UNIVERSITAS INDONESIA

POTENSIAL LISTRIK PADA MEDIA DENGAN BEBERAPA LAPISAN

TESIS

AINI SURI TALITA

0906495330

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA

DEPOK

DESEMBER 2010

UNIVERSITAS INDONESIA

POTENSIAL LISTRIK PADA MEDIA DENGAN BEBERAPA LAPISAN

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

AINI SURI TALITA

0906495330

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA

DEPOK

DESEMBER 2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar

Nama	:	Aini Suri Talita
NPM	:	0906495330
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	28 Desember 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh:

Nama	: Aini Suri Talita
NPM	: 0906495330
Program Studi	: Magister Matematika
Judul Tesis	: Potensial Listrik pada Media dengan Beberapa Lapisan

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	(Sri Mardiyati)
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	: Dr. Hengki Tasman	(Hengki)

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 28 Desember 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa saya panjatkan kepada Allah Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulisan tugas akhir ini dapat diselesaikan. Penulisan tugas akhir ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai penyusunan tugas akhir ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku pembimbing tugas akhir saya.
2. Universitas Gunadarma yang telah memberikan kesempatan kepada saya untuk mengikuti program S2 ini.
3. Khususnya kepada Prof. Suryadi H.S, Dr. Ernastuti, Dr. Edi Sukirman, serta rekan-rekan di Pusat Studi Komputasi Matematika (PSKM), Universitas Gunadarma yang telah mendorong saya untuk melanjutkan pendidikan ke program S2 ini.
4. Prof. Dr. Djati Kerami selaku ketua program magister Matematika UI, serta seluruh staf pengajar Matematika UI, khususnya Prof. Belawati Widjaja, Dr. Yudi Satria, Dr. Kiki A.Sugeng, dan Dr. Hengki Tasman.
5. Rekan-rekan mahasiswa magister Matematika UI angkatan 2009, khususnya Ibu Suarsih Utama yang telah menjadi teman diskusi selama waktu kuliah.
6. Karyawan Departemen Matematika FMIPA-UI yang telah membantu semua proses administrasi.

Terima kasih tak terhingga saya ucapkan kepada ibunda tercinta yang telah mengasuh serta membimbing saya, karena tanpa doa dan dukungannya saya yakin, saya tidak akan berhasil menyelesaikan program ini.

Akhir kata, saya berharap Allah berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu saya dalam menyelesaikan program ini. Semoga tugas akhir ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, Desember 2010

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aini Suri Talita

NPM : 0906495330

Program Studi : Magister Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Biaya Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Potensial Listrik pada Media dengan Beberapa Lapisan

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada Tanggal : 28 Desember 2010

Yang menyatakan

:

(Aini Suri Talita)

ABSTRAK

Nama : Aini Suri Talita

Program Studi: Magister Matematika

Judul : Potensial Listrik pada Media dengan Beberapa Lapisan

Metode resistivitas listrik merupakan salah satu metode eksplorasi sumber daya alam. Metode ini digunakan untuk menyelidiki kondisi materi di bawah permukaan bumi dengan cara mengalirkan arus listrik ke dalam tanah melalui sepasang elektroda listrik kemudian menghitung beda potensial diantara dua elektroda potensial dengan menggunakan *voltmeter*. Selain daripada itu, metode resistivitas listrik juga membutuhkan nilai potensial listrik yang didapat dari penurunan sifat-sifat potensial listrik sebagai data pembanding. Hal ini memunculkan permasalahan baru yaitu dapatkah nilai potensial listrik dihitung secara teoritis berdasarkan sifat-sifat potensial listrik itu sendiri? Berkaitan dengan masalah tersebut, pada tugas akhir ini akan dibahas pencarian fungsi potensial listrik pada suatu media dengan beberapa lapisan.

Kata Kunci : potensial listrik, resistivitas listrik.

x+33halaman; 3 gambar

Daftar Pustaka : 12 (1962-2005)

ABSTRACT

Name : Aini Suri Talita

Program Study : Mathematics

Title : Electrical Potential on a Multilayered Media

Electrical resistivity method is an exploration method which is used to investigate the nature of the structures below the surface by employing an artificial source of current. The current is injected on the surface by the current electrodes and the electrical potential is measured by using voltmeter at the potential electrodes. Finding the electrical potential function is important due to get the value of theoretical electrical potential as a comparator of actual data. The purpose of this study is to find electrical potential function on a multilayered media.

Key Words : electrical potential, electrical resistivity.

x+33pages; 3 pictures

Bibliography: 12 (1962-2005)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan bertambahnya jumlah penduduk dunia serta perkembangan teknologi yang kian pesat, kebutuhan akan kekayaan alam baik air bersih, minyak bumi, gas alam, maupun mineral lainnya kian meningkat. Hal ini mengakibatkan meningkatnya kuantitas pencarian sumber daya alam. Terbatasnya jumlah sumber daya alam yang ada disertai dengan pemanfaatan sumber daya alam secara terus-menerus mengakibatkan sulitnya menemukan lokasi sumber daya alam baru. Untuk mengatasi hal ini, para ilmuwan senantiasa mengembangkan metode-metode baru berkaitan dengan eksplorasi sumber daya alam.

Berkenaan dengan sumber daya alam yang berada di bawah permukaan bumi, metode-metode eksplorasi yang dikembangkan diantaranya merupakan metode-metode yang tidak membutuhkan observasi geologi, namun berkaitan dengan pengukuran-pengukuran fisik pada permukaan bumi yang dapat memberikan informasi mengenai struktur di bawah permukaan bumi. Salah satu diantaranya adalah metode resistivitas listrik.

Metode resistivitas listrik dikembangkan oleh Conrad Schlumberger yang pertama kali melakukan percobaan berkaitan dengan resistivitas listrik di Normandy pada tahun 1912 (Sharma 207). Metode ini digunakan untuk menyelidiki kondisi materi di bawah permukaan bumi dengan cara mengalirkan arus listrik ke dalam tanah melalui sepasang elektroda listrik kemudian menghitung beda potensial diantara dua elektroda potensial. Variasi dari ketahanan (*resistance*) terhadap arus listrik di bawah permukaan bumi menyebabkan variasi pada perhitungan beda potensial yang menyediakan informasi mengenai struktur dari materi di bawah permukaan bumi. Perhitungan beda potensial tersebut dilakukan berulang kