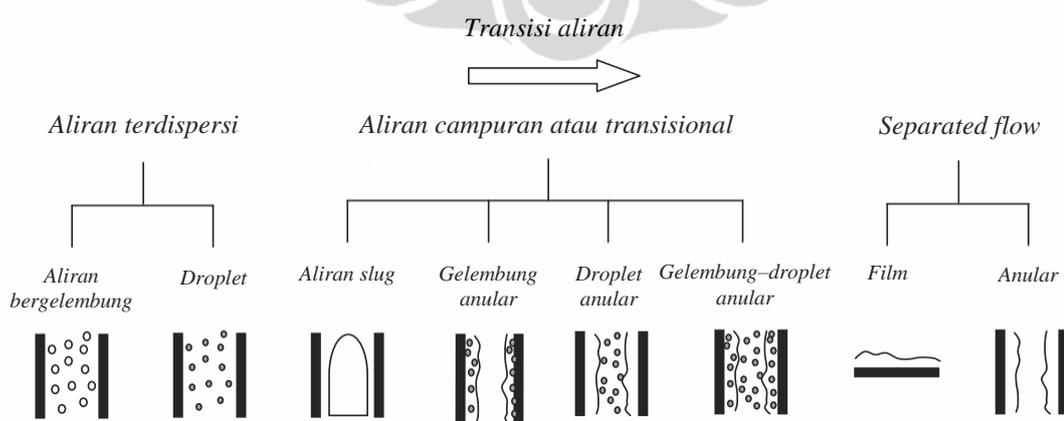
Aliran gas-padatan, yang terdiri dari sistem gas-padatan atau gas-*droplet*, adalah sistem aliran multifase dimana fase padat atau *droplet* (sebagai partikel terdispersi) mengalir pada fase kontinu gas. Dilihat dari densitas partikelnya, sistem aliran tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua macam yaitu *dilute* dan *dense*. Aliran *dilute* muncul jika densitas jumlah partikel dalam sistem relatif kecil sehingga aliran sistem didominasi oleh gas. Gaya-gaya permukaan dan gaya eksternal seperti gaya gravitasi dan lain sebagainya memegang peranan penting terhadap dinamika aliran sistem. Pada saat jumlah partikel padat meningkat, interaksi antar partikel padat terjadi lebih intens dan pada batas tertentu mendominasi dinamika aliran sistem. Keadaan semacam ini yang diidentifikasi sebagai sistem *dense*.

Pada peristiwa sedimentasi, terjadi proses pemindahan/transport partikel-partikel padat membentuk lapisan-lapisan tertentu. Proses sedimentasi juga termasuk dalam sistem aliran multifase dimana partikel-partikel padat, partikel terdispersi, bersirkulasi di dalam fase kontinu cair. Berbeda dengan sistem gas-padatan, dinamika sistem cairan-padatan tidak hanya dipengaruhi oleh gaya-gaya permukaan akan tetapi juga gradien tekanan dan *drag* cairan-padatan.

Sistem aliran gas-padatan dan cairan-padatan pada prinsipnya adalah sama. Kecuali pada peristiwa aliran yang melibatkan reaksi kimia dan fisika, partikel terdispersi yang berupa zat padat, walaupun dikenai berbagai macam gaya yang diakibatkan oleh interaksi antara partikel terdispersi dengan fase kontinu, tidak

mengalami perubahan bentuk atau massa jenis. Dinamika aliran fluida yang cukup rumit hanya muncul pada fase kontinunya.

Sistem aliran cairan–gas sering dijumpai dalam kehidupan sehari–hari, seperti halnya dua sistem aliran yang telah dijelaskan sebelumnya. Aliran gelembung gas pada fase kontinu cairan adalah salah satu contohnya. Contoh yang lain adalah gerak *droplet* cairan pada fase kontinu gas. Dari dua contoh tersebut, gas maupun cairan dapat berperan sebagai fase terdispersi atau kontinu. Dinamika sistem cairan–gas termasuk dalam jenis sistem aliran yang cukup rumit mengingat fase terdispersi, baik itu gas atau cairan, dapat mengalami deformasi geometri dengan derajat kebebasan yang tinggi. Sebagai contoh pada sistem aliran gelembung gas–cairan, gelembung gas dapat memiliki bentuk yang bermacam–macam. Evolusi geometri tersebut, bersama–sama dengan perubahan besaran fisis lainnya seperti kecepatan, ukuran gelembung, dan proses penggabungan dan fragmentasi gelembung, dalam keadaan tertentu dapat menginduksi munculnya aliran campuran/transisional dan aliran terpisah (*separated flow*). **Gambar 2.1** menunjukkan beberapa tipe aliran multifase cairan–gas (Ishii dan Hibiki, 2006). Terdapat satu jenis aliran lagi yang tidak termasuk dalam tiga kategori di atas, seperti yang tertera pada **Gambar 2.1**, yaitu aliran cairan–gas dimana fase cair dan gas berperan sebagai fase kontinu. Tipe aliran ini dikenal sebagai *free surface flow*. Proses pembekuan dan solidifikasi adalah contoh dari *free surface flow*.



**Gambar 2.1** Klasifikasi sistem aliran gas–cairan.

Peristiwa yang melibatkan sistem aliran multifase, baik yang bersifat natural maupun buatan, muncul dalam banyak aspek kehidupan mulai dari fenomena alam di sekitar kita hingga industri modern. Badai pasir, letusan gunung berapi, dan badai *avalanche* adalah contoh peristiwa alamiah yang termasuk dalam kategori sistem aliran gas–padatan. Sistem gas–padatan juga muncul dalam bidang industri antara lain alat pengumpul debu, *fluidized bed*, *solid propellant rocket*, dan lain sebagainya. Aliran darah dalam tubuh kita termasuk dalam kategori sistem multifase cairan–padatan seperti halnya peristiwa sedimentasi, erosi tanah, dan proses pengolahan batubara pada pembangkit tenaga listrik. Sistem aliran gas–cairan muncul pada proses pembakaran bahan bakar pada kendaraan bermotor, sistem desalinasi, dan reaktor nuklir.

Sistem aliran multifase secara natural memiliki sifat yang rumit dan kompleks. Hal ini disebabkan oleh evolusi permukaan dan geometri fase, perubahan besaran–besaran fisis zat konstituen, turbulensi, dan struktur aliran yang kompleks di sekitar permukaan fase. Sifat natural aliran multifase, berikut perubahan–perubahan acak yang terjadi di dalamnya, sangat sulit diakses secara eksperimen. Komputasi dinamika fluida adalah salah satu cabang dari dinamika fluida yang menyediakan alternatif analisis aliran fluida dengan menggunakan metode numerik dan simulasi berdasarkan persamaan Navier–Stokes. Metode simulasi berusaha menyederhanakan persamaan tersebut menjadi sistem persamaan aljabar sehingga mudah diselesaikan dengan komputer.

## 2.1 Persamaan Navier – Stokes

Berdasarkan konsep dinamika Newton, pada fluida berlaku keadaan kesetimbangan gaya yang memenuhi hukum II Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

Yang mana:

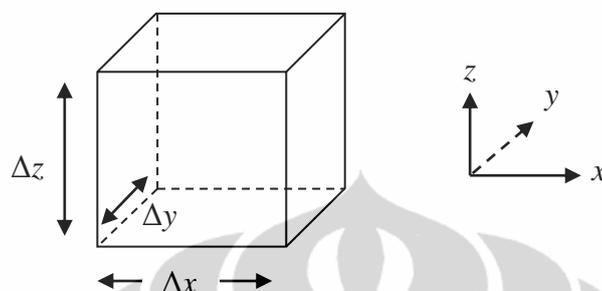
$\sum \vec{F}$  = jumlah gaya total yang bekerja pada suatu sistem (N),

$m$  = massa total sistem (kg),

$\vec{a}$  = percepatan gerak sistem ( $m/s^2$ )

### Definisi Sistem Fluida

Suatu segmen kecil fluida yang berukuran  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  masing–masing diproyeksikan ke sumbu koordinat *Cartesian*, seperti terlihat pada **Gambar 2.2**.



**Gambar 2.2** Definisi sistem fluida dengan ukuran  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  pada sumbu koordinat  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ .

Gaya–gaya yang bekerja pada fluida dapat diklasifikasikan menjadi tiga antara lain *gaya gravitasi* ( $\vec{F}_{gravitasi}$ ), *gaya gradien tekanan* ( $\vec{F}_{gradpress}$ ), dan *gaya viskositas* ( $\vec{F}_{viskositas}$ ). Gaya gravitasi disebabkan oleh percepatan gravitasi bumi yang bekerja pada titik pusat massa fluida. Gaya ini dialami oleh setiap benda bermassa dan arahnya selalu menuju ke pusat bumi. Gaya oleh gradien tekanan adalah gaya yang bekerja pada permukaan fluida yang disebabkan adanya interaksi dengan segmen fluida atau suatu permukaan benda lainnya. Viskositas menunjukkan tingkat kekentalan fluida. Gaya viskositas muncul ketika terjadi gesekan antar permukaan segmen fluida. Gaya viskositas ini juga bekerja pada permukaan fluida, seperti halnya gaya yang dihasilkan oleh gradien tekanan.

Dengan mengasumsikan bahwa seluruh gaya tersebut dapat muncul pada fluida yang sedang dianalisis maka Persamaan (2.2) dapat dinyatakan kembali menjadi:

$$\vec{F}_{gravitasi} + \sum \vec{F}_{gradpress} + \sum \vec{F}_{viskositas} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

Pada Persamaan (2.2), gaya gravitasi disebabkan oleh sumber tunggal yaitu percepatan gravitasi bumi sehingga dalam penulisannya tidak menggunakan tanda *sigma* ( $\Sigma$ ). Gaya akibat gradien tekanan dan viskositas dapat disebabkan oleh beberapa sumber, seperti yang telah dikemukakan sebelumnya, sehingga dalam penulisannya digunakan tanda *sigma* ( $\Sigma$ ) sebagai antisipasi munculnya berbagai variasi sumber gaya.

Karena fluida merupakan zat yang bersifat tidak rigid, bentuknya dapat berubah-ubah oleh pengaruh gaya eksternal, maka akan mudah jika Persamaan (2.2) dinyatakan dalam variabel yang bersifat konstan yang dimiliki oleh fluida yaitu massa jenis,  $\rho$ . Dengan membagi Persamaan (2.2) dengan volume total sistem fluida diperoleh:

$$\frac{\bar{F}_{gravitasi}}{V} + \sum \frac{\bar{F}_{grad\ press}}{V} + \sum \frac{\bar{F}_{viskositas}}{V} = \left(\frac{m}{V}\right)\bar{a} \rightarrow \frac{m}{V} = \rho$$

$$\frac{\bar{F}_{gravitasi}}{V} + \sum \frac{\bar{F}_{grad\ press}}{V} + \sum \frac{\bar{F}_{viskositas}}{V} = \rho\bar{a} \quad (2.3)$$

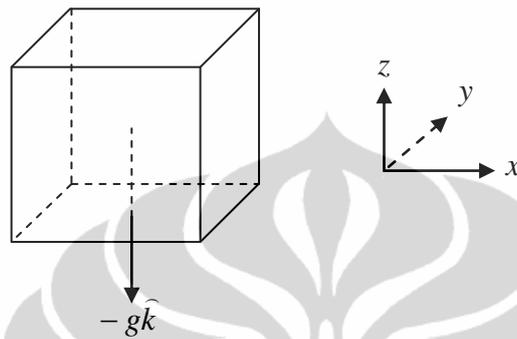
Persamaan (2.3) merupakan persamaan umum untuk sembarang sistem fluida yang telah didefinisikan sebelumnya. Dalam hal ini telah diasumsikan bahwa massa jenis fluida  $\rho$  adalah konstan atau fluida bersifat *incompressible*. Persamaan (2.3) berlaku untuk sistem fluida yang diam maupun bergerak. Selanjutnya, akan dianalisis satu per satu setiap suku pada Persamaan (2.3). Setiap suku pada Persamaan (2.3) adalah independen satu sama lain sehingga suku-suku pada persamaan tersebut dapat ditentukan secara terpisah.

a. Gaya gravitasi ( $\bar{F}_{gravitasi}$ )

Gaya gravitasi bekerja pada setiap benda dan besarnya sama, tidak bergantung pada apakah benda tersebut diam atau bergerak. Pada saat fluida berada dalam keadaan diam maka  $\sum \frac{\bar{F}_{viskositas}}{V}$  dan  $\rho\bar{a}$  sama dengan nol, sehingga Persamaan (2.3) menjadi:

$$\frac{\vec{F}_{gravitasi}}{V} + \sum \frac{\vec{F}_{gradpress}}{V} = 0 \quad (2.4)$$

Mengacu pada ilustrasi di bawah ini, gaya gravitasi dapat diidentifikasi sebagai gaya yang disebabkan oleh percepatan gravitasi bumi  $\vec{g} = g\hat{k}$  pada arah  $z$  (-).



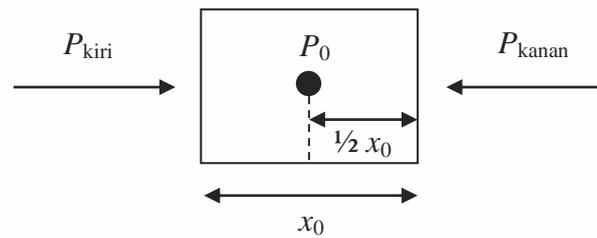
**Gambar 2.3** Gaya gravitasi bekerja pada segmen fluida.

Percepatan gravitasi bekerja pada arah  $z$  (-) sehingga gaya gravitasi bekerja pada arah  $z$  (-) adalah:

$$\frac{\vec{F}_{gravitasi}}{V} = -\rho g\hat{k} \quad (2.5)$$

b. *Gaya gradien tekanan ( $\vec{F}_{gradpress}$ )*

Pada sistem fluida yang tertera pada **Gambar 2.4**, gaya yang dihasilkan oleh tekanan dapat bekerja pada semua permukaan yaitu antara lain permukaan  $\Delta x\Delta y$  (atas dan bawah),  $\Delta x\Delta z$  (depan dan belakang),  $\Delta y\Delta z$  (kiri dan kanan). Sebagai simplifikasi analisis maka diambil segmen bidang  $\Delta y\Delta z$ . Dengan mendefinisikan tekanan pada pusat sistem adalah  $P_0$  maka tekanan  $P$  yang bekerja pada bidang  $\Delta y\Delta z$  adalah pada arah  $x$ . Dengan mengacu pada ilustrasi berikut ini maka tekanan pada bagian kiri  $P_{kiri}$  lebih kecil dibanding dengan tekanan pada bagian kanan  $P_{kanan}$ .



**Gambar 2.4** Sebuah segmen fluida diambil pada bidang  $\Delta y \Delta z$ . Tekanan bekerja di sisi kiri dan kanan.

Dengan menggunakan ekspansi Taylor, tekanan di sebelah kiri  $P_{kiri}$  dan kanan  $P_{kanan}$  dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$P_{kiri} = P_0 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.6a)$$

$$P_{kanan} = P_0 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.6b)$$

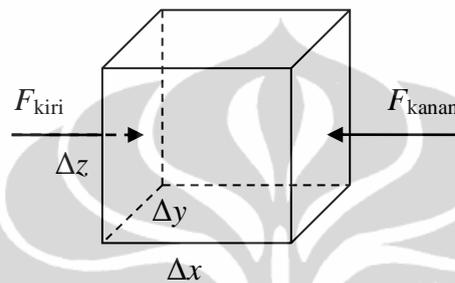
Untuk menentukan gaya yang dihasilkan oleh tekanan tersebut maka digunakan persamaan:

$$P = \frac{\vec{F}_\perp}{A} \rightarrow \vec{F}_\perp = PA \quad (2.7)$$

Gaya efektif dihasilkan oleh tekanan yang bekerja secara tegak lurus terhadap bidang kontak atau sejajar dengan normal bidang  $A$ . Karena luas bidang  $A = \Delta y \Delta z$ , gaya yang bekerja pada daerah kiri dan kanan adalah:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\perp \Big|_{kiri} &= P_{kiri} \Delta y \Delta z \\ &= \left( P_0 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \\ &= P_0 \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} (\Delta x \Delta y \Delta z) \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \rightarrow \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V \\ &= P_0 \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \Delta V \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\perp}|_{kanan} &= P_{kanan} \Delta y \Delta z \\
&= \left( P_0 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \\
&= P_0 \Delta y \Delta z + \frac{1}{2} (\Delta x \Delta y \Delta z) \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \rightarrow \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V \\
&= P_0 \Delta y \Delta z + \frac{1}{2} \Delta V \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{2.8b}$$



**Gambar 2.5** Gaya total yang bekerja pada segmen fluida di bidang  $\Delta y \Delta z$ .

Gaya total yang bekerja pada segmen bidang  $\Delta y \Delta z$  dengan demikian adalah:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_x &= \vec{F}_{\perp}|_{kiri} - \vec{F}_{\perp}|_{kanan} \\
&= \left[ P_0 \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \Delta V \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] - \left[ P_0 \Delta y \Delta z + \frac{1}{2} \Delta V \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta V
\end{aligned} \tag{2.9a}$$

Dengan cara yang sama, maka komponen gaya pada arah  $y$  dan  $z$  adalah sebagai berikut:

$$\sum \vec{F}_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \Delta V \tag{2.9b}$$

$$\sum \vec{F}_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \Delta V \tag{2.9c}$$

Gaya total yang dihasilkan oleh gradien tekanan merupakan penjumlahan dari ketiga komponen gaya pada Persamaan (10a–c). Dalam notasi vektor, gaya total oleh gradien tekanan adalah:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{gradpress} &= \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y + \sum \vec{F}_z \\
&= \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta V \right) \hat{i} + \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \Delta V \right) \hat{j} + \left( -\frac{\partial P}{\partial z} \Delta V \right) \hat{k} \\
&= -\Delta V \left( \frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dalam notasi yang lebih praktis, menggunakan operator del, maka Persamaan (2.10) dapat dituliskan sebagai  $\sum \vec{F}_{gradpress} = -\Delta V \nabla P$ .

Agar konsisten dengan definisi pada Persamaan (2.3) maka gaya gradien tekanan dibagi dengan volume sehingga:

$$\frac{\sum \vec{F}_{gradpress}}{V} = -\nabla P \rightarrow \Delta V \equiv V \tag{2.11}$$

c. *Gaya Viskositas* ( $\vec{F}_{viskositas}$ )

Pada kondisi dimana fluida bergerak, maka komponen gaya viskositas akan muncul pada Persamaan (2.3). Setiap segmen fluida pada fluida yang bergerak dapat memiliki kecepatan yang berbeda-beda. Demikian juga dengan densitasnya. Pada penurunan persamaan gaya viskositas diambil beberapa asumsi antara lain densitas fluida adalah konstan diukur relatif terhadap tekanan yang bekerja padanya (*steady state*), secara komposisi fisika, fluida bersifat homogen, dan berlaku hukum kekekalan massa.

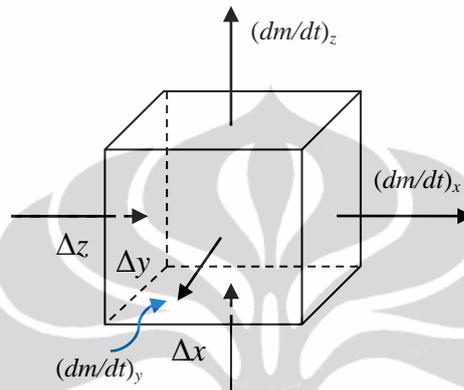
*Kekakalan Massa*

Kembali ke sistem fluida pada **Gambar 2.2**, jumlah debit massa yang masuk dan keluar pada masing-masing permukaan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dm}{dt} = \left( \frac{dm}{dt} \right)_x + \left( \frac{dm}{dt} \right)_y + \left( \frac{dm}{dt} \right)_z \tag{2.12}$$

Debit massa pada arah sumbu  $x$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dm}{dt}\right)_x &= \rho \left(\frac{dV}{dt}\right)_x \rightarrow V = \Delta y \Delta z dx \\
 &= \rho \left(\frac{\Delta y \Delta z dx}{dt}\right)_x \\
 &= \rho \Delta y \Delta z \left(\frac{dx}{dt}\right)_x \rightarrow \frac{dx}{dt} \equiv v_x \\
 &= \rho \Delta y \Delta z v_x
 \end{aligned}$$



**Gambar 2.6** Debit massa fluida yang melalui berbagai bidang.

$\Delta y \Delta z$  tidak lain adalah luas permukaan bidang  $yz$  yang memiliki normal pada arah  $x$ . Dengan menuliskan  $\Delta y \Delta z$  sebagai  $A_x$  maka persamaan debit massa dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_x = \rho A_x v_x \tag{2.13}$$

Pada kasus di atas, variabel  $\rho$  (aliran *incompressible*) dan  $A_x$  bernilai konstan. Debit massa bergantung pada  $v_x$ . Dengan mendefinisikan kecepatan fluida sepanjang sumbu  $x$  pada pusat sistem sebagai  $v_0$  maka dengan menggunakan ekspansi Taylor, kecepatan aliran fluida di sisi kiri dan kanan dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 v_x|_{kiri} &= v_0 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
 v_x|_{kanan} &= v_0 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Debit massa yang masuk pada sisi sebelah kiri dan kanan dengan demikian dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dm}{dt} \right|_{kiri} &= \rho \Delta y \Delta z (v_x|_{kiri}) \\
 &= \rho \Delta y \Delta z \left( v_0 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\
 &= \rho \Delta y \Delta z v_0 - \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial x} \rightarrow \rho \Delta x \Delta y \Delta z \equiv \Delta m \\
 &= \rho \Delta y \Delta z v_0 - \frac{1}{2} \Delta m \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
 \left. \frac{dm}{dt} \right|_{kanan} &= \rho \Delta y \Delta z (v_x|_{kanan}) \\
 &= \rho \Delta y \Delta z \left( v_0 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\
 &= \rho \Delta y \Delta z v_0 + \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial x} \rightarrow \rho \Delta x \Delta y \Delta z \equiv \Delta m \\
 &= \rho \Delta y \Delta z v_0 + \frac{1}{2} \Delta m \frac{\partial v_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Massa total fluida yang terakumulasi pada segmen volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$  arah  $x$  adalah:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{dm}{dt} \right)_x &= \left. \frac{dm}{dt} \right|_{kiri} - \left. \frac{dm}{dt} \right|_{kanan} \\
 &= \left[ \rho \Delta y \Delta z v_0 - \frac{1}{2} \Delta m \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] - \left[ \rho \Delta y \Delta z v_0 + \frac{1}{2} \Delta m \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] \\
 &= -\Delta m \frac{\partial v_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, total massa yang terakumulasi pada arah  $y$  dan  $z$  adalah:

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_y = -\Delta m \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_z = -\Delta m \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Massa total fluida yang terakumulasi pada segmen volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$  adalah:

$$\begin{aligned}\left. \frac{dm}{dt} \right|_{total} &= \left( \frac{dm}{dt} \right)_x + \left( \frac{dm}{dt} \right)_y + \left( \frac{dm}{dt} \right)_z \\ &= -\Delta m \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, fraksi massa fluida yang telah dialirkan adalah:

$$-\frac{1}{\Delta m} \left. \frac{dm}{dt} \right|_{total} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Berdasarkan hukum kekekalan massa, tidak ada massa fluida yang hilang atau bertambah pada segmen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  sehingga nilai dari fraksi massa yang hilang adalah nol. Dengan kata lain:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) dapat dituliskan kembali dalam notasi *del* ( $\nabla$ ). Jika diperhatikan, Persamaan (2.14) tidak lain adalah gradien kecepatan. Seperti telah diketahui bahwa kecepatan merupakan besaran vektor. Dengan demikian operator *del* bekerja pada vektor kecepatan  $\vec{v}$  melalui relasi dot *product*.

$$\nabla \bullet \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$\nabla \bullet \vec{v} = 0$$

Untuk sistem fluida bergerak, terdapat beberapa metode (kerangka berpikir/sudut pandang) untuk melihat pergerakan fluida tersebut. Hal ini berkaitan dengan apakah fluida mengalami gerak *dengan* percepatan atau *tanpa* percepatan. Sebagai ilustrasi untuk simplifikasi kasus, perhatikan mobil yang bergerak pada lintasan melingkar. Seseorang yang melihat mobil tersebut mengatakan bahwa mobil bergerak dengan suatu percepatan tertentu yang mengarah ke pusat lingkaran. Sudut pandang ini didukung dengan fakta bahwa ketika mobil bergerak melingkar maka arah gerak mobil berubah, demikian juga dengan arah kecepatan mobil tersebut. Istilah kecepatan mengacu pada besaran vektor. Karena besaran vektor merupakan komposisi dari kuantitas suatu besaran

beserta arahnya maka jika salah satu dari dua hal tersebut berubah maka dikatakan besaran vektor tersebut berubah. Perubahan kecepatan pada mobil yang bergerak tadi tentu saja menghasilkan percepatan. Lain hanya dengan apa yang diamati oleh pengemudi mobil, pengemudi akan melihat angka yang tertera pada alat ukur kecepatan (*speedometer*) di mobilnya selalu menunjukkan angka yang sama dan dengan demikian pengemudi menyimpulkan bahwa mobilnya bergerak dengan kecepatan konstan/percepatan nol.

Dalam dinamika fluida, kasus yang serupa juga terjadi. Sudut pandang dapat dipilih apakah *kita sedang mengamati fluida yang sedang bergerak* ataukah *kita* (misalnya kita dapat berubah menjadi kecil dan “*mengemudikan fluida*”) *mengamati fluida dalam posisi sebagai “pengemudi”*. Sudut pandang pertama, disebut dengan sudut pandang *Eulerian* sedangkan sudut pandang kedua disebut dengan sudut pandang *Lagrangian*. Dalam tesis ini diadopsi sudut pandang *Eulerian*.

Dalam sudut pandang *Eulerian*, fluida bergerak dengan percepatan yang merupakan fungsi dari posisi dan waktu,  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ . Perubahan kecepatan fluida setelah bergerak dari satu koordinat ke koordinat lainnya dalam selang waktu  $\Delta t$  menghasilkan percepatan sebesar:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ \vec{a} &= \frac{D\vec{v}_x}{Dt}\hat{i} + \frac{D\vec{v}_y}{Dt}\hat{j} + \frac{D\vec{v}_z}{Dt}\hat{k} \\ \vec{a} &= \vec{a}_x\hat{i} + \vec{a}_y\hat{j} + \vec{a}_z\hat{k}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Notasi  $\frac{D}{Dt}$  disebut *turunan substansial*. Turunan substansial setiap suku pada

Persamaan (2.16) dapat diuraikan sebagai berikut:

*Komponen x*

$$\frac{D\vec{v}_x}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial z}\tag{2.17a}$$

Komponen y

$$\frac{D\vec{v}_y}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial z} \quad (2.17b)$$

Komponen z

$$\frac{D\vec{v}_z}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \quad (2.17c)$$

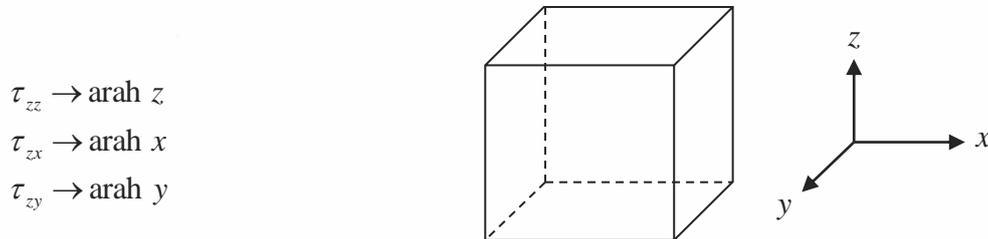
Jika persamaan (2.17a–c) disisipkan ke persamaan (2.16) diperoleh persamaan (lengkap) untuk percepatan fluida yaitu:

$$\vec{a} = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial z} \right) \hat{i} + \\ \left( \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial z} \right) \hat{j} + \\ \left( \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right) \hat{k} \end{array} \right] \quad (2.18)$$

Ketika fluida bergerak maka pada fluida tersebut dihasilkan gesekan internal yang secara umum memiliki arah kerja yang berlawanan dengan arah gerak fluida. Gesekan tersebut menghasilkan *stress permukaan*. Tidak seperti halnya tekanan yang secara langsung dapat diprediksi bagaimana arah kerja gaya yang dihasilkan, gaya akibat gesekan internal ini tidak selalu bekerja pada arah yang tegak lurus dengan normal bidang. Gaya gesekan internal, gaya viskositas, atau stress permukaan, secara umum dapat diklasifikasikan menjadi tiga macam yaitu stress yang tegak lurus terhadap bidang, stress yang sejajar dengan permukaan, dan stress yang searah dengan sumbu koordinat. Karena stress permukaan terdiri dari beberapa komponen yang membingungkan jika diidentifikasi dengan vektor maka digunakan notasi tensor dimana setiap stress permukaan dikarakterisasi berdasarkan *di permukaan mana stress tersebut bekerja dan kemana arah stress permukaan tersebut*.

Mengacu pada gambar di bawah ini, stress permukaan pada bidang, misalnya, xy dapat diklasifikasi sebagai stress pada permukaan pada arah z (tegak

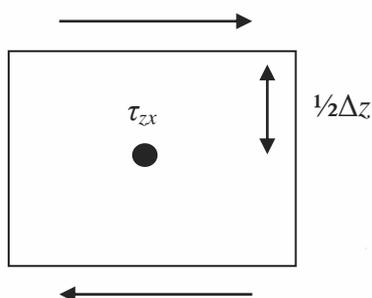
lurus bidang), yaitu stress pada arah  $x$  dan  $y$ . Dalam notasi tensor, stress tersebut dituliskan sebagai:



Tanda *subscript* pertama pada  $\tau_{zz}$  menunjukkan *pada bidang mana* stress permukaan bekerja sedangkan *subscript* kedua menyatakan *pada arah mana* stress tersebut bekerja. Pada sistem fluida seperti pada gambar di atas terlihat bahwa terdapat permukaan–permukaan yang saling berpasangan satu sama lain dimana permukaan tersebut memiliki luas yang sama namun vektor normal bidangnya yang berbeda. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa terdapat tiga *set* stress permukaan yang bekerja pada dua permukaan yang saling berhadapan dimana jumlah total stress permukaan pada permukaan–permukaan tersebut sebanyak 9 komponen. Komponen stress permukaan tersebut dapat dituliskan secara ringkas sebagai tensor sebagai berikut:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Rumusan gaya permukaan yang dihasilkan oleh stress permukaan memiliki bentuk yang identik. Berikut ini akan dianalisis stress permukaan yang bekerja pada salah satu permukaan yaitu permukaan  $xy$ .



Stress pada arah  $x$  terdiri dari komponen antara lain  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  &  $\tau_{zx}$ . Stress pada permukaan yang sejajar dengan sumbu  $z$ ,  $\tau_{zx}$ , didefinisikan memiliki nilai  $\tau_0$  pada pusat sistem fluida.

Stress pada permukaan bagian atas dan bagian bawah, dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\tau_{atas}|_{zx} = \tau_0 + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

$$\tau_{bawah}|_{zx} = \tau_0 - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

Gaya yang dihasilkan dari stress permukaan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{atas} &= (\tau_{atas}|_{zx}) \Delta x \Delta y \\ &= \left( \tau_0 + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \\ &= \tau_0 \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \Delta V \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \vec{F}_{bawah} &= (\tau_{bawah}|_{zx}) \Delta x \Delta y \\ &= \left( \tau_0 - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \\ &= \tau_0 \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} \Delta V \frac{\partial \tau}{\partial z}\end{aligned}$$

Gaya netto yang dihasilkan oleh stress permukaan pada bidang  $xy$  (arah  $x$ ) dengan demikian adalah:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{atas} - \vec{F}_{bawah} &= \left( \tau_0 \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \Delta V \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) - \left( \tau_0 \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} \Delta V \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \\ &= \Delta V \frac{\partial \tau}{\partial z}\end{aligned}$$

Gaya tersebut bekerja pada arah  $x$  dan hanya untuk satu komponen  $x$  saja,  $\tau_{zx}$ .

Dua komponen gaya lainnya memiliki bentuk persamaan yang identik sehingga:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x|_{viskositas} &= \Delta V \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \Delta V \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \Delta V \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ &= \Delta V \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan kembali gaya viskositas sebagai gaya per satuan volume diperoleh:

$$\frac{\sum \bar{F}_x|_{viskositas}}{V} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Dengan model penurunan dan logika yang sama maka dapat diturunkan persamaan gaya viskositas pada sumbu y dan z yaitu:

$$\frac{\sum \bar{F}_y|_{viskositas}}{V} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{\sum \bar{F}_z|_{viskositas}}{V} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Dalam notasi vektor, gaya viskositas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\sum \bar{F}_{viskositas}}{V} = & \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} \\ & + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Jika diperhatikan, operator turunan  $\partial$  yang bekerja pada setiap komponen tensor  $\tau$  dapat dituliskan dalam notasi *del*. Dengan mengadopsi bentuk penulisan tensor seperti pada Persamaan (2.19) maka persamaan (2.20) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\frac{\sum \bar{F}_{viskositas}}{V} = \begin{pmatrix} \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Dengan menggunakan aturan perkalian vektor dan matriks biasa maka persamaan (2.21) dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} & \equiv \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} = & \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat dituliskan kembali dalam notasi yang lebih pendek sebagai berikut:

$$\frac{\sum \vec{F}_{viskositas}}{V} = \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (2.22)$$

Dengan meramu Persamaan (2.5), (2.11), (2.18), dan (2.22) ke Persamaan (2.3) maka diperoleh persamaan gerak umum fluida:

$$-\rho g \hat{k} - \nabla P + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) adalah persamaan gerak umum yang berlaku untuk semua jenis material, bukan hanya fluida. Persamaan (2.23) disebut juga *persamaan gerak Cauchy*. Persamaan tersebut sulit untuk diselesaikan baik secara analitik maupun numerik karena setiap suku bergantung pada variabel yang berbeda-beda yang terdiri dari lebih dari satu variabel. Secara detailnya, Persamaan (2.23) menjadi:

*Komponen x:*

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

*Komponen y:*

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

*Komponen z:*

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \hat{k} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]$$

Persamaan (2.23), dan juga persamaan bentuk detailnya, hingga saat ini belum bisa diselesaikan secara analitik. Agar dapat ditemukan solusinya, tensor tekanan permukaan perlu dinyatakan dalam variabel kecepatan.

*Transformasi stress permukaan ke dalam variabel kecepatan*

Perilaku mekanis dari benda-benda dapat dideskripsikan dengan besaran *strain* dan *stress*. Hubungan antara kedua variabel tersebut dikenal dengan istilah *hubungan konstitutif*. Fluida memberikan respon terhadap gaya yang bekerja padanya. Respon tersebut dinyatakan dalam besaran laju tensor strain, dimana  $\dot{\epsilon}_{ij}$  adalah tensor rank 2 yang dinyatakan sebagai:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Fluida dapat mengalami pertambahan “*panjang*” (*stretching*) ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida yang menyebabkan fluida bergerak. Untuk segmen fluida  $\Delta x$ , jika pertambahan panjang akibat stress adalah  $\delta x$  maka strain  $\delta \epsilon_{xx}$  memenuhi persamaan  $\delta \epsilon_{xx} = \frac{\delta x}{\Delta x}$ . Laju tensor strain  $\dot{\epsilon}_{xx}$  dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$\delta \epsilon_{xx} = \frac{\delta x}{\Delta x} \rightarrow \dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\delta \epsilon_{xx}}{\delta t}$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\delta x}{\delta t} \right) \rightarrow \frac{\delta x}{\delta t} \text{ selisih kecepatan fluida pada sisi kiri dan kanan pada arah } x$$

$$\frac{\delta x}{\delta t} \equiv \bar{v}_{kanan} - \bar{v}_{kiri}$$

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \left( \bar{v}_{kiri} + \Delta x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right) - \bar{v}_{kiri} = \Delta x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$$

substitusike persamaan laju tensor strain diperoleh

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{1}{\Delta x} \Delta x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$$

Dengan argumentasi yang sama maka laju tensor strain komponen  $\dot{\epsilon}_{yy}$  dan  $\dot{\epsilon}_{zz}$  dapat ditentukan yaitu:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y}$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}$$

Tensor rank 2 untuk laju tensor strain kini dapat dinyatakan dalam variabel kecepatan sebagai berikut:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Persamaan di atas adalah tensor simetris. Untuk jenis fluida Newton hubungan tensor tekanan dan laju tensor strain dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.25)$$

Yang mana  $\mu$  adalah konstanta yang menyatakan koefisien viskositas fluida. Dari Persamaan (2.25) terlihat bahwa jika terdapat stress yang muncul pada fluida maka akan timbul strain pada fluida tersebut. Tensor tekanan dengan demikian dapat dinyatakan juga dalam variabel kecepatan melalui Persamaan (2.25).

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Merujuk pada Persamaan (2.23), suku persamaan tensor tekanan dikenai operator del. Suku tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \tau_{ij} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Hasilnya adalah sebagai berikut \*:

$$\nabla \cdot \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \right] \right) \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right) \right] \right) \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] \right) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x \partial z} \\ 2\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y \partial z} \\ 2\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}$$

\*Hasil operasi dot antara del dan tensor tekanan sebenarnya hanya terdiri dari satu baris akan tetapi karena halaman ini tidak mencukupi maka ditulis dalam format kolom.

$$\nabla \bullet \tau_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x \partial z} \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y \partial z} \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y \partial z} \end{array} \right\}$$

$$\nabla \bullet \tau_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right] \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right] \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right] \end{array} \right\}$$

Suku dalam tanda kurung “[ ]” tidak lain adalah divergen dari kecepatan, lihat persamaan (2.15), dimana:

$$\nabla \bullet \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \bullet \vec{v} = 0$$

Dengan demikian, suku dalam tanda “[ ]” pada persamaan  $\nabla \bullet \tau_{ij}$  sama dengan nol sehingga suku-suku persamaan yang tersisa adalah:

$$\nabla \bullet \tau_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial z^2} \\ \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y^2} \end{array} \right\}$$

$$\nabla \bullet \tau_{ij} = \mu \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial z^2} \end{array} \right\} \rightarrow \mu \nabla^2 (\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z)$$

Karena  $(\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z)$  tidak lain adalah vektor kecepatan  $\vec{v}$  maka persamaan  $\nabla \cdot \tau_{ij}$  dapat dinyatakan dalam notasi yang lebih ringkas sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \tau_{ij} = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.26)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) ke persamaan (2.23) diperoleh:

$$-\rho g \hat{k} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) disebut sebagai persamaan Navier–Stokes. Jika diuraikan,

Komponen  $x$ :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial z^2} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

Komponen  $y$ :

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_y}{\partial z^2} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

Komponen  $z$ :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \hat{k} + \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_z}{\partial z^2} \right) = \rho \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]$$

(2.28)

Suku pertama menunjukkan gradien tekanan yang memberikan efek progresif terhadap aliran fluida. Suku kedua (suku ketiga pada komponen  $z$ ) adalah komponen gaya viskositas. Gaya ini selalu mendeselerasi pergerakan fluida dan besarnya dipengaruhi oleh koefisien viskositas. Setiap fluida memiliki nilai koefisien viskositas yang berbeda-beda sehingga efek perlambatan yang dihasilkan juga berbeda. Suku kedua pada komponen  $z$  adalah gaya gravitasi. Dalam tesis ini diasumsikan gaya eksternal (baca: *body force*) yang bekerja hanya gaya gravitasi. Gaya gravitasi memiliki nilai yang konstan dan bergantung sepenuhnya pada massa fluida dan percepatan gravitasi yang bekerja pada daerah dimana fluida berada.

Komponen–komponen gaya tersebut bekerja pada fluida dan menginduksi pergerakan fluida. Suku persamaan di sebelah kanan tanda ( $=$ ) disebut suku persamaan inersia yang menunjukkan reaksi fluida akibat gaya yang bekerja padanya. Suku persamaan inersia terdiri dari komponen perubahan kecepatan terhadap waktu ( $dv/dt$ ) yang menunjukkan variasi kecepatan pada koordinat spasial tertentu. Suku persamaan tersebut dikenal sebagai *turunan lokal (local derivative)*. Suku persamaan sisanya menunjukkan perubahan kecepatan relatif terhadap perpindahan. Adanya konveksi medan aliran (dan besaran lainnya) pada fluida diakomodasi oleh persamaan tersebut. Persamaan tersebut dikenal sebagai *turunan konvektif*.

Jika terdapat disipasi energi atau transfer panas pada sistem maka perlu ditambahkan persamaan kekekalan energi. Secara umum, kekekalan energi dapat dinyatakan sebagai *laju perubahan energi sama dengan jumlah panas yang ditambahkan ke sistem dan kerja total yang dihasilkan sistem*. Persamaan energi dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \mathcal{G} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (2.29)$$

$$\mathcal{G} = \left( v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

$$\Phi = 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

$$- \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2$$

dimana  $c_p$  menunjukkan kapasitas panas fluida pada tekanan konstan (J/kg K),  $P$  adalah tekanan ( $N/m^2$ ), dan  $\Phi$  menyatakan persamaan disipasi energi yang bergantung pada viskositas dan konveksi kecepatan aliran fluida. Dalam tesis ini, sistem yang diteliti, baik eksperimen maupun simulasi, transfer energi antar fase dan dari atau ke lingkungan ke sistem tidak diperhitungkan karena perubahan temperatur sistem sangat kecil sehingga efek termal tersebut dapat diabaikan. Topik lebih lanjut mengenai penurunan Navier–Stokes dapat dilihat pada buku karangan Ji Yuan Tu, *et al.* (2009) dan C. Pozrikidis (2009).

## 2.2 Turbulensi

Aliran fluida dapat dikategorikan menjadi dua macam yaitu aliran *laminar* dan *turbulen*. Pada aliran laminar, struktur aliran fluida terdiri dari lapisan–lapisan tipis yang bergerak relatif satu sama lain dimana, secara makroskopik, antara lapisan satu dengan yang lainnya tidak terjadi pencampuran atau dispersi. Difusi momentum lebih dominan dibanding konveksinya. Seiring dengan perubahan kecepatan aliran fluida dan meningkatnya konveksi momentum, aliran bertransisi menjadi turbulen. Kecepatan dan tekanan mengalami fluktuasi acak dan muncul pusaran–pusaran pada daerah tertentu.



**Gambar 2.7** Contoh aliran laminar dan turbulen pada asap rokok (Library and Archives Canada, 2005).

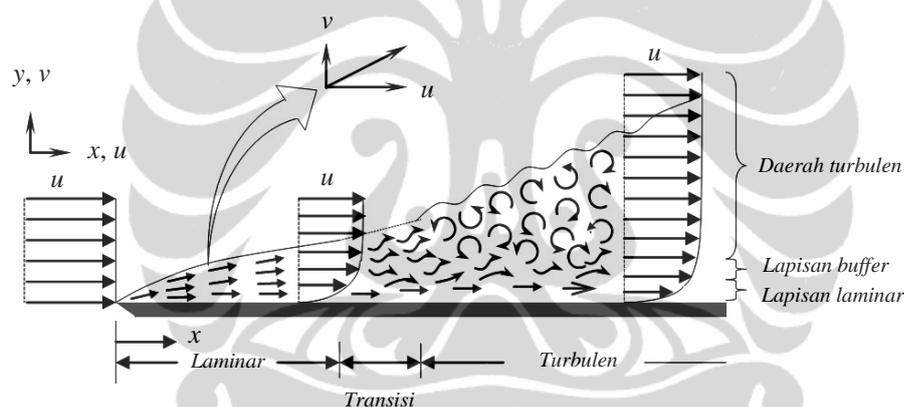
Transisi aliran laminar ke turbulen diamati secara sistematis pertama kali oleh Osborne Reynolds pada tahun 1880an. Reynolds mengamati aliran fluida pada sebuah pipa dimana aliran fluida yang mula–mula laminar mengalami transisi menjadi aliran turbulen setelah mencapai kecepatan tertentu sesuai dengan relasi berikut:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.29)$$

Re adalah bilangan tak berdimensi (disebut *bilangan Reynolds*),  $\rho$  massa jenis fluida ( $\text{kg/m}^3$ ),  $v$  kecepatan aliran fluida (m/s),  $D$  diameter pipa (m), dan  $\mu$  viskositas fluida ( $\text{kg/m.s}$ ). Bilangan Reynolds menunjukkan rasio gaya inersia dan

gaya viskositas. Jika  $Re$  kecil maka aliran fluida cenderung laminar. Jika bilangan Reynolds meningkat, pada suatu nilai tertentu, aliran fluida bertransisi menjadi turbulen yang ditandai dengan munculnya aliran arus yang besar.

Efek viskositas (dan juga turbulensi) biasanya muncul pada daerah dekat dengan dinding batas (biasanya solid). Daerah tersebut dikenal dengan *boundary layer*. Transisi aliran laminar ke turbulen dapat diilustrasikan seperti pada **Gambar 2.8**. Aliran dengan kecepatan  $u$  mendekati sebuah plat datar. Aliran tersebut akan memiliki kecepatan nol di daerah dinding. Pada daerah yang jauh dari dinding, kecepatan aliran  $u$ . Seiring dengan aliran fluida mendekati dinding, *boundary layer* terbentuk dimana kecepatan aliran bervariasi dari nol (di daerah dinding) hingga  $u$  di daerah yang jauh dari dinding.



**Gambar 2.8** Transisi aliran laminar ke turbulen dan terbentuknya *boundary layer* (Sayma, 2009).

Sesuai dengan Persamaan (2.29), pada saat  $x$  kecil, maka nilai  $Re$  juga kecil dan dengan demikian pada daerah tersebut terbentuk lapisan laminar. Nilai  $Re$  yang kecil ini juga menunjukkan bahwa efek gaya inersia lebih kecil dibanding efek gaya viskositas. Dengan meningkatnya nilai  $x$ , maka  $Re$  juga semakin besar. Efek gaya inersia mulai mendominasi dan cukup besar dibanding efek gaya viskositas. Hal ini menyebabkan lapisan–lapisan laminar menjadi tidak stabil dan terbentuklah pusaran–pusaran pada arus aliran. Daerah ini disebut sebagai daerah transisi. Dengan semakin meningkatnya nilai  $x$ , bilangan Reynolds juga semakin

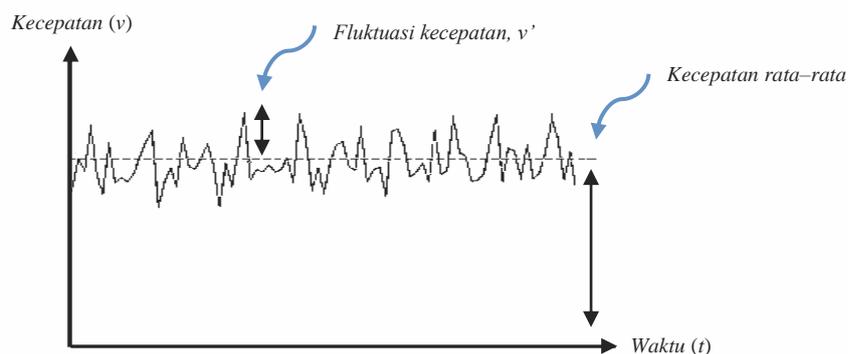
besar. Dari daerah transisi fluktuasi kecepatan dan pusaran–pusaran semakin mendominasi aliran sehingga menghasilkan aliran turbulen. Pada kondisi ini, efek gaya inersia semakin besar dibanding gaya viskositas. Namun demikian, pada daerah di dekat dinding, masih terdapat lapisan laminar. Hal ini dikarenakan kecepatan aliran pada daerah tersebut sangat kecil sehingga  $Re$  juga kecil.

Fenomena turbulen menjadi salah satu bidang yang menjadi minat utama dalam dunia per–teknik–an. Hal ini dikarenakan sebagian besar fenomena yang berkaitan dengan aplikasi teknik berhubungan dengan aliran turbulen atau dalam keadaan tertentu sangat sulit untuk menjaga sebuah sistem aliran fluida agar tetap laminar. Beberapa contoh aplikasi atau fenomena dimana aliran turbulen muncul di antaranya mekanisme transfer panas, reaktor kolom gelembung, reaktor nuklir, pembakaran bahan bakar pada kendaraan bermesin, turbin, dan lain sebagainya. Formulasi persamaan turbulen dengan demikian menjadi ujung tombak dalam bidang komputasi dinamika fluida.

### 2.3 Persamaan Reynolds–Averaged Navier–Stokes (RANS)

Dengan menggunakan persamaan Navier–Stokes, Persamaan (2.27) dan persamaan kontinuitas, Persamaan (2.15), aliran laminar sepenuhnya dapat dijelaskan secara lengkap. Jika di dalam sistem terjadi transfer energi antar fase atau dari dan ke lingkungan, maka Persamaan (2.29) perlu untuk disertakan dalam perhitungan. Untuk sistem turbulen, fluktuasi kecepatan dan besaran lainnya terjadi secara intens. Karakteristik fluktuasi kecepatan aliran turbulen dapat dilihat pada **Gambar 2.9**.

Semakin tinggi intensitas turbulennya maka semakin besar fluktuasi yang terjadi. Variasi–variasi yang bersifat minor muncul semakin banyak. Dalam keadaan yang demikian, semakin sulit untuk mengetahui secara mendetail dinamika aliran sistem. Dalam kebanyakan kasus, terutama dalam bidang teknik, informasi mendetail tersebut tidak terlalu dibutuhkan. Komponen rata–rata dari besaran yang mengalami fluktuasi terkadang sudah menyediakan informasi yang mencukupi untuk menjelaskan suatu fenomena aliran turbulen tertentu.



**Gambar 2.9** Fluktuasi kecepatan aliran fluida terhadap waktu (Sayma, 2009).

Nilai rata-rata dari besaran yang berfluktuasi dapat ditentukan dengan merata-ratakan nilai besaran-besaran tersebut terhadap waktu. Perata-rataan ini dimaksudkan untuk mem-*filter* dan membuang fluktuasi yang muncul dalam skala kecil yang tidak memberikan pengaruh signifikan terhadap dinamika sistem secara global. Mengacu pada **Gambar 2.9**, kecepatan rata-rata dapat ditentukan dengan persamaan berikut:

$$\vec{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{(t+\Delta t)} v dt \quad (2.30)$$

yang mana  $v = \vec{v} + v'$ .  $\vec{v}$  menunjukkan kecepatan rata-rata sedangkan  $v'$  menyatakan variasi kecepatan pada waktu  $t$  tertentu. Nilai rata-rata dari besaran-besaran seperti tekanan, massa jenis, dan lain sebagainya dapat ditentukan dengan Persamaan (2.30). Implikasi dari perata-rataan besaran fluida ini bukan saja bermanfaat bagi aplikasi teknis akan tetapi juga analisis numerik. Jika rata-rata besaran-besaran tersebut disubstitusikan ke Persamaan (2.15) dan (2.28), maka akan diperoleh:

*Persamaan kekekalan massa:*

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.31)$$

*Persamaan kekekalan momentum*

Komponen  $x$ :

$$S_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] = \rho \frac{D\bar{v}_x}{Dt} \quad (2.32)$$

Komponen  $y$ :

$$S_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] = \rho \frac{D\bar{v}_y}{Dt} \quad (2.33)$$

Komponen  $z$ :

$$S_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] = \rho \frac{D\bar{v}_z}{Dt} \quad (2.34)$$

$S_x$ ,  $S_y$ , dan  $S_z$  disebut suku persamaan *source term* yang terdiri dari gradien tekanan dan suku persamaan lainnya seperti percepatan gravitasi dan panas. Persamaan (2.32) – (2.34) disebut persamaan Reynolds–Averaged Navier–Stokes (RANS).  $\mu_T$  menyatakan viskositas turbulen yang berasal residu perata–rataan kecepatan aliran fluida. Pada kasus aliran dua dimensi ( $x$  dan  $y$ ), persamaan RANS dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.35)$$

dan

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho \bar{v}_x' \bar{v}_x' \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho \bar{v}_x' \bar{v}_y' \right] = \rho \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho \bar{v}_x' \bar{v}_y' \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho \bar{v}_y' \bar{v}_y' \right] = \rho \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right) \quad (2.37)$$

Jika diperhatikan dengan seksama, Persamaan (2.36) dan (2.37) mirip dengan Persamaan (2.27) hanya saja di sini muncul suku persamaan tambahan  $-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_x'$ ,  $-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_y'$ , dan  $-\rho \bar{v}_y' \bar{v}_y'$ . Suku persamaan tambahan tersebut, yang dikenal juga dengan sebutan *stress Reynolds*, memiliki karakteristik yang mirip dengan stress

normal dan *shear stress*. Agar dapat memodelkan aliran fluida, maka persamaan–persamaan tersebut harus dipecahkan.

Prandtl mengajukan hipotesis, pendekatan arus viskositas (*eddy viscosity approach*) bahwa stress Reynolds memiliki efek yang koheren dengan viskositas. Berangkat dari argument tersebut, Prandtl memperkenalkan besaran baru yang disebut *viskositas turbulen*,  $\mu_T$ . Untuk kasus aliran dua dimensi, viskositas turbulen dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$-\rho \overline{v'_x v'_x} = \mu_T \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial x} \quad (2.38)$$

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \mu_T \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial x} \quad (2.39)$$

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \mu_T \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial x} = \mu_T \frac{\partial \overline{v'_y}}{\partial y} \quad (2.40)$$

Beberapa model telah dikembangkan untuk menemukan nilai viskositas arus tersebut. Beberapa model itu antara lain *zero equation model* (menggunakan persamaan aljabar sederhana untuk menemukan distribusi viskositas arus pada seluruh bagian fluida), *one equation model* (menggunakan persamaan transport untuk menghitung nilai viskositas arus), dan *two equation model* (menggunakan dua persamaan diferensial transport). *Two equation model* adalah yang paling banyak digunakan untuk pemodelan dinamika aliran turbulen. Pada model ini, dua persamaan diferensial digunakan untuk menentukan distribusi viskositas arus pada sistem. Model tersebut terdiri dari persamaan antara lain persamaan yang merepresentasikan produksi dan transfer turbulen dan persamaan lainnya menangani transfer dan disipasi turbulen. Dua model yang diturunkan dari *two equation model* yang cukup populer adalah model turbulen  $k-\varepsilon$  dan  $k-\omega$  (Wilcox, 2004). Viskositas arus turbulen dihitung dari dua persamaan tersebut.

Model (standar)  $k-\varepsilon$  diajukan pertama kali oleh Launder dan Spalding (1974). Variabel  $k$  dan  $\varepsilon$  masing–masing didefinisikan sebagai berikut:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad \text{dan} \quad \varepsilon = \frac{\mu_T}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Persamaan  $k$  dan  $\varepsilon$  untuk fluida yang memiliki besaran fisis konstan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P - D \quad (2.41)$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} D) \quad (2.42)$$

$P$  dan  $D$  adalah suku persamaan yang bertanggung jawab terhadap *produksi* dan *disipasi* turbulen.  $P$  dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$P = 2\mu_T \left\{ \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}$$

sedangkan  $D = \varepsilon$ . Beberapa konstanta yang muncul pada persamaan di atas antara lain  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,  $\sigma_k = 1,0$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ , dan  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ . Dengan mengasumsikan tidak terjadi perubahan densitas pada fluida maka viskositas turbulen  $\mu_T$  dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$\mu_T = \frac{C_\mu \rho k^2}{\varepsilon} \quad (2.43)$$

$C_\mu$  adalah konstanta yang memiliki nilai 0,09.

## 2.4 Formulasi Persamaan Dinamika Aliran Multifase

Persamaan Euler–Euler untuk aliran fluida multifase terdiri dari persamaan kontinuitas dan kekekalan momentum (Drew, 1999). Untuk setiap fase, persamaan Euler–Euler dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\alpha_f \rho_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial(\alpha_f \rho_f \vec{v}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f + \alpha_f \tau_f) = \alpha_f \rho_f \vec{g} - \alpha_f \nabla \bar{P}_f + \vec{F}'_f \quad (2.45)$$

dimana  $\rho$  menyatakan massa jenis fase,  $\alpha$  menyatakan fraksi volume tiap fase, dan  $f$  menyatakan jenis fase,  $L$  untuk fase cair dan  $G$  untuk fase gas. Besaran  $\vec{v}$  dan  $\vec{F}'$  masing–masing menyatakan vektor kecepatan dan gaya interaksi antar permukaan gas–cairan. Gaya–gaya tersebut terdiri dari *lift force* ( $F_{L,f}$ ), *drag force* ( $F_{D,f}$ ), dan *virtual mass force* ( $F_{VM,f}$ ).

$$\vec{F}_L = -\vec{F}_G = \vec{F}_{D,L} + \vec{F}_{L,L} + \vec{F}_{VM,L} \quad (2.46)$$

$$\vec{F}_{L,L} = \alpha_G \rho_L C_L (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \times \nabla \times \vec{v}_L \quad (2.47)$$

$$\vec{F}_{D,L} = \frac{3}{4} \frac{C_D}{d_s} \alpha_G \rho_L |\vec{v}_G - \vec{v}_L| (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \quad (2.48)$$

$$\vec{F}_{VM,L} = \alpha_G \rho_L C_{VM} \left( \frac{D_G \vec{v}_G}{Dt} - \frac{D_L \vec{v}_L}{Dt} \right) \quad (2.49)$$

$C_L$ ,  $C_D$ , dan  $C_{VM}$  pada Persamaan (2.46)–(2.49) masing–masing menyatakan koefisien *lift force*, *drag force*, dan *virtual mass force*. Mengacu pada model Tomiyama (2004), koefisien *lift force* dihitung dengan Persamaan (2.50).

$$C_L = \forall_L \min[0,288 \tanh(0,121 Re), f(E\ddot{o})] \quad (2.50)$$

dimana  $\forall_L$  merupakan faktor koreksi koefisien *lift force*,  $Re$  menyatakan bilangan Reynolds, dan  $E\ddot{o}$  menyatakan bilangan Eötvös yang dimodifikasi. Menurut Behzadi, Issa, dan Rusche, (2004) agar koefisien *lift force* gelembung tunggal dapat diaplikasikan untuk sistem banyak gelembung, faktor koreksi  $\forall_L$  perlu ditambahkan. Faktor koreksi  $\forall_L$  dinyatakan oleh Persamaan (2.51).

$$\forall_L = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{6,51 \times 10^{-4}}{\alpha_G^{1,2}}\right) \quad (2.51)$$

Sedangkan  $f(E\ddot{o})$  dihitung menggunakan Persamaan (2.52).

$$f(E\ddot{\sigma}) = 0,00105E\ddot{\sigma}^3 - 0,0159E\ddot{\sigma}^2 - 0,0204E\ddot{\sigma} + 0,474 \quad (2.52)$$

$E\ddot{\sigma}'$  ekuivalen dengan Persamaan (2. 53).

$$E\ddot{\sigma}' = \frac{E\ddot{\sigma}}{E^{2/3}} \quad (2.53)$$

$E$  merupakan aspek rasio gelembung. Mengacu pada model Wellek *et al.* (1966),  $E$  dinyatakan dengan Persamaan (2.54).

$$E = \frac{1}{1 + 0.163E\ddot{\sigma}^{0.757}} \quad (2.54)$$

Untuk komponen *drag force*, terdapat beberapa model koefisien  $C_D$  antara lain model Ishii dan Zuber (1979), Tomiyama (2004), dan Behzadi, Issa, dan Rusche (2004). Model  $C_D$  Ishii–Zuber adalah yang paling sederhana dibanding dua model lainnya. Ishii–Zuber menghitung nilai  $C_D$  menggunakan Persamaan (2.55).

$$C_D = \forall_D \frac{2}{3} \sqrt{E\ddot{\sigma}} \quad (2.55)$$

dimana  $\forall_D$  merupakan faktor koreksi koefisien *drag force*. Ada dua jenis faktor koreksi yang dapat dipilih yaitu faktor koreksi Ishii dan Zuber (1979) dan Behzadi, Issa, dan Rusche (2004).

$$\forall_D^{IZ} = \alpha_L^{-0.5} \quad (2.56)$$

$$\forall_D^{BIR} = e^{3.64\alpha_G} + \alpha_G^{0.864} \quad (2.57)$$

Menurut Tomiyama (2004), nilai  $C_D$  tidak hanya bergantung pada bilangan Eötvös, akan tetapi juga bergantung pada aspek rasio gelembung ( $E$ ) sesuai dengan Persamaan (2.58).

$$C_D = \forall \frac{8}{3} \frac{E\ddot{\sigma}(1 - E^2)}{E^{2/3} E\ddot{\sigma} + 16(1 - E^2)E^{4/3}} F(E)^{-2} \quad (2.58)$$

dimana,

$$F(E) = \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-E^2} - E\sqrt{1-E^2}}{1-E^2} \quad (2.44)$$

Koefisien *virtual mass force*, menurut Tomiyama (2004), terdiri dari tiga komponen yaitu komponen vertikal dan dua komponen horisontal,  $C_{VM}$  ( $C_{VM,h}$ ,  $C_{VM,v}$ ,  $C_{VM,h}$ ). Nilai dari koefisien *virtual mass force* bergantung pada aspek rasio gelembung gas, sesuai dengan Persamaan (2.59).

$$C_{VM,h} = \nabla_{VM} \frac{E \cos^{-1} E - \sqrt{1-E^2}}{E^2 \sqrt{1-E^2} - E \cos^{-1} E} \quad (2.59)$$

$$C_{VM,v} = \nabla_{VM} \frac{\cos^{-1} E - E\sqrt{1-E^2}}{(2E^{-1} - E)\sqrt{1-E^2} - \cos^{-1} E} \quad (2.60)$$

dimana  $\nabla_{VM}$  merupakan faktor koreksi koefisien *virtual mass force* yang diberikan oleh Van Wijngaarden (1976).

$$\nabla_{VM} = 1 + 2,78\alpha_G \quad (2.61)$$

Pada Persamaan (2.44) dan (2.45), untuk fase  $f$ , tensor tekanan  $\tau_f$  dinyatakan dengan Persamaan (2.62).

$$\tau_f = -\mu_{eff} \left[ \nabla \vec{v}_f + \left( \nabla \vec{v}_f \right)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v}_f \right] \quad (2.62)$$

dimana,  $\mu_{eff}$  menyatakan viskositas efektif. Untuk fase cair,  $\mu_{eff}$  terdiri dari tiga komponen yaitu viskositas molekuler ( $\mu_{L,M}$ ), viskositas *shear-induced turbulence* ( $\mu_{L,T}$ ), dan *bubble induced turbulence* ( $\mu_{L,BIT}$ ). Menurut Jacobsen *et al.* (1997), untuk fase gas, viskositas efektif dihitung menggunakan Persamaan (2.63).

$$\mu_{G,eff} = \frac{\rho_G}{\rho_L} \mu_{L,eff} \quad (2.63)$$

Model Sato dan Sekoguchi (1975) digunakan untuk menghitung *bubble induced turbulence*:

$$\mu_{BIT} = \rho_L \alpha_G C_{\mu, BIT} d_g \left| \vec{v}_G - \vec{v}_L \right| \quad (2.64)$$

dimana  $d_g$  menyatakan diameter gelembung dan  $C_{\mu, BIT}$  menyatakan konstanta yang memiliki nilai sebesar 0,6. Viskositas *shear-induced turbulence* dihitung dengan Persamaan (2.65).

$$\mu_{L, T} = \rho_L C_{\mu} \frac{k_L^2}{\varepsilon_L} \quad (2.65)$$

$k$  dan  $\varepsilon$  masing-masing menyatakan energi kinetik turbulensi dan disipasi arus turbulensi. Mengacu pada model dan parameter yang telah dibahas, persamaan  $k$  dan  $\varepsilon$  masing-masing dinyatakan dengan Persamaan (2.66) dan (2.67).

$$\frac{\partial(\alpha_L \rho_L k_L)}{\partial t} + \nabla \cdot \Omega_k = \alpha_L (G_L - \rho_L \varepsilon_L) + S_{k, BIT} \quad (2.66)$$

$$\Omega_k \equiv \left( \alpha_L \rho_L \vec{v}_L k_L - \alpha_L \left( \mu_{L, Lam} + \frac{\mu_{L, Tur}}{\sigma_k} \right) \nabla k_L \right)$$

$$\frac{\partial(\alpha_L \rho_L \varepsilon_L)}{\partial t} + \nabla \cdot \Omega_{\varepsilon} = \alpha_L \frac{\varepsilon_L}{k_L} (C_{\varepsilon 1} G_L - C_{\varepsilon 2} \rho_L \varepsilon_L) + S_{\varepsilon, BIT} \quad (2.67)$$

$$\Omega_{\varepsilon} \equiv \left( \alpha_L \rho_L \vec{v}_L \varepsilon_L - \alpha_L \left( \mu_{L, Lam} + \frac{\mu_{L, Tur}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon_L \right)$$

$S_{k, BIT}$  dan  $S_{\varepsilon, BIT}$  merupakan suku persamaan yang muncul akibat hadirnya gelembung. Menurut Pflieger dan Becker (2001),  $S_{k, BIT}$  dan  $S_{\varepsilon, BIT}$  dapat dinyatakan sebagai:

$$S_{k, BIT} = \alpha_L C_f |\mathbf{F}_L| \cdot \left| \vec{v}_G - \vec{v}_L \right| \quad (2.68)$$

$$S_{\varepsilon, BIT} = \frac{\varepsilon_L}{k_L} C_{\varepsilon} S_{k, BIT} \quad (2.69)$$

dengan  $C_f = C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon} = C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $C_{\mu} = 0,09$ ,  $\sigma_k = 1,0$ , dan  $\sigma_{\varepsilon} = 1,217$ .

## 2.5 Interface Tracking: Metode Medan Fase

Metode medan fase adalah salah satu metode yang digunakan untuk memodelkan bidang antar muka aliran multifase, sekaligus melakukan penjejakan terhadap dinamika aliran fase–fase tersebut (Yue *et al.*, 2006). Metode ini mengasumsikan bahwa evolusi keadaan sistem dapat dideskripsikan menggunakan parameter persamaan yang merupakan fungsi dari vektor posisi,  $\phi$ . Persamaan diferensial untuk metode medan fase adalah persamaan Cahn–Hilliard yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \frac{\gamma \lambda}{\varepsilon^3} \nabla \psi \quad (2.70)$$

dimana,

$$\psi = -\nabla \cdot \varepsilon^2 \nabla \phi + (\phi^2 - 1)\phi + \left( \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \right) \frac{\partial f_{\text{ext}}}{\partial \phi} \quad (2.71)$$

$\gamma$ ,  $\lambda$ , dan  $\varepsilon$  masing–masing menyatakan mobilitas ( $\text{m}^3 \text{s/kg}$ ), densitas pencampuran energi (N), dan parameter ketebalan permukaan (m).  $f_{\text{ext}}$  merupakan gaya eksternal yang dihasilkan oleh energi bebas.  $\lambda$  dan  $\varepsilon$  berkorelasi dengan koefisien tegangan permukaan,  $\sigma$ , melalui Persamaan (2.72).

$$\sigma = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (2.72)$$

Parameter  $\varepsilon$  biasanya diset pada nilai  $\frac{1}{2}h_c$  dimana  $h_c$  merupakan ukuran *mesh* pada daerah yang dilalui oleh permukaan. Parameter  $\lambda$  menentukan skala waktu (*time scale*) persamaan Cahn–Hilliard dan harus dipilih dengan cermat agar ketebalan permukaan yang memisahkan antar fase selalu tetap dan juga harus dapat menjaga agar konveksi tetap terakomodasi.

Dinamika fase dimodelkan dengan persamaan *Reynolds–Averaged Navier–Stokes* (RANS) dan persamaan keadaan yang bergantung pada gaya–gaya permukaan yang bekerja pada fase gas dan cairan. Sebelum menggunakan persamaan RANS–medan fase, ada beberapa variabel dan persamaan yang harus

didefinisikan terlebih dahulu antara lain fraksi volume, persamaan densitas, viskositas dinamik, dan gaya-gaya permukaan. Fraksi volume gas dihitung menggunakan Persamaan (2.73).

$$V_{fG} = \min\left(\max\left(\left(\frac{[1+\phi]}{2}\right), 0\right), 1\right) \quad (2.73)$$

*min* and *max* merupakan operator yang digunakan untuk memastikan bahwa fraksi volume fase berada pada rentang nilai 0 dan 1. Densitas cairan dan viskositas dinamik masing-masing dihitung dengan Persamaan (2.74) dan (2.75).

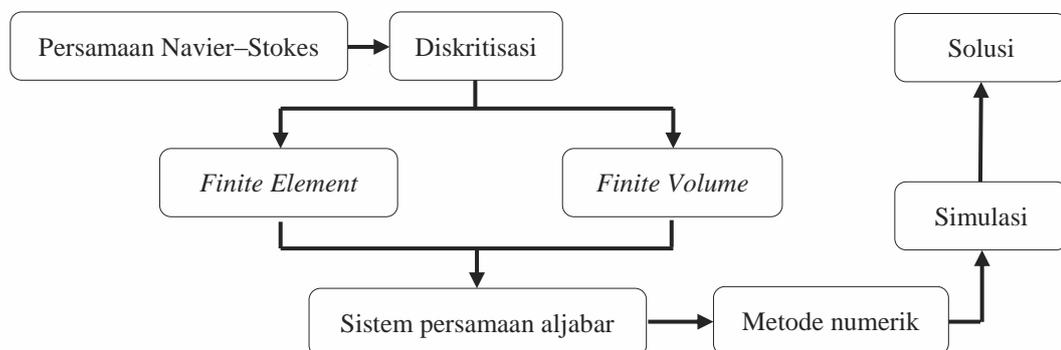
$$\rho = \rho_L + (\rho_G - \rho_L)V_{fG} \quad (2.74)$$

$$\eta = \eta_L + (\eta_G - \eta_L)V_{fG} \quad (2.75)$$

Untuk gaya-gaya permukaan, digunakan Persamaan (2.46) – (2.49).

## 2.6 Komputasi Dinamika Fluida

Komputasi dinamika fluida adalah sebuah prosedur numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier Stokes, dan persamaan turunannya, menggunakan komputer. Prosedur numerik tersebut dibagi menjadi dua tahap yaitu *tahap diskritisasi* dan *tahap implementasi metode numerik*. Garis besar tahapan penyelesaian persamaan Navier–Stokes tertera pada **Gambar 2.10**.



**Gambar 2.10** Garis besar tahapan dan implementasi metode numerik untuk menyelesaikan persamaan Navier–Stokes.

### 2.6.1 Diskritisasi

Diskritisasi adalah proses transformasi suatu sistem persamaan diferensial atau domain (spasial dan temporal) menjadi persamaan diskrit. Solusi dari persamaan diskrit tersebut kemudian diinterpolasi untuk mendapatkan gambaran koheren sistem persamaan diferensial. Terdapat beberapa metode diskritisasi persamaan diferensial yang sering digunakan antara lain *finite different*, *finite element*, dan *finite volume*. Dalam tesis ini hanya dibahas dua metode yaitu *finite element* dan *finite volume*.

### 2.6.2 Finite Element Method (FEM)

Salah satu basis FEM adalah *Method of Weighted Residuals* (MoWR). Metode tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut. Solusi dari sembarang persamaan diferensial dapat ditebak dengan memasukkan sembarang nilai atau fungsi.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \mu \nabla^2 \vec{v} + \nabla P + \rho g \hat{k} = 0$$

Untuk simplifikasi, persamaan tersebut ditulis dalam variabel sembarang:

$$\psi(\Phi) = 0$$

Untuk mengetahui solusi persamaan pada kondisi  $\Phi = \Phi'$ , tidak dapat dilakukan hanya dengan mensubstitusikan  $\Phi'$  pada  $\psi(\Phi)$ . Akan selalu diperoleh residu pada operasi  $\psi(\Phi')$ .

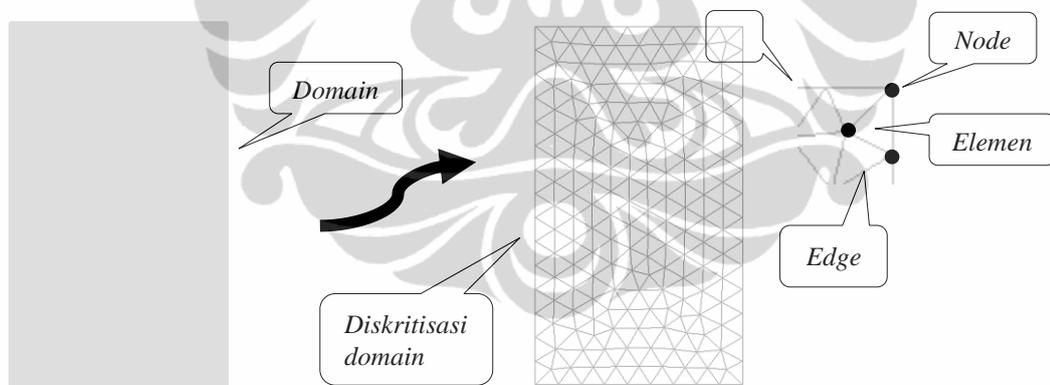
$$\psi(\Phi') = R$$

Karena  $\psi(\Phi')$  adalah persamaan yang bersifat pendekatan maka residu  $R$  akan selalu muncul pada domain persamaan diferensial. Konsep dasar MoWR adalah menggunakan sebuah persamaan “pemberat” (*weighting function, W*) dimana integral dari persamaan tersebut bernilai nol di seluruh bagian domain persamaan diferensial.

$$\int_{\Omega} W \psi(\Phi') d\Omega = 0 \quad (2.76)$$

Persamaan  $W$  dapat berupa persamaan linier atau polinomial. Ada beberapa metode yang digunakan untuk menemukan persamaan  $W$  seperti metode sub domain, metode kuadrat terkecil dan metode Galerkin. Metode Galerkin adalah yang paling banyak digunakan terutama dalam aplikasi teknik.

Secara umum, ada beberapa langkah untuk menemukan persamaan  $W$ . Langkah *pertama* adalah mendiskritisasi domain (diskritisasi spasial) sistem menjadi elemen–elemen kecil yang tidak saling tumpang tindih atau membagi domain menjadi sub–sub domain kecil. FEM dapat menangani berbagai bentuk geometri elemen seperti segitiga, tetrahedral, dan quadrilateral (untuk 2D). Demikian juga untuk sistem 3D, berbagai bentuk geometri dapat diaplikasikan oleh FEM. Diskritisasi spasial disebut juga dengan pembuatan *mesh* (*mesh generation*). Sebuah *mesh* terdiri dari beberapa bagian. Untuk *mesh* 2D, bagian–bagian tersebut antara lain *node*, *edge*, dan *elemen* (lihat **Gambar 2.11**).



**Gambar 2.11** Diskritisasi domain 2D dan bagian–bagiannya.

Langkah *kedua* adalah menentukan persamaan matrik dan *load vector* yang mengekspresikan sifat fisis elemen–elemen *mesh* domain. Contoh persamaan matrik dan *load vector* untuk sistem 1D adalah:

$$[K]_{elemen} = A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$A$  adalah sebuah konstanta atau besaran yang membawa informasi elemen.

$$\{f\}_{elemen} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Nilai variabel pada *node–node* ditentukan dengan menggunakan tipe persamaan berikut:

$$[K]\{U\} = \{f\} \quad (2.79)$$

Vektor  $\{U\}$  merepresentasikan variabel–variabel yang dicari di daerah *node mesh*.

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, FEM tidak hanya melakukan diskritisasi domain akan tetapi juga persamaan Navier–Stokes. Dengan cara membagi domain menjadi elemen–elemen dan menerapkan prosedur penyelesaian persamaan diferensial pada elemen–elemen tersebut, dengan menggunakan persamaan–persamaan yang telah diketahui, maka hubungan antara elemen dan persamaan diferensial dapat ditemukan. Dengan kata lain, solusi persamaan diferensial dapat diperoleh. Persamaan yang digunakan untuk merepresentasikan variasi solusi di dalam setiap elemen disebut fungsi basis (*basis function*) atau *shape function*.

Sebuah fungsi *trial* (misal  $\Phi(x) = \Phi_i N_i(x)$ ) yang digunakan untuk menentukan solusi persamaan  $\psi(\Phi)$  pada  $\Phi'$  akan menghasilkan persamaan berikut:

$$\int_{\Omega} W^i \psi(\Phi_i N_i(x)) d\Omega = 0 \quad (2.80)$$

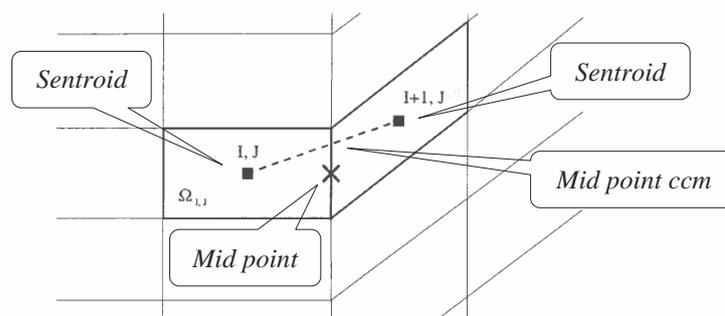
$\Phi_i$  adalah solusi persamaan di *node i* yang ingin diketahui,  $N_i$  adalah fungsi basis pada *node ke i*. Fungsi  $W$  dipilih sedemikian rupa agar di *node ke i* menghasilkan nilai  $W^i$  dan nol di *node* yang lain untuk setiap *node* pada seluruh bagian domain. Dengan mensubstitusikan nilai  $W^i$  Persamaan (2.76) maka akan diperoleh fungsi diskrit  $W$  untuk seluruh *node* pada domain. Hasil integral Persamaan (2.80) adalah sebuah sistem persamaan aljabar seperti berikut ini:

$$K.T_i = r \quad (2.81)$$

$K$  adalah matrik Jacobian sedangkan  $r$  adalah besaran atau nilai yang menunjukkan kondisi batas dan (jika ada) *source term*.

### 2.6.3 Finite Volume Method (FVM)

Metode FVM dikembangkan pada awal tahun 1970an oleh McDonald (McDonald, 1971). Pada prinsipnya metode FVM mirip dengan metode FEM. Domain dibagi ke dalam sub domain yang disebut *control volume*. Bentuk *control volume* bisa bermacam-macam, demikian juga dengan posisinya di dalam domain. Secara garis besar terdapat dua cara yang digunakan untuk menentukan bentuk dan letak *control volume* yaitu *cell centered scheme* (ccs) dan *cell vertex scheme* (cvs). Pada metode ccs, besaran-besaran aliran fluida dievaluasi pada titik pusat setiap grid dan oleh karena itulah bentuk *control volume* identik dengan bentuk grid. Akurasi metode ccs sangat bergantung pada ukuran grid domain. Pada sistem koordinat kartesian, untuk ukuran grid yang cukup halus, akurasi metode ccs cukup bagus, orde 2 atau lebih tinggi. Namun demikian, kelemahan metode ini terletak pada ketidak-mampuannya mengakomodasi susunan grid yang memiliki tidak sejajar/gradien antar sentroid tidak kontinu, lihat **Gambar 2.12**. Untuk susunan grid seperti pada **Gambar 2.12**, pendekatan ccm kurang akurat walaupun fungsi interpolasi yang digunakan adalah fungsi liner. Konsekuensinya adalah untuk susunan grid dengan gradien diskontinu, *error* tersebut akan selalu muncul walaupun ukuran grid diperhalus.



**Gambar 2.12** Dua grid/cell yang diskontinu.

Berbeda dengan metode ccs, metode cvs meletakkan besaran-besaran aliran fluida di *node-node* grid. Dengan demikian, *control volume* dapat memiliki dua macam bentuk yang dihasilkan oleh gabungan grid-grid yang menggunakan satu *node* yang sama (*overlapping control volume*) dan grid di sekitar *node* tersebut (*dual control volume*). Metode cvs dapat menangani struktur dan susunan grid yang teratur dan tidak teratur sehingga dapat meminimalisir ketidakakuratan perhitungan akibat distorsi susunan grid. Namun demikian, metode cvs tidak akurat pada daerah di sekitar dinding. Metode ccs memberikan performa yang lebih baik pada daerah dinding. Pada proses perhitungan, metode ccs lebih bagus untuk keadaan transien dan juga dalam proses numeriknya.

Metode FVM melakukan diskritisasi spasial secara langsung ke dalam domain fisis. Selain itu metode FVM juga fleksibel karena dapat diterapkan pada grid yang terstruktur maupun tidak terstruktur sehingga dapat diterapkan pada struktur-struktur atau domain aliran yang kompleks. *Weak solution* pada persamaan fluida dapat ditentukan secara akurat kecuali pada kasus persamaan Euler, sebuah persamaan yang menggambarkan entropi sistem harus disertakan agar energi sistem selalu kekal.

Metode FVM pada dasarnya mirip dengan metode FEM. Jika pada metode FEM fungsi pemberat  $W^i$  dapat bernilai berapa saja di *node* ke  $i$  asalkan di *node* yang lain bernilai nol, pada metode FVM fungsi  $W^i$  di *node* ke  $i$  diset bernilai 1 dan nol di *node* selainnya. Cara lain yang juga sering digunakan untuk mendiskritisasi domain sistem fluida dengan metode FVM adalah dengan mengubah persamaan aliran fluida ke dalam bentuk integral. Persamaan kekekalan massa, Persamaan (2.15), dalam bentuk integral menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \vec{v} dA = 0 \quad (2.82)$$

Sedangkan untuk persamaan momentum diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = \oint_A (\rho \vec{v} \cdot \vec{v} + P - \tau) dA + \int_V \rho g dV \quad (2.83)$$

Variasi besaran-besaran fisis di dalam segmen volume tertentu dipengaruhi sepenuhnya oleh fluks yang melingkupi segmen volume tersebut. Inilah ide dasar dari metode FVM. Dengan membagi domain sistem menjadi segmen-segmen volume kecil, kemudian menuliskan persamaan-persamaan fluida yang dibutuhkan pada setiap segmen dan permukaan volume tersebut, maka solusi dari persamaan integral dapat ditentukan. Secara umum, metode FVM dapat menangani grid yang heterogen dimana jarak antara satu *node* dengan *node* tidak harus seragam. Hal ini memberikan keuntungan karena proses komputasi menjadi lebih efektif. Pada dasarnya, semakin kecil ukuran grid domain maka akurasi solusi persamaan fluida akan semakin baik.

Namun demikian, untuk sub domain dimana perubahan variabel medan aliran terjadi secara lambat (gradien koordinat spasial variabel-variabel tersebut relatif kecil) tidak dibutuhkan ukuran grid yang kecil. Untuk daerah-daerah dimana variabel medan aliran memiliki gradien yang besar maka ukuran grid harus dibuat sekecil mungkin agar dapat mengakomodasi perubahan variabel yang terjadi secara mendadak. Pertimbangan-pertimbangan tersebut didasarkan pada ketersediaan sumber daya komputasi untuk melakukan simulasi. Jika domain yang hendak disimulasikan memiliki dimensi yang relatif kecil dengan jumlah grid yang berkisar ratusan, maka membuat ukuran grid sekecil mungkin tidak menjadi persoalan. Akan tetapi jika domain yang hendak dimodelkan terdiri dari jutaan grid, maka memvariasikan ukuran grid adalah pilihan yang perlu dipertimbangkan.

#### 2.6.4 Metode Numerik

Setelah proses diskritisasi selesai, akan diperoleh persamaan-persamaan aljabar yang harus ditemukan solusinya. Metode numerik yang dimaksud di sini adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan aljabar tersebut. Persamaan-persamaan tersebut dapat berupa persamaan linier atau non-linier bergantung pada persamaan fluida yang digunakan. Terdapat dua metode yang biasa digunakan untuk menemukan solusi sistem persamaan tersebut yaitu metode langsung (*direct method*) dan metode iterasi (*iterative method*). Berikut ini adalah

beberapa sub metode langsung dan iterasi yang biasa digunakan dalam simulasi dinamika fluida.

a. *Metode Langsung*

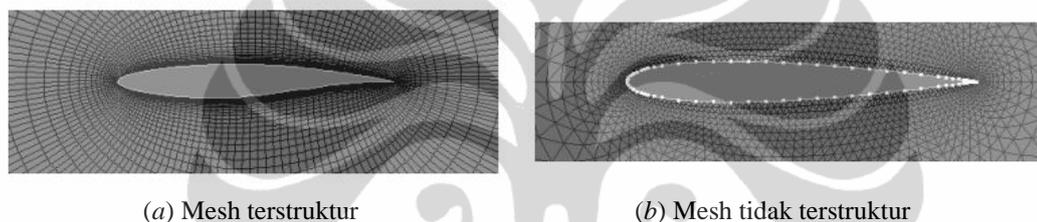
- ✓ *umfpack*: Sangat efisien untuk sistem non-simetris. Menggunakan memori komputer yang cukup besar.
- ✓ *spools*: Sangat efisien untuk sistem simetris maupun non-simetris. *spools* menggunakan memori komputer lebih hemat dibanding *umfpack*.
- ✓ *pardiso*: Efisiensi yang sangat tinggi untuk menyelesaikan sistem simetris dan non simetris. Kadang menggunakan memori komputer lebih hemat dibanding *umfpack*.
- ✓ *pardiso out of core*: Varian dari metode *pardiso*, melakukan penyimpanan komponen matrik LU di harddisk komputer. Hal ini mencegah terjadinya *error* selama perhitungan yang disebabkan oleh kelebihan beban memori.

b. *Metode Iterasi*

- ✓ *gmres*: Metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan non simetris.
- ✓ *fgmres*: Varian dari *gmres* dengan kelebihan antara lain dapat menangani pra-kondisi simulasi yang lebih general. Hanya saja metode *fgmres* mengkonsumsi memori komputer lebih banyak dibanding metode *gmres*.
- ✓ *Conjugate Gradient*: Memiliki performa terbaik ketika diterapkan pada sistem simetris.
- ✓ *BiCGStab*: Menyelesaikan sistem persamaan linier non simetris menggunakan alokasi memori yang tetap, tidak bergantung pada jumlah iterasi yang digunakan. Pada dasarnya metode *BiCGStab* menggunakan memori yang lebih efisien dibanding metode *gmres*.
- ✓ *Geometric Multigrid*: Metode yang khusus digunakan untuk menangani sistem persamaan eliptik atau parabolic.

### 2.6.5 Mesh Generation

Telah disebutkan pada pembahasan sebelumnya bahwa diskritisasi dibutuhkan untuk menemukan solusi persamaan diferensial. Diskritisasi spasial, grid atau *mesh*, berdasarkan pola konektivitas *node–node*nya dibedakan menjadi dua yaitu *mesh terstruktur* dan *tidak terstruktur*. Mesh terstruktur memiliki susunan dan urutan *node* yang teratur dimana setiap *node* pada domain selalu memiliki jumlah *node* tetangga yang sama. Sebaliknya, mesh tidak terstruktur memiliki susunan dan urutan *node* yang tidak teratur, setiap *node* pada domain dapat memiliki jumlah *node* tetangga yang berbeda satu sama lain. Berikut ini adalah contoh mesh terstruktur dan tidak terstruktur.



**Gambar 2.13** (a) Mesh terstruktur dan (b) mesh tidak terstruktur.

Pada dasarnya, untuk domain berbentuk persegi panjang atau domain yang memiliki keteraturan struktur, pembuatan mesh tidak terlalu sulit. Hanya di daerah pinggir atau permukaan lengkung saja ukuran dan akurasi mesh perlu diperhatikan.

#### *Mesh Terstruktur*

Titik–titik yang melingkupi grid pada domain fisis dipetakan dan didistribusikan pada domain komputasi. Untuk daerah batas/dinding yang melengkung, biasanya diletakkan titik yang lebih banyak dibanding daerah/dinding yang tidak melengkung. Titik–titik (atau *node*) tersebut dihubungkan untuk menghasilkan bangun tiga dimensi, kubus dan heksahedra, (untuk mesh 3D) dan bangun dua dimensi, kuadrilateral, untuk mesh 2D. Secara sistematis, urutan pembuatan dilakukan dengan cara pendistribusian titik–titik

pada domain komputasi. Dari titik–titik tersebut kemudian dibuat mesh permukaan (*surface grid*). Mesh di daerah yang dilingkupi permukaan dibuat berdasarkan mesh permukaan tersebut (*volume grid*). Ada dua metode yang digunakan untuk membuat *volume grid* pada grid yang terstruktur yaitu metode aljabar dan metode persamaan diferensial.

Metode aljabar menggunakan persamaan yang menghubungkan antara domain fisis dan komputasi secara langsung. Teknik yang sering digunakan untuk melakukan hal tersebut adalah *Transfinite Interpolation* (TFI). Berdasarkan titik–titik yang telah didistribusikan pada permukaan domain, titik–titik grid di daerah di dalam permukaan dibuat dengan cara menginterpolasi titik pada permukaan tersebut. Metode persamaan diferensial terdiri dari dua macam yaitu metode eliptik dan hiperbolik. Keduanya dapat digunakan untuk menghasilkan mesh yang sangat baik pada daerah–daerah batas. Hanya saja, kedua metode tersebut membutuhkan sumber daya komputasi yang cukup besar. Khusus untuk metode eliptik, yang paling akurat di antara dua metode yang lain, memiliki prosedur numerik yang agak rumit dan hal tersebut terkadang menyebabkan *error* yang cukup fatal.

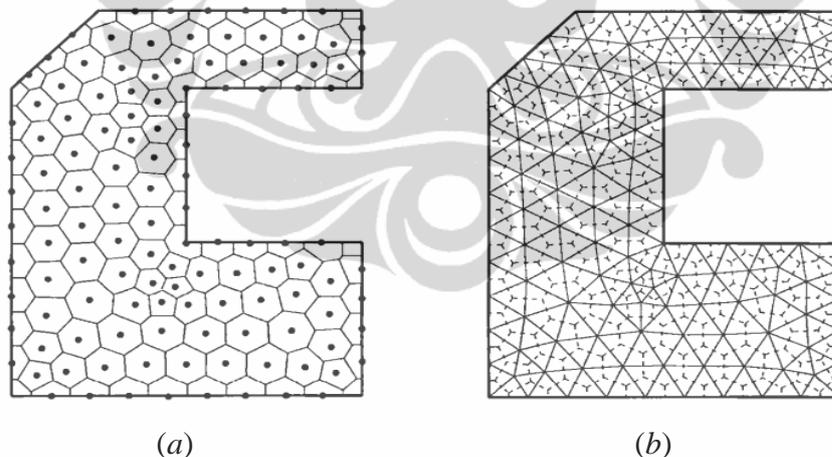
#### *Mesh Tidak Terstruktur*

Mesh tidak terstruktur dicirikan dengan komposisi bangun segitiga (untuk mesh 2D) dan tetrahedral (untuk mesh 3D). Dalam perkembangannya, banyak digunakan kombinasi berbagai macam bangun datar dan ruang untuk membuat mesh. Dua metode yang sering digunakan untuk membuat mesh dengan metode tidak terstruktur adalah metode *Delaunay* dan *advancing front*. Untuk sistem–sistem yang aga kompleks, kadang kedua metode tersebut dikombinasi. Prinsip dasar metode *Delaunay* adalah menghubungkan *node–node* pada grid membentuk segitiga, disebut *Delaunay triangulation*, (untuk mesh 2D) dan tetrahedral (untuk mesh 3D) sedemikian rupa sehingga tidak terdapat *node* di dalam segitiga atau tetrahedral tersebut. Metode *advancing front* membuat mesh secara berurutan dimulai dari grid yang telah dibuat di suatu permukaan tertentu. Daerah yang disebut *front* adalah daerah yang belum di–mesh dan arah rambatan/urutan mesh menuju ke daerah tersebut. Setiap segitiga baru atau tetrahedral dibuat dengan

meletakkan titik di koordinat berikutnya. Proses tersebut akan terus berlangsung hingga seluruh bagian domain terisi mesh. Peletakan titik–titik untuk membuat segitiga atau tetrahedral dikontrol oleh *background grid*. Metode *advancing front* menghasilkan distribusi titik–titik yang lebih halus dibanding metode *Delaunay*. Grid pada daerah batas/dinding adalah sesuatu yang krusial dalam pemodelan dinamika fluida. Grid tersebut harus benar–benar halus dan harus dipastikan tidak terdapat grid yang cacat. Metode *advancing front* menghasilkan pemodelan mesh yang lebih baik dibanding metode *Delaunay* untuk daerah batas/dinding. Berikut ini akan dibahas secara singkat tentang kedua metode tersebut.

#### *Metode Delaunay Triangulation*

Metode *Delaunay Triangulation* berbasis pada konsep yang dikembangkan oleh Dirichlet (Dirichlet, 1850). Di dalam sebuah domain, diletakkan titik–titik yang membentuk poligon atau polihedral pada ruang 3D yang disebut diagram *Voronoi* atau *Dirichlet Tessellation*, lihat **Gambar 2.14**.

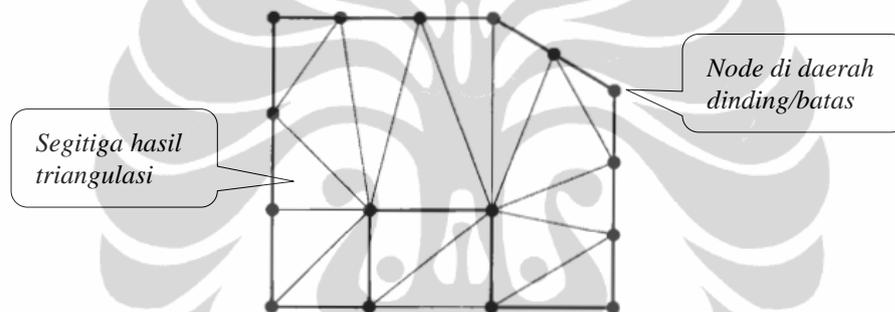


**Gambar 2.14** (a) Diagram *Vornoj* dan (b) mesh hasil triangulasi.

Proses triangulasi dilakukan dengan cara menghubungkan titik–titik pada diagram *Vornoj* maka akan diperoleh segitiga–segitiga yang tidak saling tumpang tindih dan tidak terdapat *node* di dalam segitiga–segitiga tersebut. Sebenarnya, metode *Delaunay triangulation* adalah cara menghubungkan *node–node* yang

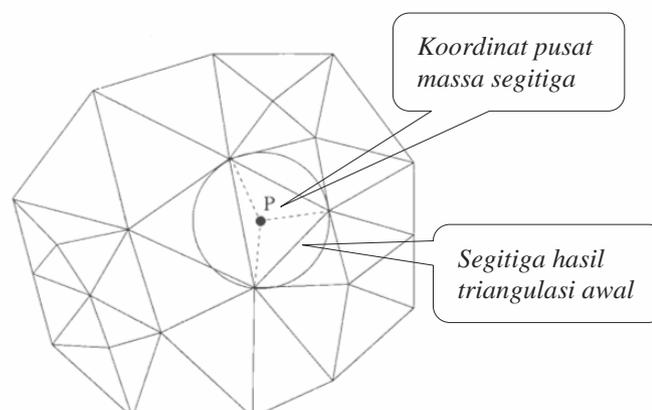
telah dibuat pada domain sistem membentuk suatu permukaan atau elemen volume. Untuk menghubungkan titik–titik tersebut, terdapat beberapa cara. Salah satunya yang cukup populer adalah *incremental point insertion strategy* (metode IPIS). Langkah–langkah untuk membuat mesh menggunakan metode IPIS adalah sebagai berikut:

1. Diskritisasi batas/dinding domain fisis sistem.
2. Membuat grid *Delaunay* awal yang melingkupi seluruh *node* di daerah batas/dinding domain. Ini bisa dilakukan dengan cara membuat segitiga–segitiga pada batas/dinding tersebut, lihat **Gambar 2.15**. Bisa juga membuat bangun segiempat, lalu membagi bangun tersebut menjadi dua segitiga. Setiap titik sudut segitiga harus berimpit dengan sebuah *node*.



**Gambar 2.15** Triangulasi daerah batas/dinding 2D.

3. Tandai seluruh elemen segitiga dan urutkan dari yang memiliki kualitas paling buruk hingga paling baik. Letakkan sebuah titik di koordinat pusat massa segitiga untuk setiap segitiga, lihat **Gambar 2.16**.



**Gambar 2.16** Meletakkan titik baru pada segitiga hasil triangulasi awal.

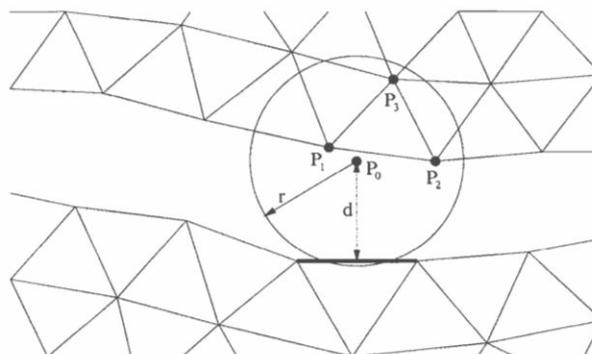
4. Lakukan triangulasi ulang berdasarkan titik yang telah dibuat pada langkah Nomor 3. Cek setiap elemen baru yang telah dibuat dan sesuaikan dengan ukuran dan kualitas mesh diinginkan.
5. Hapus seluruh elemen yang mungkin berada di luar domain sebagai hasil residu dari triangulasi ulang.
6. Cek keseluruhan mesh yang telah dihasilkan baik ukuran maupun kualitasnya.

Pembahasan lebih lanjut mengenai metode *Delaunay Triangulation*, silahkan mengkaji buku karya J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Application*.

#### *Metode Advancing Front*

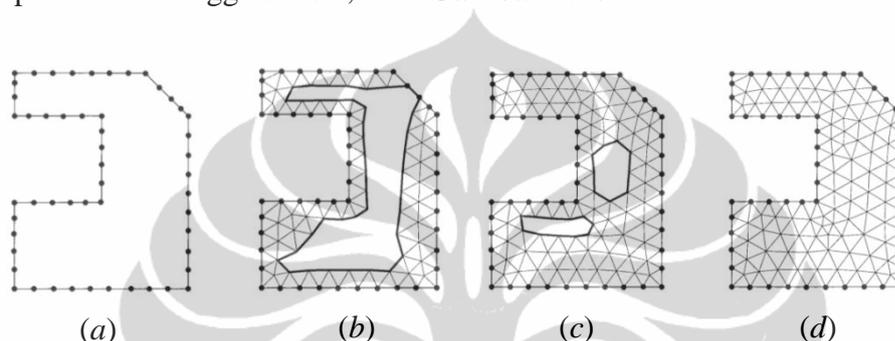
Metode *advancing front* diperkenalkan pertama kali oleh Peraire *et al.* (1980) dan Löhner *et al.* (1988). Langkah-langkah untuk membuat mesh dengan metode *advancing front* adalah sebagai berikut:

1. Diskritisasi batas/dinding domain fisis (membuat mesh permukaan).
2. Mengidentifikasi *edge* (permukaan, jika domain fisisnya 3D) yang merepresentasikan *front* kemudian urutkan berdasarkan ukuran *edge* atau permukaan. Hal ini dimaksudkan agar variasi perubahan ukuran dari satu *edge* dan permukaan ke *edge* atau permukaan lain tidak terlalu ekstrim.
3. Pilih sebuah *edge* dan letakkan titik  $P_0$  pada arah normal di atas titik pusat *edge* atau permukaan, lihat **Gambar 2.17**.



**Gambar 2.17** Menyisipkan titik  $P_0$  pada metode *advancing front* untuk domain 2D. *Edge* yang bergaris tebal adalah *edge* aktif.

4. Membuat lingkaran (atau bola) berjari–jari  $r$  dengan titik pusat  $P_0$ . Ukuran jari–jari ditentukan oleh ukuran grid lokal.
5. Menandai seluruh *node* yang berada di dalam lingkaran atau bola tersebut. Jika tidak ditemukan *node* di dalam lingkaran atau bola, buat lingkaran atau bola baru dengan tetap menggunakan  $P_0$  sebagai titik pusatnya.
6. Hapus *front edge* tadi dan tambahkan *edge* baru yang terbentuk dari proses yang telah dilakukan. Ulangi langkah tersebut hingga seluruh daftar *front edge* atau permukaan hingga selesai, lihat **Gambar 2.18**.



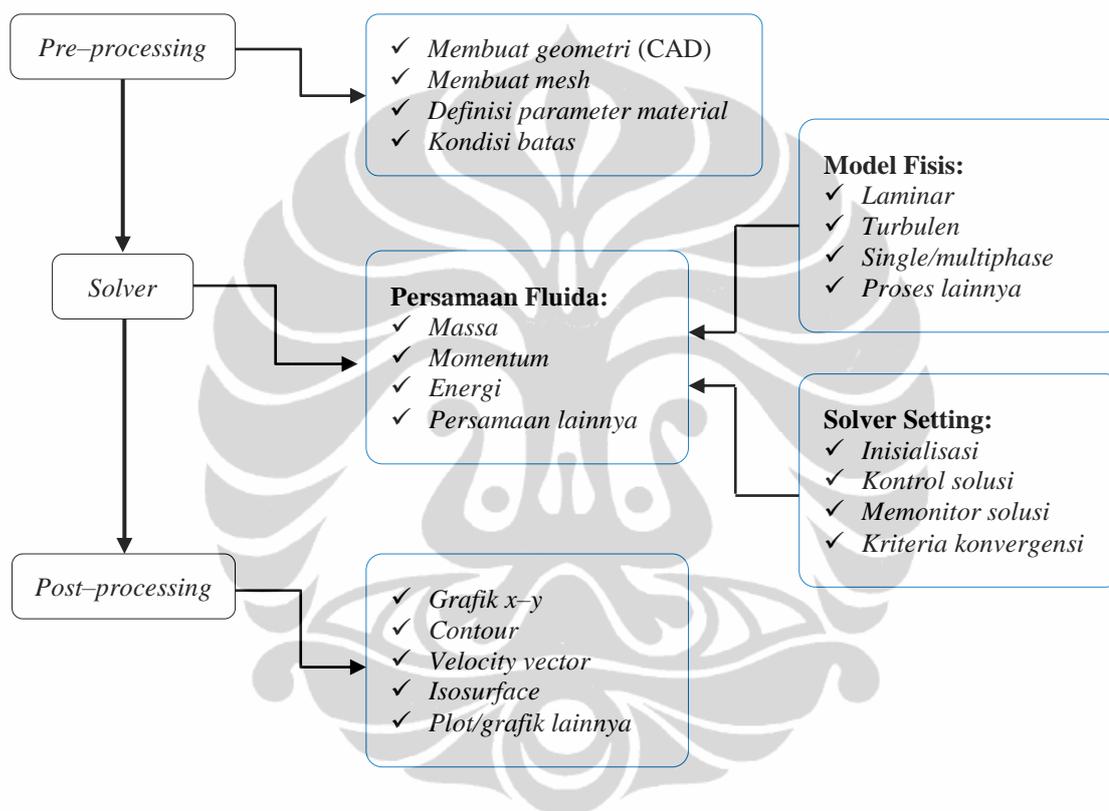
**Gambar 2.18** Proses triangulasi dan pembuatan grid 2D menggunakan metode *advancing front*. Garis tebal menunjukkan *edge* aktif.

### 2.6.6 Simulasi

Salah satu permasalahan yang saat ini muncul dan berusaha ditemukan solusinya adalah *closure laws*. Pada saat membahas persamaan RANS, muncul suku persamaan stress Reynolds yang belum diketahui berapa nilainya atau seperti apa bentuknya. Hal ini disebabkan oleh jumlah persamaan atau variabel yang tidak diketahui melebihi jumlah persamaan atau variabel yang diketahui. Salah satu tujuan simulasi dinamika fluida untuk menemukan *closure laws* tersebut. Secara garis besar, tahapan simulasi dinamika fluida dapat dilihat pada **Gambar 2.19**.

Simulasi dilakukan dengan cara menterjemahkan persamaan–persamaan fluida ke dalam bahasa pemrograman sehingga dapat dimengerti dan dieksekusi komputer. Kode program untuk melakukan simulasi dinamika fluida disebut *Computational Fluid Dynamics code* (CFD code). Saat ini terdapat banyak CFD

*code* versi komersial atau buatan sendiri. Developer kode CFD komersial yang cukup terkenal antara lain ANSYS Inc. (Kode CFX dan Fluent), COMSOL AB (Kode Comsol), dan Phoenics. Kode-kode tersebut dapat dijalankan di dalam sistem operasi baik Linux, Mac, atau Windows. Developer kode CFD non komersial (*free/open source*) yang cukup ampuh adalah OpenFOAM, beroperasi di dalam sistem UNIX.



**Gambar 2.19** Bagan alur simulasi dinamika fluida.

*Preprocessing* mencakup seluruh tahapan yang harus dilakukan untuk mempersiapkan simulasi. Empat hal terpenting yang harus dilakukan antara lain pembuatan geometri, pembuatan mesh, definisi parameter, dan karakterisasi kondisi batas domain. Geometri dibuat menggunakan aplikasi CAD seperti GAMBIT 2.4.6 (Fluent Inc., 2007), AutoCAD Mechanical Design 2011 (AutoDesk Inc., 2010), Design Modeller (ANSYS Inc., 2010), Pro/Engineer 4.0, MSC Patran, dan lain sebagainya. Pembuatan geometri termasuk bagian paling

krusial dalam simulasi dinamika fluida. Geometri dibuat mengacu pada sistem riil (domain fisis) yang ingin disimulasikan. Pembuatan domain harus teliti dan akurat, baik bentuk maupun ukurannya, bagian-bagiannya dan jenis material apa yang berada pada segmen yang mana.

Tahap berikutnya adalah membuat mesh pada domain sistem. Beberapa software CAD seperti GAMBIT dan MSC Patran dilengkapi dengan aplikasi *mesh*. Jadi, geometri yang telah dibuat dapat langsung di mesh saat itu juga. Pembuatan mesh juga dapat dilakukan secara terpisah menggunakan software khusus misalnya ANSYS CFX 12.1. Seperti yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya, simulasi dinamika fluida adalah simulasi persamaan diferensial dimana pendekatan yang bersifat diskrit digunakan untuk menemukan solusi persamaan diferensial tersebut. Diskritisasi tidak hanya dilakukan terhadap persamaan fluida tetapi juga domain spasial dan temporal sistem. Jika mesh yang dibuat bagus, kemungkinan untuk memperoleh solusi persamaan fluida juga akan lebih besar. Yang dimaksud dengan *mesh bagus* adalah mesh yang memiliki ukuran dan kombinasi geometri dengan kriteria tertentu sehingga dapat mengakomodasi sistem kompleks baik secara geometri maupun tipe dan komponen aliran fluidanya.

Setiap bagian pada domain sistem dapat memiliki ukuran dan jenis grid yang berbeda-beda, bergantung pada fenomena fisis yang muncul pada bagian tersebut. Dinamika aliran yang menginduksi perubahan-perubahan mendadak juga mempengaruhi jenis dan ukuran mesh. Walaupun telah memasukkan berbagai kriteria dan variabel untuk mengontrol kualitas mesh, tidak jarang ditemui mesh pada sub domain tertentu tidak valid. Evaluasi dan pengecekan kualitas mesh dengan demikian menjadi penting. Software Fluent menyediakan aplikasi untuk mengecek kualitas mesh sebelum mesh tersebut digunakan untuk menyelesaikan persamaan fluida.

Sistem fase tunggal dan multifase memiliki persamaan dan metode simulasi yang berbeda. Sistem fluida secara garis besar dapat dibedakan menjadi dua yaitu sistem fluida fase tunggal dan multifase. Untuk sistem fluida satu fase, biasanya, seluruh domain komputasi terisi oleh satu macam fluida saja. Untuk sistem dua

fase atau lebih, jenis fluida/material harus dispesifikasi pada domain komputasi. Bagian mana yang merupakan fase pertama dan bagian mana yang merupakan fase kedua dan seterusnya. Untuk sistem aliran multifase gas–cairan, spesifikasi sub domain ini sangat penting untuk menentukan bagaimana kondisi batas permukaan yang melingkupi sistem. Daerah batas/dinding pada setiap permukaan dapat memiliki karakter yang berbeda satu sama lain. Permukaan tertentu dapat berfungsi sebagai pembatas dimana tidak ada aliran keluar atau masuk ke dalam domain. Permukaan tersebut di–*assign* sebagai dinding (*wall*). Pada permukaan lainnya, dimana terdapat aliran keluar dari domain maka permukaan tersebut berfungsi sebagai *outlet*. *Outlet* dapat memiliki beberapa kondisi bergantung pada bagaimana dan apa yang keluar dari permukaan tersebut. Jika pada suatu permukaan terjadi aliran fluida masuk ke dalam domain komputasi maka permukaan tersebut dapat dikarakterisasi sebagai *inlet*.

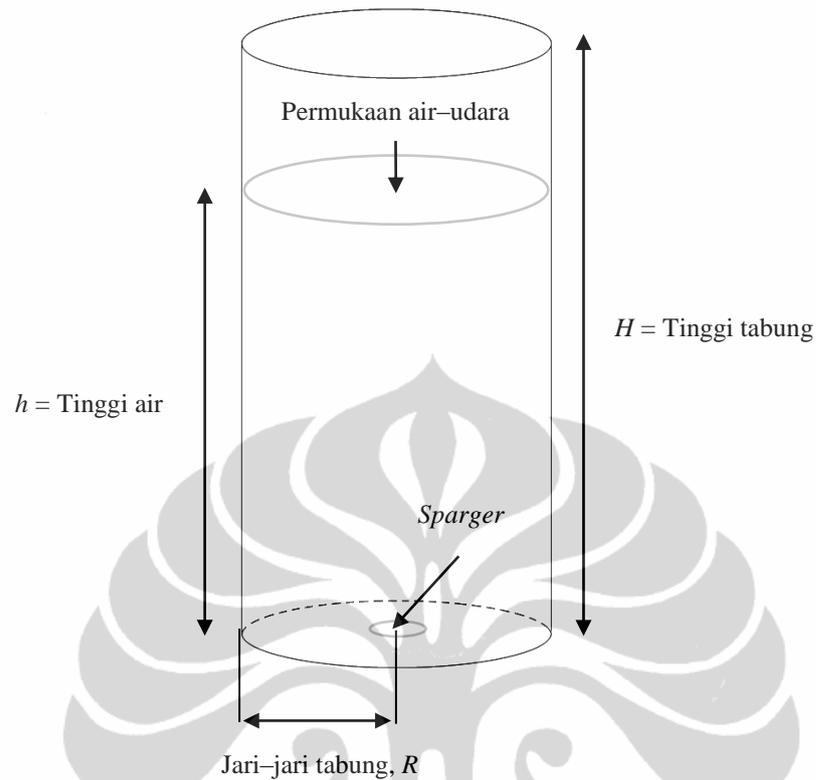
Tahapan berikutnya adalah *processing*. Pada tahap ini, pemodelan dinamika fluida memiliki peran yang sangat penting. Agar dapat menghasilkan pemodelan yang sesuai dengan fenomena alam baik secara kualitatif maupun kuantitatif, model persamaan yang digunakan harus disesuaikan, misalnya tipe aliran fluida (laminar atau turbulen), jumlah fase, kompresibel atau non–kompresibel, keadaan tetap atau transien, dan lain sebagainya. Dalam hal ini, pengetahuan yang baik tentang dinamika fluida dan proses–proses yang terjadi di dalamnya sangat menentukan hasil pemodelan. Hal–hal teknis seperti sumber daya komputasi terkadang juga harus diperhitungkan. Pada prinsipnya, semakin detail model yang kita gunakan maka semakin besar sumber daya komputasi yang dibutuhkan. Model–model seperti DNS dan FTM dapat digunakan untuk mengakses informasi dan mempelajari detail aliran fluida namun proses komputasinya membutuhkan waktu yang relatif lama. Tujuan dan jenis informasi yang ingin diperoleh dari hasil simulasi sebaiknya juga dipertimbangkan. Kadang informasi yang sangat detail tidak begitu dibutuhkan untuk menjelaskan dinamika suatu aliran fluida. Software–software yang sering digunakan untuk melakukan *processing* antara lain ANSYS CFX, Fluent, CFDLib, dan OpenFOAM yang berbasis pada metode FVM. Software lain yang cukup tangguh antara lain COMSOL yang berbasis pada metode FEM.

Khusus untuk simulasi transien, dibutuhkan tahapan untuk mengkondisikan dan memperkirakan dinamika sistem yang disebut *inisialisasi transien*. Inisialisasi ini sangat penting untuk memperkirakan keadaan awal sistem. Jika hasil inisialisasi bagus maka simulasi transien akan lebih cepat mencapai konvergensi. Selama proses pengolahan data, *monitoring* terhadap jalannya simulasi sebaiknya dilakukan. Hal ini bertujuan untuk mengontrol dan mengecek apakah terjadi *error* sebelum proses pengolahan data usai. *Monitoring* proses simulasi dapat dilakukan dengan grafik perubahan besaran-besaran fisis sistem terhadap waktu misalnya fraksi volume, momentum, kecepatan, dan turbulensi.

Setelah tahap *processing* selesai, akan diperoleh data-data yang meliputi kecepatan fase, fraksi volume, momentum, dan besaran-besaran fisis lainnya. Tahap *post-processing* adalah tahapan analisis dan interpretasi data yang dihasilkan dari simulasi. Data-data tersebut dapat divisualisasikan dalam format grafik, misalnya, kecepatan terhadap waktu, perubahan fraksi volume, plot *contour*, *streamline*, *isosurface*, dan animasi. Untuk software-software komersial, fasilitas *post-processing* biasanya sudah terinstal akan tetapi jika menghendaki untuk melakukan *post-processing* menggunakan software terpisah, OpenDX dan Paraview sepertinya patut dicoba. Kedua-duanya adalah software Gnu/GPL.

## 2.7 Definisi Parameter dan Simulasi

Simulasi dilakukan dengan mengacu pada *set up* eksperimen. Tabung yang digunakan sebagai kolom gelembung memiliki jari-jari 5,5 cm dengan tinggi 44 cm. Pada bagian bawah tabung diberi lubang yang berfungsi sebagai *sparger* dengan diameter yang bervariasi dari 1 mm hingga 2 cm sedangkan pada bagian atasnya dibiarkan terbuka, lihat **Gambar 2.20**. Tabung mula-mula diisi air hingga ketinggian yang divariasikan dari 40 cm hingga 50 cm. Gas diinjeksikan melalui *sparger* dengan kecepatan antara 0,5 cm/s hingga 3,0 cm/s. Parameter dan persamaan yang digunakan dalam simulasi menggunakan model Euler-Euler (model turbulen  $k-\varepsilon$ ) dapat dilihat pada **Tabel 2.1**.



**Gambar 2.20** Reaktor kolom gelembung sederhana dilengkapi dengan *sparger*.

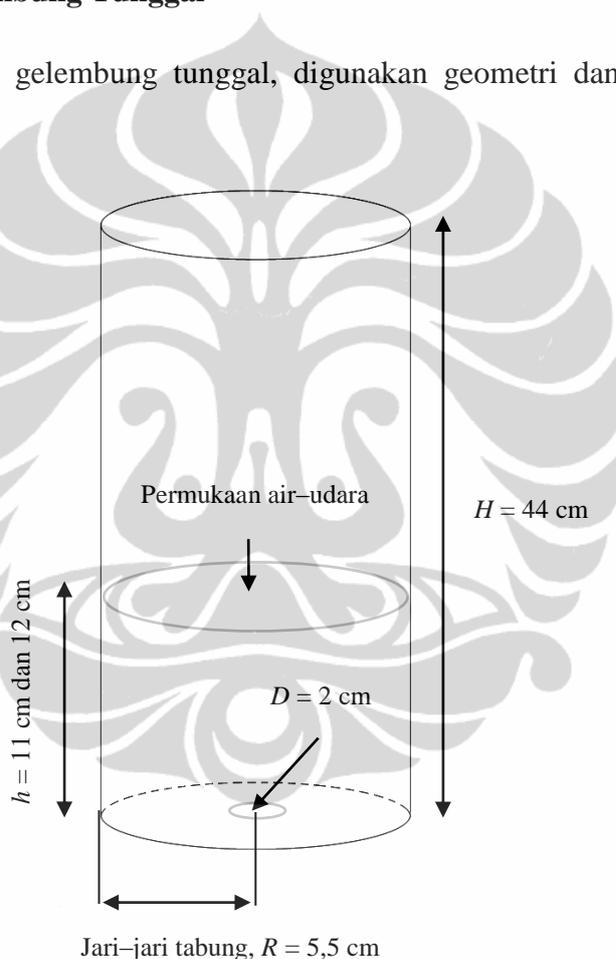
**Tabel 2.1** Parameter simulasi menggunakan model Euler–Euler (turbulen  $k-\varepsilon$ ).

Simulasi	$\mu_{BIT}$	$S_{k,BIT}$	$S_{\varepsilon,BIT}$	$C_D$	$C_L$	$C_{VM}$
S <sub>1</sub>	Pers. (2.65)	0	0	1,071	0,5	(0,25 1,53)
S <sub>2</sub>	0	Pers. (2.68)	Pers. (2.69)			
Parameter–parameter gas dan cairan						
<b>Gas:</b> $\rho_G = 1,29 \text{ kg/m}^3$ , $d_g = 4 \text{ mm}$ , $\mu_G = 1,78 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$						
<b>Air:</b> $\rho_L = 997 \text{ kg/m}^3$ , $\mu_{L,Lam} = 1,04 \times 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$						
Tegangan permukaan: $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$						
Bilangan Eötvös ( $E\ddot{o}$ ) = 2,15						
Kondisi batas tabung bagian atas: <i>Degassing</i>						

Pembuatan geometri dan *meshing* dilakukan dengan Comsol Design Modeller, Gambit 2.4.6, dan ANSYS Design Modeller diikuti dengan pengecekan kualitas *mesh* menggunakan CFX 12.1. Pengolahan data dan analisis dilakukan dengan perangkat lunak Comsol 4.0a, ANSYS 12.1, Matlab 2010a, dan beberapa software open source/freeware seperti OpenDX, Paraview, dan OpenFOAM.

### 2.7.1 Simulasi Gelembung Tunggal

Untuk simulasi gelembung tunggal, digunakan geometri dan parameter sebagai berikut:



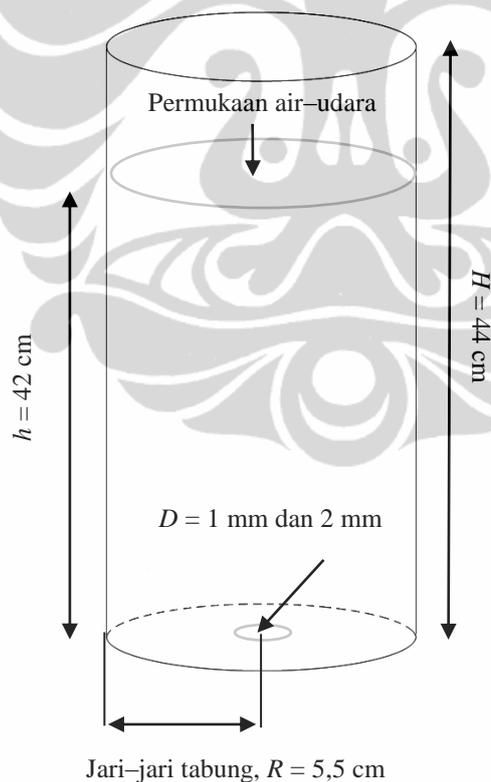
**Gambar 2.21** Kolom gelembung untuk simulasi aliran gelembung tunggal.

Ukuran tabung yang digunakan memiliki jari-jari 5,5 cm dan tinggi 44 cm. Diameter lubang gas sebesar 2 cm dengan tekanan yang *diset* sedemikian rupa sehingga gelembung keluar dari lubang dengan kecepatan yang awal nol. Aliran gelembung tunggal diuji coba pada ketinggian air 11 cm dan 17 cm. Pada saat

simulasi, diasumsikan sudah terbentuk gelembung berbentuk bola pada ketinggian 2 cm dari dasar tabung. Domain fisis tidak disimulasikan seluruhnya hanya sampai pada ketinggian 5 cm di atas permukaan air. Model persamaan fluida yang digunakan adalah RANS dengan model turbulensi  $k-\varepsilon$ . Besaran fisis udara dan air mengacu pada data **Tabel 2.1**. Metode *interface tracking* yang digunakan adalah *phase field*. Karena hanya terdapat satu gelembung maka proses penggabungan dan fragmentasi tidak disertakan dalam perhitungan.

### 2.7.2 Simulasi Kolom Gelembung

Simulasi banyak gelembung dilakukan pada domain komputasi dengan spesifikasi sebagai berikut:



**Gambar 2.22** Kolom gelembung untuk simulasi aliran banyak gelembung.

Tinggi air di dalam tabung sebesar 42 cm. Udara diinjeksi dengan fluks sebesar 0,01 kg/m.s. Kondisi outlet diatur sedemikian rupa sehingga hanya fase gas saja yang dapat keluar sedangkan air tetap bersirkulasi di dalam tabung. Model persamaan fluida dan turbulen serta besaran–besaran fisis air dan udara disajikan pada **Tabel 2.1**.



### BAB III

## ELECTRICAL CAPACITANCE VOLUME TOMOGRAPHY

*Electrical Capacitance Volume Tomography* (ECVT) adalah salah satu metode pencitraan *non-invasive* yang menggunakan konsep dasar interaksi medan elektrostatik (Warsito, Marashdeh, dan Fan, 2007). Metode pencitraan ECVT telah banyak digunakan untuk mengamati dan mengontrol sistem-sistem yang melibatkan aliran multifase seperti gelembung-minyak, gelembung-air, pasir-air dan lain sebagainya (Olmos, Primicia, dan Marron, 2006). Du, Warsito, dan Fan (2006) menggunakan sensor ECVT 12 channel untuk mengamati transisi aliran *dilute solids* menjadi aliran *slug* pada pipa. Dari hasil eksperimen tersebut dinamika aliran dan transisi aliran dapat diketahui baik secara 2D maupun 3D.

Dalam penelitian lainnya, Warsito dan Fan (2005) telah berhasil mengamati dinamika aliran gelembung spiral dalam pipa menggunakan sensor ECVT. Fluida yang digunakan antara lain udara dan Norpar 15. Gerakan dari dua zat dengan massa jenis dan konstanta dielektrik berbeda dapat dibaca oleh sensor ECVT dengan baik. Sensor ECVT pada dasarnya dapat digunakan untuk melakukan pengukuran terhadap sembarang bentuk obyek seperti yang dilakukan Fatmi dan Warsito (2010) dan Wang, *et.al* (2010). Fatmi telah berhasil mengamati aktivitas otak manusia menggunakan sensor ECVT. Bentuk sensor disesuaikan dengan bentuk kepala manusia (berbentuk seperti helm) sehingga seluruh bagian otak dilingkupi oleh sensor. Hasilnya sungguh mengagumkan. Sensor ECVT dapat mendeteksi lokasi bagian otak aktif beserta tingkat aktivitasnya untuk aktivitas-aktivitas yang berbeda. Fatmi dan Warsito menggunakan sampel aktivitas antara lain rileks, mendengarkan musik, dan berhitung.

Sensor ECVT untuk obyek dengan bentuk *non-uniform* lainnya digunakan oleh Wang *et al* (2010) pada *fluidized bed reactor* untuk mengamati penetrasi aliran jet (multifase) fluida baik secara kualitatif maupun kuantitatif. Pada sistem tersebut, sensor ECVT dapat memberikan citra 3D yang sangat baik. NASA, Tech4Imaging, dan National Institute of Standards & Technology berkolaborasi membuat sensor ECVT yang digunakan untuk mengukur level bahan bakar beku

pada pesawat luar angkasa di daerah dengan medan gravitasi nol (FY 09 *Seed Fund Awards*, 2010). Sebelumnya NASA juga telah menggunakan teknologi ini untuk memindai objek dielektrika pada pesawat ulang-alik selama misi ke antariksa (Marashdeh, 2007).

Metode ECVT dimanfaatkan untuk mendapatkan informasi mengenai distribusi spasial dari suatu campuran pada ruang tertutup, misalnya campuran gas dan air pada pipa atau tabung, dengan cara mengukur kapasitansi dari satu atau beberapa set elektroda yang dipasang pada dinding tabung (Olmos, Primicia, dan Marron, 2006). Elektroda–elektroda tersebut berfungsi sebagai sensor yang membaca perubahan atau dinamika sistem sebagai fluktuasi nilai permitivitas atau resistivitas. Data–data tersebut kemudian dikonversi menjadi citra dengan terlebih dahulu melakukan pengubahan sinyal–sinyal analog menjadi sinyal digital. Kelebihan dari sensor ECVT, selain bersifat *non-invasive*, adalah juga mampu memonitor proses–proses secara *real time*. Berdasarkan hasil studi yang telah dilakukan beberapa peneliti, kualitas citra hasil rekonstruksi sangat dipengaruhi oleh bentuk elektroda, jumlah elektroda, dan konfigurasi sensor (Olmos, Primicia, dan Marron, 2006; Warsito et al., 2010).

### 3.1 Prinsip Dasar ECVT

Sensor ECVT menghasilkan citra dari data kapasitansi obyek yang diukur (Warsito, Marashdeh, dan Fan, 2007). Nilai kapasitansi diukur dan dihitung menggunakan persamaan Poisson:

$$\nabla \cdot \varepsilon(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z) \quad (3.1)$$

Dimana  $\varepsilon$ ,  $\phi$ , dan  $\rho$  masing–masing menyatakan distribusi permitivitas, distribusi potensial medan listrik, dan rapat muatan. Kapasitansi yang terukur oleh pasangan elektroda dapat ditentukan dengan Persamaan (3.2).

$$C_i = -\frac{1}{\Delta V_i} \iint_{A_i} \varepsilon(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z) dA \quad (3.2)$$

$\Delta V_i$  merupakan beda potensial antar pasangan elektroda sedangkan  $A_i$  merupakan luas permukaan yang dilingkupi oleh detektor. Ada beberapa teknik yang digunakan untuk memperoleh data kapasitansi sistem yang diukur antara lain teknik linierisasi, numerik, dan pseudo-analitik. Teknik linierisasi umumnya lebih banyak diminati karena relatif lebih mudah dan cepat, walaupun harus berkompromi dengan hasil rekonstruksi yang kurang bagus pada segmen-segmen tertentu. Metode pseudo-analitik sebenarnya memberikan hasil yang akurat dan relatif cepat, akan tetapi metode ini menjadi sangat rumit untuk geometri sensor yang kompleks. Lain halnya dengan metode numerik. Metode ini dapat menangani geometri yang bahkan sangat kompleks sekalipun akan tetapi membutuhkan sumber daya komputasi yang sangat besar dan waktu perhitungan yang cukup lama.

Pada metode linierisasi, disebut juga model sensitivitas, domain yang menjadi target sensor dibagi menjadi elemen-elemen volume dengan dimensi tertentu. Perubahan permitivitas yang muncul pada setiap elemen volume tersebut dibaca oleh sensor sebagai perubahan kapasitansi. Dalam hal ini, respon sensor menjadi variabel yang sangat penting untuk merekonstruksi citra yang akurat dan *real time*. Sensitivitas sensor berkaitan dengan distribusi medan listrik dan beda potensial pada domain yang dianalisis, menurut Persamaan (3.3).

$$S_{ij} \cong V_{oj} \frac{\mathbf{E}_{si}(x, y, z) \cdot \mathbf{E}_{di}(x, y, z)}{V_{si} V_{di}} \quad (3.3)$$

dimana,  $\mathbf{E}_{si}$  merupakan medan listrik yang dihasilkan oleh elektroda ke  $i$  karena beda potensial  $V_{si}$  pada saat elektroda yang lain diground-kan. Sebaliknya,  $\mathbf{E}_{di}$  merupakan medan listrik yang dihasilkan elektroda pasangannya oleh beda potensial  $V_{di}$  dimana elektroda yang lain diground-kan.  $V_{oj}$  adalah volume dari elemen volume ke- $j$ . Sensitivitas sensor pada Persamaan (3.3) dapat ditransformasi menjadi bentuk matrik linier seperti pada Persamaan (3.4).

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{G} \quad (3.4)$$

$\mathbf{C}$  menyatakan data vektor kapasitansi dimensi  $M$  dan  $\mathbf{G}$  vektor citra dimensi  $N$ .  $M$  dan  $N$  masing–masing menyatakan jumlah kombinasi pasangan elektroda sensor dan jumlah elemen volume domain.

Dari Persamaan (3.4), terlihat bahwa citra yang dihasilkan dari data kapasitansi bergantung pada data kapasitansi  $\mathbf{C}$  dan sensitivitas matrik  $\mathbf{S}$ . Untuk merekonstruksi citra dari data kapasitansi digunakan metode proyeksi balik (*linier back projection*). Metode ini memproyeksi balik seluruh data pengukuran kapasitansi untuk memperoleh estimasi vektor citra  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}^T \mathbf{C} \quad (3.5)$$

Dengan menggunakan variabel kontrol pada persamaan (3.6), iterasi dilakukan untuk memperoleh citra objek yang lebih tajam dan jelas. Variabel kontrol ini digunakan untuk membandingkan data hasil pengukuran dengan data estimasi.

$$\mathbf{S}\mathbf{G} \leq \mathbf{C} \quad (3.6)$$

Saat ini metode iterasi yang sering digunakan dalam pencitraan digital adalah metode Landweber. Metode Landweber disebut juga metode *iterative linier back projection* (ILBP). Metode ILBP menghitung vektor citra  $\mathbf{G}$  yang memenuhi kriteria Persamaan (3.7).

$$f(\mathbf{G}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C})^T (\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C}) \quad (3.7)$$

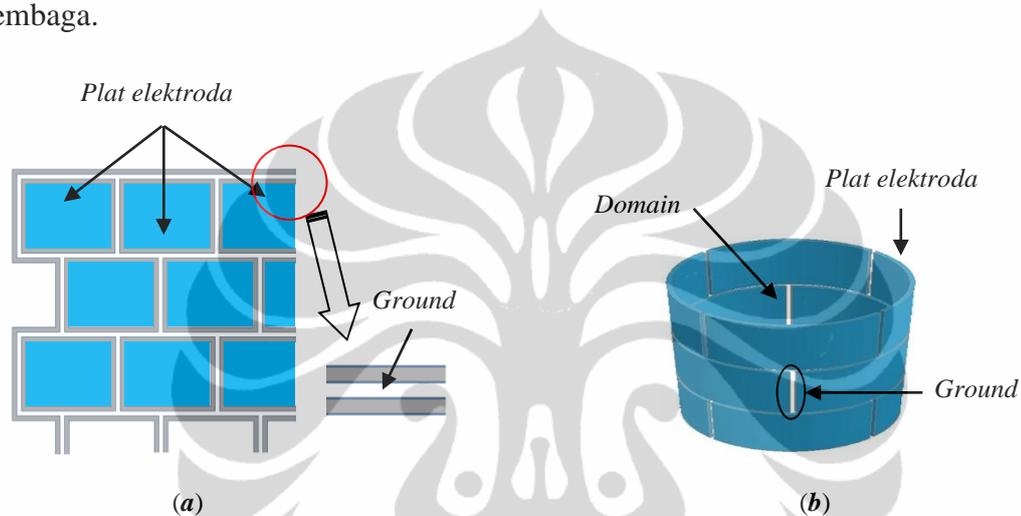
Iterasi dilakukan dengan teknik *steepest gradient descent*:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{k+1} &= \mathbf{G}^k - \alpha^k \nabla f(\mathbf{G}^k) \\ &= \mathbf{G}^k - \alpha^k \mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{G}^k - \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

dimana konstanta  $\alpha^k$  merupakan faktor penalti iterasi  $k$ .

### 3.2 Desain Sensor ECVT

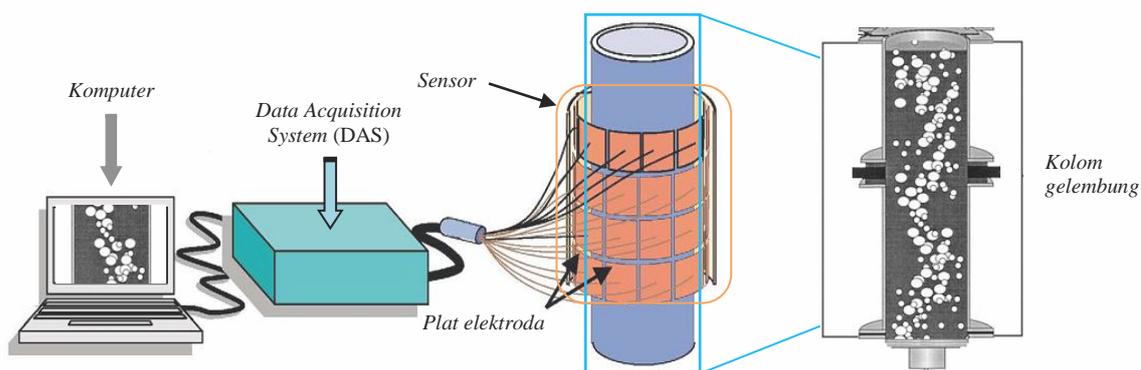
Desain sensor ECVT terdiri dari dua bagian yaitu desain geometri plat elektroda dan sistem sensor secara keseluruhan (selanjutnya disebut *sensor*). Plat–plat elektroda ini kemudian disusun dengan formasi seperti pada **Gambar 3.1**. Sensor akan digunakan untuk mengamati dinamika aliran multifase pada tabung berbentuk silinder sehingga geometri sensor disesuaikan dengan bentuk tabung yang digunakan, lihat **Gambar 3.2**. Plat elektroda terbuat dari lempengan tembaga.



**Gambar 3.1** (a) Susunan elektroda pada sensor ECVT, (b) Desain sensor ECVT.

### 3.3 Sistem ECVT

Sistem ECVT terdiri dari tiga komponen utama yaitu sensor, *data acquisition system* (DAS), dan komputer. Sensor berfungsi untuk mendeteksi perubahan sensitivitas pada domain sekaligus mengirimkan data–data tersebut dalam bentuk sinyal–sinyal analog ke perangkat DAS. Oleh DAS, sinyal analog diubah menjadi data–data digital. Dalam hal ini DAS memiliki peranan vital karena disamping sebagai pengubah sinyal juga berfungsi sebagai piranti yang mengatur transmisi beda potensial yang dialirkan ke plat–plat elektroda. Data–data digital kemudian dipindahkan ke komputer untuk diolah menjadi citra. Secara umum, bagan sistem ECVT dapat dilihat pada **Gambar 3.2**.



**Gambar 3.2** Bagan sistem ECVT sederhana terdiri dari sensor, DAS, dan komputer pengolah citra digital.

Sebelum digunakan untuk eksperimen, sensor ECVT yang telah dibuat tidak langsung digunakan. Pengecekan dilakukan terhadap sensor untuk mengetahui kualitas sensor, *noise*, dan kemungkinan *error* lainnya. Pengecekan sensor dilakukan mulai dari melihat apakah terdapat plat–plat elektroda yang tidak terpasang sebagaimana mestinya. Plat elektroda ini ditempelkan pada kertas karton. Kemudian kertas karton yang sudah ditempel plat elektroda ditempelkan ke silinder (paralon). Pada saat penempelan karton ini kadang terdapat celah udara atau bagian yang tidak benar–benar rapat. Berdasarkan evaluasi sensor yang telah dilakukan sebelumnya, penempelan karton yang tidak presisi ini menyebabkan *noise* yang sangat mengganggu karena akan berinterferensi dengan objek yang diukur. Untuk mengatasi *error* semacam maka kertas karton dicabut, lalu dipasang kembali dengan lebih teliti dan harus benar–benar presisi agar tidak terdapat celah udara di antaranya.

*Error* lainnya yang seringkali trivial adalah pemasangan resistor. Antara plat elektroda satu dengan yang lain saling berdekatan, berjarak sekitar 4–6 mm satu sama lain dengan 2 mm ruang di antaranya digunakan untuk menempelkan plat kecil yang berfungsi sebagai *ground*. Setiap koneksi harus dicek satu per satu untuk memastikan bahwa tidak ada resistor yang terhubung dengan tidak semestinya.

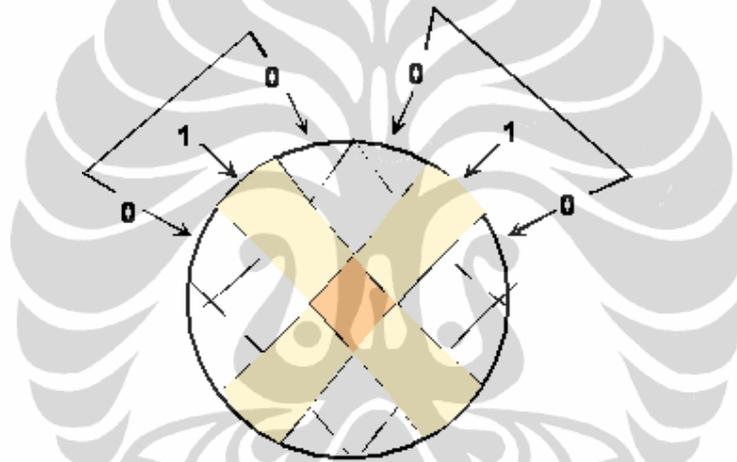
Untuk melakukan hal tersebut, beberapa *set* eksperimen dilakukan. Eksperimen pertama biasanya untuk mengecek apakah ada *noise* atau tidak. Ada tidaknya *noise* dapat dilihat pada grafik kapasitansi saat melakukan kalibrasi. Kalibrasi dilakukan terhadap dua obyek yang memiliki perbedaan nilai konstanta dielektrik yang cukup besar, misalnya air dan udara. Karena nilai konstanta dielektrik air lebih besar dibanding udara maka nilai minimum pengukuran kapasitansi diset pada nilai kapasitansi udara sedangkan nilai maksimum pengukuran kapasitansi diset pada nilai kapasitansi air. Jika pada saat melakukan pengukuran pengukuran terhadap air saja atau udara saja, setelah kalibrasi, terdapat nilai kapasitansi yang tidak semestinya, misalnya yang harusnya terukur nol muncul nilai 0,4 atau yang lain nilai di antara 0 dan 1. Setelah dipastikan bahwa tidak terdapat *error* pada sensor maka eksperimen dapat langsung dilakukan.

### 3.4 Rekonstruksi Citra ECVT

Data yang dihasilkan dari sensor ECVT dikirim ke DAS melalui kabel konektor khusus. Setelah melalui serangkaian konversi dan penyesuaian, DAS kemudian mengirimkan data ke komputer dalam bentuk data-data matrik. Data matrik ini nantinya akan diolah menjadi citra digital. Agar dapat melakukan rekonstruksi, dibutuhkan matrik khusus dan unik untuk setiap sensor yang disebut matrik sensitivitas. Matrik ini diperoleh melalui serangkaian simulasi elektrostatik untuk melihat distribusi medan listrik yang dihasilkan setiap plat untuk suatu rancangan sensor tertentu. sensor yang digunakan dalam eksperimen pada penelitian kali ini adalah sensor 16 Cahnnel, denga plat berbentuk persegi panjang, tersusun secara berpilin (*twisted*). Matrik sensitivitas untuk sensor ini pernah dibuat sebelumnya dan telah diuji beberapa kali untuk mengetes sensor tersebut. Hasilnya sangat bagus dan oleh karena itu matrik sensitivitas ini nantinya akan digunakan dalam proses pengolahan data digital.

Rekonstruksi citra data sensor ECVT adalah bagian vital dari proses ini. Melalui tahapan inilah objek yang di”lihat” oleh sensor ECVT akan ditampilkan

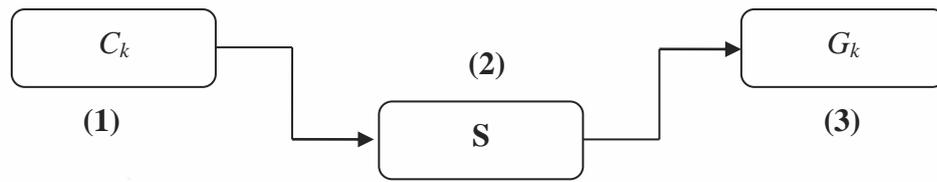
dalam bentuk dan sifat fisi (berdasarkan besaran tertentu) yang sesuai dengan bentuk dan karakter objek aslinya. Salah satu metode rekonstruksi citra yang sering digunakan adalah metode *Linier Back Projection* (LBP). Selain mudah dan memiliki *track record* yang lumayan baik, algoritma metode LBP memang sangat manjur untuk digunakan merekonstruksi citra sensor berbasis kapasitansi. Asumsi dasar metode LBP adalah nilai sensitivitas selalu konstan dalam daerah sensitivitas (*sensing domain*). Data kapasitansi yang diukur dari sensor digunakan untuk mencari vektor citra. Mengacu pada Persamaan (3.4), elemen–elemen matriks **S** dapat dihitung dengan sejumlah metode, misalnya metode yang digunakan oleh Isaksen dan Nordtvedt (1995).



**Gambar 3.3** Diagram metode *Back Projection*.

Pada gambar di atas, domain citra dipetakan ke dalam pixel (*picture element*) dengan metode spesifikasi objek dibedakan dengan nilai 1 dan 0 dimana 1 berarti terisi (ada objek) sedangkan 0 tidak ada objek. Karena invers matrik pada Persamaan (3.5) tidak ada maka digunakan solusi pendekatan matriks. Algoritma LBP menggunakan nilai transpos dari sensitivitas matriks sebagai inversnya, sehingga memiliki dimensi  $N \times M$ . Secara umum, algoritma metode LBP dapat nyatakan pada **Gambar 3.4**. Elemen image diperoleh dari Persamaan (3.5) yang juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$G(x, y, z) = S^T(x, y, z) \sum_i \sum_j \frac{C_{i,j}^{rata-rata} - C_{i,j}^{kosong}}{C_{i,j}^{isi} - C_{i,j}^{kosong}}$$

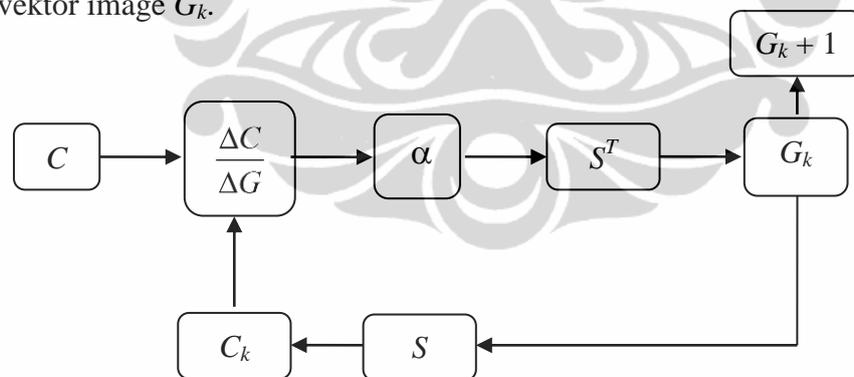


**Gambar 3.4** Algoritma metode LBP.

$C_{i,j}^{rata-rata}$  adalah data kapasitansi yang diukur pada elektroda  $i$  dan  $j$ ,  $C_{i,j}^{kosong}$  adalah kapasitansi pasangan elektroda  $i$  dan  $j$  ketika digunakan untuk mengukur objek dengan permitivitas rendah, daerah  $C_{i,j}^{isi}$  adalah kapasitansi elektroda  $i$  dan  $j$  ketika digunakan untuk mengukur objek dengan permitivitas tinggi.  $N_e$  adalah jumlah elektroda.

### 3.5 Metode Iterasi Menggunakan Persamaan Landweber

Implementasi komputasi algoritma Landweber disajikan pada diagram di bawah ini. Nilai  $G/C$  mewakili problem maju untuk mendapatkan vektor kapasitans  $C_k$  dari vektor image  $G_k$ .



**Gambar 3.5** Langkah-langkah pengerjaan rekonstruksi citra menggunakan metode Landweber.

Algoritma iterasi juga dapat diekspresikan dengan persamaan berikut:

$$G_0 = S^T C \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} G_k + 1 &= G_k + \alpha S^T \Delta C_k \\ &= G_k + \alpha S^T (C - S G_k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Teknik iterasi ini dapat digunakan untuk meningkatkan resolusi dan akurasi citra yang dihasilkan sensor ECVT. Proses iterasi dilakukan dengan tahap berikut ini:

1. Set kapasitansi  $C$  untuk satu frame citra diukur dan set dari nilai inisial *pixel*  $G_0$  dihitung menggunakan persamaan (3.9).
2. Nilai pendekatan permitivitas  $G_0$  kemudian digunakan untuk menghitung kembali set kapasitansi  $C_1$  menggunakan persamaan (3.4). Maka sebuah set kapasitansi error (*error capacitance*)  $\Delta C = (C - C_1)$  diukur dan digunakan untuk menghasilkan set permitivitas error (*error permittivity*)  $\Delta G_0 = S^T \Delta C_0$  menggunakan Persamaan (3.4) memberikan:

$$\Delta C = C^* - S G_0$$

3. Permitivitas *error* kemudian digunakan untuk mengoreksi permitivitas sebelumnya untuk menghasilkan nilai set pixel  $G_2$  yang baru, dimana  $G_2 = G_1 + \Delta G$ . Nilai permitivitas  $G_2$  kemudian digunakan untuk menghasilkan nilai set kapasitansi  $C_2$  yang baru dan pengulangan ini dilakukan berulang hingga nilai permitivitas konvergen menuju solusi yang sebenarnya.
4. Didapat persamaan iterative atau yang lebih dikenal dengan persamaan Landweber, yaitu:

$$G_{k+1} = G_k + \alpha S^T (C - S G_k)$$

$\alpha$  adalah faktor penalti atau relaksasi. Teknik penambahan faktor  $\alpha$  digunakan oleh Reinecke dan Mewes untuk meningkatkan akurasi serta laju konvergensi. Hanya saja metode ini membutuhkan waktu yang lebih lama. Untuk meningkatkan kinerja, nilai  $\alpha$  dicari dengan persamaan:

$$\alpha_k = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{k}$$

$\alpha_0$  dan  $\beta_0$  adalah konstanta yang bernilai positif. Faktor  $\alpha$  dapat ditentukan pula berdasarkan konvergensi yang cocok yaitu:

$$\alpha_k = \frac{2}{\lambda}$$

$\lambda$  adalah nilai eigen fungsi  $S^T S$ . Nilai  $\alpha_k$  berpengaruh terhadap kualitas citra dan tingkat konvergensi.



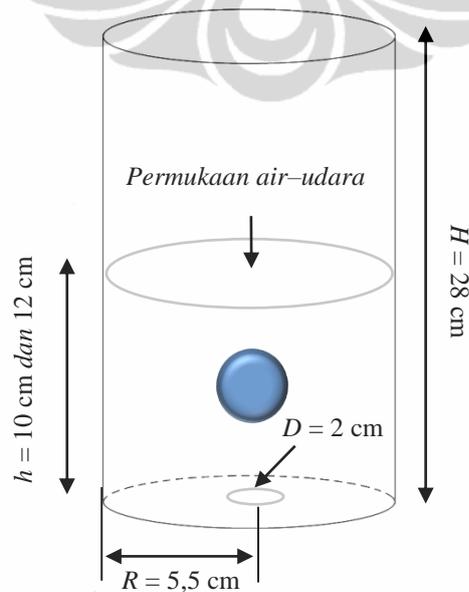
## BAB IV PENGOLAHAN DATA, ANALISIS, DAN DISKUSI

Simulasi dan eksperimen dilakukan untuk mengetahui dinamika aliran multifase gelembung gas-cairan. Simulasi terdiri dari dua bagian antara lain simulasi gelembung gas tunggal pada cairan dan simulasi dinamika aliran multifase pada kolom gelembung. Untuk mengkonfirmasi hasil simulasi, eksperimen dilakukan untuk sistem gelembung gas tunggal. Dinamika aliran multifase pada kolom gelembung dilakukan menggunakan dua model turbulen yaitu model  $k$ -tanpa induksi turbulen dari gelembung dan model  $k$ -dengan induksi turbulen dari gelembung.

### 4.1 Simulasi Dinamika Aliran Multifase: Gelembung Tunggal

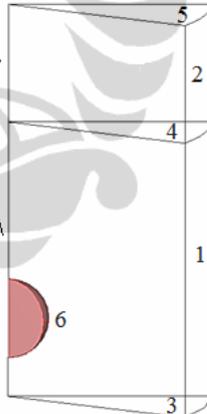
#### 4.1.1 Simulasi Gelembung Tunggal

Pada bagian pertama, simulasi dilakukan untuk memodelkan aliran sebuah gelembung yang bergerak naik pada cairan. Gelembung dimodelkan sebagai fase terdispersi yang memiliki bentuk dan dimensi simetris. Geometri, syarat batas, dan parameter lainnya disajikan pada **Gambar 4.1** dan **Tabel 4.1**.



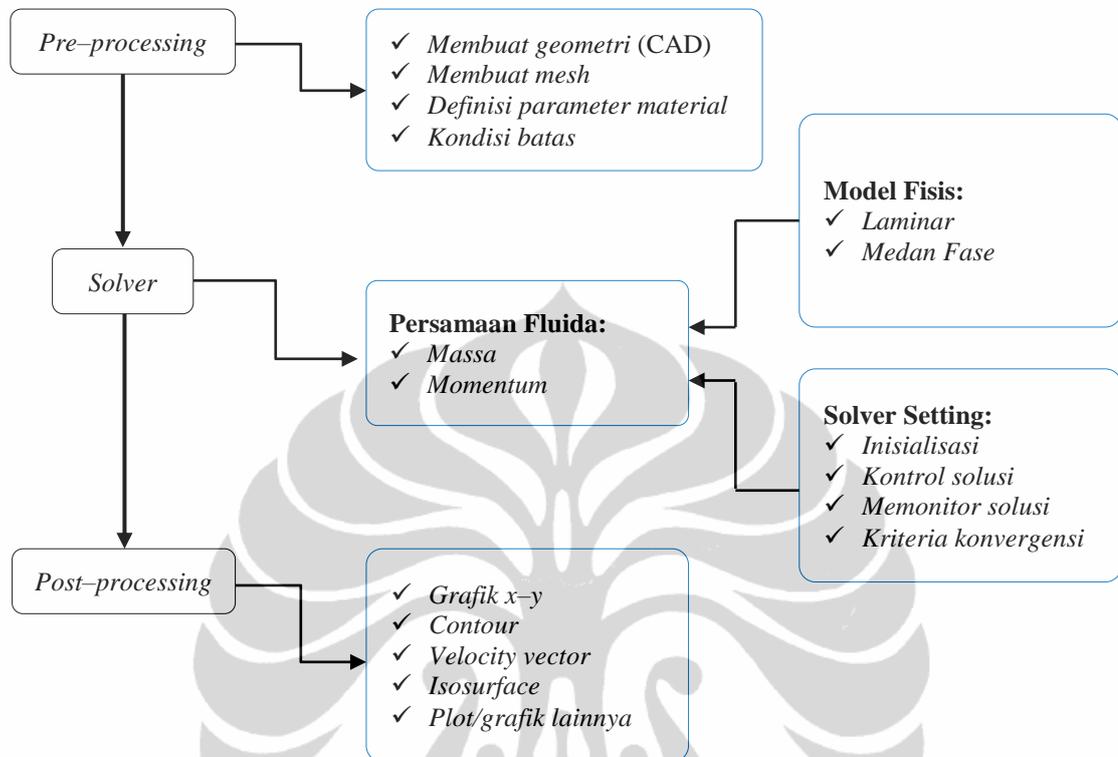
**Gambar 4.1** Skema sistem gelembung di dalam air.

**Tabel 4.1** Model dan parameter simulasi gelembung tunggal di dalam air.

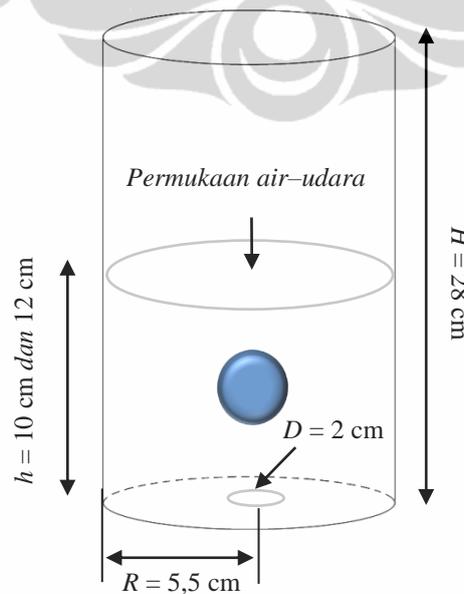
Model	Medan fase		Persamaan Navier Stokes	
Laminar	$\chi$	$\varepsilon$	Difusi isotropik	Difusi <i>streamline</i>
	10 m.s/kg	1 mm	$\sigma_{id} = 0,5$	$\sigma_{sd} = 0,5$
Parameter-parameter gelembung gas dan cairan				
<p><b>Gas:</b> <math>\rho_G = 1,29 \text{ kg/m}^3</math>, <math>\mu_G = 1,78 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}</math></p> <p><b>Air:</b> <math>\rho_L = 1.000 \text{ kg/m}^3</math>, <math>\mu_L = 1,04 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}</math></p> <p>Koefisien tegangan permukaan, <math>\sigma = 0,072 \text{ N/m}</math></p> <p>Percepatan gravitasi, <math>g = 9,81 \text{ m/s}^2</math></p>				
Kondisi dan syarat batas				
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Daerah (1, 2, dan 3) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipe: <i>Wall</i></li> <li>• Kondisi: <i>slip velocity</i></li> </ul> </li> <li>✓ Daerah (4 dan 6) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kondisi: <i>Initial fluid interface</i></li> </ul> </li> <li>✓ Daerah (5) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipe: <i>wall</i></li> <li>• Kondisi: <i>no slip velocity</i></li> </ul> </li> <li>✓ Daerah (7) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipe: <i>Symmetry</i></li> <li>• Kondisi: <i>Axial symmetry</i></li> </ul> </li> </ul>				

Diasumsikan bahwa hanya terdapat sebuah gelembung yang diinjeksi dari *sparger* sehingga dinamika aliran air dan gelembung hanya dipengaruhi oleh induksi dari gelembung tersebut terhadap air di sekitarnya. Karena pengaruh gaya hidrostatis, dari posisi diam, gelembung mengalami percepatan dan perubahan bentuk hingga akhirnya pecah setelah mencapai daerah batas air dan udara. Sebelum beranjak ke

pembahasan hasil simulasi, berikut ini akan dibahas prosedur komputasi yang digunakan dalam simulasi gelembung tunggal.

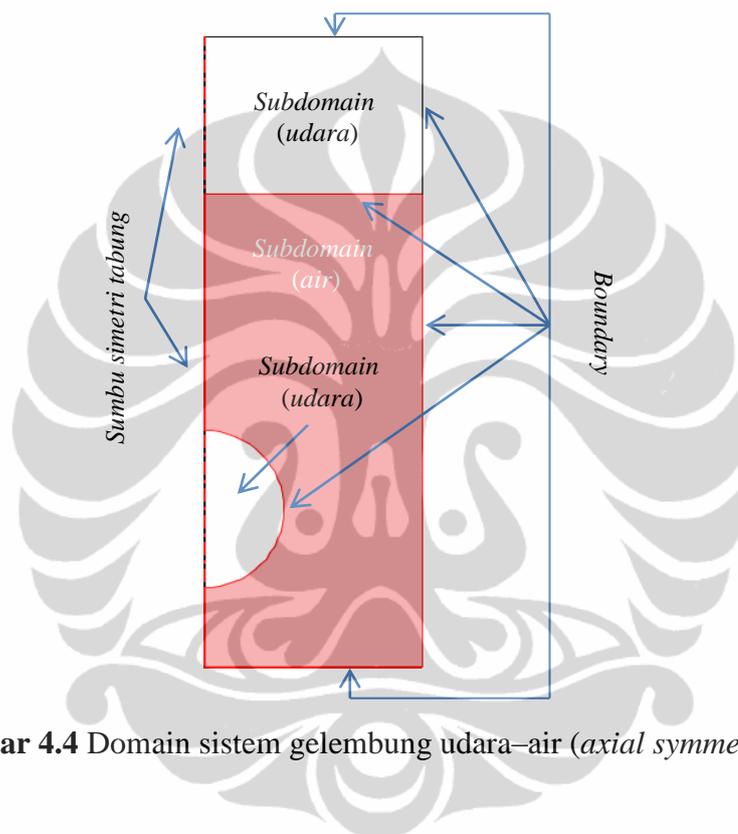


**Gambar 4.2** Langkah-langkah yang digunakan dalam simulasi gelembung tunggal di dalam air.



**Gambar 4.3** Ilustrasi sistem gelembung tunggal di dalam air.

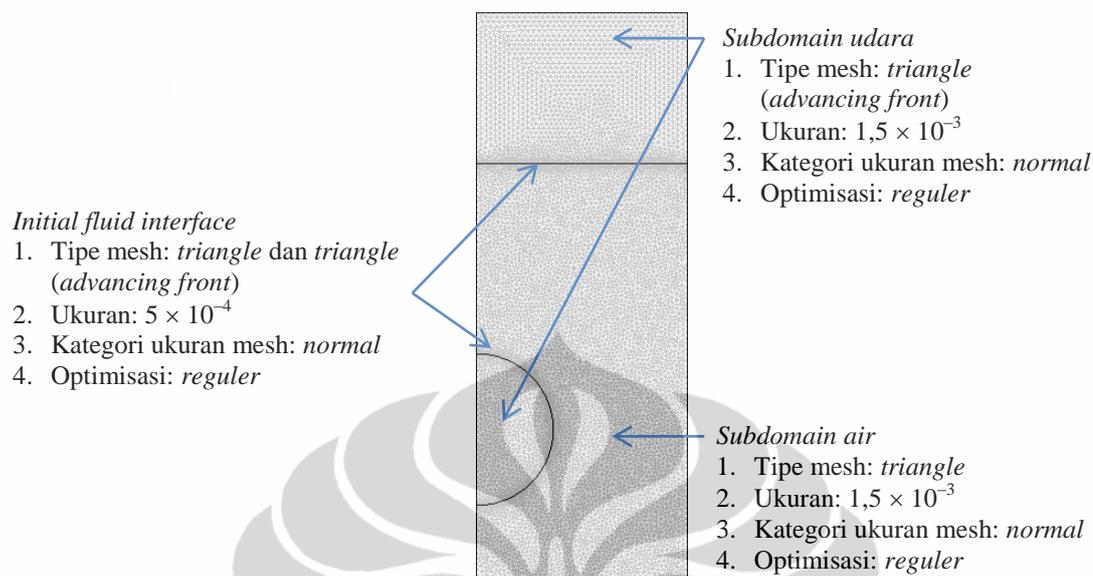
Mengacu pada **Gambar 4.3**, sistem gelembung udara–air dapat disederhanakan menjadi sistem dua dimensi mengingat sistem tersebut bersifat simetris (*axial symmetry*). Diasumsikan deformasi yang terjadi pada gelembung bersifat simetris. Demikian juga distribusi gaya yang bekerja dan kecepatan di setiap bagian–bagian gelembung tersebut. Dalam proses pengolahan data, **Gambar 4.3** kemudian disederhanakan menjadi sistem dua dimensi (*axial symmetry*), seperti tampak pada **Gambar 4.4**.



**Gambar 4.4** Domain sistem gelembung udara–air (*axial symmetry*).

Geometri domain sistem dibuat menggunakan program CAD pada perangkat lunak Comsol 3.5. Geometri yang digunakan dalam simulasi dibuat sesuai dengan ukuran geometri tabung yang digunakan dalam eksperimen. Namun mengingat ukuran tabung tersebut cukup besar (diameter 11 cm dan tinggi 44 cm), tabung yang disimulasikan hanya sebagian saja yaitu setinggi 18 cm dan diameter 11 cm. Dari ukuran tersebut, 12 cm tabung diisi dengan air sedangkan sisanya diisi dengan udara. Ukuran ini mengacu pada bidang permukaan air–udara. Diameter gelembung mula–mula adalah 2 cm, 3 cm, dan 4 cm dengan bentuk bola sempurna. Proses selanjutnya adalah membuat *mesh*. Setelah dilakukan beberapa

kali perhitungan dan pengecekan, kualitas *mesh* terbaik diperoleh dengan spesifikasi sebagai berikut:

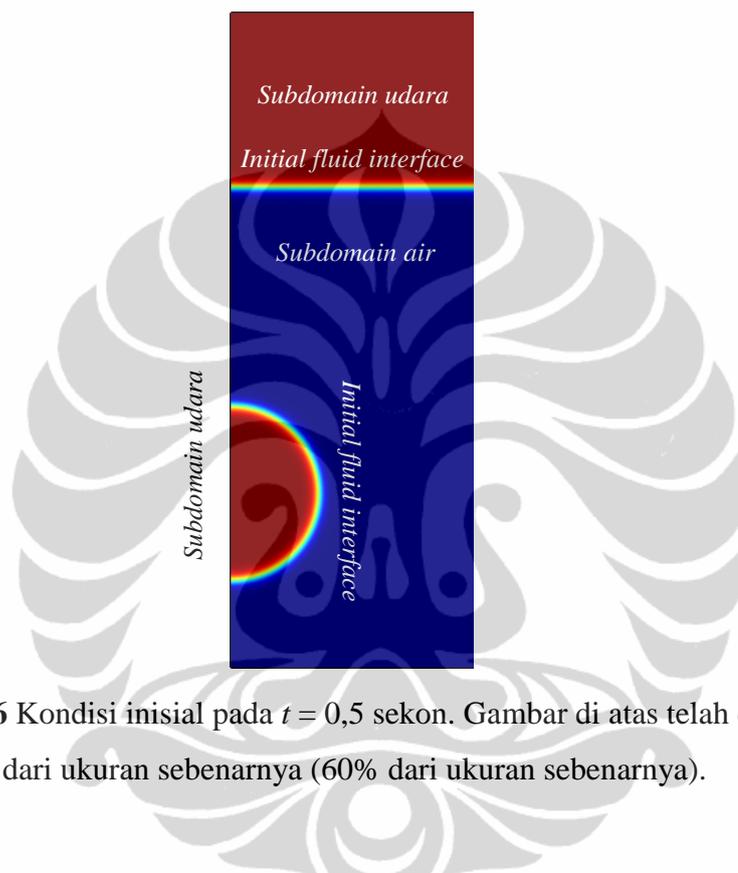


**Gambar 4.5** Mesh geometri dan parameter–parameter yang digunakan.

Pemilihan ukuran dan tipe *mesh* sangat penting sebelum memulai melakukan perhitungan. Hal ini terutama berkaitan dengan pendefinisian ketebalan permukaan yang memisahkan gelembung udara dan air. Jika ukuran *mesh* yang digunakan terlalu besar maka kemungkinan besar kondisi inisial sistem memiliki kualitas buruk sehingga pada saat simulasi secara transient (bergantung waktu) sulit mencapai kondisi konvergen atau bahkan simulasi yang dilakukan gagal di tengah–tengah proses.

Proses *processing (solver)* terdiri dari dua tahap yaitu *transient initialization* dan *transient*. *Transient initialization* dilakukan untuk menentukan kondisi awal simulasi *transient*. Tahapan ini sangat penting untuk menentukan parameter simulasi, kondisi–kondisi batas, serta nilai–nilai variabel awal yang akan diolah pada tahap berikutnya. Kondisi inisial yang baik akan mempengaruhi proses simulasi berikutnya. Hal ini terutama berkaitan dengan seberapa cepat simulasi akan mencapai batas konvergensi. Tahap *transient initialization* dilakukan selama 0,5 sekon sebanyak 500 kali iterasi menggunakan metode solusi persamaan linier *Direct (PARDISO)* dan algoritma (*pre–ordering*) *nested dissection* dengan toleransi relatif sebesar 0,001 dan toleransi absolut sebesar 0,0001.

Metode *Direct* (PARDISO) bekerja lebih cepat ketika dikombinasi dengan metode BDF sebagai metode diskritisasi temporalnya dengan nilai orde minimum dan maksimum masing–masing 1 dan 2. Untuk menangani konstrain pada sistem persamaan linier, digunakan metode eliminasi. Dengan menggunakan parameter kontrol permukaan setebal 1 mm, diperoleh kondisi inisial seperti tampak pada **Gambar 4.6**.

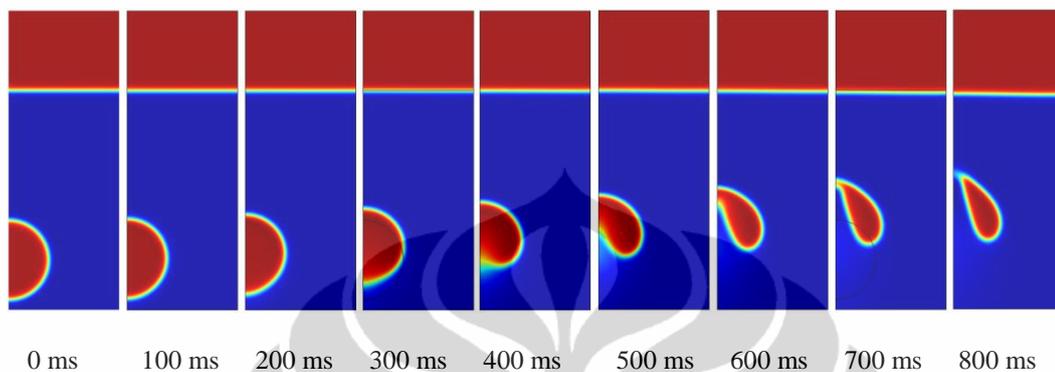


**Gambar 4.6** Kondisi inisial pada  $t = 0,5$  sekon. Gambar di atas telah diperkecil dari ukuran sebenarnya (60% dari ukuran sebenarnya).

Tahap berikutnya adalah simulasi *transient*. Simulasi transient dilakukan selama 1 sekon hingga 2 sekon sebanyak 1.000 hingga 2.000 iterasi. Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan, lebih dari tiga puluh simulasi, setiap gelembung udara rata–rata membutuhkan waktu kurang dari 0,3 sekon untuk mencapai permukaan air–udara. Waktu yang cukup singkat ini dikarenakan jarak tempuh gelembung yang kecil (hanya 8 cm, dihitung dari titik pusat gelembung). Setiap simulasi rata–rata membutuhkan waktu antara 1 hingga 3 jam. Simulasi dilakukan menggunakan perangkat lunak Comsol 3.5 yang dijalankan pada komputer Core i5 RAM 6 GB dan Core i3 RAM 2 GB.

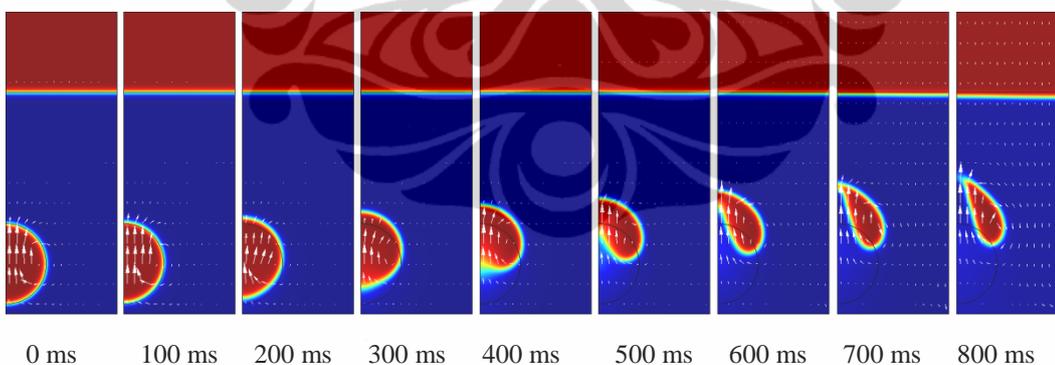
### 4.1.2 Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan I

Hasil simulasi gelembung tunggal dengan menggunakan parameter fisis standar seperti yang tertera pada **Tabel 4.1** memberikan hasil yang cukup mencengangkan.



**Gambar 4.7** Evolusi gelembung dari  $t = 0$  sekon hingga  $t = 80$  ms.

Deformasi gelembung mulai terlihat pada  $t = 30$  ms. Deformasi ini dikarenakan adanya tekanan yang bekerja pada permukaan gelembung bagian bawah yang diakibatkan oleh induksi kecepatan yang bekerja pada gelembung.



**Gambar 4.8** Plot kecepatan gelembung dan air dari  $t = 0$  ms hingga 800 ms.

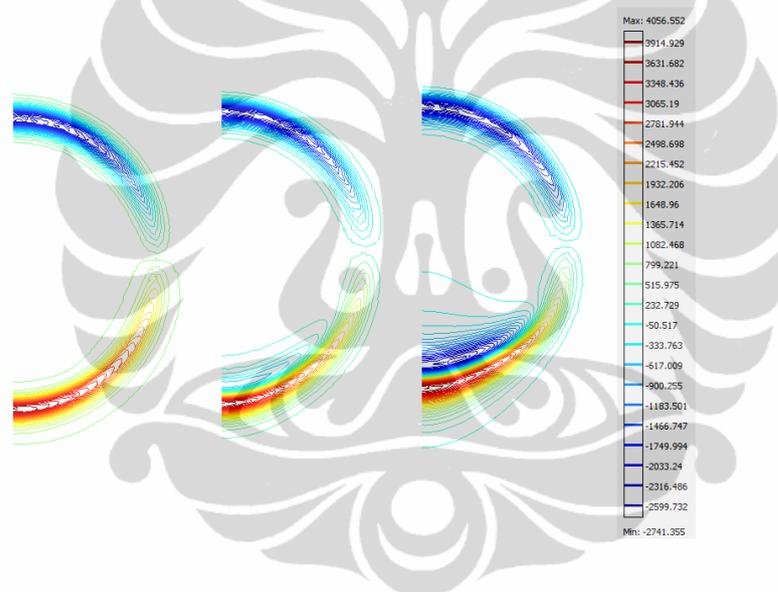
Panjang garis anak panah merepresentasikan besar dan arah kecepatan fluida. Pada saat  $t = 0$  ms, gelembung tepat akan bergerak. Gelembung memperoleh percepatan akibat gaya hidrostatis yang bekerja padanya dimana gaya ini sebanding dengan berat air yang memiliki volume sama dengan volume gelembung. Akibat adanya gaya hidrostatis ini, gelembung bergerak ke atas. Pada

saat  $t = 100$  ms, terlihat vektor kecepatan yang bekerja pada gelembung berubah. Hal ini diikuti dengan gerakan air yang ada di sekitarnya. Air yang berada di bagian bawah gelembung mengalami sirkulasi, membentuk putaran dan memberikan efek dorongan terhadap permukaan gelembung pada bagian bawah. Semakin jauh jarak yang ditempuh gelembung, semakin besar arus perputaran air, seperti terlihat pada  $t = 400$  ms hingga  $t = 800$  ms. Pada **Gambar 4.8**, mulai dari  $t = 400$  ms hingga  $t = 800$  ms kecepatan pusaran air semakin meningkat. Adanya peningkatan kecepatan ini menandakan air mengalami percepatan.

Percepatan dihasilkan oleh gradien tekanan yang muncul pada daerah-daerah, terutama di bagian bawah gelembung karena pada bagian ini, setelah gelembung naik, ada sebagian segmen volume yang kosong. Segmen volume kosong itu terisi oleh air yang terdesak oleh gelembung udara. Air akan mengalami memberikan respon tak terbatas terhadap geseran (*shear*) yang bekerja pada permukaannya dimana geseran tersebut akan diteruskan pada lapisan-lapisan air di bagian yang lebih dalam. Karena air memiliki viskositas yang cukup besar, bagian yang lebih dalam. Inilah yang menyebabkan mengapa kecepatan aliran air di bagian yang dekat dengan bidang antar gelembung-air memiliki kecepatan yang lebih besar dibanding bagian yang lainnya. Dari **Gambar 4.8** juga dapat disaksikan bahwa semakin jauh dari bidang antar muka, ukuran anak panah semakin pendek. Hal ini menunjukkan bahwa kecepatan air semakin kecil jika jarak lapisan air tersebut makin jauh dari bidang antar muka gelembung-air. Peningkatan kecepatan aliran air di sekitar gelembung berkorelasi dengan tekanan yang bekerja pada permukaan gelembung. Bidang antar muka yang memisahkan gelembung udara dan air memiliki tegangan permukaan, tegangan yang menjaga agar permukaan tersebut tetap *exist*, yang berbanding lurus dengan  $\sigma = 0,072$  N/m. Udara termasuk dalam kategori fluida yang kompresibel.

Tegangan permukaan gelembung tidak mampu menahan tekanan hidrostatis yang bekerja padanya. Tegangan permukaan ini berkorelasi dengan integritas gelembung. Deformasi gelembung dipengaruhi oleh sifat kompresibilitas dan viskositas udara. Oleh karena udara memiliki kompresibilitas yang cukup tinggi ditambah dengan viskositas yang rendah, gelembung

mengalami deformasi yang cukup cepat dan signifikan. Gejala ini mulai terlihat pada  $t = 300$  ms. Dengan semakin meningkatnya kecepatan sirkulasi air, tekanan yang diterima gelembung juga makin besar. Hingga  $t = 700$  ms, gelembung masih utuh, menandakan bahwa gaya tegang permukaan masih dapat mengatasi tekanan yang bekerja pada permukaan gelembung. Namun akhirnya, tekanan yang semakin besar itu telah melampaui batas nilai maksimum gaya tegang permukaan gelembung udara sehingga pada  $t = 800$  ms gelembung pecah (dalam model 3D akan terlihat bahwa gelembung tersebut tidak benar-benar pecah akan tetapi hanya berlubang di bagian tengahnya, seperti donut). Distribusi tekanan yang bekerja pada permukaan gelembung dapat dilihat pada **Gambar 4.9**.



**Gambar 4.9** Gaya yang bekerja pada permukaan gelembung pada arah  $z$  pada saat  $t = 100$  ms hingga 300 ms.

Dari plot *contour* gaya yang bekerja pada permukaan gelembung, dapat diketahui bahwa gaya tersebut memegang peranan penting dalam deformasi dan fragmentasi gelembung. Dari **Gambar 4.9** terlihat bahwa gaya yang bekerja pada bagian bawah gelembung cenderung lebih besar dibanding gaya yang bekerja pada bagian lainnya. Gaya ini mencapai  $4,181 \text{ kN/m}^3$ . Dalam selang waktu 100 ms, gaya hidrostatis telah mendesak bagian bawah gelembung dalam orde yang cukup signifikan. Tekanan ke dalam gelembung meningkat sekitar  $50 \text{ N/m}^3$ . Pada

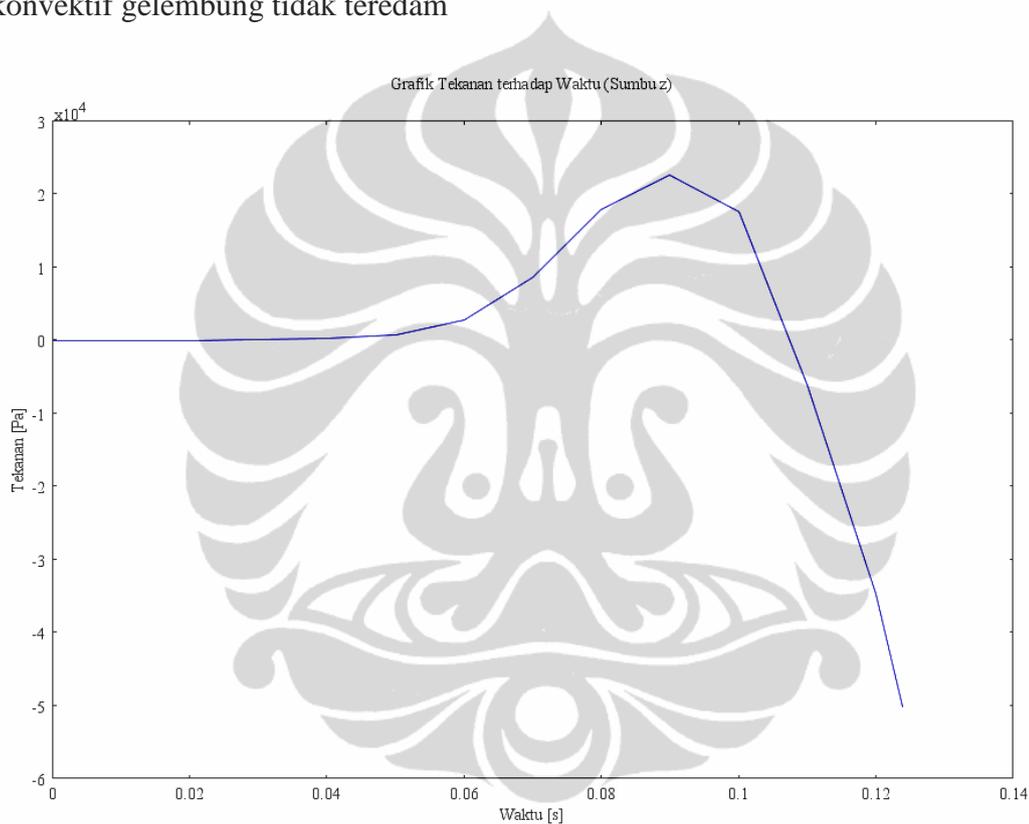
bagian lainnya, bagian yang diberi tanda kotak, terlihat tidak terjadi perubahan gaya permukaan yang cukup berarti. Bisa dikatakan bahwa pada daerah tersebut gaya hidrostatis mendekati konstan. Oleh karena itulah pada daerah itu tidak diamati terjadinya perubahan bentuk yang signifikan. Pecahnya gelembung yang terlalu cepat sebelum mencapai permukaan dikarenakan gradien gaya tegang permukaan yang bekerja pada bagian bawah sangat besar. Hal ini dimungkinkan juga karena kecepatan gerak vertikal gelembung tidak cukup besar, sedangkan deformasi pada bagian bawah gelembung sangat dominan, sehingga terjadi akumulasi tekanan pada bagian bawahnya. Selaput tipis yang memisahkan antara gelembung dan air tidak dapat menahan tekanan hidrostatis sehingga 800 ms kemudian gelembung pecah pada bagian tengahnya.



**Gambar 4.10** Gelembung pecah pada bagian tengahnya pada  $t = 800$  ms.  
Gelembung berbentuk seperti *donut*.

Gambar di atas diperoleh setelah mentransformasi model 2D menjadi 3D. Dengan menggunakan mode plot *isosurface*, perubahan geometri gelembung dapat diketahui. Bagian atas yang berwarna biru menunjukkan permukaan air-udara sedangkan warna biru dengan lubang di tengahnya adalah gelembung pada saat  $t = 800$  ms. Grafik pada **Gambar 4.11** menunjukkan gaya tegang permukaan pada titik bagian bawah gelembung. Terlihat bahwa setelah gelembung bergerak selama 300 ms, gaya tegang permukaan yang bekerja semakin besar dan mencapai nilai maksimum pada  $t = 800$  ms yaitu tepat saat gelembung berlubang. Setelah  $t$

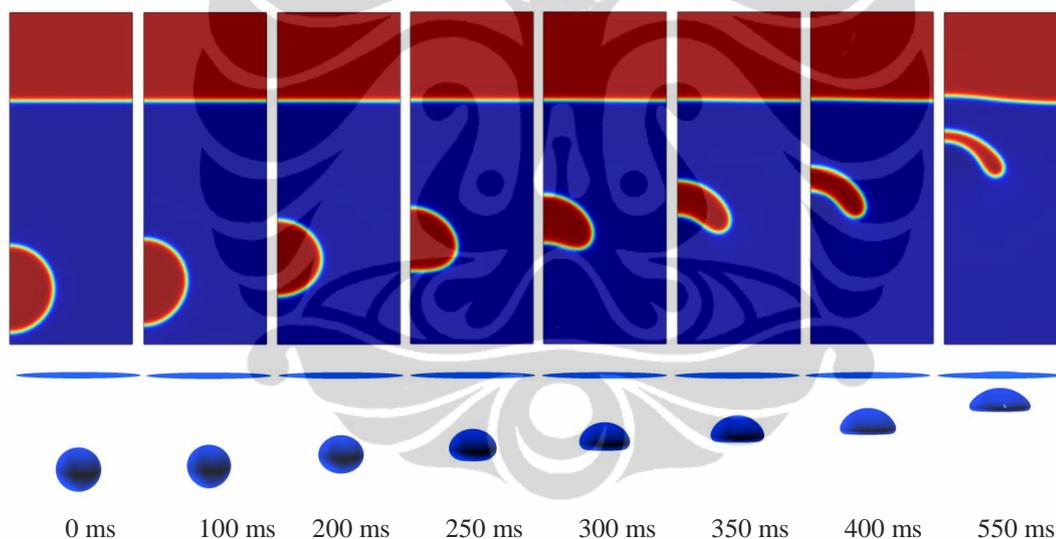
= 900 ms, gaya tegang permukaan pada titik bagian bawah gelembung turun drastis. Setelah melakukan beberapa kali simulasi dengan parameter persamaan medan fase yang diubah–ubah, terutama konstanta  $\chi$  (*mobility tuning parameter*) dan  $\varepsilon$  (ketebalan permukaan bidang batas gelembung udara dan air). Parameter dalam persamaan medan fase digunakan untuk mengontrol difusi dan konveksi sistem. Nilai  $\chi$  haruslah cukup besar agar dapat menjaga ketebalan bidang antar muka fluida tetap konstan. Akan tetapi nilai  $\chi$  tidak boleh terlalu besar agar gerak konvektif gelembung tidak teredam



**Gambar 4.11** Grafik gaya tegang permukaan (sumbu  $z$ ) terhadap waktu. Sekuen gambar menunjukkan deformasi gelembung antara  $t = 0$  ms hingga 120 ms.

### 4.1.3 Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan II

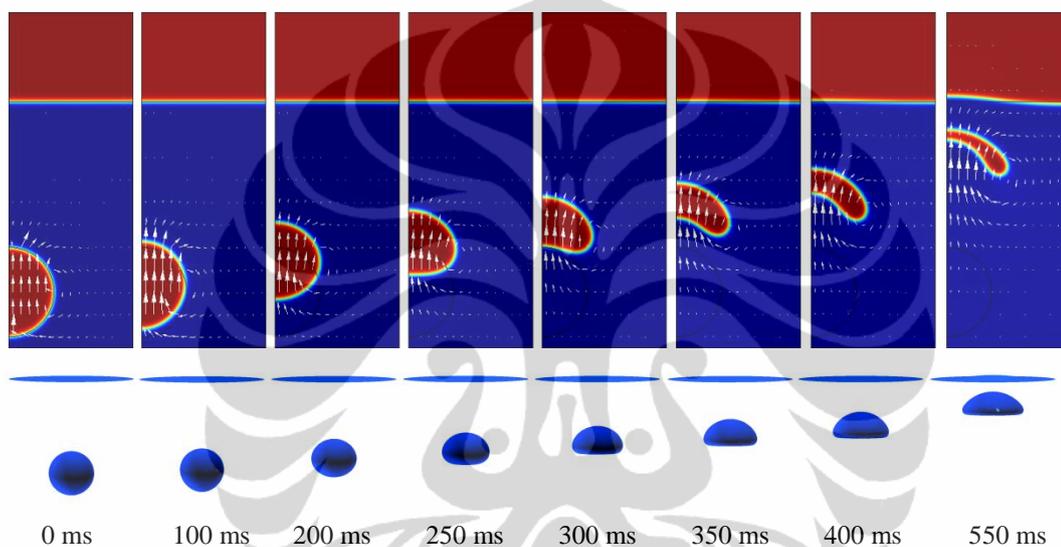
Nilai  $\chi$  divariasikan dari  $\frac{1}{2}$ , 1, 10, 15, 25, 50 hingga 100. Untuk nilai konstan, pada  $\chi = 100$  m.s/kg, gerak gelembung teredam dengan cukup kuat. Gelembung dapat bergerak naik namun sebentar kemudian ukurannya semakin lama semakin kecil dan menghilang. Setelah melakukan beberapa kali simulasi diperoleh nilai  $\chi$  yang cukup bagus sebesar  $\chi = 10$  m.s/kg. Variasi lainnya kemudian dicoba yaitu dengan mengubah nilai  $\varepsilon$ . Parameter  $\varepsilon$  sangat sensitif dengan ukuran *mesh*. Jika nilai  $\varepsilon$  sangat kecil (sekitar 0,1 mm),  $\varepsilon < 1$  mm untuk ukuran *mesh*  $1,5 \times 10^{-3}$ , simulasi baik inisialisasi maupun *transient* tidak dapat mencapai konvergensi. Hal ini dikarenakan permukaan tersebut tidak mampu mencegah terjadinya difusi antara fase gas dan cair. Jika nilai  $\varepsilon$  terlalu besar, sistem gelembung udara-air menjadi tidak riil.



**Gambar 4.12** Evolusi gelembung dari  $t = 0$  ms hingga 550 ms. Tinggi air di dalam tabung diperpendek menjadi 10 cm sedangkan diameter gelembung dan tabung dipertahankan sama dengan simulasi sebelumnya.

Simulasi kemudian dilakukan untuk parameter ( $\chi = 100$  m.s/kg) yang sama namun dengan ukuran tabung yang diperpendek dari 18 cm menjadi 15 cm. Tinggi kolom air yang semula 12 cm diperkecil menjadi 10 cm dengan tetap mempertahankan diameter tabung sebesar 5,5 cm. Hasilnya tampak seperti pada

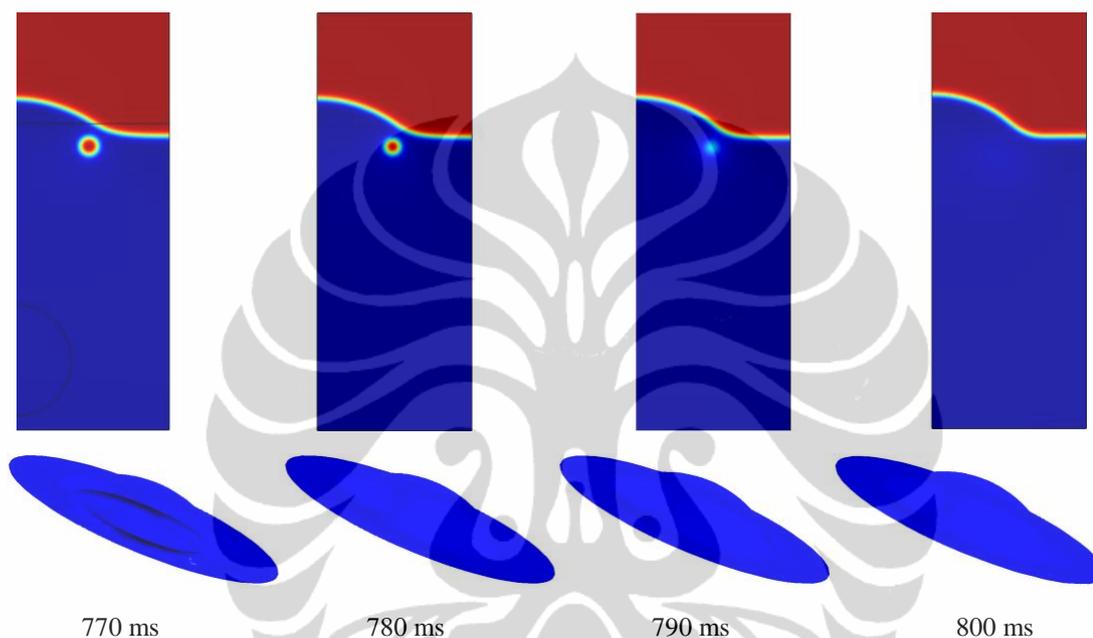
**Gambar 4.12.** Antara  $t = 0$  ms hingga 250 ms, gelembung mengalami deformasi yang masih wajar (masih mempertahankan bentuknya yang dominan setengah lingkaran). Salah satu faktor yang berperan dalam deformasi gelembung adalah gaya tegang permukaan dan viskositas, seperti terlihat pada grafik berikut ini. Pada  $t = 0$  ms hingga  $t = 25$  ms, gaya tegang permukaan meningkat sebesar 12 Pa. Gaya tegang permukaan mencapai maksimum pada saat  $t = 23$  ms. Dari gambar terlihat bahwa setelah  $t = 25$  ms, deformasi yang terjadi pada gelembung cukup ekstrim. Proses pemipihan terjadi lebih cepat dibanding 250 ms pertama.



**Gambar 4.13** Plot medan kecepatan aliran fluida dari  $t = 0$  ms hingga  $t = 550$  ms.

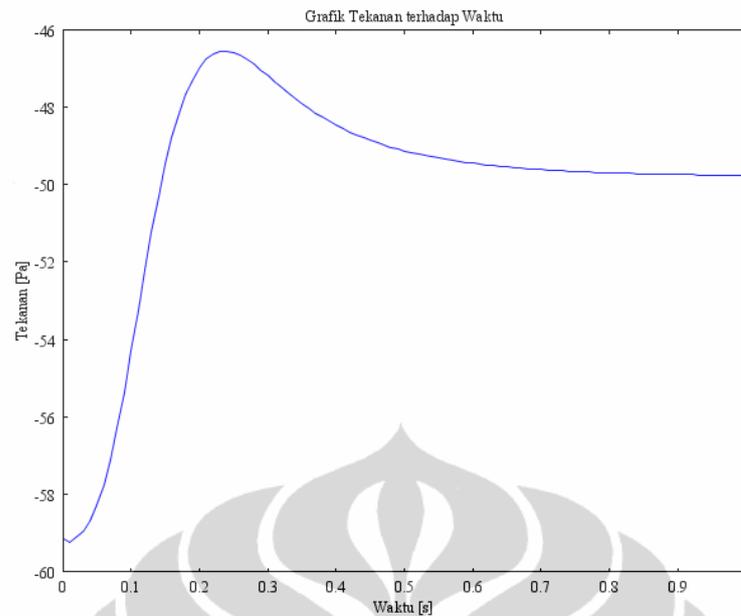
Dari plot pada **Gambar 4.13**, dapat diamati adanya peningkatan kecepatan sirkulasi air seiring dengan gerakan gelembung udara. Pada  $t = 0$  ms hingga  $t = 250$  ms, gaya hidrostatis mendorong gelembung ke atas menyebabkan air di sekitarnya terdorong dan mengalami sirkulasi. Tampak jelas bahwa aliran air ini dominan terjadi di bagian bawah gelembung yang dibuktikan dengan ukuran anak panah yang semakin besar dan panjang. Adanya peningkatan kecepatan ini memberikan gaya tambahan terhadap gelembung terutama pada bagian bawahnya. Komponen gaya inilah yang kemungkinan menjadi penyebab deformasi yang cukup signifikan pada bagian bawah gelembung. Kecepatan aliran air bervariasi dari satu titik ke titik lainnya atau dari satu lapisan ke lapisan lainnya. Hal ini membuktikan adanya disipasi energi yang terjadi antara satu lapisan dengan

lapisan yang lain. Disipasi energi ini tentu saja disebabkan oleh viskositas air. Jika diperhatikan dengan seksama, air di bagian bawah gelembung cenderung bergerak ke bawah lalu berputar ke atas. Di bagian lain juga demikian, namun yang sangat jelas teramati adalah pada bagian bawah gelembung. Perubahan orientasi aliran air ini disebabkan oleh suku persamaan konvektif, variasi kecepatan terhadap perubahan posisi.

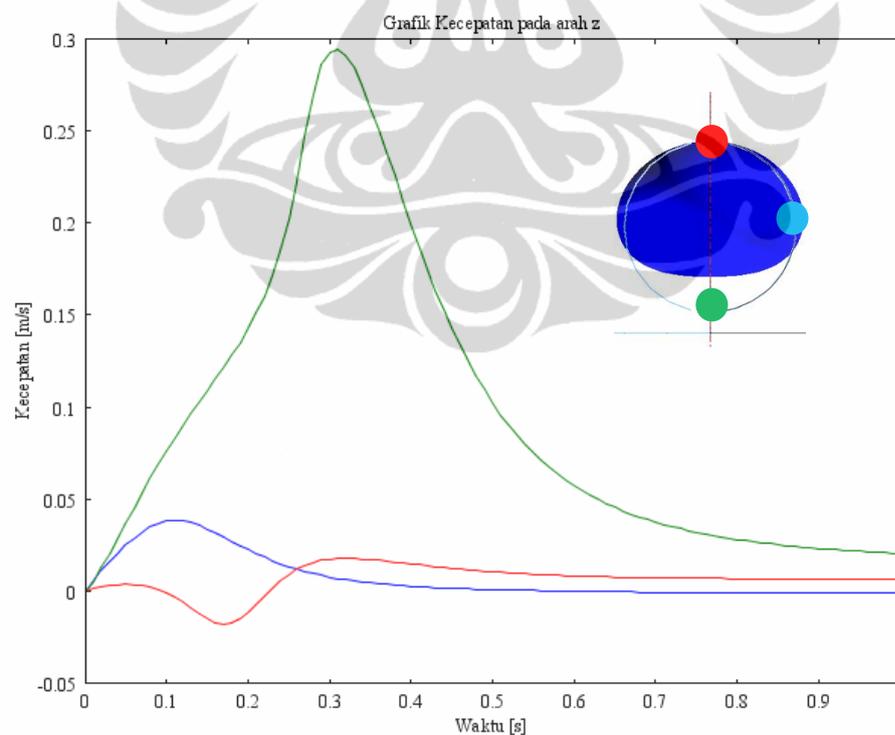


**Gambar 4.14** Ukuran gelembung semakin lama semakin kecil dan kemudian menghilang setelah 790 ms.

Pada simulasi kedua diperoleh hasil lain yang juga mengejutkan. Setelah mengalami deformasi geometri yang cukup ekstrim (antara  $t = 350$  ms hingga  $770$  ms), pada  $t = 780$  ms ukuran gelembung semakin mengecil, dan pada  $t = 800$  ms gelembung tersebut hilang. Berdasarkan legenda persamaan medan fase (ekuivalen dengan fraksi volume tiap fase) dapat disimpulkan bahwa telah terjadi difusi antara fase gas dan fase cair. Berdasarkan grafik tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung, dapat diketahui bahwa tekanan mencapai maksimum pada  $t = 230$  ms dan setelahnya tekanan menurun hingga hampir konstan pada  $t = 600$  ms hingga  $1.000$  ms.



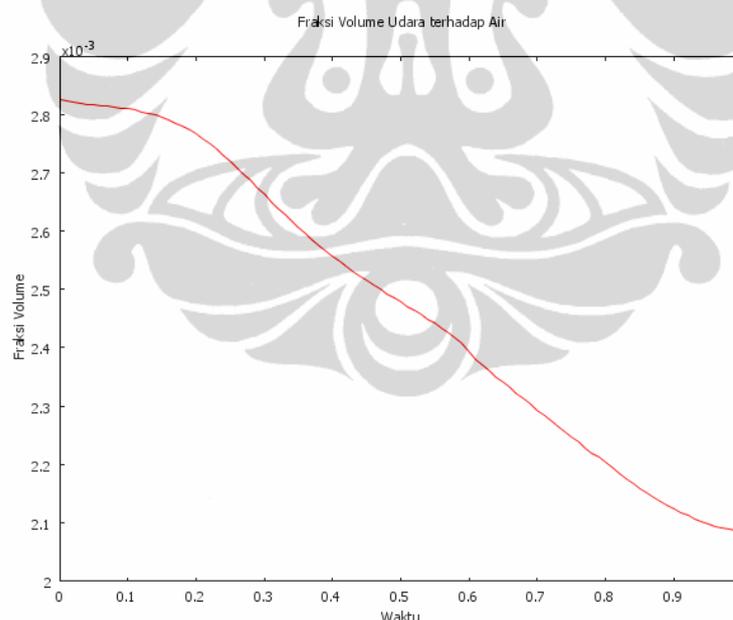
**Gambar 4.15** Grafik tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung terhadap waktu. Setelah 50 ms, tekanan cenderung konstan.



**Gambar 4.16** Grafik kecepatan pada titik yang diberi tanda merah, biru, dan hijau (arah  $z$ ). Kecepatan di titik hijau lebih besar dibanding di titik yang lain.

Dengan semakin meningkatnya tekanan pada bagian bawah gelembung, lihat **Gambar 4.15**, kecepatan segmen bagian bawah gelembung juga semakin besar, lihat **Gambar 4.16**. Dari data–data yang telah disajikan dapat disimpulkan bahwa tekanan hidrostatis yang paling besar adalah pada bagian bawah gelembung. Hal ini pula yang tampaknya menjadi penyebab mengapa deformasi dominan terjadi pada bagian bawah gelembung saja sedangkan pada bagian atas dan samping, walaupun muncul perubahan bentuk, tidaklah sebesar di bagian bawah.

Berdasarkan simulasi–simulasi yang telah dilakukan, hampir semua hasil simulasi memiliki pola dan deformasi gelembung serta distribusi tekanan dan kecepatan yang koheren dengan data yang dijelaskan di atas. Ada beberapa asumsi yang dikemukakan terkait dengan fenomena tersebut. Salah satu kelemahan persamaan Cahn–Hilliard adalah tidak dapat menjaga fluida agar tidak terjadi kehilangan massa. Seperti yang diperlihatkan pada grafik berikut ini.



**Gambar 4.17** Grafik fraksi volume udara terhadap air pada  $t = 0$  s hingga 1 s.

Dari grafik tersebut dapat diketahui bahwa selain gelembung mengalami deformasi, sebagian kecil volumenya juga hilang, lihat **Gambar 4.14**. Pada  $t = 800$  ms, yaitu pada saat gelembung hilang, gelembung udara kehilangan volume

sebesar 21%. Dari beberapa peneliti yang juga menggunakan metode medan fase untuk kasus gelembung tunggal memperoleh hasil yang serupa. Persamaan Cahn–Hilliard, yang merupakan inti dari persamaan medan fase untuk penjejukan aliran multifase, memiliki kelemahan yang cukup krusial yaitu tidak dapat mempertahankan kekekalan massa sistem.

Sebenarnya, kehilangan volume (atau massa) sistem multifase tidak semata-mata disebabkan oleh persamaan medan fase saja akan tetapi efek kumulatif dari beberapa faktor. Dari hasil simulasi yang dilakukan, faktor–faktor tersebut meliputi karakteristik kompresibilitas udara, gaya tegang permukaan yang kecil (berhubungan dengan koefisien tegangan permukaan), konstanta  $\chi$ , dan  $\varepsilon$ . Jika diperhatikan dengan seksama, deformasi yang terjadi pada gelembung udara (yang sangat ekstrim itu) memiliki korelasi dengan viskositasnya, selain juga terhadap koefisien tegang permukaan. Berdasarkan data–data standar diketahui bahwa viskositas udara 100 kali lebih kecil dibanding viskositas air. Hal ini berarti udara 100 kali lebih *encer* dibanding air (kompresibel). Perubahan sedikit saja yang terjadi pada gelembung udara dapat menginduksi perubahan pada seluruh bagian gelembung udara tersebut. Beberapa simulasi telah dilakukan untuk mengetahui efek viskositas ini terhadap deformasi gelembung. Untuk sementara, disipasi energi dan efek gesekan diabaikan.

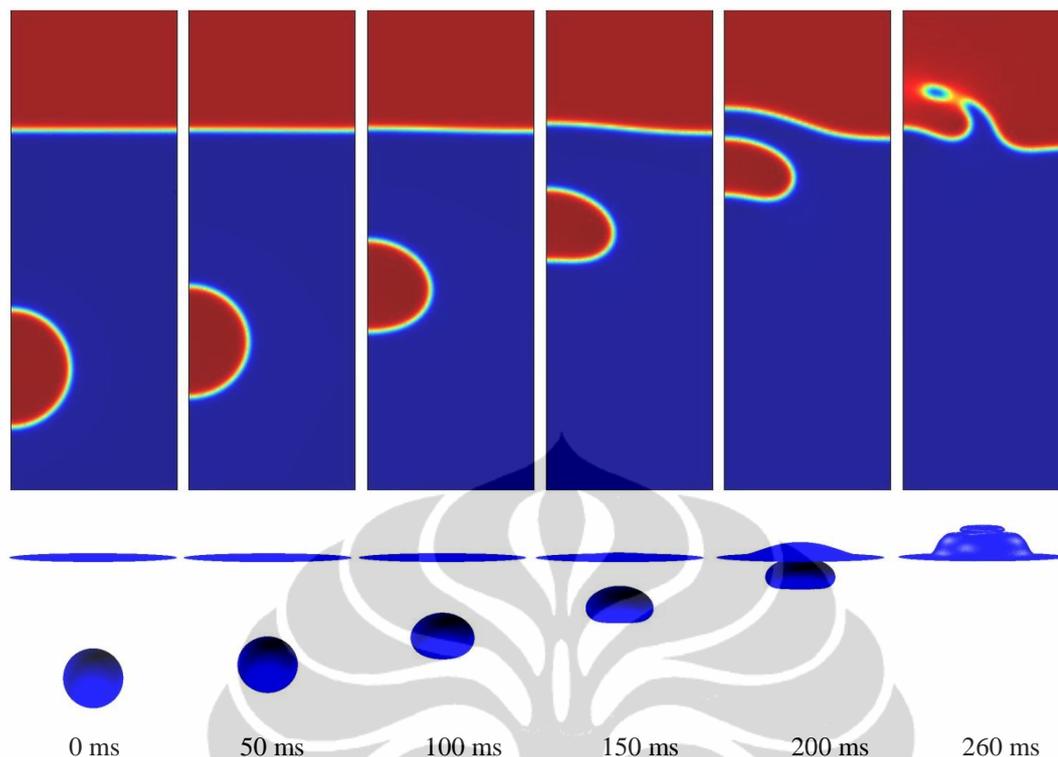
#### 4.1.4 Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan III

Dasar pemikiran untuk mengubah viskositas fluida adalah sebagai berikut. Viskositas dapat didefinisikan sebagai tingkat kekentalan fluida. Semakin kental suatu fluida menandakan molekul–molekul fluida tersebut semakin kompak menyusun dirinya sehingga semakin sulit untuk mempengaruhi/mengubah bentuk fluida tersebut. Fluida dengan viskositas tinggi dapat mempertahankan bentuk di dalam fluida yang lain walaupun gaya tegang permukaan atau gaya lainnya yang bekerja padanya besar. Permasalahan yang ditemui pada saat simulasi adalah gelembung sangat sensitif terhadap perubahan tekanan hidrostatis yang tidak bisa *dimaintenance* dengan baik oleh gaya tegang permukaan gelembung. Sedikit saja

tekanan hidrostatis meningkat, gelembung mengalami perubahan bentuk yang tidak masuk akal (tidak *reasonable*). Dengan membuat gelembung lebih rigid (tidak mudah terkompres), yaitu dengan cara memperbesar viskositasnya, diharapkan gelembung dapat menahan tekanan yang dihasilkan oleh cairan atau setidaknya dapat mempertahankan bentuknya sehingga tidak pecah/hilang di tengah perjalanan.

Kelemahan asumsi ini salah satunya adalah gesekan antara gelembung udara dan air menjadi semakin besar sehingga gelembung mencapai kecepatan terminal lebih cepat dibanding jika viskositasnya tidak diubah. Hal ini ditandai dengan kecepatan aliran gelembung yang semakin lambat ketika mencapai permukaan dan efek pecahnya gelembung ketika keluar dari air tidak begitu dramatis. Setelah melakukan beberapa simulasi, asumsi tersebut berhasil diklarifikasi dengan sangat baik oleh hasil yang diperoleh. Dengan meningkatkan viskositas gelembung udara terbukti gelembung dapat mempertahankan bentuknya sehingga deformasi yang muncul pada gelembung tidak se-ekstrim sebelumnya. Dari hasil pengamatan visual juga didapatkan bahwa kehilangan massa gelembung tidak terlalu signifikan. Hanya saja ketika mendekati permukaan, gerakan gelembung terlihat semakin lambat. Gelembung pada akhirnya dapat mencapai permukaan dan berhasil pecah dengan sukses.

**Gambar 4.18** menunjukkan sekuen hasil simulasi dari  $t = 0$  ms hingga 260 ms dengan jeda setiap sekuen 50 ms. Distribusi tekanan pada tiga titik utama gelembung (bawah, samping, dan atas) menunjukkan adanya peningkatan tekanan pada bagian bawah gelembung. Setelah melampaui  $t = 200$  ms, tekanan mengalami saturasi hingga  $t = 1.500$  ms. Jika diperhatikan, munculnya deformasi diinisiasi dengan berubahnya tekanan yang cukup besar pada bagian bawah gelembung. Tekanan pada daerah tersebut turun drastis sekitar  $|175|$  Pa. Hal ini menunjukkan bahwa tekanan eksternal yang bekerja di bagian bawah gelembung sangat besar. Sesuai dengan prinsip Pascal, tekanan yang bekerja pada fluida akan disebarkan ke segala arah sama besar. Perubahan tekanan pada bagian bawah gelembung diteruskan ke segala arah di bagian interior gelembung, hal ini dapat dilihat pada grafik **Gambar 4.19** (warna hijau dan merah).

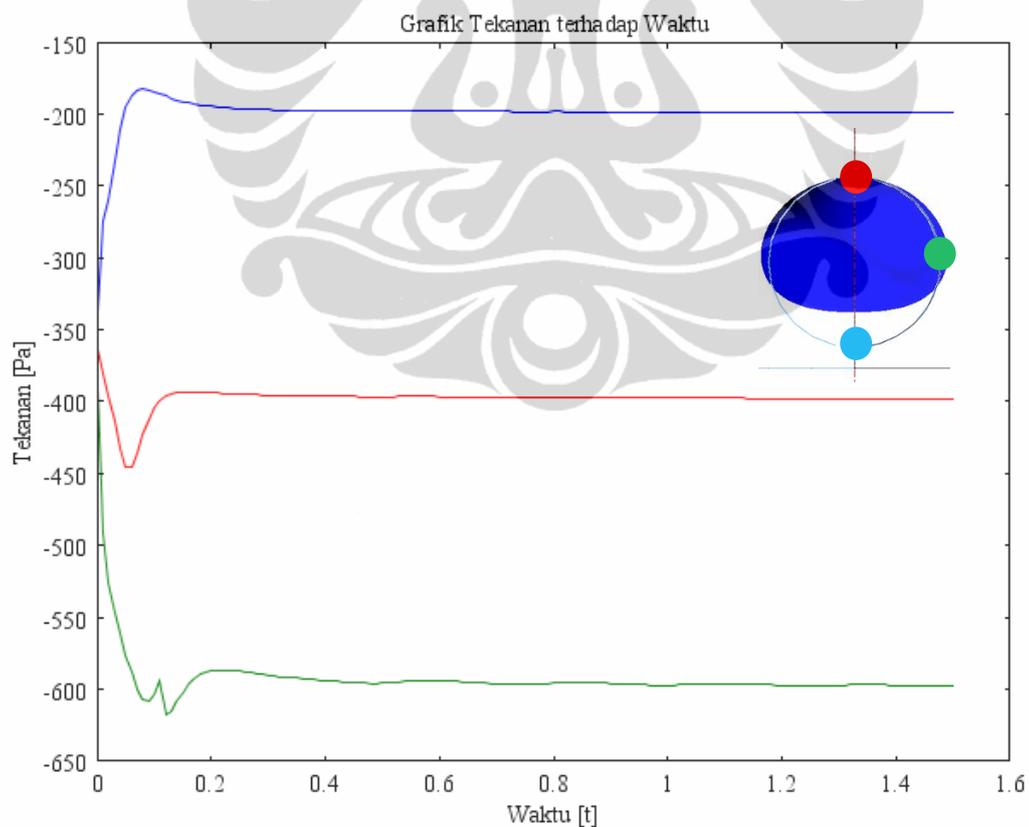


**Gambar 4.18** Evolusi gelembung dari  $t = 0$  ms hingga 260 ms. Tinggi air di dalam tabung 12 cm dengan diameter tabung 5,5 cm.  $\mu_{\text{gelembung}}$  sebesar 5 Pa.s.

Perubahan tekanan pada arah horizontal lebih besar dibanding tekanan pada arah vertikal. Oleh karena itulah gelembung menjadi sangat pipih. Distribusi tekanan yang bekerja pada gelembung dapat dilihat pada **Gambar 4.20**. Dibanding grafik pada **Gambar 4.15**, tekanan yang bekerja pada fluida cenderung lebih besar dengan perubahan tekanan yang muncul yang juga lebih besar. Mengacu pada Persamaan (2.27), viskositas memberikan pengaruh langsung terhadap medan aliran fluida. Mula–mula gaya hidrostatis mengangkat gelembung ke atas. Berdasarkan prinsip Archimedes, gaya angkat ini sebanding dengan volume gelembung udara atau gaya oleh air yang memiliki volume sama dengan volume gelembung tersebut. Gaya ini dominan bekerja pada bagian bawah gelembung, menginduksi terjadi deformasi dan akibatnya gradien kecepatan pada daerah tersebut lebih besar dibanding daerah lainnya. Oleh karena itulah konveksi aliran air lebih banyak terjadi di daerah tersebut. Dari persamaan gaya viskositas, diketahui bahwa jika gradien kecepatan semakin besar maka gaya yang bekerja pada daerah tersebut juga besar.

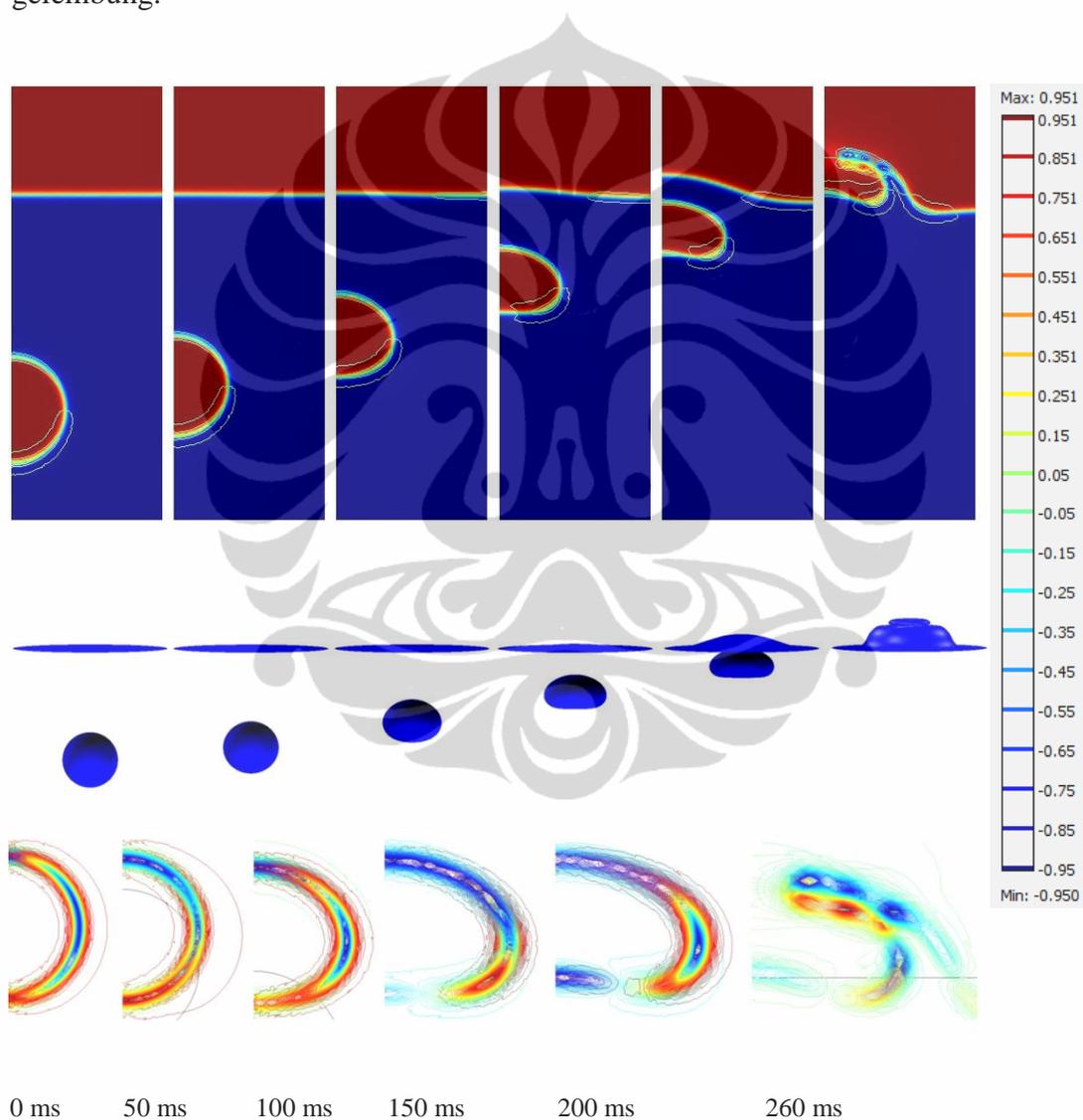
$$\nabla \cdot \tau_{ij} = \mu \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \end{array} \right\}$$

$\mu$  menyatakan viskositas fluida. Munculnya konveksi yang cukup besar ini menyebabkan gradien tekanan pada daerah itu juga besar. Dengan melihat grafik tekanan (*plot contour*) dapat dibuktikan bahwa pada bagian bawah gelembung, tekanan pada arah  $z$  memang cukup besar. **Gambar 4.20** menunjukkan plot tekanan pada sumbu  $z$  dan  $r$  (vertikal dan horizontal). Pada saat  $t = 0,01$  s, terlihat bahwa distribusi tekanan pada permukaan gelembung cukup homogen, dalam pengertian bahwa tidak terdapat perbedaan tekanan yang cukup besar antara satu bagian dengan bagian yang lain.



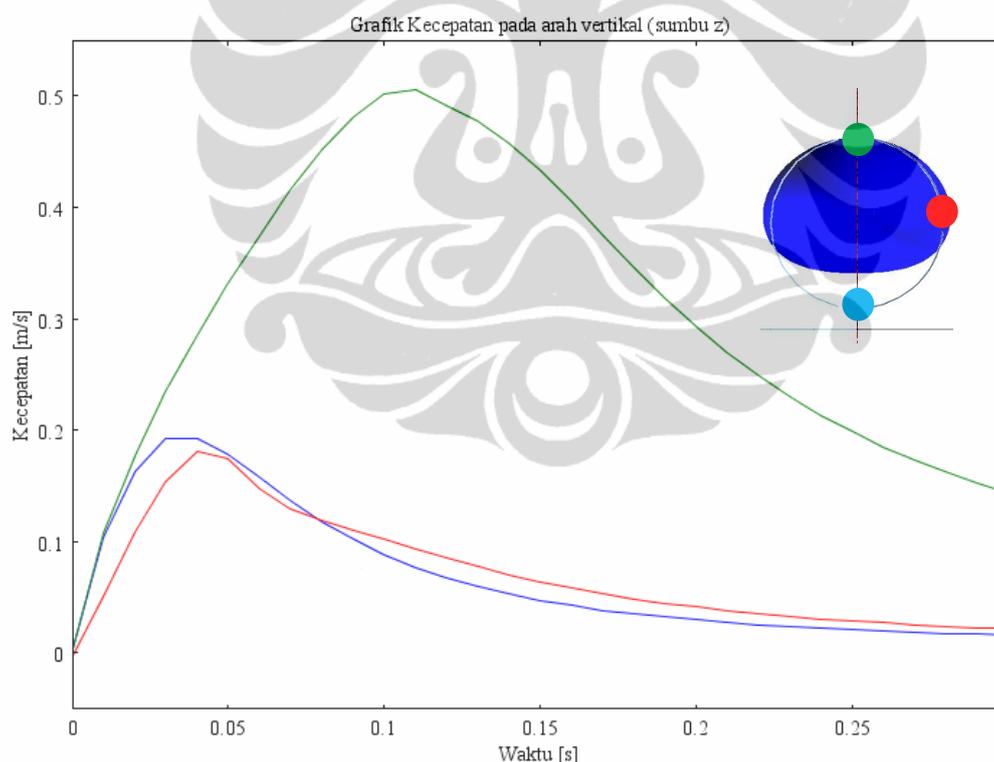
**Gambar 4.19** Grafik tekanan terhadap waktu. Tekanan internal gelembung mengalami perubahan karena adanya tekanan oleh air.

Tekanan pada bagian bawah gelembung menunjukkan adanya gejala peningkatan, terlihat dari *contour* warna yang berubah menjadi merah tua (lihat legenda). Perubahan tekanan tersebut terjadi setelah 0,05 s kemudian. Proses pemipihan gelembung mulai tampak pada  $t = 0,1$  s. Tekanan pada bagian bawah terlihat mengecil sedangkan tekanan pada arah horizontal meningkat. Tekanan pada arah horizontal inilah yang menyebabkan gelembung memipih. Tekanan ini berasal dari konveksi tekanan internal gelembung yang berasal dari bagian bawah gelembung.



**Gambar 4.20** Grafik perubahan tekanan pada permukaan gelembung pada arah vertikal dan horizontal.

Tekanan pada bagian atas gelembung juga meningkat, menyebabkan gelembung naik lebih cepat dibanding pada waktu antara 0 s hingga 0,05 s. Setelah 0,15 s, gelembung semakin memipih dan terlihat semakin lebar dibanding bentuk semula. 0,05 s berikutnya, tekanan pada bagian atas gelembung semakin kecil. Perubahan ini lebih kecil dibanding perubahan tekanan yang terjadi antara 0,1 s – 0,15 s. Setelah 0,06 s, gelembung mencapai permukaan dan pecah. Gelembung menekan permukaan menyebabkan permukaan berkontraksi. Sebagian kecil volume air dan udara terdesak oleh gelembung. Setelah menembus bidang batas, gelembung “melompat” setinggi  $h \approx 1$  cm diukur relatif terhadap bidang batas dan pusat massa gelembung. Berdasarkan grafik kecepatan gerak gelembung yang tertera pada **Gambar 4.21**, terlihat bahwa gelembung mencapai kecepatan maksimumnya pada  $t = 0,11$  s, dimana besar kecepatan pusat massanya sekitar 0,34 m/s.

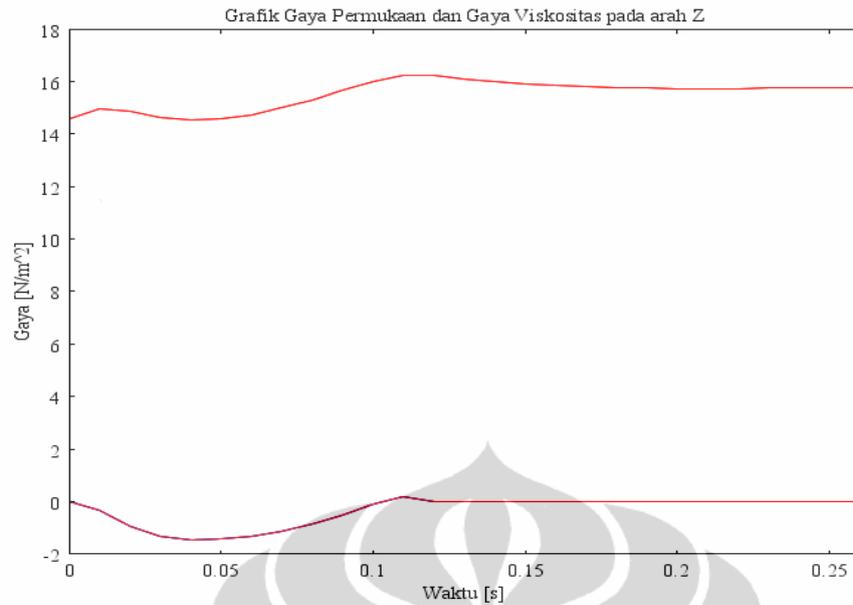


**Gambar 4.21** Grafik kecepatan gelembung. Terlihat bahwa gelembung yang mula-mula diam kemudian dipercepat hingga mencapai kecepatan maksimum pada  $t = 0,11$  s dengan besar kecepatan 0,34 s.

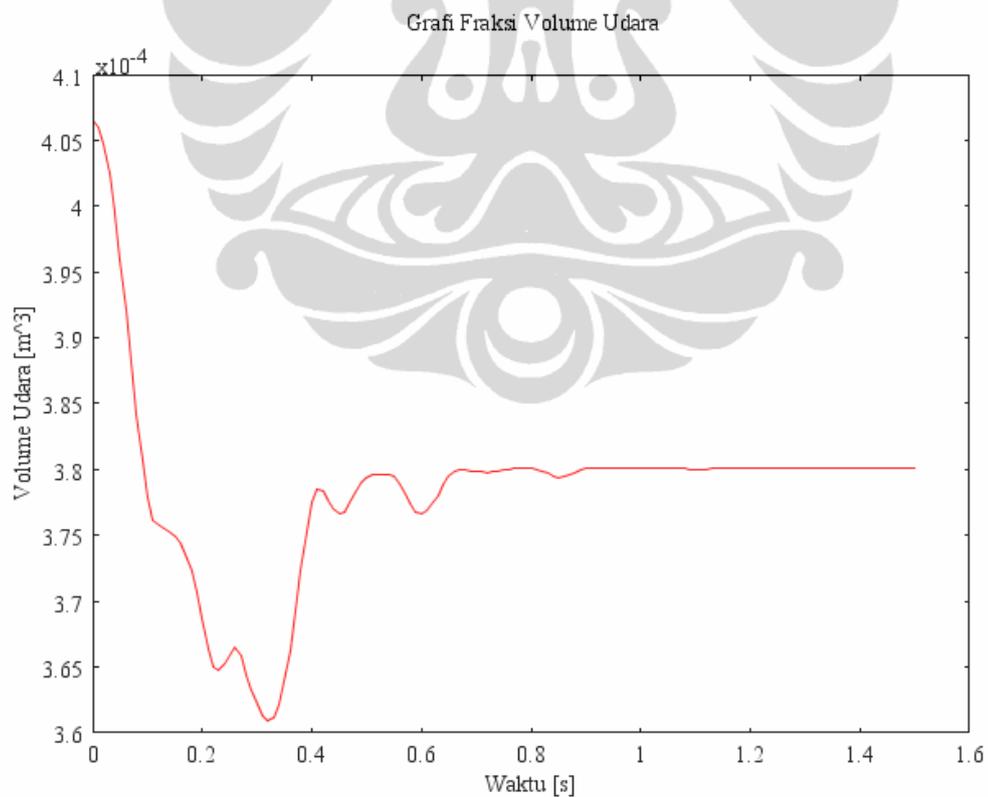
Kecepatan ini dicapai pada saat gradien tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung menurun, lihat grafik pada **Gambar 4.20** dan *contour* tekanan pada **Gambar 4.20**. Tentu saja, perubahan tekanan ini menginduksi ekspansi bentuk gelembung secara horizontal dan memberikan efek pengangkatan terhadap gelembung. Jika diperhatikan kembali grafik *contour* pada **Gambar 4.21**, tekanan pada permukaan gelembung bagian atas meningkat cukup drastis. Perubahan ini yang memberikan efek percepatan gerak gelembung.

Bagian yang cukup menarik untuk dianalisis lebih jauh adalah perlambatan yang terjadi pada gelembung. Jika grafik di atas dibandingkan dengan grafik pada **Gambar 4.16**, dapat ditarik kesimpulan bahwa proses pemipihan yang terjadi pada grafik di atas lebih lambat dibanding gerak vertikal permukaan gelembung bagian atas sedangkan pada hasil simulasi yang tertera pada **Gambar 4.16** proses pemipihan terjadi lebih cepat dibanding respon gerak vertikal permukaan gelembung bagian atas. Hal ini kemungkinan menjadi salah satu faktor yang menjelaskan mengapa gelembung pada hasil simulasi ketiga memiliki *waktu hidup* yang lebih lama dibanding gelembung pada simulasi kedua. Hipotesis ini juga diperkuat dengan melambatnya gelembung bagian bawah dan samping 0,05 s lebih cepat dibanding melambatnya permukaan gelembung bagian atas.

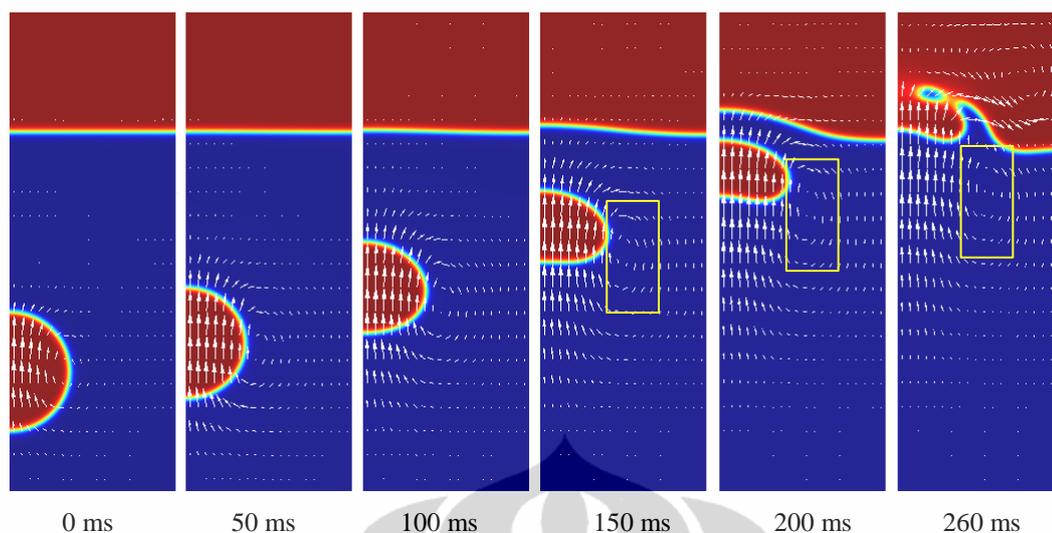
Dari **Gambar 4.20**, permukaan bidang batas air–udara terangkat sedikit dengan semakin mendekatnya gelembung ke permukaan tersebut. Di bagian atas permukaan terdapat sejumlah udara dengan massa sekitar 0,49 mg. Selain mendorong lapisan air setebal 6 mm, gelembung juga mendesak massa udara di atas permukaan tersebut. Viskositas seharusnya memberikan andil yang cukup signifikan terhadap perlambatan gerak gelembung namun karena gaya yang bekerja pada permukaan gelembung jauh lebih besar, efek perlambatan oleh viskositas tidak terlalu mencolok, lihat **Gambar 4.22**. Pada simulasi sebelumnya diketahui bahwa terdapat 21% fraksi volume udara yang hilang. Pada simulasi ketiga, kehilangan volume juga terjadi namun tidak sebesar seperti pada simulasi kedua. Fraksi volume udara yang hilang, berdasarkan grafik di bawah ini, adalah sebesar 5,8%.



**Gambar 4.22** Perbandingan gaya yang bekerja pada permukaan gelembung dengan gaya viskositas.



**Gambar 4.23** Grafik fraksi volume udara terhadap waktu.



**Gambar 4.24** Plot profile kecepatan aliran fluida dari  $t = 0$  ms hingga 260 ms.

**Gambar 4.24** menunjukkan profile kecepatan aliran fluida pada yang diwakili dengan plot anak panah. Terlihat bahwa, aliran air dominan berada pada jalur alir gelembung udara yang ditandai dengan kecepatan aliran air pada jalur tersebut yang cukup tinggi. Akibat adanya sirkulasi air ini, air dibagian lain juga mengalami sirkulasi namun dengan kecepatan yang lebih kecil. Setelah gelembung udara bergerak selama 100 ms, teramati adanya pusaran arus air, lihat daerah yang ditandai dengan kotak warna kuning. Air yang berada pada jalur alir gelembung udara cenderung memiliki vektor kecepatan searah dengan kecepatan gelembung udara. Di daerah sekitarnya, air bergerak turun dengan kecepatan yang lebih kecil. Hal ini menyebabkan efek pusaran air di daerah–daerah tertentu. Perbedaan besar dan arah kecepatan ini dihasilkan oleh efek tensorik dari tekanan yang bekerja pada lapisan–lapisan permukaan air. Efek arus pusaran air ini memberikan tekanan tambahan terhadap gelembung udara, sekaligus percepatan geraknya. Perubahan–perubahan morfologi fluida berkorelasi dengan profil kecepatan lapisan fluida pada daerah tersebut. Hal ini dapat dilihat pada saat gelembung udara mencapai permukaan,  $t = 260$  ms.

Setelah mencapai permukaan, gelembung udara sedikit terangkat sebelum akhirnya pecah. Terangkatnya gelembung udara ini disebabkan oleh komponen kecepatan akhir (saat mencapai permukaan) yang masih cukup besar. Dorongan

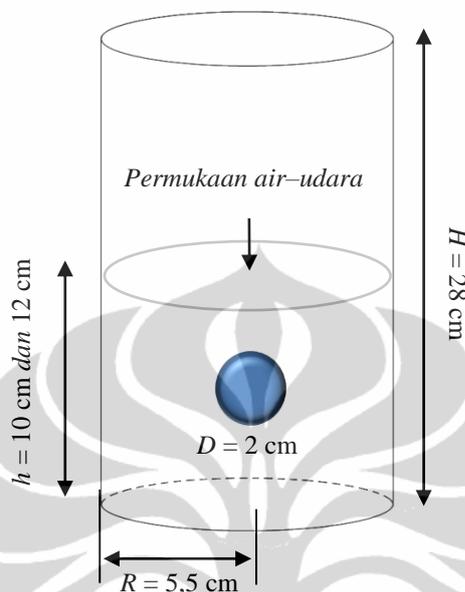
gelembung udara ini juga menyebabkan udara di atas permukaan mengalami sirkulasi. Di daerah jalur alir gelembung udara, udar bergerak naik sedangkan di daerah yang dekat dinding, udara bergerak ke bawah mendorong volume air di daerah tersebut ke bawah.

#### 4.1.5 Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan IV

Berdasarkan hasil simulasi yang telah diperoleh (simulasi tahap I, II, dan III) dapat disimpulkan bahwa beberapa permasalahan yang ditemui saat melakukan simulasi gelembung tunggal antara lain munculnya deformasi gelembung yang terlalu cepat sehingga menyebabkan gelembung pecah/berlubang secara tidak wajar dan hilangnya beberapa persen massa fluida (terutama gelembung udara) selama proses simulasi. Untuk mengetahui kemungkinan penyebab dua permasalahan itu maka dilakukan beberapa simulasi dengan pengubahan parameter–parameter fisis serta ukuran geometri tabung yang digunakan. Pengubahan geometri tabung ternyata tidak memberikan dampak yang signifikan terhadap deformasi dan fragmentasi gelembung. Sebaliknya, pengubahan parameter–parameter fisis sistem memberikan hasil yang cukup menggembirakan walaupun ketika dikonfrontasikan dengan sistem riil, keabsahan hasil simulasi tersebut patut dipertanyakan. Variasi parameter dilakukan terutama pada besaran yang mengontrol mobilitas gelembung ( $\chi$ ), konstanta tebal permukaan bidang udara–air ( $\varepsilon$ ), massa jenis ( $\rho$ ), dan viskositas ( $\mu$ ).

Dari serentetan hasil yang telah diperoleh (dengan masing–masing variasi parameter fisisnya), pengubahan besar viskositas udara memberikan hasil yang cukup baik dibanding hasil simulasi untuk pengubahan parameter lainnya. Gelembung udara disimulasikan sebagai fluida yang kental namun memiliki massa jenis yang sangat kecil (massa jenis udara). Semakin besar viskositas gelembung udara, semakin konsisten gelembung udara itu mempertahankan bentuknya. Selain itu, tingkat kehilangan massa gelembung juga menurun drastis dari 21% menjadi 5,8%. Gelembung udara dapat mencapai permukaan dengan sukses dan pecah secara wajar. Hanya saja, nilai viskositas yang besar itu

menyebabkan gelembung mengalami perlambatan yang cukup signifikan ketika mencapai bidang batas air–udara.

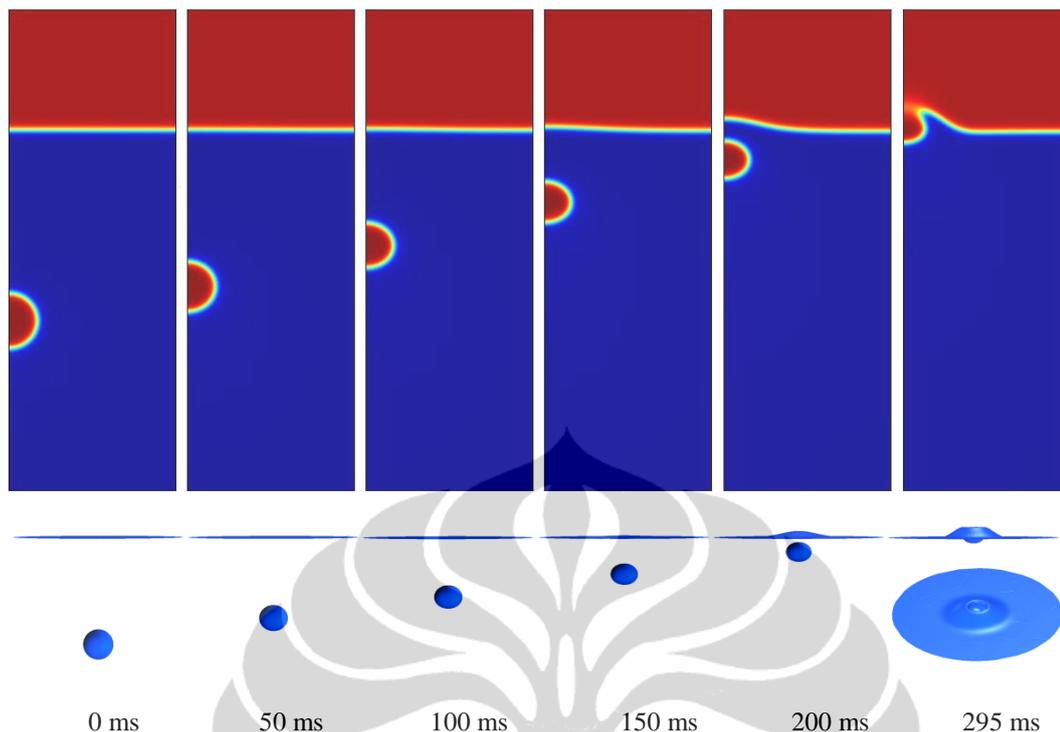


**Gambar 4.25** Geometri tabung beserta ukuran gelembung dan air.

Mengacu pada hasil simulasi yang telah dilakukan, simulasi ke IV dilakukan dengan mengubah nilai viskositas gelembung menjadi 6 Pa.s, lebih besar dibanding pada simulasi ke III, dengan ukuran geometri tinggi 14 cm, diameter 5,5 cm, dan jari–jari gelembung 1 cm. Jari–jari gelembung sama dengan jari–jari gelembung yang diset pada eksperimen.

#### 4.1.6 Analisis Simulasi Gelembung Tunggal pada Cairan IV

Gelembung mula–mula berada pada posisi 7 cm relatif terhadap bidang batas permukaan air–udara. Gelembung kemudian bergerak naik, mengalami deformasi, pemipihan, dan kemudian pecah ketika mencapai permukaan, lihat **Gambar 4.26**.

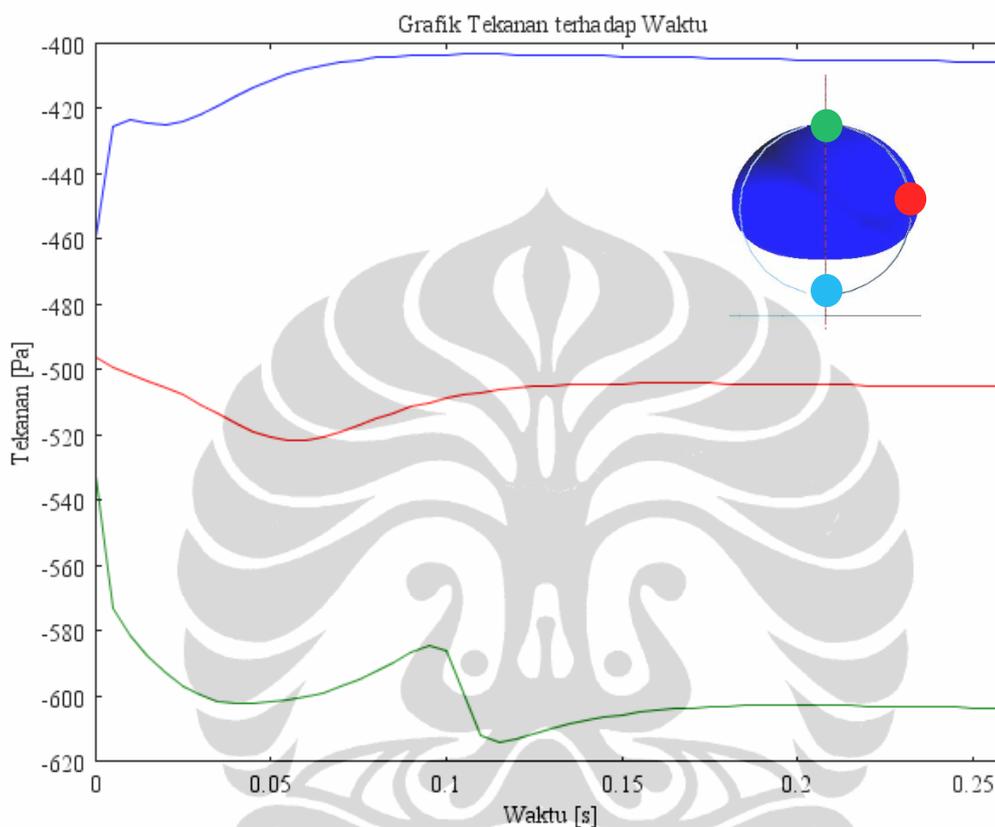


**Gambar 4.26** Sekuen hasil simulasi gelembung tunggal tahap IV.

Berdasarkan pengamatan visual, gelembung mulai mengalami perubahan bentuk pada  $t = 50$  ms. Ukuran gelembung tampak mengecil dan sedikit mengalami pemipihan hingga  $t = 200$  ms. Pada  $t = 295$  ms, gelembung mencapai permukaan dan pecah. Mengacu pada **Gambar 4.27**, pada saat  $t = 0$  s, tekanan yang bekerja pada gelembung di bagian yang diberi warna biru, merah, dan hijau masing-masing sebesar  $-460$  Pa,  $-490$  Pa, dan  $-532$  Pa. Tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung, warna biru, mulai menurun bersamaan dengan meningkatnya tekanan pada titik yang lain. Tekanan di bagian atas mengalami peningkatan yang cukup besar.

Demikian juga pada bagian samping gelembung, peningkatan tekanan teramati sebesar  $30$  Pa atau terpaut  $38$  Pa dari peningkatan tekanan di bagian atas gelembung. Setelah melampaui waktu  $0,1$  s tekanan yang bekerja pada bagian bawah gelembung mengalami saturasi (sebesar  $405$  Pa) hingga gelembung mencapai permukaan. Pada selang waktu yang sama, tekanan yang bekerja pada gelembung bagian samping mengalami penurunan setelah sebelumnya meningkat.

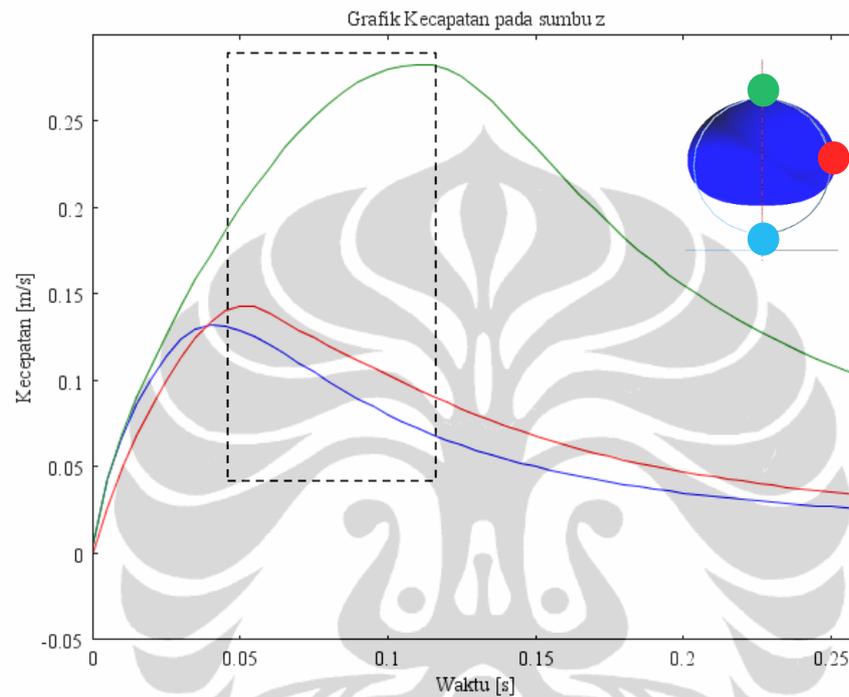
Tekanan pada daerah itu stabil setelah 0,15 s. Lain halnya dengan tekanan yang bekerja pada permukaan gelembung bagian atas. Hingga  $t = 0,15$  s fluktuasi tekanan yang muncul cukup besar. Baru setelah 0,2 s tekanan pada permukaan tersebut konstan.



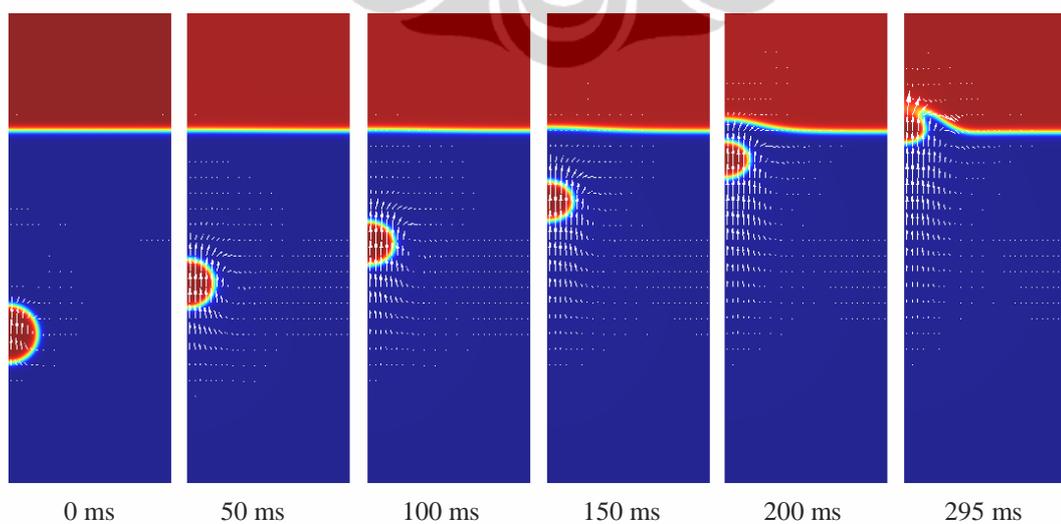
**Gambar 4.27** Grafik gaya tegang permukaan yang bekerja pada gelembung.

Gradien tekanan yang muncul pada permukaan gelembung menyebabkan gelembung mengalami akselerasi. Seperti terlihat pada **Gambar 4.28**, dari keadaan diam, gelembung dipercepat selama 0,05 s dengan besar percepatan mencapai  $9,2 \text{ m/s}^2$ . Percepatan ini terpaut  $0,8 \text{ m/s}^2$  dengan percepatan gravitasi yang digunakan dalam simulasi. Adanya disipasi percepatan sebesar  $0,8 \text{ m/s}^2$  ini disebabkan oleh gaya viskositas antara gelembung dan air. Gradien tekanan berhubungan dengan variasi kecepatan lokal fluida, lihat Persamaan (2.27). Gradien tekanan pada permukaan gelembung paling besar terjadi pada permukaan bagian atas, menyebabkan percepatan lokal pada daerah tersebut juga lebih besar dibanding permukaan lainnya. Percepatan lokal juga muncul pada permukaan

bawah dan samping namun tidak sebesar pada permukaan bagian atas. Dikaitkan dengan gradien tekanan, lihat segmen merah dan biru, setelah tekanan pada dua tempat tersebut mengalami saturasi, kecepatan gelembung mulai menurun. Namun jika dirata-ratakan terhadap seluruh komponen kecepatan lokal (lihat tanda kotak pada grafik), kecepatan gelembung masih meningkat hingga  $t = 0,12$  s.



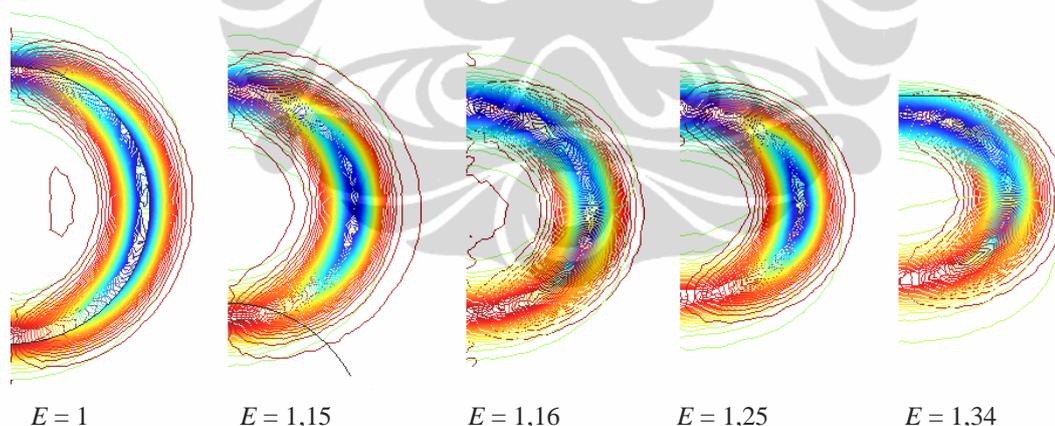
**Gambar 4.28** Grafik kecepatan gelembung terhadap waktu.



**Gambar 4.29** Plot kecepatan aliran fluida dari  $t = 0$  ms hingga 295 ms.

Profile kecepatan fluida menunjukkan kecenderungan yang sama dengan simulasi I, II, dan III yaitu aliran air memiliki kecepatan paling tinggi di daerah/jalur aliran gelembung udara. Kecepatan aliran air terlihat semakin besar ketika gelembung bergerak semakin jauh dari posisi awalnya. Pada simulasi ke IV digunakan gelembung udara yang memiliki ukuran jari-jari lebih kecil dari simulasi sebelumnya. Jari-jari gelembung sebesar 1 cm, seluruh bagian gelembung menempati volume air sebesar  $4,18 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ . Gaya hidrostatis yang bekerja pada gelembung juga kecil sehingga efek interaksi antara gelembung dan air juga tidak terlalu signifikan jika dibandingkan dengan simulasi III. Aliran pusaran air juga tidak terlalu kelihatan dengan jelas di dalam plot anak panah pada **Gambar 4.29**.

Pada  $t = 50 \text{ ms}$ , terlihat kecepatan aliran air di bagian bawah gelembung mulai meningkat. Lapisan air di bagian luar gelembung (pada arah horisontal) terlihat mulai mengalami sirkulasi (putaran). Karena ada percepatan oleh gaya hidrostatis, gelembung bergerak semakin cepat. Gradien kecepatan sepanjang jalur aliran gelembung juga semakin besar sehingga aliran air yang terdesak-pun terdorong dengan kecepatan yang tinggi.



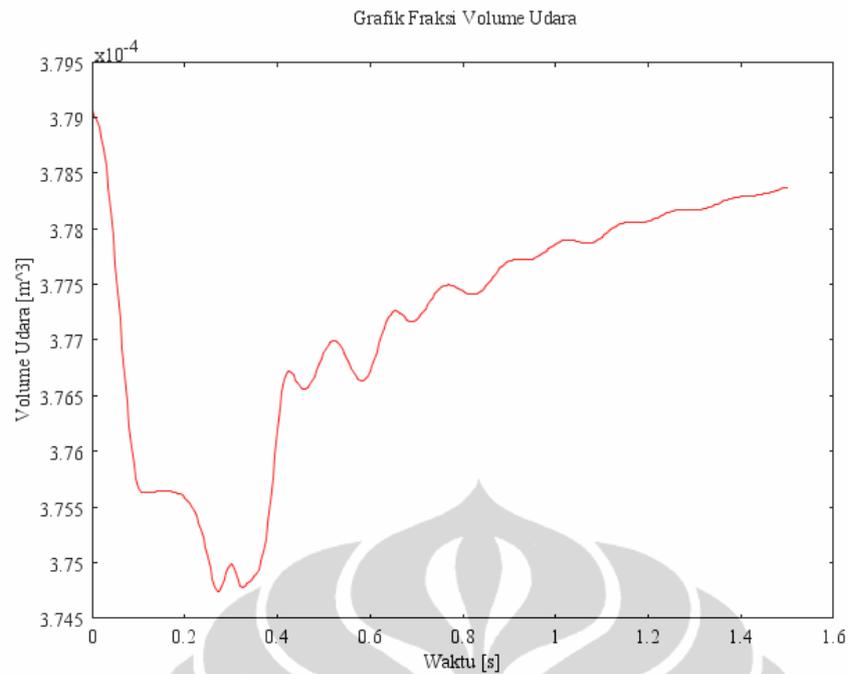
**Gambar 4.30** Distribusi tekanan pada permukaan dan rasio diameter gelembung.

Menilik grafik tekanan pada permukaan gelembung dan membandingkannya dengan plot *contour* gaya tegangan permukaan gelembung, dapat diketahui bahwa tekanan terbesar dialami gelembung pada bagian bawah. Tekanan terdistribusi pada bagian lainnya setelah 100 ms kemudian dan masih

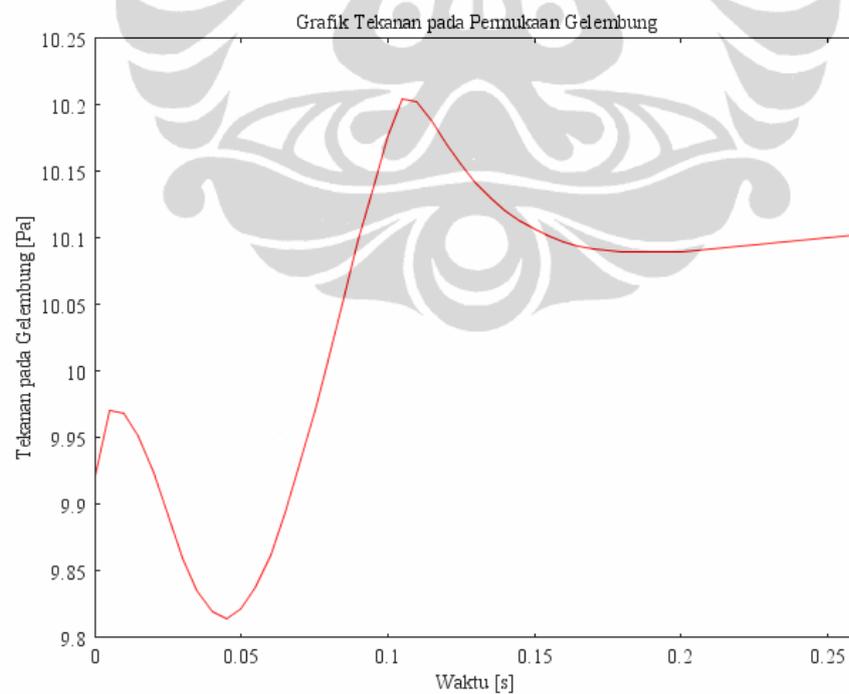
berlanjut hingga detik ke 0,295. Rasio diameter horizontal dan vertikal semakin besar walaupun ukuran gelembung mengecil. Hal ini mengindikasikan bahwa telah terjadi proses pemipihan selama gelembung bergerak dari titik awal hingga mencapai permukaan. Pada  $t = 295$  ms, gelembung tepat menembus bidang batas permukaan air–udara. Kemungkinan besar, jika tidak terjadi penyusutan ukuran gelembung, proses pemipihan akan lebih besar dimana jari–jari horizontal akan lebih besar dibanding data pada **Gambar 4.30**.

Berdasarkan grafik fraksi volume udara, **Gambar 4.31**, fraksi volume udara yang hilang sebesar 0,15%. Volume udara yang hilang sangat kecil, kurang dari 1%. Dengan nilai disipasi massa sebesar 0,15% ini, dinamika aliran sistem seharusnya tidak terpengaruh secara signifikan. Hal ini terbukti dengan kecepatan gelembung yang, walaupun mengalami perlambatan, mendekati konstan setelah menempuh jarak sejauh 12 cm. Perlambatan pada permukaan atas gelembung jauh lebih besar dibanding perlambatan pada permukaan lainnya. Inilah yang menyebabkan penurunan nilai diameter vertikal gelembung jauh lebih cepat dibanding penurunan diameter horizontal dan hal ini juga yang menjelaskan mengapa proses pemipihan mendominasi perubahan bentuk gelembung. Mengacu data pada grafik **Gambar 4.32**, bisa dikatakan deformasi bagian bawah gelembung tidak terlalu besar dibanding pemipihan pada bagian samping.

Gaya tegang permukaan mengalami fluktuasi yang cukup besar. Gaya tegang permukaan pada keseluruhan gelembung minimum sebesar 9,2 Pa pada  $t = 0,04$  s dan mencapai maksimum pada  $t = 0,12$  s dengan besar tekanan 10,2 s. Antara 0,05 s hingga 0,1 s terjadi peningkatan tekanan yang cukup besar. Pada rentang waktu ini pula pemipihan gelembung terjadi, lihat **Gambar 4.32**. Gaya tegang permukaan ini juga turut andil dalam peningkatan kecepatan gelembung pada permukaan bagian atas, lihat **Gambar 4.28**. Setelah melalui 0,12 s gaya tegang permukaan perlahan mengecil hingga  $t = 0,18$  s, lalu meningkat lagi dengan gradien yang sangat kecil hingga mencapai nilai 10,1 Pa. Pada saat itu gelembung tepat mencapai permukaan dan pecah.

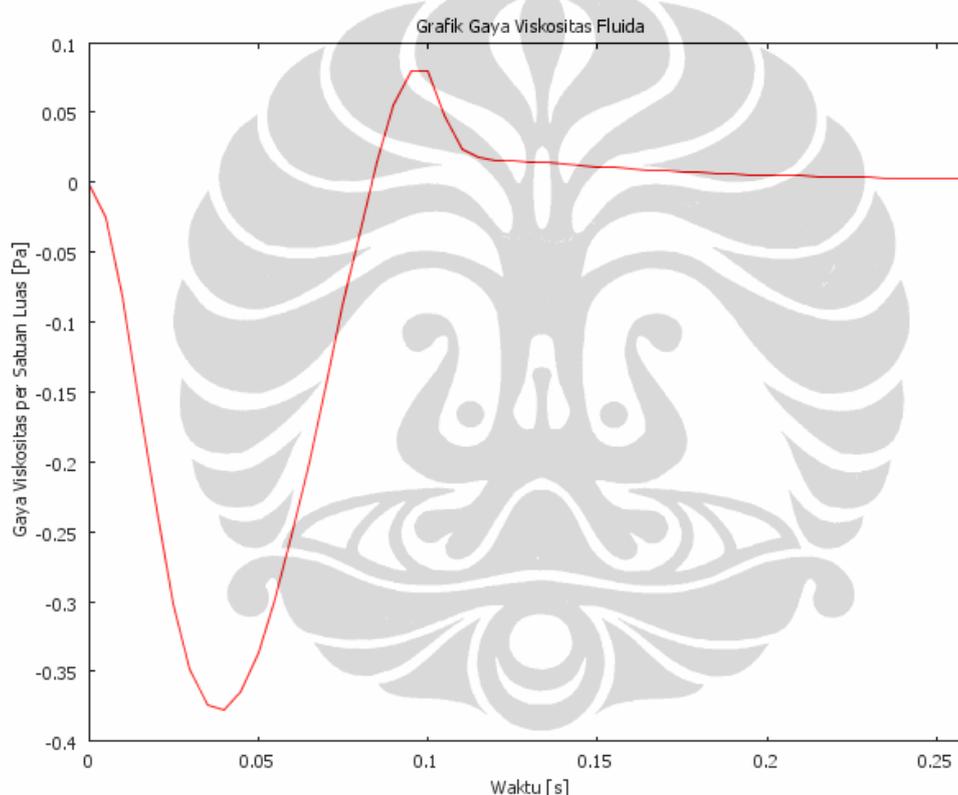


**Gambar 4.31** Grafik fraksi volume udara. Volume udara berkurang sebesar 0,15%. Nilai ini jauh lebih kecil dibanding disipasi volume pada simulasi sebelumnya yaitu 5,8%.



**Gambar 4.32** Grafik gaya tegangan permukaan yang bekerja pada seluruh bagian gelembung. Tekanan permukaan maksimum sebesar 10,2 Pa pada  $t = 0,12$  s.

Efek viskositas gelembung udara yang telah dinaikkan menjadi 6 Pa.s dari nilai normal yang hanya  $1,78 \times 10^{-5}$  Pa.s (hampir 500.000 kali lebih kental) memberikan gaya hambat yang tidak terlalu besar. Gaya viskositas maksimum hanya sebesar  $0,37 \text{ N/m}^2$ . Pada  $t = 0,05$  s kemungkinan besar perlambatan yang terjadi pada sisi bawah dan samping dipengaruhi juga oleh gaya viskositas ini. Gaya viskositas kembali turun hingga  $t = 0,12$  s, dengan diselingi naik sedikit pada selang waktu 0,06 s hingga 0,1 s. Pada saat itu kecepatan permukaan gelembung bagian atas mencapai maksimum, lihat **Gambar 4.28**.



**Gambar 4.33** Grafik gaya viskositas per satuan luas yang bekerja pada permukaan gelembung.

Asumsi–asumsi yang digunakan untuk melakukan simulasi tahap IV terbukti dapat menangani permasalahan yang dihadapi pada saat simulasi menggunakan parameter–parameter baku. Permasalahan yang masih muncul adalah perlambatan gelembung yang masih tidak masuk akal. Perlambatan ini

menyebabkan pecahnya gelembung tidak begitu fenomenal. Hasil simulasi ini akan dikonfrontasikan dengan eksperimen gelembung tunggal menggunakan sensor ECVT yang akan dibahas pada sub bab berikutnya.



#### 4.2 Teori Medan Fase, Gelembung Udara, dan Tetesan Air: Perbandingan Performa Teori Medan Fase pada Gelembung Udara dan Tetesan Air

Untuk membuktikan hipotesis bahwa permasalahan yang dihadapi oleh metode medan fase yang digunakan untuk mensimulasikan gelembung udara di dalam air adalah ketidakakuratannya dalam menangani deformasi gelembung (gelembung sangat sensitif terhadap perubahan gradien tekanan) maka simulasi lainnya dilakukan. Pada sistem gelembung udara–air, udara bertindak sebagai fase terdispersi. Pada simulasi kali ini, peran keduanya dibalik yaitu fase udara bertindak sebagai fase kontinu sedangkan air sebagai fase terdispersi. Sistem tau fenomena yang diambil sebagai sampel adalah jatuhnya tetesan air karena percepatan gravitasi bumi.

Pemodelan dilakukan dengan mode laminar (sama dengan mode pemodelan gelembung tunggal). Sebuah tetesan air berbentuk bola dengan diameter 2 cm mula berada di ketinggian 11 cm di atas permukaan air setebal 2 cm. Ruang di antara butiran air dan air terisi oleh udara. Parameter fisis dan besaran lainnya mengacu pada data–data standar, seperti yang tertera pada **Tabel 4.3** dan **4.4**.

**Tabel 4.2** Model dan parameter simulasi gelembung tunggal di dalam air.

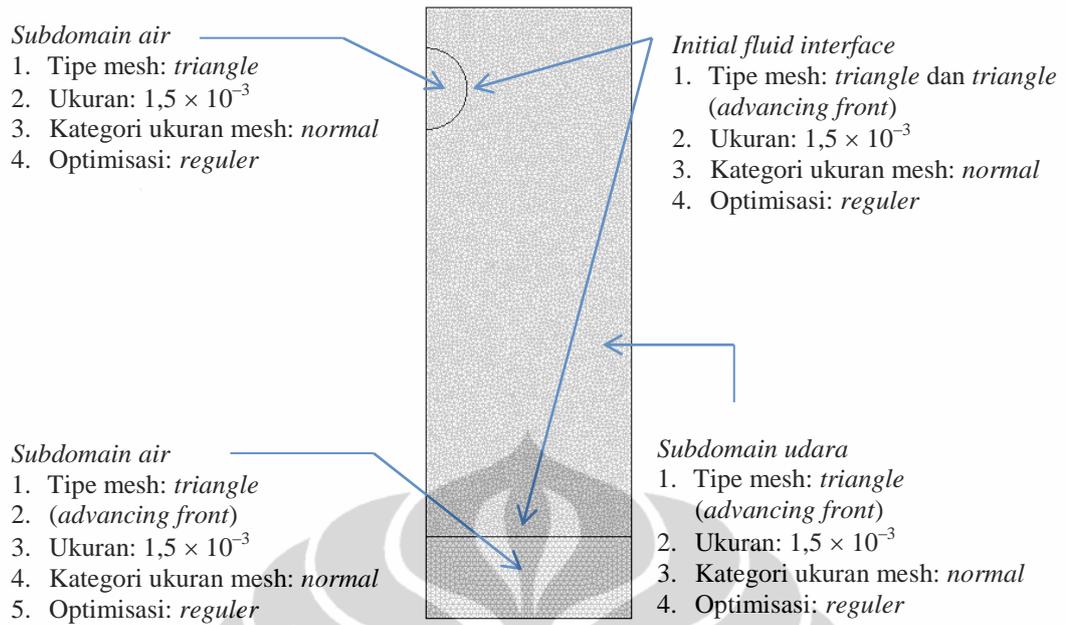
Model	Medan fase		Persamaan Navier Stokes
Laminar	$\chi$ 10 m.s/kg	$\varepsilon$ 1 mm	Difusi <i>streamline</i> $\sigma_{sd} = 0,05$
Parameter–parameter gelembung gas dan cairan			
<b>Gas:</b> $\rho_G = 1,29 \text{ kg/m}^3$ , $\mu_G = 1,78 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ <b>Air:</b> $\rho_L = 997 \text{ kg/m}^3$ , $\mu_L = 1,04 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ Koefisien tegangan permukaan, $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$ Percepatan gravitasi, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$			

**Tabel 4.3** Kondisi dan syarat batas domain simulasi.

Kondisi dan syarat batas	
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Daerah (1, 2, dan 3)               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipe: <i>Wall</i></li> <li>• Kondisi: <i>slip velocity</i></li> </ul> </li> <li>✓ Daerah (4 dan 5)               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kondisi: <i>Initial fluid interface</i></li> <li>• Tipe: <i>wall</i></li> <li>• Kondisi: <i>no slip velocity</i></li> </ul> </li> <li>✓ Daerah (6)               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipe: <i>Symmetry</i></li> <li>• Kondisi: <i>Axial symmetry</i></li> </ul> </li> </ul>	

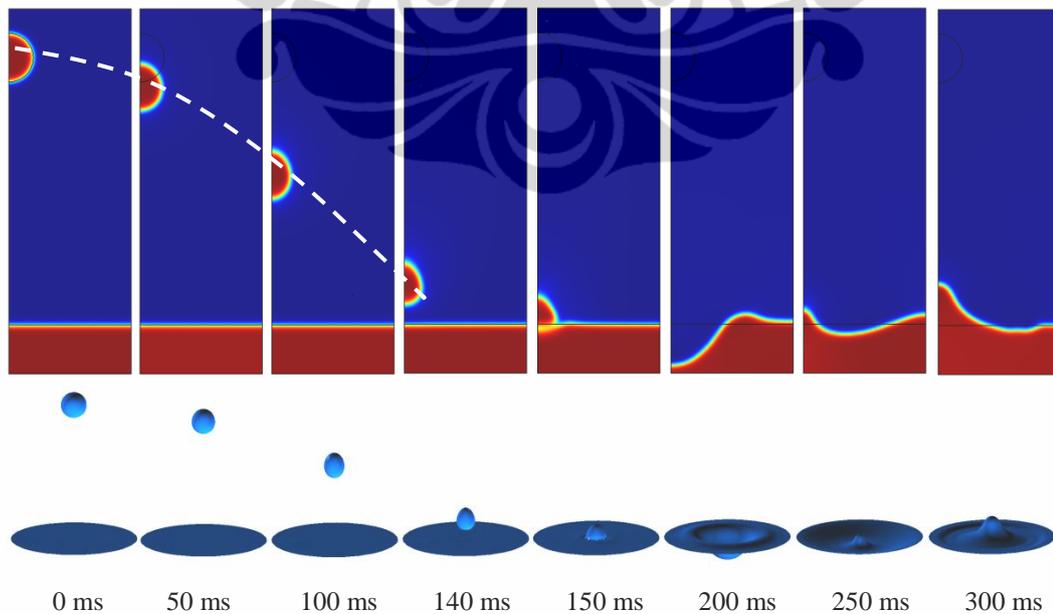
Simulasi *transien* dilakukan selama 1 s, dengan terlebih dahulu menentukan kondisi inisial dengan cara membuat simulasi inialisasi. Tahapan ini sangat penting untuk menentukan parameter simulasi, kondisi–kondisi batas, serta nilai–nilai variabel awal yang akan diolah pada tahap berikutnya. Kondisi inisial yang baik akan mempengaruhi proses simulasi berikutnya. Hal ini terutama berkaitan dengan seberapa cepat simulasi akan mencapai batas konvergensi. Tahap *transient initialization* dilakukan selama 1 sekon menggunakan metode solusi persamaan linier *Direct* (PARDISO) dan algoritma (*pre–ordering*) *nested dissection* dengan toleransi relatif sebesar 0,01 dan toleransi absolut sebesar 0,001.

Metode *Direct* (PARDISO) bersama–sama dengan metode BDF digunakan untuk melakukan diskritisasi temporal dengan nilai orde minimum dan maksimum masing–masing 1 dan 2. Untuk menangani konstrain pada sistem persamaan linier, digunakan metode eliminasi.

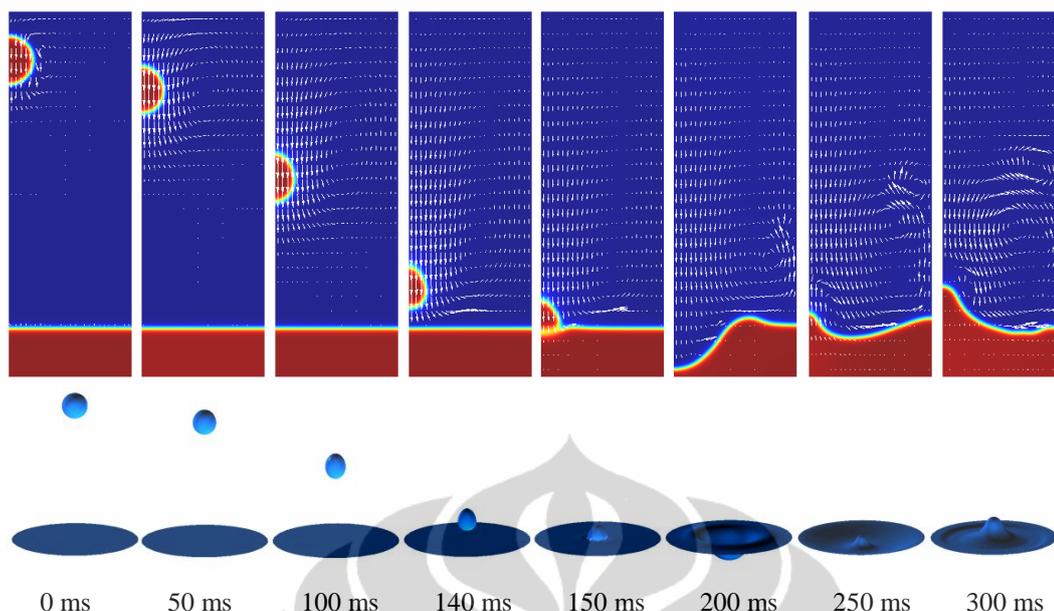


**Gambar 4.34** Definisi *mesh* dan geometri setelah di *mesh*.

Gambar di atas menunjukkan geometri yang telah *dimesh*. Menggunakan kolom setinggi 24 cm, 2 cm dari dasar kolom diisi dengan air, butiran air dilepaskan dari ketinggian 11 cm dari permukaan air. Berikut ini adalah sekuen hasil simulasi jatuhnya butiran air tersebut.



**Gambar 4.35** Evolusi bentuk butiran air ketika jatuh dari ketinggian 11 cm ke permukaan air setebal 2 cm.

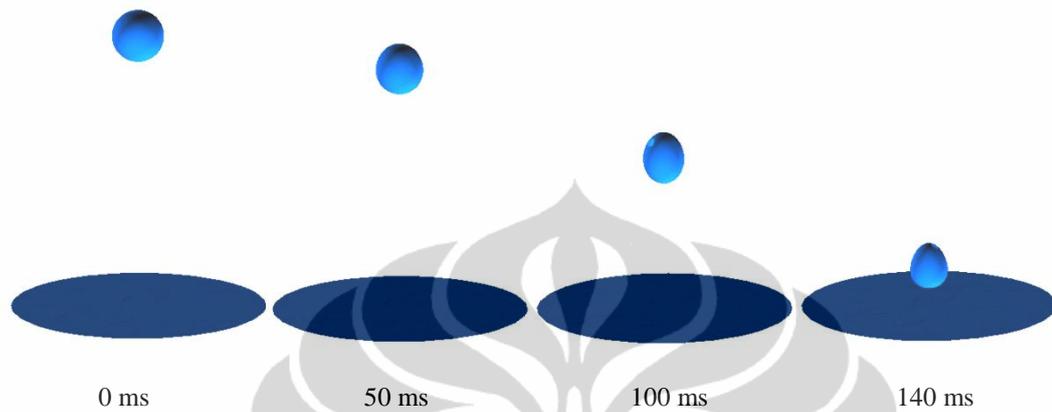


**Gambar 4.36** Plot kecepatan fluida pada  $t = 0$  ms hingga 300 ms.

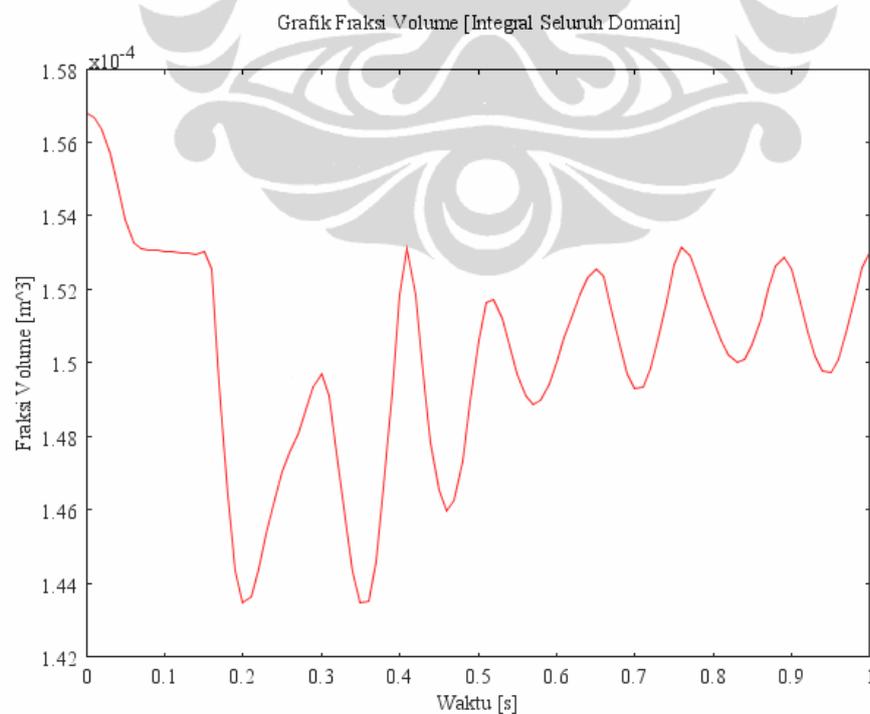
Butiran air memperoleh kecepatannya dari medan gravitasi bumi. Setelah bergerak selama 50 ms, terlihat butiran air mulai mengalami deformasi. Gerakan butiran air ini menyebabkan udara di sekitarnya ikut bergerak. Pada jalur gerakan butiran air, serta beberapa cm di sekitarnya, terlihat udara juga ikut bergerak dan berputar. Dengan semakin meningkatnya kecepatan butiran air, semakin besar pula kecepatan udara yang melingkupinya. Pusaran aliran udara mulai muncul dan terlihat jelas setelah 100 ms. Segmen udara yang dekat dengan dinding bergerak pada arah yang berlawanan dengan udara yang berada pada jalur gerakan butiran air. Sesaat sebelum butiran air sampai di permukaan air, terlihat bahwa segmen udara yang berada di antaranya mengalami pembelokan arah. Udara bergerak ke samping dan sebagian berbalik arah ke atas. Setelah butiran air jatuh di permukaan dan menghasilkan gelombang air, terlihat bahwa udara di sekitarnya mengalami pusaran-pusaran dengan kecepatan yang cukup tinggi relative terhadap udara di bagian yang lain.

Dari hasil simulasi terlihat bahwa butiran air mengalami percepatan, ditandai dengan perpindahan dari 0 ms ke 50 ms dibanding perpindahan dari 50 ms ke 100 ms terdapat selisih jarak yang cukup besar. Dari *tracing* lintasan

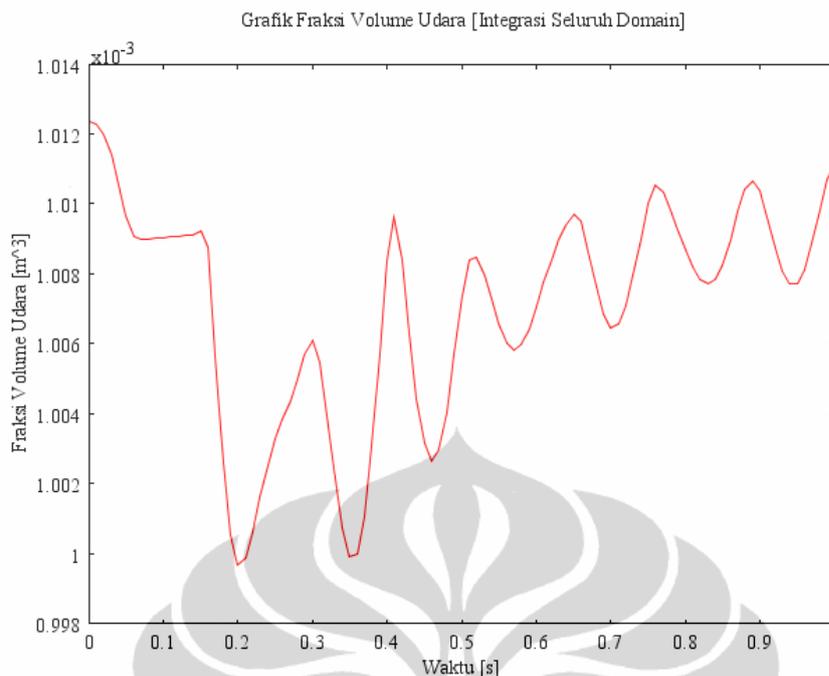
butiran air, garis titik–titik berwarna putih, terlihat bahwa perpindahan berbanding kuadratik terhadap waktu. Perubahan bentuk butiran air juga mencerminkan adanya percepatan gravitasi dan gesekan dengan udara, lihat **Gambar 4.37**.



**Gambar 4.37** Sekuen evolusi butiran air dari  $t = 0$  ms hingga 140 ms.



**Gambar 4.38** Grafik fraksi volume air (integrasi seluruh domain).

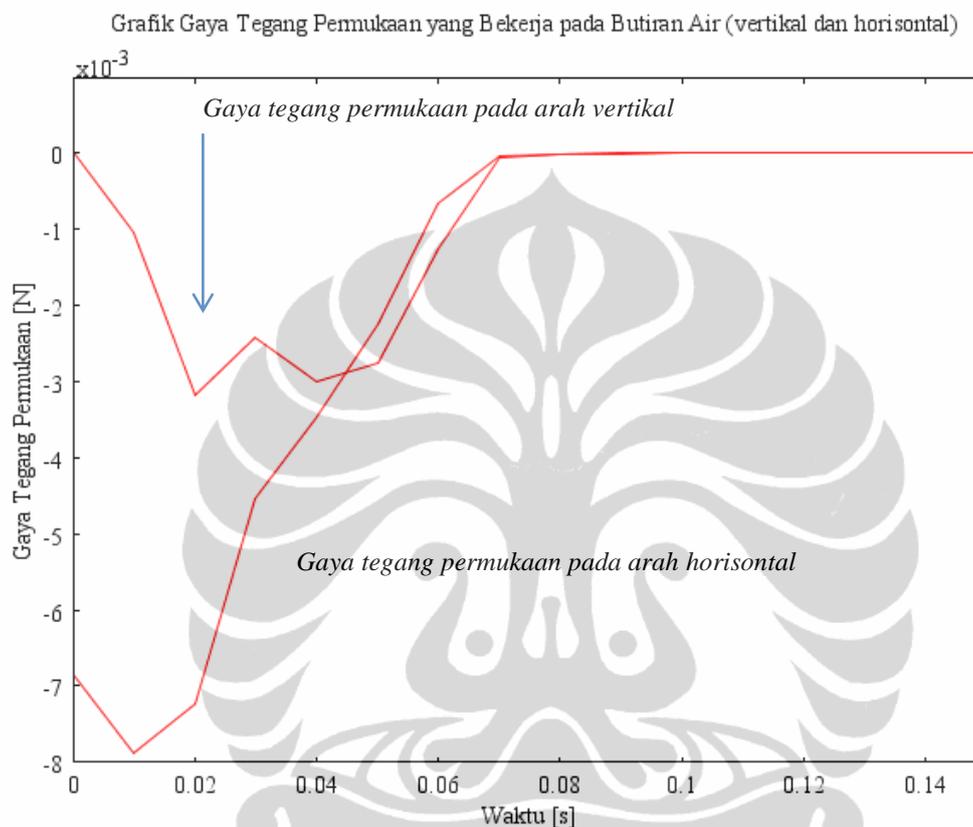


**Gambar 4.39** Grafik fraksi volume udara (integrasi seluruh domain).

Mengacu pada grafik fraksi volume, kehilangan sebagian volume fase memang masih dijumpai. Namun kali ini kehilangan volume tersebut, grafik di atas untuk fraksi volume air, tidak sebesar seperti yang dijumpai pada simulasi gelembung udara di dalam air. Presentase kehilangan volume massa air pada simulasi ini sebesar 1,9%. Demikian juga dengan udara. Jumlah volume udara yang hilang selama simulasi sebesar 0,11%, lihat **Gambar 4.39**. Ini adalah jumlah kehilangan volume yang sangat kecil dan dalam beberapa kasus dapat diabaikan.

Gaya tegan permukaan yang bekerja pada butiran air, pada arah horizontal dan vertikal, menunjukkan adanya peningkatan yang cukup signifikan pada 0,02 s (arah vertikal) dan 0,04 s (arah horizontal) pertama kemudian menurun drastis hingga mencapai nol pada  $t = 0,08$  s. Jika diperhatikan, butiran air telah mencapai dasar permukaan air pada  $t = 0,14$  s Dengan memperhatikan **Gambar 4.39**, dapat diketahui bahwa butiran air menjadi lonjong. Mengacu pada **Gambar 4.40**, alasan melonjongnya butiran tersebut dapat dipahami. Gaya tegang permukaan pada arah horizontal lebih besar dibanding gaya tegang permukaan pada arah vertikal (ini yang menyebabkan mengapa butiran air tidak

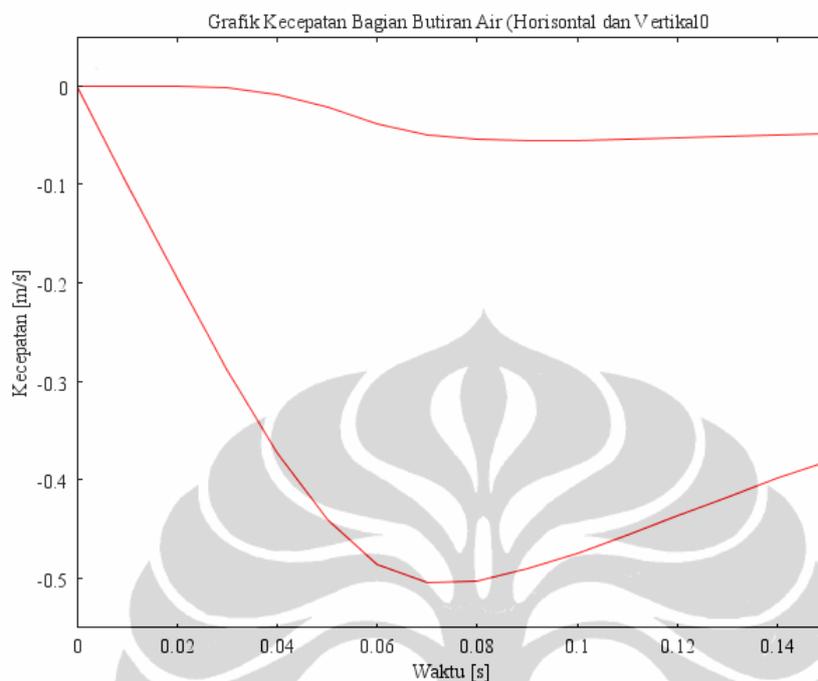
memipih). Mendekati  $t = 0,1$  s gaya tegang permukaan pada kedua arah tersebut turun hingga nol. Pada detik ke 0,14 s diamati adanya perubahan bentuk butiran air, pada bagian bawah agak memipih sedangkan bagian atasnya sedikit lonjong.



**Gambar 4.40** Grafik gaya tegang permukaan yang bekerja pada butiran air pada arah horizontal dan vertikal.

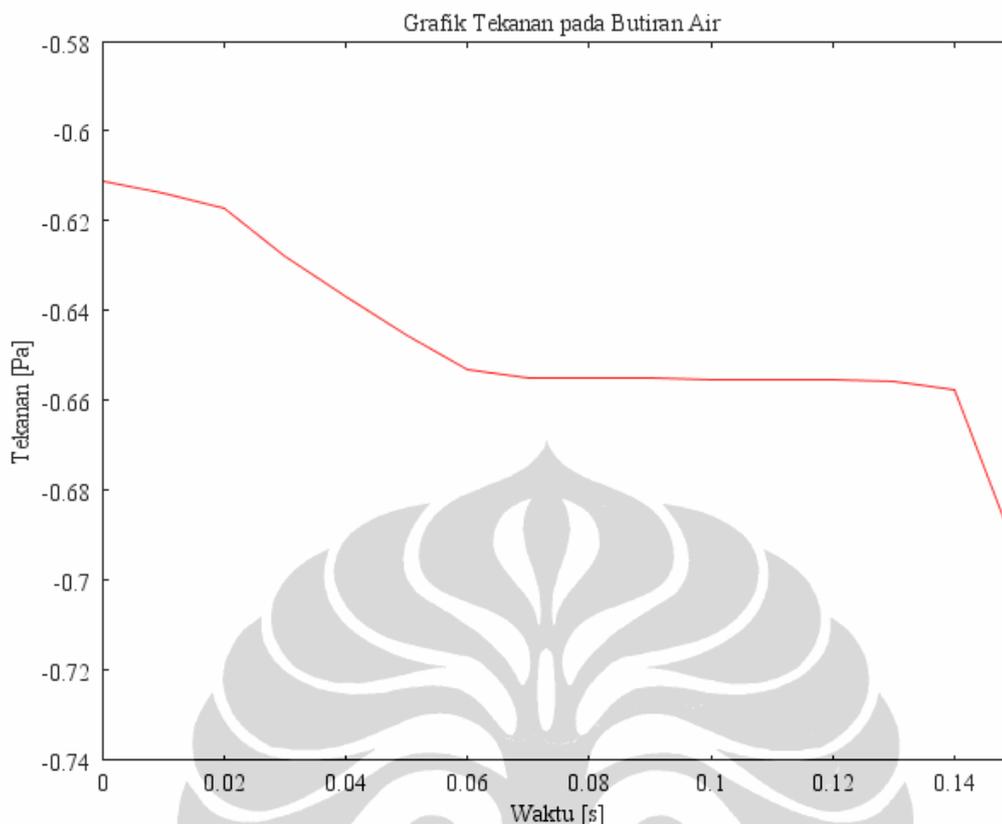
Gaya gravitasi yang bekerja pada butiran air itu sebanding dengan massanya, yaitu sekitar 0,042 N. Dibanding gaya tegang permukaan, nilai ini jauh lebih besar. Waktu kontak udara dengan air menjadi lebih kecil sehingga efek gesekan dan tekanan menjadi lebih kecil. Deformasi yang muncul pada butiran air menyebabkan setiap bagian dari butiran air tersebut memiliki komponen kecepatan yang berbeda-beda. Pada **Gambar 4.41** dapat dilihat perbandingan kecepatan butiran air pada arah vertikal (pelonjongan) dan arah horizontal (pemipihan). Terlihat bahwa kecepatan arah vertikal jauh lebih besar dibanding

kecepatan arah horizontal sehingga proses pelonjongan terjadi lebih cepat dibanding pemipihan.



**Gambar 4.41** Grafik kecepatan arah vertikal (pelonjongan) dan horizontal (pemipihan).

Tekanan yang bekerja pada butiran semakin lama semakin meningkat. Tepat sebelum mencapai permukaan air, butiran tersebut mengalami pemipihan. Hal ini dikarenakan adanya tekanan yang cukup besar yang bekerja pada butiran tersebut, seperti yang ditunjukkan pada **Gambar 4.42**. Mula-mula tekanan pada butiran sebesar 0,61 Pa, setelah bergerak selama 0,06 s tekanan turun menjadi 0,65 Pa. Tekanan yang bekerja hampir konstan selama  $t = 0,06$  s hingga 0,14 s. Tekanan berubah cukup besar, 0,4 Pa, dari yang semula 0,65 menjadi 0,69 Pa. Tentu saja tekanan ini berperan dalam deformasi butiran air saat tepat akan menyentuh permukaan air. Dibanding hasil simulasi gelembung udara pada air, tekanan dan gaya tegang permukaan yang bekerja pada gelembung sebenarnya tidak terlalu besar, namun karena udara memiliki viskositas yang sangat rendah (sehingga mudah sekali terdeformasi) maka gelembung udara tersebut terdeformasi dengan sangat kuat dan hilang di tengah perjalanan menuju permukaan air-udara.



**Gambar 4.42** Grafik tekanan yang bekerja pada butiran air.

Berdasarkan hasil simulasi butiran air jatuh ke permukaan air ini, dapat disimpulkan bahwa metode medan fase memberikan hasil yang cukup baik. Fraksi kehilangan massa fase tidak terlalu besar dan dapat diabaikan. Gaya tegang permukaan, tekanan, serta evolusi bentuk butiran berada dalam kondisi yang wajar dan *reasonable*. Sensor ECVT 4D dapat digunakan untuk mengklarifikasi hasil simulasi ini. Terkait dengan penerapan metode medan fase ke sistem gelembung udara di dalam air, kesimpulan sementara yang diperoleh adalah perlu adanya modifikasi pada persamaan medan fase dan suku persamaan yang mengatur kekekalan massa dan kontrol permukaan bidang batas antara dua fase atau lebih sehingga untuk dua fase yang memiliki perbedaan massa jenis besar (misalnya udara dan air) dan viskositas yang besar dapat ditangani dengan baik. Pada studi pembalikan ternyata diperoleh hasil yang cukup baik. Hal ini berarti gaya hidrostatis dan tegangan permukaan oleh air terhadap gelembung udara (pada kasus gelembung udara di dalam air) terlalu besar atau persamaan yang

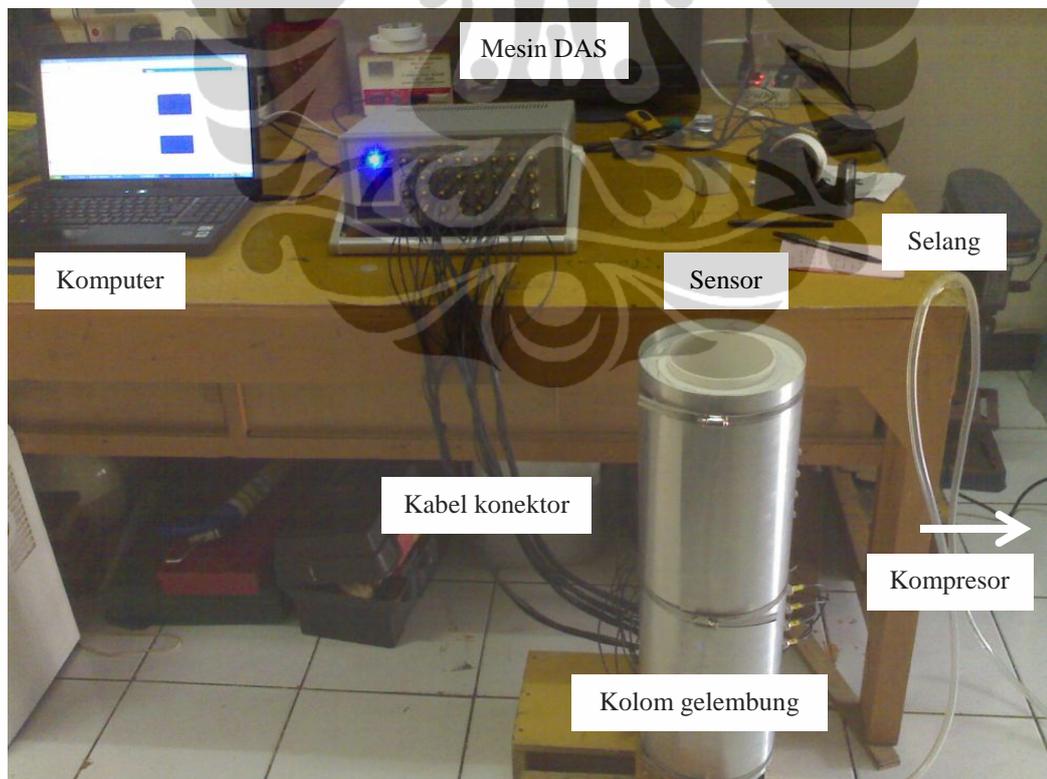
mengontrol permukaan bidang batas tidak stabil. Dengan membuat viskositas udara lebih besar, terbukti bentuk gelembung dan kehilangan massa dapat *ter-maintenance* dengan baik walaupun masih terdapat hasil yang tidak fisis dengan melambatnya gerak gelembung ketika mencapai permukaan. Studi lanjutan terhadap efek besaran–besaran fisis tersebut sangat dianjurkan untuk dilakukan.



### 4.3 Eksperimen Dinamika Aliran Multifase

#### 4.3.1 Set Up Eksperimen Gelembung Tunggal pada Cairan

Sensor 16 channel buatan PT Edward Technology dengan lisensi dari CTECH Lab digunakan untuk mengamati dinamika aliran multifase sistem gelembung cairan. Tabung yang digunakan sebagai kolom gelembung memiliki diameter 11 cm dan tinggi 44 cm. Gelembung tunggal diproduksi menggunakan aliran udara yang dihasilkan kompresor berkekuatan  $\frac{3}{4}$  pK. Lubang udara pada tabung memiliki diameter 2 cm yang terhubung dengan kompresor melalui pipa berbentuk L (diameter 2 cm) dan selang plastik elastis sepanjang 1,5 m dengan diameter 1 cm. Tekanan udara kompresor diatur sedemikian rupa sehingga gelembung udara yang keluar dari dasar tabung memiliki kecepatan awal nol. Akuisisi data dari sensor 16 channel menggunakan mesin DAS 32 channel buatan PT Edwar Technology, dengan lisensi dari CTECH Lab, nomor seri 091001002.



**Gambar 4.43** Definisi parameter dan besaran eksperimen gelembung tunggal.

### 4.3.2 Eksperimen Gelembung Tunggal pada Cairan

Membuat sebuah gelembung dalam tabung yang berisi air merupakan jenis problem trivial, gampang–gampang susah. Setelah memastikan tidak ada masalah pada sensor yang digunakan, termasuk kabel dan mesin DAS, eksperimen telah siap dilaksanakan. Walaupun demikian pengambilan data sampel tidak dapat langsung dilakukan karena dengan sekedar menginjeksi udara dari kompresor ke dalam tabung, tidak menjamin bahwa gelembung yang keluar dari lubang tabung hanya satu. Posisi selang, design pipa L yang digunakan untuk mengkoneksikan selang ke lubang tabung, volume air di dalam tabung, dan besar tekanan udara dari kompresor sangat berpengaruh pada proses pembentukan gelembung.

Setelah beberapa kali eksperimen, dengan berbagai variasi volume air dan tekanan udara, akhirnya gelembung tunggal dapat dihasilkan. Tekanan kompresor diatur sedemikian rupa sehingga gelembung tunggal yang keluar dari lubang tabung, yang berjari–jari 2 cm itu, memiliki kecepatan awal nol. Untuk memastikannya, dilakukan pengamatan secara visual terhadap gelembung yang keluar dari lubang tersebut. Kondisi lainnya yang harus dipenuhi adalah selain gelembung yang keluar dari lubang itu harus satu, gelembung lainnya tidak boleh muncul sebelum gelembung yang sudah keluar mencapai permukaan. Gelembung–gelembung ini sangat sensitif dengan perubahan tekanan udara. Sedikit saja tekanan udara meningkat, gelembung yang dihasilkan keluar dalam jumlah banyak, seperti barisan gelembung tunggal. Dari beberapa gelembung itu ada yang mengalami fragmentasi menjadi beberapa gelembung kecil.

Jika tekanan diturunkan sedikit saja, tidak ada gelembung yang dihasilkan. Kalaupun ada, berdasarkan hasil pengamatan eksperimen, gelembung tersebut keluar dalam jeda waktu yang sangat lama. Dengan melakukan pengaturan dan penyesuaian tekanan dan posisi selang, akhirnya dapat diperoleh gelembung tunggal yang dihasilkan secara periodik dimana jeda munculnya satu gelembung dengan gelembung lainnya cukup lama. Artinya, ketika sebuah gelembung dihasilkan, gelembung yang lain muncul beberapa saat setelah gelembung tersebut mencapai permukaan. Kadang, kemunculan gelembung “berikutnya” itu agak sedikit lama akan tetapi hal ini justru memberikan keuntungan tersendiri karena

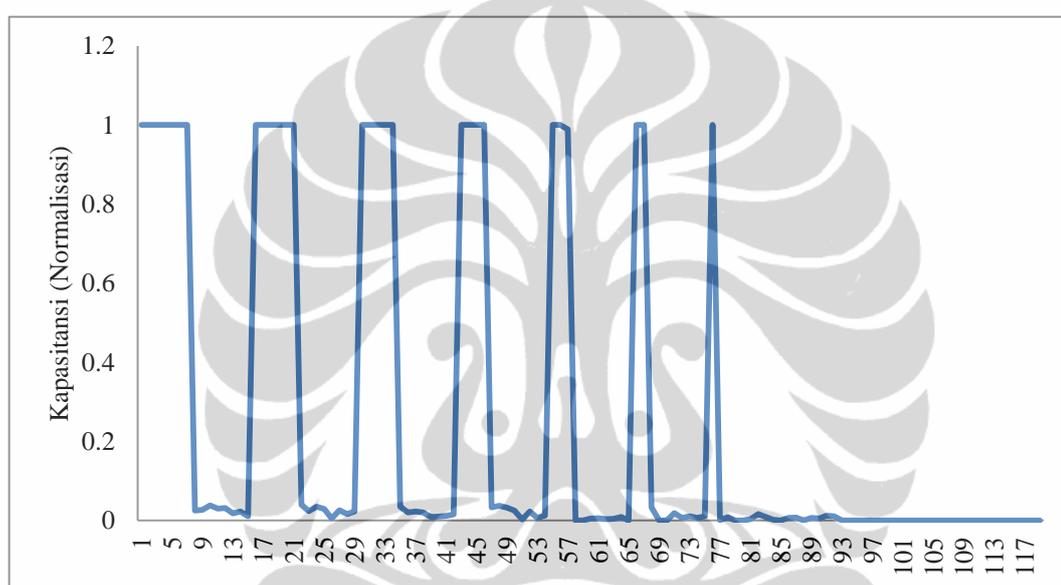
air memiliki waktu yang digunakan untuk melakukan relaksasi (kembali ke keadaan tenang dan tidak bergejolak). Jika air bergerak maka gerak dan bentuk gelembung akan terpengaruh. Hal ini akan mempersulit pembuatan simulasinya karena parameter-parameter air yang berada dalam keadaan (kondisi awa) tidak tenang kadang sulit untuk ditentukan.

Walaupun telah berhasil menghasilkan sebuah gelembung akan tetapi ukuran gelembung-gelembung tersebut tidaklah selalu sama. Kadang ada yang besar, kadang ada yang kecil, bahkan ada yang sangat kecil. Gelembung yang bagus (ukurannya besar dan memiliki bentuk yang homogen dimana jalur tempuhnya lurus vertikal) biasanya menghasilkan suara “*pluk!*” ketika mencapai permukaan air. Gelembung semacam itulah yang dalam eksperimen ini sangat diminati. Pada setiap eksperimen, data kapasitansi diambil sebanyak 1.200 frame dengan kecepatan pembacaan data oleh mesin DAS sebesar 4 frame/s. Hal ini berarti setiap satu kali pengambilan data dibutuhkan waktu sekitar 5 hingga 10 menit. Dalam satu sesi pengambilan data, rata-rata dilakukan 5 hingga 7 kali eksperimen sehingga total setiap sesi pengambilan data adalah 50 hingga 70 menit. Berdasarkan pengamatan, setiap dua detik rata-rata keluar satu hingga dua gelembung. Jika dijumlahkan secara kasar, dalam satu sesi pengambilan data dapat diperoleh gelembung tunggal sebanyak 1.500 hingga 3.000 gelembung.

Data-data yang diperoleh tidak semuanya diolah untuk ditampilkan. Hanya data-data dengan kualitas gelembung yang bagus saja yang ditampilkan. Untuk mengetahui kapan gelembung tersebut keluar maka selama eksperimen kolom gelembung diamati, sekaligus juga frame pembacaan data yang dilakukan oleh komputer. Pada saat gelembung yang berkualitas baik tersebut muncul maka dengan segera mencatat frame yang saat itu ditunjukkan. Selama pengambilan data, grafik pembacaan data kapasitansi menunjukkan adanya fluktuasi yang cukup signifikan pada saat gelembung-gelembung keluar dan mencapai permukaan. Pada saat tidak ada gelembung, tidak ada fluktuasi nilai kapasitansi yang cukup berarti. Perilaku semacam itu dijumpai disemua eksperimen. Hal ini berarti sensor yang digunakan dapat merespon adanya perubahan dielektrik pada medium yang diukur.

### 4.3.3 Rekonstruksi Citra Sensor ECVT

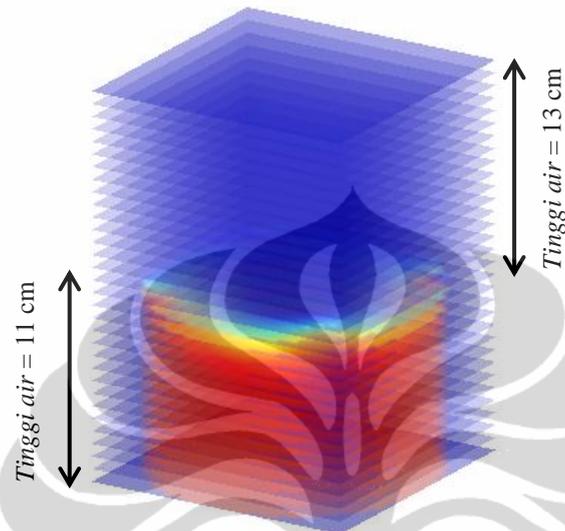
Data kapasitansi dari sensor ECVT digunakan untuk merekonstruksi citra gelembung tunggal. Dari sekian banyak data eksperimen yang telah diambil, berikut ini akan ditampilkan data–data terbaik saja. Dari grafik kapasitansi diketahui bahwa sensor ECVT telah berhasil mendeteksi pergerakan gelembung yang ditandai dengan berubahnya nilai kapasitansi seperti terlihat pada **Gambar 4.46**. Grafik yang tertera pada **Gambar 4.44** dan **4.48** menunjukkan keadaan sebelum dan sesudah gelembung melalui air.



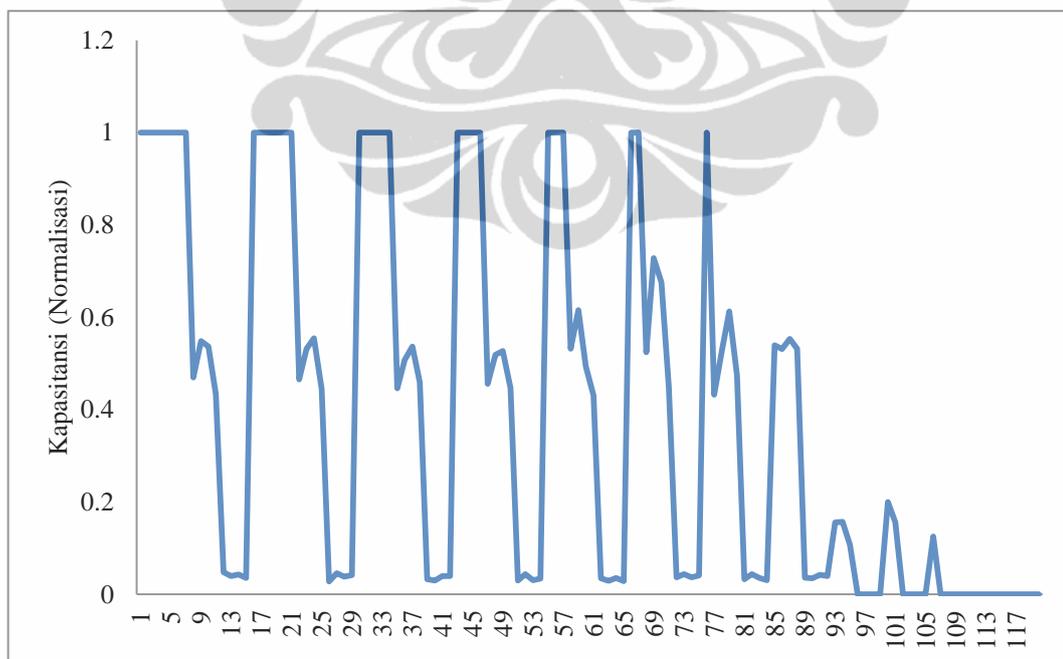
**Gambar 4.44** Grafik nilai kapasitansi yang telah dinormalisasi (sumbu y) dan kombinasi sensor (sumbu x).

Sebelum melakukan pengambilan data, terlebih dahulu dilakukan kalibrasi sensor menggunakan bahan yang memiliki konstanta dielektrik maksimum (air) dan minimum (udara). Nilai skala kapasitansi 1 (satu) menunjukkan sensor mendeteksi keberadaan air sedangkan nilai skala kapasitansi 0 (nol) menunjukkan keberadaan udara. Nilai skala kapasitansi di antara 0 dan 1 menunjukkan campuran dari dua bahan yang dideteksi, dalam hal ini air dan udara. Pada **Gambar 4.44**, dapat diketahui bahwa dari 120 kombinasi plat elektroda, sekitar 86 kombinasi mendeteksi keberadaan udara, sedangkan 34 kombinasi lainnya menunjukkan keberadaan air. Pada kenyataannya, sensor yang memiliki tinggi 28

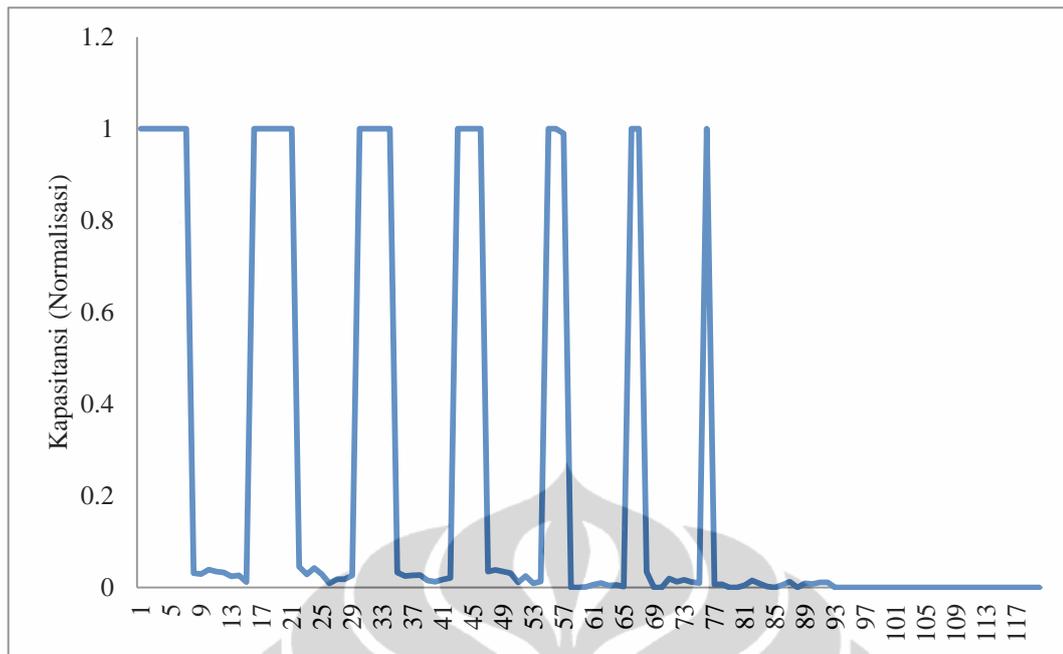
cm, hanya diisi air 11 cm, kurang dari  $\frac{1}{2}$  tingginya. Perbandingan kombinasi sensor yang mendeteksi udara dan air sebesar 0,392 sedangkan perbandingan tinggi kolom udara dan air sebenarnya sebesar 0,395. Dalam hal ini bacaan sensor menunjukkan hasil yang cukup akurat.



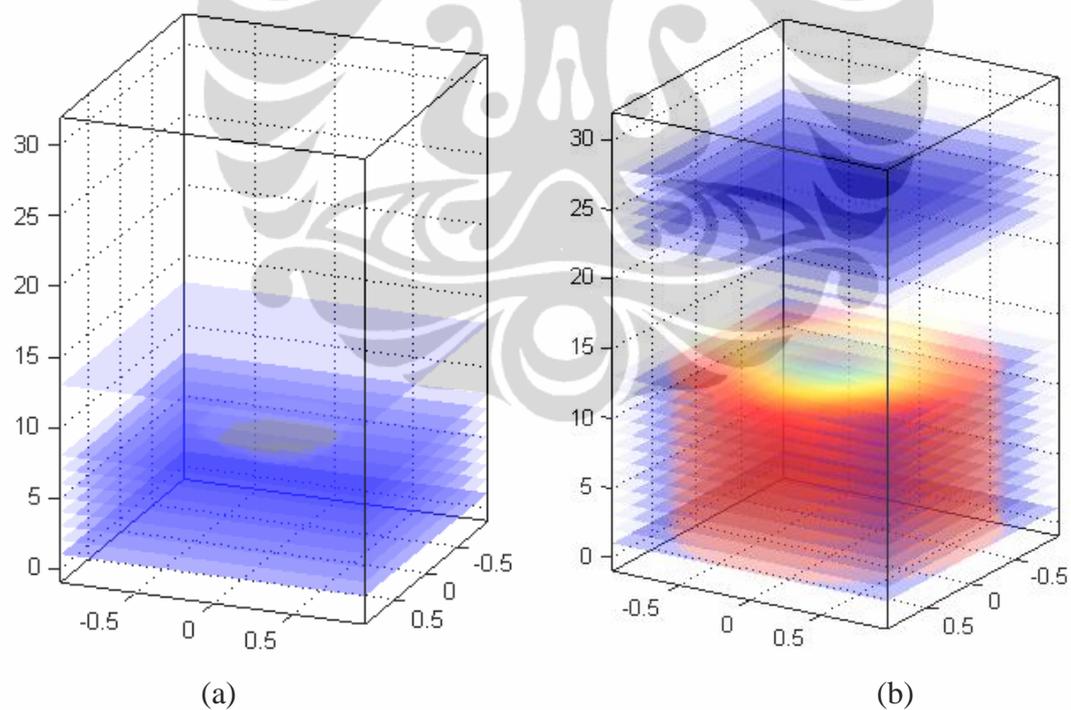
**Gambar 4.45** Hasil citra ECVT saat tabung diisi dengan air setinggi 11 cm dan dibiarkan dalam keadaan diam/tidak ada gelembung.



**Gambar 4.46** Grafik kapasitas saat gelembung udara dialirkan.

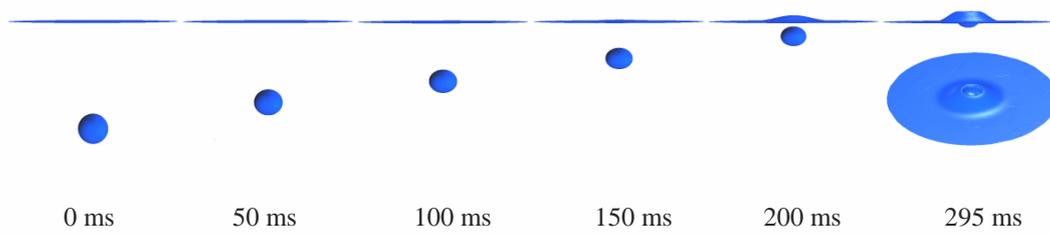


**Gambar 4.47** Grafik kapasitansi saat gelembung telah mencapai permukaan.

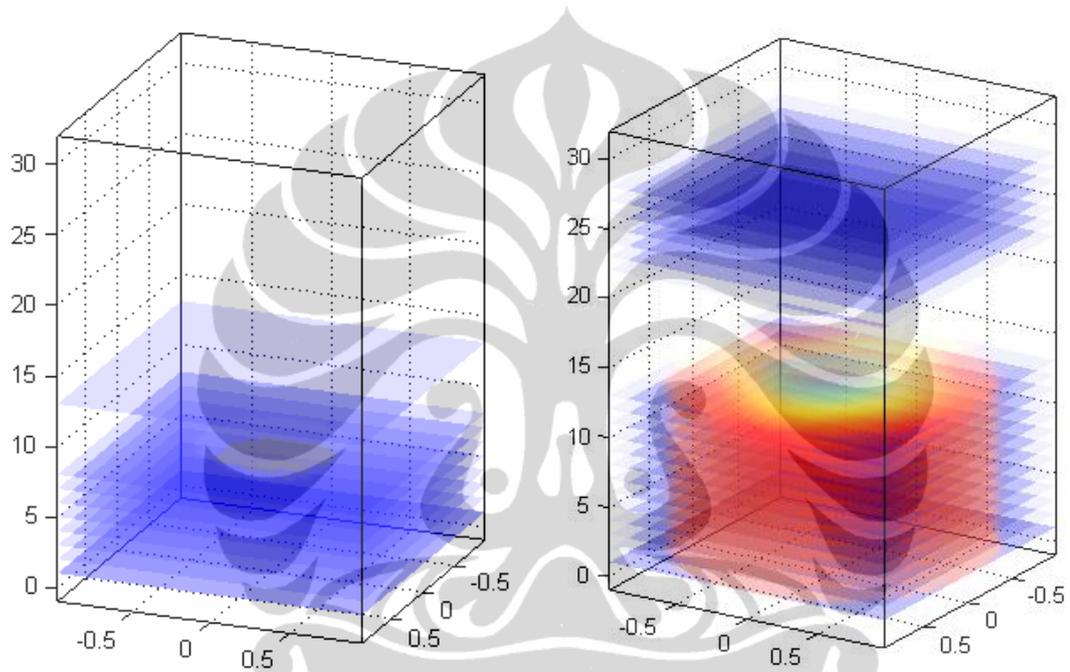


**Gambar 4.48** (a) Gelembung udara pada saat keluar dari lubang udara dan (b) gelembung udara pada saat mencapai permukaan.

(\*Note: Pada gambar (a) kontras warna sengaja dibuat berkebalikan dengan Gambar (b) agar gelembung udara tampak lebih jelas.



Gelembung bergerak dari posisi awal hingga permukaan membutuhkan waktu 0,26 detik (pada simulasi ke III) hingga 0,29 detik (pada simulasi ke IV).



Gelembung bergerak dari posisi awal hingga permukaan rata-rata membutuhkan 4 hingga 5 frame, ekuivalen dengan  $4/4$  hingga  $5/4$  detik.

**Gambar 4.49** Penampang lintang gelembung udara hasil simulasi dan rekonstruksi citra ECVT.

Berdasarkan data eksperimen, dapat diketahui bahwa waktu yang digunakan gelembung untuk mencapai permukaan adalah (rata-rata) 1,0 detik hingga 1,25 detik. Hal ini tampak berbeda dengan hasil simulasi. Pada simulasi ke III dan IV, waktu yang dibutuhkan gelembung untuk mencapai permukaan hanya 0,26 detik dan 0,295 detik. Namun, perhatikan bahwa gelembung yang disimulasikan memiliki jarak tempuh yang lebih pendek dibanding gelembung

pada eksperimen. Gelembung diasumsikan telah berada 2 cm dari dasar tabung, sehingga jarak tempuh gelembung hanya 9 cm. Menggunakan pendekatan kualitatif yang berbasis pada hukum hidrostatis, waktu yang dibutuhkan gelembung udara pada eksperimen untuk menempuh jarak 9 cm vertikal dari dasar tabung tentu kurang dari 0,5 detik.

Pada kasus eksperimen ini, agar dapat mengakses profile kecepatan dan besaran lainnya, perlu adanya penambahan fitur-fitur seperti kecepatan pembacaan data dan visualisasi, pada DAS agar dapat menghasilkan pembacaan data yang lengkap. Secara kualitatif, hasil eksperimen telah menunjukkan bahwa sensor ECVT yang digunakan telah cukup baik membaca gelembung udara di dalam air. Hal lain yang juga perlu ditingkatkan adalah algoritma rekonstruksi citra. Metode ILBP yang digunakan pada penelitian ini terbukti kurang begitu baik dalam menghasilkan citra gelembung udara.

Dengan memperhatikan grafik pada **Gambar 4.46**, terlihat adanya perubahan kapasitansi yang dideteksi oleh sensor yaitu pada pasangan sensor ke 8, 9, 10, 11, 22, 23, 24, 25, 35, 36, 37, 38, 47, 48, 49, 50, 58, 59, 60, 61, 68, 69, 70, 71, 77, 78, 79, 80, 85, 86, 87, dan 88 yang berkorelasi dengan posisi sensor dan gelembung udara, seperti yang ditunjukkan pada **Gambar 4.48**. Data kapasitansi untuk gelembung yang terletak di antaranya sebenarnya terbaca namun sepertinya terdapat kendala pada penyimpanan data dari DAS ke komputer sehingga hanya sepenggal data saja yang tersimpan dan dapat direkonstruksi. DAS dapat membaca data dengan kecepatan 4 frame/s. Gelembung udara bergerak dengan percepatan sekitar  $9,8 \text{ m/s}^2$  dan menempuh jarak yang pendek sebesar 11 cm. Dengan menggunakan perkiraan kasar, disipasi energi sebesar 10%, akan didapatkan bahwa percepatan gelembung hanya  $8,9 \text{ m/s}^2$ . Hal ini berarti gelembung membutuhkan waktu sekitar 1,2 detik. Sensor memiliki kemampuan membaca data dengan kecepatan 4 frame/s, yang berarti dalam 1 detik sensor dapat meng-*capture* data kapasitansi 4 kali. Sama halnya dengan mengatakan bahwa perubahan nilai kapasitansi yang terjadi selama selang waktu 0,25 detik masih dapat dibaca dengan baik oleh sensor.

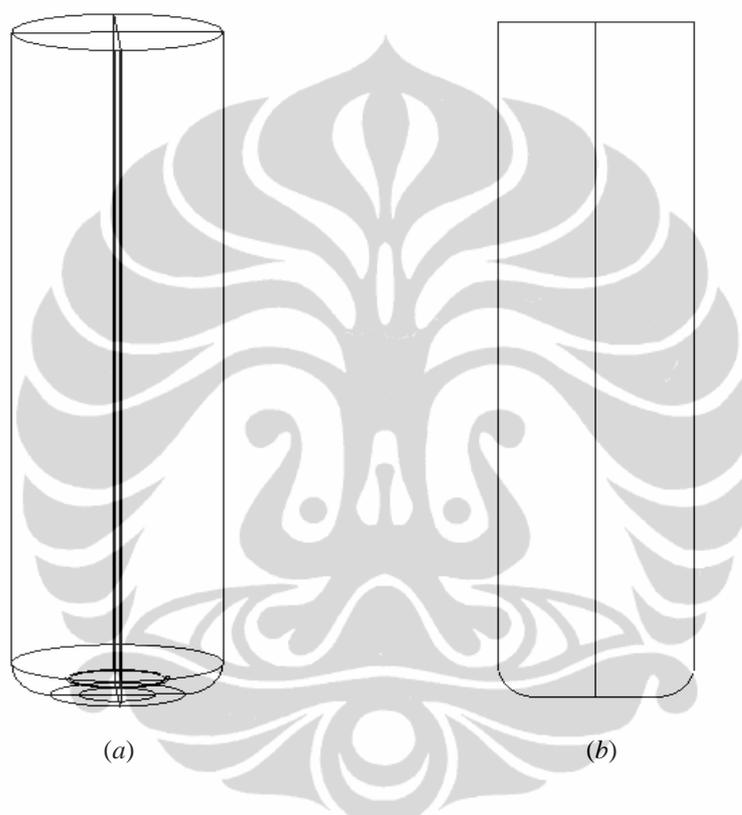
Namun demikian, hasil eksperimen ternyata menunjukkan hal yang berbeda. Data yang berhasil dibaca oleh sensor hanya 3 frame untuk satu kali

perjalanan gelembung udara, terpaut satu frame dari kondisi ideal. Melihat citra penampang gelembung udara, dibuktikan bahwa geometri gelembung tidak mengalami perubahan yang cukup drastis. Gelembung tetap dapat mempertahankan bentuknya yang bulat. Hasil ini bersesuaian dengan yang penampakan penampang gelembung yang diperoleh dari simulasi, seperti terlihat pada **Gambar 4.49**. Kesimpulan sementara yang dapat ditarik dari simulasi dan eksperimen dan simulasi aliran gelembung tunggal di dalam air adalah:

1. *Eksperimen*: untuk menempuh jarak 11 cm air, gelembung udara (dari keadaan diam) membutuhkan waktu 1 detik hingga 1,25 detik. Perlu dilakukan kajian lebih lanjut untuk mengetahui waktu eksak yang dibutuhkan gelembung udara dari dasar hingga ke permukaan.
2. *Simulasi*: untuk menempuh jarak 9 cm air, gelembung udara (dari keadaan diam) membutuhkan waktu 0,26 hingga 0,295 detik.
3. *Eksperimen dan simulasi*: gelembung udara yang terlihat dari hasil eksperimen dan simulasi menunjukkan deformasi yang tidak terlalu signifikan pada penampang tegak lurus dengan sumbu vertikal gerakan gelembung. Antara simulasi dan eksperimen, memberikan hasil yang sesuai satu sama lain.

#### 4.4 Simulasi Dinamika Aliran Multifase: Kolom Gelembung

Simulasi kolom gelembung mengadopsi design kolom gelembung berbentuk silinder dengan diameter 11 cm dan tinggi 42 cm. Simulasi kolom gelembung menggunakan model turbulen  $k-\varepsilon$ . Simulasi dilakukan secara 2D dan 3D. Geometri kolom gelembung yang digunakan dalam simulasi kali ini disajikan pada **Gambar 4.50**.



**Gambar 4.51** Geometri kolom gelembung. (a) Kolom gelembung 3D, (b) Dilihat pada bidang  $xy$  (c). Pemodelan 3D kolom gelembung direduksi menjadi 2D.

Sebelum melakukan simulasi turbulen dinamika aliran multifase pada kolom gelembung, terlebih dahulu dilakukan simulasi laminar kolom gelembung dengan geometri dan parameter fisis yang sama dengan simulasi turbulen. Tujuan dari simulasi laminar adalah untuk memperoleh data awal sebagai inisiasi simulasi turbulen. Dengan melakukan tahapan inisialisasi ini maka konvergensi simulasi turbulen akan lebih cepat tercapai. Hal ini berarti menghemat waktu dan sumber

daya komputasi. Tahap inisialisasi ini dilakukan selama 20 s. Intensitas gelembung udara yang masuk sebesar  $0,01 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$  dengan diameter gelembung rata-rata sebesar 2 mm. Koefisien tegangan permukaan sesuai dengan data standar yaitu  $0,072 \text{ N/m}$ . Transfer massa dan energi tidak diikutsertakan dalam perhitungan. Dengan kata lain, sistem berada dalam keadaan isothermal. Transport momentum diasumsikan bersifat isotropik dengan konstanta *tuning parameter* sebesar 0,25. Difusi gelembung gas juga diasumsikan isotropik dengan skala densitas efektif sebesar 0,01 dan *tuning parameter* 0,25.

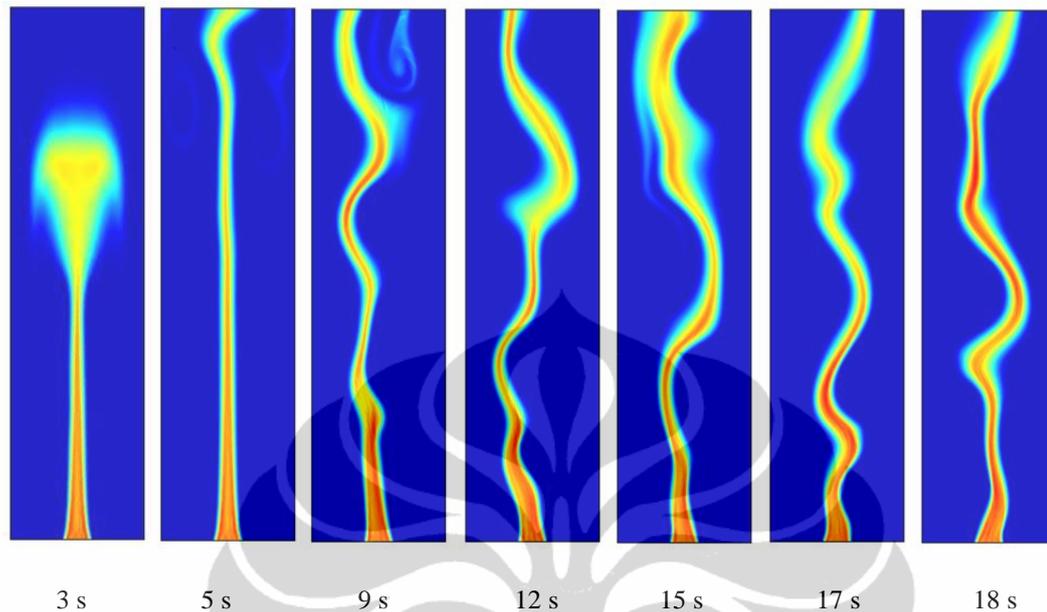
Metode *Direct* (UMFPACK) digunakan untuk menangani sistem persamaan linier dimana toleransi relatif dan absolut masing-masing sebesar 0,01 dan ,001. Untuk melakukan diskritisasi temporal, metode BDF memberikan hasil yang cukup baik dibanding metode lainnya. Munculnya konstrain pada sistem persamaan linier diselesaikan menggunakan metode eliminasi.

#### 4.4.1 Simulasi Kolom Gelembung 2D dan 3D

Simulasi turbulen dilakukan dengan menggunakan prosedur dan parameter yang sama dengan yang digunakan pada saat menjalankan simulasi laminar. Dalam simulasi, kolom gelembung setinggi 42 cm diisi penuh dengan air. Bagian atas kolom gelembung, *outlet boundary*, diatur sedemikian rupa sehingga hanya gelembung udara saja yang dapat keluar dari kolom sedangkan air tidak. Fluks udara yang keluar dari *sparger* menyebabkan air bersirkulasi sepanjang jalur aliran udara. Jalur utama aliran gelembung udara, berdiameter 4 mm, memiliki kecepatan yang paling tinggi. Air di sekitar aliran gelembung tersebut mengalir searah dengan aliran gelembung. Air di bagian lain yang dekat dengan dinding kolom mengalami sirkulasi balik, ke bawah.

Pada bagian atas, dekat dengan *outlet boundary* terlihat adanya pusaran-pusara air dan gelembung udara. Pola aliran gelembung udara cenderung konsisten dan terjaga integritasnya. Fluks udara yang diinjeksikan sebesar  $0,01 \text{ kg/m}^2$  menghasilkan aliran gelembung yang stabil beberapa detik setelah udara diinjeksikan. Hal ini juga dipengaruhi oleh rasio tinggi dan diameter kolom

sebesar 4. Berdasarkan hasil studi, untuk menghasilkan aliran gelembung yang stabil, rasio tinggi dan diameter kolom minimal 4.

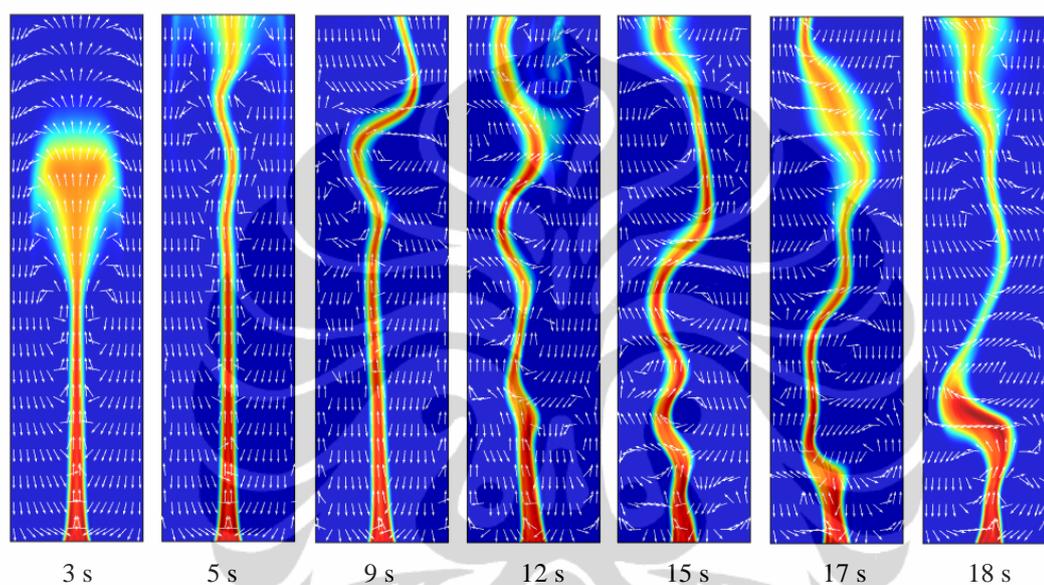


**Gambar 4.52** Sekuen hasil simulasi dinamika aliran multifase pada kolom gelembung. Gambar di atas menunjukkan fraksi volume udara terhadap air.

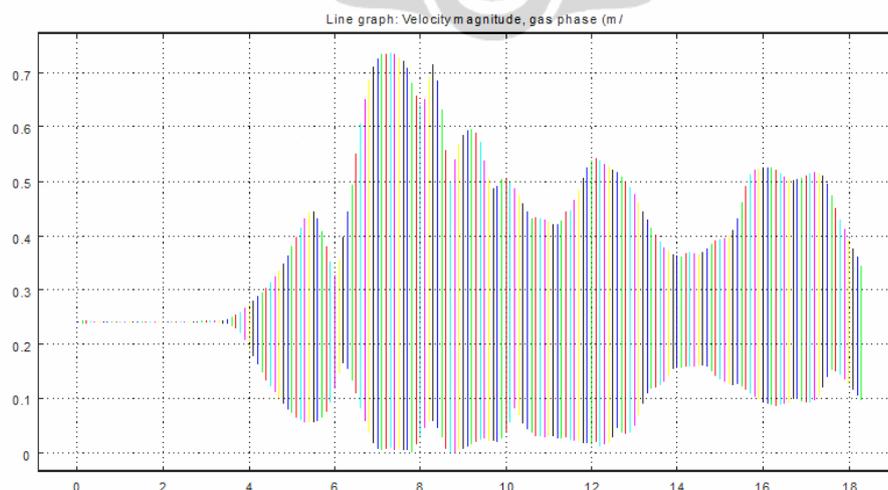
Kecepatan superficial yang cukup tinggi menyebabkan gelembung udara hampir mencapai *outlet boundary* pada  $t = 3$  detik pertama. Dua detik kemudian, terlihat adanya sirkulasi gelembung udara pada sisi kanan dan kiri aliran gelembung utama. Pada detik ke 5 ini, jalur aliran utama gelembung masih berbentuk garis lurus. Adanya sirkulasi udara dan air pada bagian atas kolom menginduksi aliran gelembung utama sehingga pada detik ke 9 gelembung mulai berubah bentuk (berkelok-kelok). Di bagian atas masih terlihat adanya pusaran gelembung udara. Hal ini dapat dikonfirmasi dengan plot kecepatan fluida seperti terlihat pada **Gambar 4.53**.

Dari **Gambar 4.53**, terlihat bahwa pada jalur aliran gelembung udara, alir mengalir dalam arah yang sama dengan aliran gelembung. Pada daerah-daerah yang dekat dengan dinding, aliran air cenderung ke bawah. Ini merupakan salah satu karakteristik aliran air (dan juga gelembung udara) pada kolom gelembung. Pada  $t = 5$  s hingga  $t = 9$  s, adanya perubahan bentuk aliran gelembung dapat

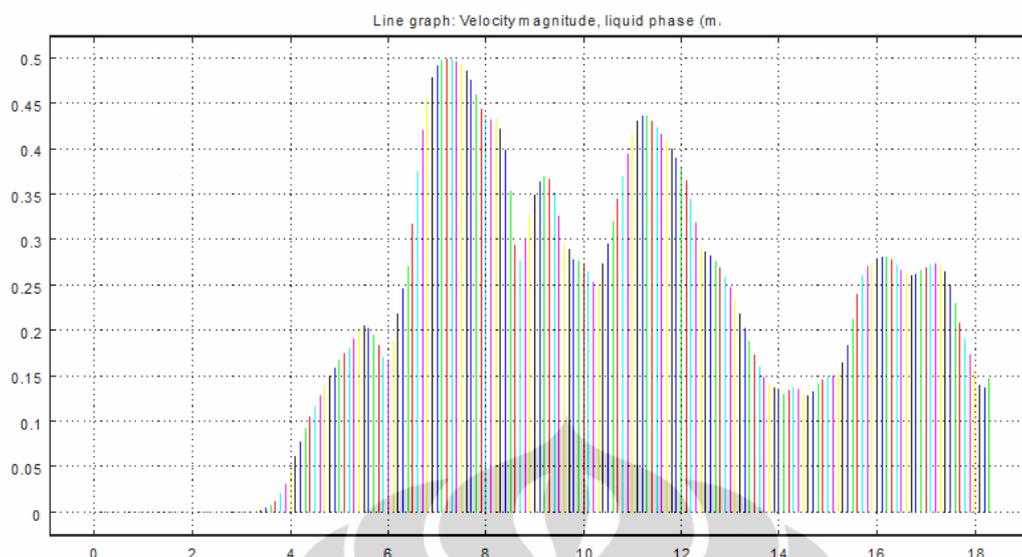
dipahami sebagai efek dari aliran air yang “menggangu” aliran gelembung tersebut. Salah satu sifat fluida (memang) selalu memberikan respon terhadap perubahan tekanan yang mengenainya. Biasanya respon tersebut termanifestasi dalam, misalnya, terjadinya aliran atau perubahan vector kecepatan. Pada gelembung, tampaknya aliran air tersebut telah mempengaruhi vektor kecepatan alirannya sehingga muncullah perubahan kecepatan pada bagian-bagian tertentu, seperti ditunjukkan pada **Gambar 4.53**.



**Gambar 4.53** Plot vektor kecepatana aliran fluida.



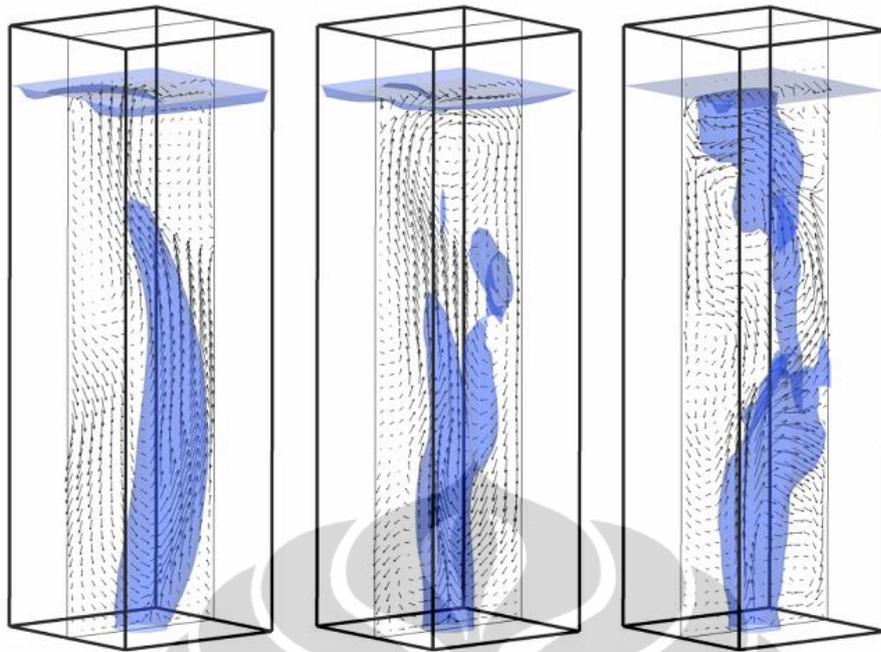
**Gambar 4.54** Profil kecepatan gelembung gas untuk seluruh domain.



**Gambar 4.55** Profil kecepatan air untuk keseluruhan domain.

Dari plot profil kecepatan gelembung udara dan air seperti yang tertera pada **Gambar 4.54** dan **4.55** dapat dilihat adanya fluktuasi kecepatan yang cukup signifikan. Kecepatan gelembung udara berkisar antara 0 m/s hingga 0,7 m/s sedangkan kecepatan air berada pada rentang nilai 0 m/s hingga 0,5 m/s. Kecepatan air cenderung lebih lambat dibanding gelembung udara karena memang gelembung udara-lah yang memberi kecepatan pada air. Kecepatan air yang lebih rendah ini juga menunjukkan adanya disipasi energi yang ditransfer dari gelembung udara ke air.

Namun demikian, pola berkelok yang dimiliki oleh gelembung udara ini agak tidak wajar. Jika diklarifikasi dengan hasil-hasil eksperimen dan simulasi yang lain (di jurnal internasional), kelokan yang muncul pada kolom gelembung ini terlalu banyak dan cenderung sangat fluktuatif. Beberapa hasil simulasi sejenis yang menunjukkan adanya pola berkelok pada aliran gelembung ditunjukkan pada **Gambar 4.56**. Pola aliran gelembung udara tidak terlalu banyak mengalami kelokan dan hal ini memang sesuai dengan eksperimen/pengamatan yang telah dilakukan menggunakan sensor ECVT. Hasil simulasi yang diketengahkan pada **Gambar 4.56** adalah simulasi 3D turbulen dengan model  $k-\varepsilon$  dalam kolom gelembung berbentuk persegi panjang.



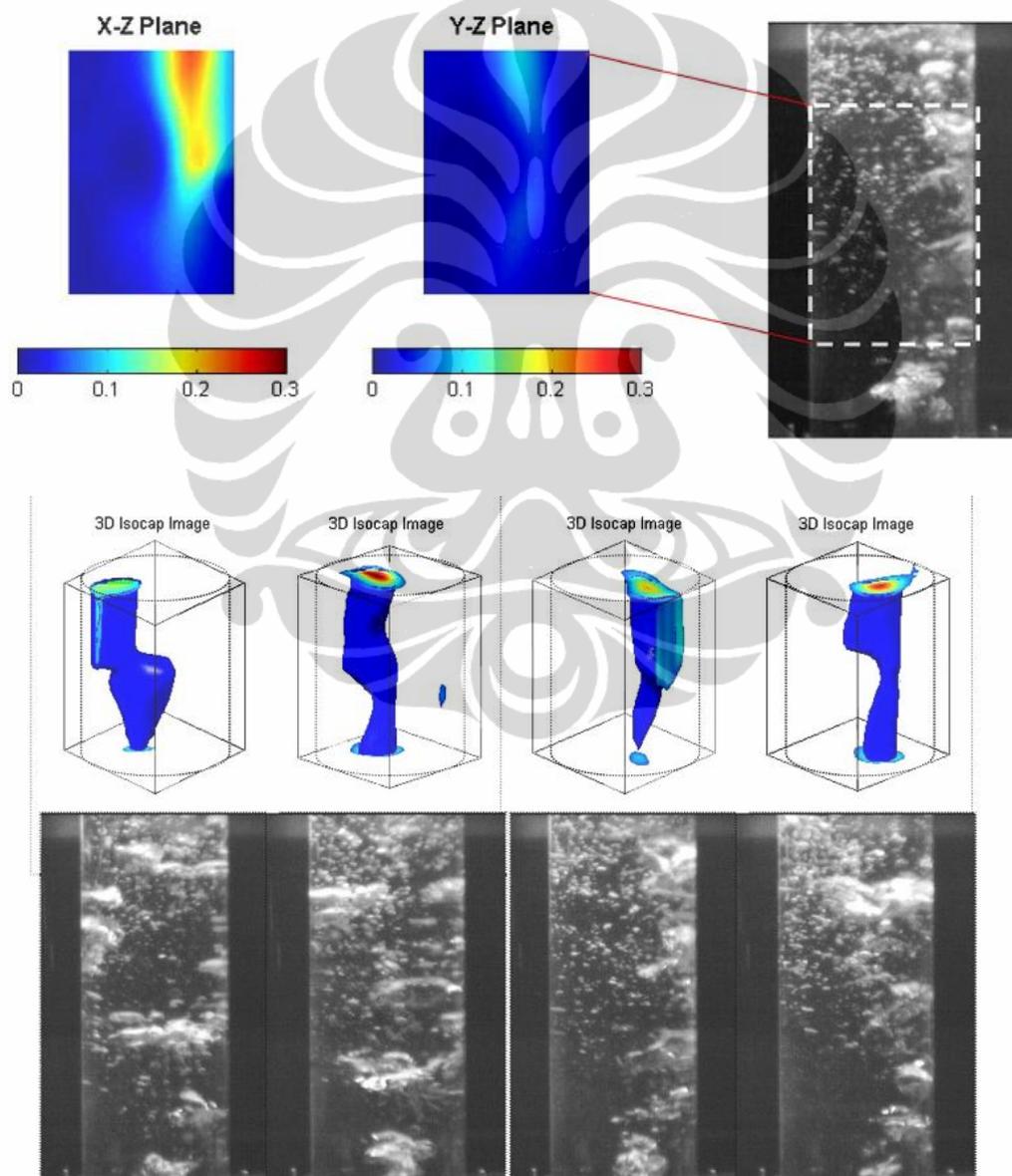
**Gambar 4.56** Pola aliran gelembung udara pada kolom gelembung. Gambar di atas dihasilkan dari simulasi 3D (Zhang, 2005).

Simulasi kemudian dilanjutkan untuk aliran gelembung 3D menggunakan model turbulen  $k-\varepsilon$ . Gambar di bawah ini menunjukkan hasil simulasi 3D.



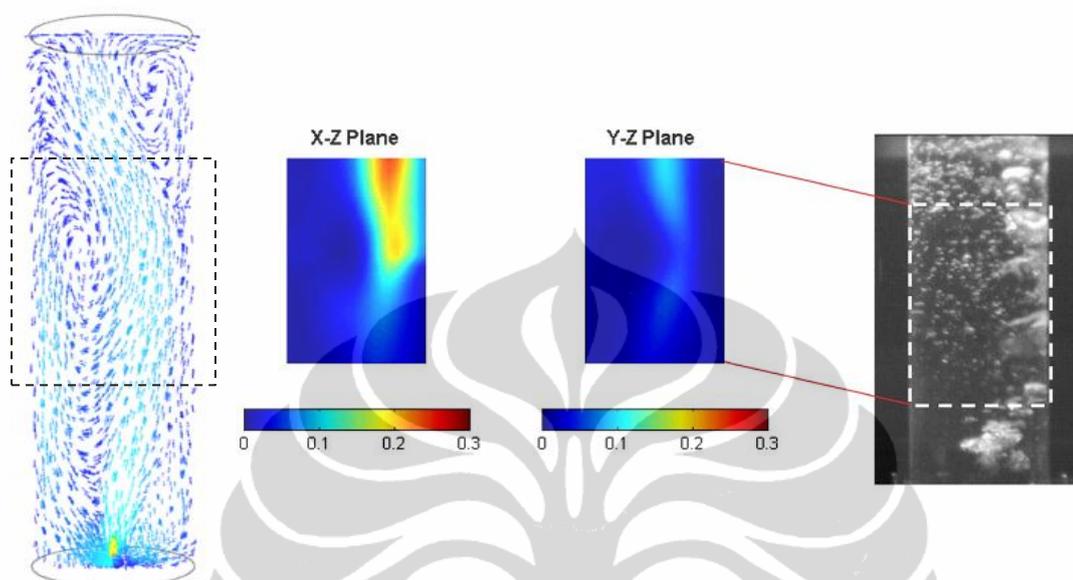
**Gambar 4.57** Simulasi 3D aliran gelembung pada air menggunakan metode turbulen  $k-\varepsilon$ .

Dari hasil simulasi tersebut dapat dilihat bahwa pola aliran gelembung berubah–ubah setiap waktu namun masih pada bentuk yang hampir mirip antara satu dengan yang lainnya (ketiga *snapshot*). Kontour warna hijau menunjukkan jalur aliran gelembung udara. Air juga mengalir pada jalur tersebut dengan arah yang sama dengan arah aliran gelembung. Pada bagian dekat dengan dinding, atau jauh dari jalur utama aliran gelembung, terlihat adanya pusaran–pusaran air. Pada titik tengah–tengah pusaran tersebut air tidak bergerak. Air pada titik tersebut memiliki kecepatan nol dan berada pada kondisi *stack*.



**Gambar 4.58** Hasil eksperimen aliran gelembung udara menggunakan sensor ECVT (Warsito, 2005).

Hasil simulasi kemudian dikonfrontasikan dengan hasil eksperimen yang telah dilakukan oleh Warsito (2005) menggunakan sensor ECVT. Warsito (2005) mendapatkan pola aliran gelembung seperti tampak pada **Gambar 4.56**.



**Gambar 4.59** Perbandingan hasil simulasi aliran bergelembung (3D) dengan hasil eksperimen menggunakan ECVT.

Dari **Gambar 4.59** dapat diketahui bahwa pola aliran bergelembung yang diperoleh dari hasil simulasi memiliki struktur yang koheren dengan data hasil eksperimen. Hasil ini menunjukkan bahwa model turbulen  $k-\varepsilon$  dapat digunakan untuk memodelkan aliran bergelembung dengan cukup baik.

Untuk mengecek distribusi besaran-besaran fisika seperti tekanan, kecepatan, dan lain sebagainya perlu dilakukan peningkatan terhadap sensor ECVT agar, selain menghasilkan image 3D yang real time, juga dapat memberikan data-data besaran fisika yang dibutuhkan untuk menganalisis sistem secara komprehensif. Kesimpulan sementara yang dapat diambil dari simulasi 3D aliran bergelembung antara lain:

1. Model turbulen  $k-\varepsilon$  telah dapat digunakan untuk memodelkan aliran bergelembung dengan hasil yang cukup baik.

2. Kesimpulan No 1 berdasarkan pada data eksperimen Warsito (2005) untuk sistem yang sama (aliran bergelembung) menggunakan sensor ECVT 3D, dimana, merujuk pada **Gambar 4.59**, pola aliran gelembung memiliki struktur yang koheren antara hasil simulasi, eksperimen, dan sistem riil.
3. Analisis hasil simulasi aliran bergelembung masih bersifat kualitatif. Perlu adanya penambahan fitur-fitur pada sensor ECVT 3D agar, selain menghasilkan citra 3D yang real time, juga dapat memberikan data-data fisika yang dibutuhkan untuk menganalisis sistem secara komprehensif.

Simulasi dinamika aliran multifase gelembung udara dan air telah dilakukan untuk sistem gelembung tunggal dan reaktor kolom gelembung. Untuk mengkonfirmasi data hasil simulasi, dilakukan eksperimen kolom gelembung untuk aliran gelembung tunggal menggunakan sensor ECVT 4D 16 Channel dengan mesin DAS 32 Channel. Dari data hasil simulasi dinamika gelembung tunggal di dalam air menggunakan teknik medan fase sebagai metode penjejak fase gelembung dan parameter fisis standar, disimpulkan bahwa terdapat beberapa kelemahan dalam model medan fase tersebut antara lain gaya tegang permukaan yang dihasilkan oleh sistem gelembung udara-air terlalu besar. Hal ini ditunjukkan dengan munculnya deformasi dan pemipihan yang tidak masuk akal pada gelembung udara. Dari hasil simulasi juga didapatkan bahwa metode medan fase tidak dapat mempertahankan kekekalan massa gelembung udara sehingga selama bergerak massa gelembung semakin lama semakin kecil dan lenyap sama sekali sebelum mencapai permukaan. Kesimpulan tersebut didasarkan pada grafik massa terhadap waktu yang secara eksplisit menunjukkan penurunan massa fase yang sangat signifikan.

Dari beberapa hasil penelitian dan diskusi, munculnya anomali pada persamaan Cahn-Hilliard disebabkan oleh suku persamaan gaya tegang permukaan menghasilkan tekanan yang sangat besar. Gaya tegang permukaan berkorelasi dengan koefisien tegangan permukaan air-udara. Dengan mengubah nilai koefisien ini diharapkan dapat memperkecil atau meredam tekanan yang besar tersebut. Akan tetapi, memperkecil koefisien tegang permukaan menuntut

perubahan parameter kontrol permukaan ( $\varepsilon$ ) yang harus dibuat sangat besar hingga orde centimeter. Hal ini tentu saja tidak mencerminkan keadaan riil dari permukaan gelembung yang tebalnya dalam orde millimeter. Alternatifnya, agar permukaan tersebut dapat stabil maka ukuran *mesh* dibuat sangat kecil dalam orde  $< 10^{-5}$ . Memperkecil ukuran *mesh* tidak lantas menyelesaikan masalah hilangnya gelembung di tengah perjalanan. Dari serenteta simulasi yang telah dilakukan dengan berbagai perubahan parameter fisika, akhirnya diputuskan untuk memperbesar viskositas gelembung udara.

Dasar pemikiran untuk mengubah viskositas fluida adalah sebagai berikut. Viskositas dapat didefinisikan sebagai tingkat kekentalan cairan. Semakin kental suatu cairan menandakan molekul–molekul cairan tersebut semakin kompak menyusun dirinya sehingga semakin sulit untuk mempengaruhi perubahan bentuknya. Cairan dengan viskositas tinggi dapat mempertahankan bentuk di dalam cairan yang lain walaupun gaya tegang permukaan atau gaya lainnya yang bekerja padanya besar. Permasalahan yang ditemui pada saat simulasi adalah gelembung sangat sensitif terhadap gaya tegang permukaan. Sedikit saja gaya tersebut meningkat, gelembung mengalami perubahan bentuk yang tidak masuk akal (tidak *reasonable*).

Dengan membuat gelembung lebih rigid, dengan cara memperbesar viskositasnya, diharapkan gelembung dapat menahan tekanan yang dihasilkan oleh cairan atau setidaknya dapat mempertahankan bentuknya. Kelemahan asumsi ini salah satunya adalah gesekan antara gelembung udara dan air menjadi semakin besar sehingga gelembung mencapai kecepatan terminal lebih cepat dibanding jika viskositasnya tidak diubah. Hal ini ditandai dengan kecepatan aliran gelembung yang semakin lambat ketika mencapai permukaan dan efek pecahnya gelembung ketika keluar dari air tidak terlalu dramatis. Setelah melakukan beberapa simulasi, asumsi tersebut berhasil diklarifikasi dengan sangat baik oleh hasil yang diperoleh. Deformasi yang muncul pada gelembung tidak se–ekstrim sebelumnya. Dari hasil pengamatan visual juga didapatkan bahwa kehilangan massa gelembung tidak terlalu signifikan. Hanya saja ketika mendekati permukaan, gerakan gelembung terlihat semakin lambat dan akhirnya pecah.

Hasil simulasi kemudian dibandingkan dengan hasil eksperimen menggunakan sensor ECVT 4D. Hasilnya cukup memuaskan. Sensor ECVT 4D telah berhasil digunakan untuk mengamati dinamika gelembung di dalam air. Deformasi dan pemipihan gelembung memang tidak teramati dengan jelas karena resolusi sensor yang masih perlu ditingkatkan. Pada saat data hasil simulasi dicocokkan dengan data eksperimen, didapatkan bahwa perubahan bentuk dan ukuran gelembung tidak terlalu besar. Secara kualitatif, hasil simulasi dapat digunakan untuk menjelaskan data eksperimen mengenai dinamika aliran gelembung di dalam air. Deformasi dan perubahan bentuk gelembung hasil simulasi koheren dengan data hasil eksperimen. Kelemahan dari data eksperimen ini adalah tidak tersedianya data–data lainnya seperti kecepatan gelembung, viskositas, dan *void fraction*. Kelemahan data hasil simulasi antara lain metode simulasi yang digunakan masih bersifat laminar. Gelembung diasumsikan memiliki profil kecepatan dan besaran fisis lainnya yang bersifat simetris sehingga deformasi dan dinamika gelembung tidak benar–benar mencerminkan keadaan riil. Pada kenyataannya, gelembung dapat mengalami deformasi yang tidak simetris. Demikian juga dengan kecepatan gerak lokalnya.

Sebagai studi lanjutan dari penelitian ini, untuk pemodelan dinamika fluida disarankan untuk memperbaiki persamaan Cahn–Hilliard terutama bagian yang menangani distribusi gaya tegang permukaan pada gelembung. Untuk melakukan hal ini maka harus tersedia data–data eksperimental yang memadai. Koheren dengan tujuan tersebut maka pengembangan sensor ECVT 3D menjadi prioritas utama. Pengembangan ini terutama disarankan untuk meningkatkan resolusi, kecepatan pembacaan data, dan sensitivitas perubahan dielektrik objek yang diukur. Untuk simulasi gelembung tunggal (dan juga gelembung banyak), disarankan juga untuk mencoba metode lainnya seperti *level set* (walaupun metode ini memiliki karakter yang mirip dengan metode medan fase, berikut kelemahan–kelemahannya), metode *Volume of Fluid* (VOF), dan metode simulasi lainnya. Aliran yang terjadi pada sistem gelembung udara–air adalah aliran turbulen oleh karena itu metode simulasi turbulen sebaiknya digunakan untuk pemodelan karena dapat (lebih) mencerminkan keadaan yang sebenarnya.

Berikutnya, pemodelan kolom gelembung. Menggunakan design kolom gelembung dengan diameter 11 cm dan tinggi 42 cm, model  $k-\varepsilon$  telah digunakan untuk mensimulasikan aliran bergelembung dan telah berhasil menunjukkan adanya sirkulasi air di dalam kolom gelembung serta pola aliran gelembung yang koheren dengan data eksperimen. Pusaran air dan fluktuasi kecepatan air dan gelembung udara juga dapat diakses dan dianalisis dengan jelas. Hasil simulasi telah diklarifikasi dengan data eksperimen dan menunjukkan hasil yang sesuai. Namun demikian, masih perlu adanya studi lanjut terhadap aliran multifase gelembung udara di dalam air ini baik dari segi simulasi maupun eksperimen.

Untuk mengklarifikasi hasil simulasi ini, direkomendasikan untuk dilakukan eksperimen. Sensor ECVT yang saat ini tersedia belum dapat digunakan untuk mengakses data eksperimen untuk sistem kolom gelembung dimana jumlah gelembung yang mengalir sangat banyak dengan diameter yang kecil. Sebelumnya, telah dicoba untuk melakukan eksperimen kolom gelembung dengan intensitas dan fraksi volume gelembung udara yang cukup besar, lebih dari 20%, namun data kapasitansi gelembung belum dapat terukur secara presisi. Sensor ECVT 4D memiliki prospek yang bagus untuk digunakan sebagai alat ukur dan *monitoring* sistem bergerak seperti dinamika aliran multifase. Sensor yang saat ini tersedia sudah dapat membedakan perubahan nilai dielektrik mediaum yang diukur akan tetapi karena sensitivitasnya kurang tinggi data-data tersebut tidak terlihat jelas ketika dilakukan rekonstruksi. Saran untuk pengembangan selanjutnya adalah penting untuk meningkatkan kualitas dan kinerja sensor. Tiga hal penting yang diprioritaskan antara lain peningkatan sensitivitas, resolusi, dan kecepatan pembacaan data. Seperti yang telah sampaikan pada Bab Pendahuluan tesis ini, salah satu problem mekanika klasik yang hingga hari ini (setidaknya hingga tesis ini dibuat) belum terpecahkan adalah dinamika fluida. Sensor ECVT 4D menyediakan peluang dan prospek yang sangat bagus untuk menjawab tantangan tersebut.

## **BAB V**

### **PENUTUP**

#### **5.1 KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil simulasi sistem gelembung tunggal, tetesan air jatuh, dan kolom gelembung serta data-data eksperimen, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

##### **A. Sistem Gelembung Tunggal**

1. Persamaan Navier–Stokes dan persamaan Medan Fase menunjukkan hasil yang kurang mendekati realitas ketika data-data besaran standar fluida digunakan.
2. Ketidak-konsistenan hasil simulasi yang diperoleh (dihipotesiskan) disebabkan oleh peristiwa sirkulasi udara di dalam gelembung udara tidak masuk dalam persamaan Navier–Stokes, juga dalam persamaan Medan Fase. Sirkulasi udara ini bertanggung jawab terhadap penambahan tegangan permukaan virtual gelembung udara dan juga ekspansi volume gelembung sebagai fungsi tekanan hidrostatik.
3. Dengan menambahkan viskositas efektif sebesar 5 Pa.s untuk gelembung udara, simulasi menunjukkan hasil yang mendekati realitas. Gelembung udara mengalami deformasi dan pemipihan secara natural.

##### **B. Sistem Tetesan Air Jatuh**

1. Persamaan Navier Stokes dan persamaan Medan Fase menunjukkan performa yang baik dan memberikan hasil yang mendekati realitas ketika digunakan untuk mensimulasikan tetesan air yang jatuh di permukaan air.
2. Dari dua model simulasi yang digunakan, laminar dan turbulen, didapatkan bahwa fenomena tetesan air jatuh lebih mendekati laminar dibanding turbulen.

Dari hasil simulasi sistem gelembung tunggal dan tetesan air, dapat disimpulkan bahwa model persamaan Navier–Stokes dan persamaan medan fase valid untuk sistem-sistem tertentu saja. Pada kasus gelembung tunggal di dalam air, harus ditambahkan besaran efektif (dalam penelitian ini adalah viskositas efektif) agar memberikan hasil yang mendekati realitas.

### C. Sistem Kolom Gelembung

1. Persamaan Reynolds-Averaged Navier–Stokes 3D dengan model turbulen  $k-\varepsilon$  memberikan hasil yang bersesuaian dengan data eksperimen.
2. Simulasi juga menunjukkan adanya aliran gelembung koheren dengan pola berkelok-kelok yang merupakan ciri utama aliran turbulen gelembung udara di dalam air.

## 5.2 SARAN

Fenomena aliran gelembung di dalam air menjadi bahan kajian yang menarik untuk diteliti lebih lanjut terutama yang berkaitan dengan formulasi persamaan Navier–Stokes yang hingga saat ini belum bisa menangani kasus gelembung udara di dalam air dengan baik dan belum memberikan hasil yang mencerminkan keadaan natural dinamika gelembung udara tersebut di dalam air.

Secara spesifik, untuk studi lanjutan dari tesis ini, penelitian dapat difokuskan pada formulasi tegangan permukaan gelembung udara. Pada persamaan Navier–Stokes yang saat ini digunakan belum menyertakan fenomena sirkulasi udara di dalam gelembung dan oleh karena itulah beberapa simulasi selalu gagal ketika menggunakan besaran-besaran standar. Sirkulasi udara, atau dinamika partikel-partikel udara di dalam gelembung udara, adalah gerak kolektif yang selalu berusaha mengekspansi volumenya ke segala arah dengan tekanan yang seragam. Selain memiliki peran yang signifikan dalam mempertahankan

integritas gelembung udara, efek ini juga yang bertanggung jawab terhadap ekspansi volume gelembung udara sebagai fungsi dari tekanan hidrostatik.

Sensor ECVT 4D memberikan prospek yang optimis terhadap penemuan solusi terhadap masalah di atas. Untuk tahapan studi selanjutnya, dianjurkan untuk melakukan eksperimen dan pengambilan data-data yang lebih lengkap dan komprehensif. Tujuannya adalah untuk menyediakan data untuk mengklarifikasi hasil simulasi sekaligus sebagai bagian dari memperbaiki model persamaan fluida.



## DAFTAR ACUAN

- Arko, A., Waterfall, R. C., Beck, M. S., Dyakowski, T., Sutcliffe, P., Byars, M. (1999). Development of Electrical Capacitance Tomography for Solid Mass Flow Measurement & Control of Pneumatic Conveying Systems. 1<sup>st</sup> World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14–17.
- Beck, M., & Williams, R. (1996). Process Tomography: *A European Innovation & its Applications*. Meas. Sci. Technol., **7**, 215–224.
- Becker, S., Sokolichin, A. & Eigenberger, G. (1995). Gas–Liquid Flow in Bubble Columns & Loop Reactors: Part II Comparison of Detailed Experiments & Flow Simulations. Chem. Eng. Sci., **49**, 5747.
- Becker, S., Sokolichin, A., & Eigenberger, G. (1994). Gas–Liquid Flow in Bubble Columns & Loop Reactors: Part II Comparison of Detailed Experiments & Flow Simulations. Chem. Eng. Sci., **49**, 5747–5762.
- Behzadi, A, Issa, R. I. & Rusche, H. 2004. Modeling of Dispersed Bubble & Droplet Flow at High Phase Fractions. Chem. Eng. Sci, **59**, 759–770.
- Brennen, E.C. (2003). Fundamental of Multiphase Flow. Oxford University Press Inc., United Kingdom.
- Cassanello, M., Larachi, F., Marie, M.N., Guy, C., & Chaouki, J. (1995). Experimental Characterization of the Solid Phase Chaotic Dynamics in Three–Phase Fluidization. Ind. Eng. Chem. Res., **34**, 2971–2980.
- Cebeci, T., & Sao, J.P. (2003). A non–iterative Method for Boundary–Layer Equations—Part II: Two–Dimensional Laminar and Turbulent Flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids. Volume **43**, Issue 9, November 30, 2003, Pages: 1139–1148. DOI: 10.1002/flid.560
- Chen, J. J. J., Jamialahmadi, M., & Li, S. M. (1989). Effect of Liquid Depth on Circulation in Bubble Columns: *a Visual Study*. Chem. Eng. Res. Des. **67**, 203.
- Chen, R.C., Reese, J., & Fan, L.–S. (1994). Flow Structure in a Three–Dimensional Bubble Column & Three–Phase Fluidized Bed. American Institute of Chemical Engineers Journal, **40**, 1093–1104.
- Darmana, Dadan. (2006). On The Multiscale Modeling of Hydrodynamics, Mass Transfer, & Chemical Reactions in Bubble Columns. PhD Thesis, University of Twente, Netherland.

- Deen, N. G., Solberg, T., & Hjertager, B. H. (2001). Large Eddy Simulation of the Gas–Liquid Flow in a Square Cross–Sectioned Bubble Column. *Chem. Eng. Sci.*, **56**, 6341–6349.
- Delnoij, Erik. (2001). *Fluid Dynamics of Gas–Liquid Bubble Columns: A Theoretical & Experimental Study*. PhD Thesis, University of Twente, Netherland.
- Devanathan, N., Moslemian, D., & Dudukovic, M. P. (1990). Flow Mapping in Bubble Columns Using CARPT, *Chem. Eng. Sci.*, **45** (8), 2285.
- Dijkhuizen, W., Van Den Hengel, E.I.V., Deen, N.G., Van Sint Annaland, M. & Kuipers, J. A. M. (2005). Numerical Investigation of Closures for Interface Forces Acting on Single Air–Bubbles in Water Using Volume of Fluid & Front Tracking Models. *Chem. Eng. Sci.*, **60**, 6169–6175.
- Drew, D. A., & Passman, S. L. (1999). *Theory of Multicomponent Fluids: Applied Mathematical Sciences* 135, Springer.
- Du, B., Warsito, W., & Fan, L.S. (2004). ECT Studies on the Choking Phenomena in a Gas–Solid Circulating Fluidized Bed. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **50**, 1386–1406.
- Elsinga, G.E., Van Oudheusden, B.W., & Scarano, F. (2006). Experimental Assessment Of Tomographic–PIV Accuracy. In: 13th International Symposium on Applications of Laser Techniqueto Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, paper 20.5.
- Fatmi, S.E., & Warsito, W. (2010). Pengembangan Electrical Capacitance Volume Tomography (ECVT) untuk Detektor Sinyal dan Rekonstruksi Citra Otak Manusia. Skripsi, Universitas Indonesia, Indonesia.
- Gladden, L.F. (1994). Nuclear Magnetic Resonance in Chemical Engineering: *Principles & Applications. Chemical Engineering Science*, **49**, 3339–3408.
- Groen, J.S., Oldeman, R.G.C., Mudde, R.F., & Van Den Akker, H.E.A. (1996). Coherent Structures & Axial Dispersion in Bubble Column Reactors. *Chem. Eng. Sci.*, **51**, 1703.
- Hills, J.H. (1976). The Operation of a Bubble Column at High Throughputs and Gas Holdup Measurement. *Chem. Eng. J.*, **12**, 89–99.
- Holland, D.J., Marashdeh, Q., Mller, C.R., Wang, F., Dennis, J.S., Fan, L.S., & Gladden, L.F. (2009). Comparison of ECVT & MRI Measurements of Voidage in a Gas–Fluidized Bed. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **48**, 172–181.

- Hyndman, C.L., Larachi, F., & Guy, C. (1997). Understanding Gas–Phase Hydrodynamics in Bubble Columns: A *Convective Model Based on Kinetic Theory*. *Chem. Eng. Sci.*, **52**, 63–77.
- Ishii, M. & Zuber, N. (1979). Drag Coefficient & Relative Velocity in Bubbly, Droplet or Particulate Flows. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **25**, 843–855.
- Ishii, M., & Hibiki, T. (2006). *Thermo–Fluid Dynamics of the Two Phase Flows*. Springer–Verlag, Berlin.
- Jakobsen, H.A., Sannæs, B. H., Grevskott, S. & Svendsen, H.F. (1997). Modeling of Vertical Bubble Driven Flows. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **36**, 4052–4074.
- Kantarci, N., Borak, F., & Ulgen, K.O. (2005). Review: Bubble Column Reactor. Elsevier, *Process Biochemistry*, **40**, 2263–2283.
- Lapin, A., & Lübbert, A. (1994). Numerical Simulation of the Dynamics of Two Phase Gas–Liquid Flows in Bubble Columns. *Chem. Eng. Sci.*, **49**, 3661.
- Lauder, B.E., & Spalding, D.B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **3**, pp. 269–289.
- Löhner, R., Parikh, P. (1988). Three Dimensional Grid Generation by the Advancing Front Method. *Int. J. of Numerical Methods in Fluids*, **8**, pp. 1135–1149, also AIAA Paper **88**–0515.
- Marashdeh, Q. (2007). Validation of Electrical Capacitance Volume Tomography with Applications to Multi–Phase Flow Systems. Master Thesis, Ohio State University, USA.
- Mazzitelli, I. (2003). Turbulent Bubbly Flow. PhD Thesis, University of Twente, Netherland.
- McDonald, P.W. (1971). The Computation of Transonic Flow through Two Dimensional Gas Turbine Cascades. ASME Paper 71–GT–89.
- Miller, D.N. (1980). Gas Holdup & Pressure Drop in Bubble Column Reactors. *Ind. Eng. Chem. Process, Des. Dev.* **19**, 371–7.
- Miller, C.R., Davidson, J.F., Dennis, J.S., Fennell, P.S., Gladden, L.F., Hayhurst A.N., Mantle, M.D., Rees, A.C., & Sederman, A.J. (2006). Real–Time Measurement of Bubbling Phenomena in a Three–Dimensional Gas–Fluidized Bed using Ultrafast Magnetic Resonance Imaging. *Phys. Rev. E.*, **96**, 154504.

- Mouza, K.A., Kazakis, N.A., & Spiros, V.P. (2004). Bubble Column Reactor Design using a CFD Code. 1st International Conference: From Scientific Computing to Computational Engineering". 1st IC-SCCE Athens, September 8-10, 2004 © ICSCCE.
- Mudded, R. F., & Simonin, O. (1999). Two & Three Dimensional Simulations of a Bubble Plume Using a Two-Fluid Model. *Chem. Eng. Sci.*, **54**, 5061-5069.
- Oey, R.S., Mudde, R.F., & Van Den Akker, H.E.A. (2003). Sensitivity Study on Interfacial Closure Laws in Two-Fluid Bubbly Flow Simulations. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **49**, 1621-1636.
- Olmos, A., Martinez, P., Alberdi, J., & Marron, J.L. (2006). Influence of Shielding Arrangement on ECT Sensors. *Sensors 2006*, **6**, 1118-1127.
- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., & Zienkiewicz, O.C. (1987). Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *Journal Computational Physics*, **72**, pp. 449-466.
- Pfleger, D., & Becker, S. (2001). Modeling & Simulation of the Dynamic Flow Behavior in a Bubble Column. *Chem. Eng. Sci.*, **56**, 1737-1747.
- Pfleger, D., Gomes, S., Gilbert, N., & Wagner, H.G. (1999). Hydrodynamic Simulation of Laboratory Scale Bubble Column Fundamental Studies of the Eulerian-Eulerian Modeling Approach. *Chem. Eng. Sci.*, **54**, 5091-5099.
- Pozrikidis, C. (2009). *Fluid Dynamics: Theory, Computation, & Numerical Simulation, Second Edition*. Springer, New York, USA.
- Prakash, A., Margaritis, A., & Li, H. (2001). Hydrodynamics and Local Heat Transfer Measurements in a Bubble Column with Suspension of Yeast. *Biochem. Eng. J.*, **9**, 155-63.
- Sato, Y., & Sekoguchi, K. (1975). Liquid Velocity Distribution in Two-Phase Bubble Flow. *Int. J. Multiphase Flow*, **2**, 79-95.
- Sayma, Abdunaser. (2009). *Computational Fluid Dynamics*. Ventus Publishing APS.
- Schumpe, A., & Grund, G. (1986). The Gas Disengagement Technique for Studying Gas Holdup Structure in Bubble Columns. *Can. J. Chem. Eng.*, **64**, 891-6.
- Scott, D. M., & Gutsche, O. W. (1999). ECT Studies of Bead Fluidization in Vertical Mills. 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17.

- Shah, Y.,T., Godbole, S.P., & Deckwer, W.D. (1982). Design Parameters Estimations for Bubble Column Reactors. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **28**, 353–79.
- Simonnet, M., Gentric, C., Olmos, E., & Midoux, N. (2007). Experimental Determination of the Drag Coefficient in a Swarm of Bubbles. *Chem. Eng. Sci.*, **62**, 858–866.
- Sokolichin, A., & Eigenberger, G. (1999). Applicability of the Standard Turbulence Model to the Dynamic Simulation of Bubble Columns: Part I Detailed Numerical Simulations. *Chem. Eng. Sci.*, **52**, 611–626.
- Thorat, B.N., & Joshi, J.B. (2004). Regime Transition in Bubble Columns: Experimental and Predictions. *Exp. Therm. Fluid. Sci.*, **28**, 423–30.
- Tomiyama, A. (2004). Drag, Lift, & Virtual Mass Forces Acting on a Single Bubble. 3rd International Symposium on Two-Phase Flow Modeling & Experimentation. Pisa, Italy. September 22–24.
- Tu, J.Y., Yeoh, G.H., & Liu, C. (2002). *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Elsevier, Oxford, OX2 8DP, United Kingdom.
- Van Wijngaarden, L. (1976). Hydrodynamic Interaction between Gas Bubbles in Liquid. *J. Fluid Mech.*, **77**, 27–44.
- Wang, F., Marashdeh, Q., Fan, L-S., & Warsito, W. (2010). Electrical Capacitance Volume Tomography: *Design & Applications*. *Review, Sensors 2010*, **10**, 1890–1917.
- Wang, M., Yin, W., & Holliday, N. (2002). A Highly Adaptive Electrical Impedance Sensing System for Flow Measurement. *Meas. Sci. Technol.*, **13**, 1884–1889.
- Warsito, W., & Fan, L.S. (2003). Development of Three-Dimensional Electrical Capacitance Tomography. 3<sup>rd</sup> World Congress on Industrial Process Tomography, Banff, Canada: 391–396.
- Warsito, W., Marashdeh, Q., & Fan, L.-S. (2007). Electrical Capacitance Volume Tomography (ECVT). *IEEE Sensors Journal*, **7**, 525–535.
- Wellek, R.M., Agrawal, A.K., & Skelland, A.H.P. (1966). Shape of Liquid Drops Moving in Liquid Media. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **12**, 854–862.
- Wilcox, D.C. (1998). *Turbulence Modeling for CFD*, 2<sup>nd</sup> Edition, DCW Industries, Inc., La Canada CA.
- Wilcox, D.C. (2004). *Turbulence Modeling for CFD*. ISBN 1–928729–10–X, 2<sup>nd</sup> Ed. DCW, Inc.

- Yue, P., Zhou, C., Feng, J.J., Ollivier–Gooch, C.F., & Hu, H.H. (2006). Phase–Field Simulations of Interfacial Dynamics in Viscoelastic Fluids using Finite Elements with Adaptive Meshing. *J. Comp. Phys.*, Vol. **219**, pp. 47–67.
- Zahradnik, J., Fiavola, M., Ruzicka, M., Drahos, J., Kastanek, F., & Thomas, N. (1997). Duality of the Gas–Liquid Flow Regimes in Bubble Column Reactors. *Chem. Eng. Sci.*, **52**, 3811–3826.
- Zhang, D. (2005). Numerical Simulation of Dynamic Flow Behavior in a Bubble Column: Grid & Time–Independent Solution. Technical Report. University of Twente, March.
- Zhang, D., Deen, N.G., & Kuipers, J.A.M. (2006). Numerical Simulation of Dynamic Flow Behavior in a Bubble Column: *A Study of Closures for Turbulence & Interface Forces*. *Chem. Eng. Sci.*, **61**, 7593–7608.
- Zhang, Dongsheng. (2007). Eulerian Modeling of Reactive Gas–Liquid Flow in a Bubble Column. PhD Thesis, University of Twente, Netherland.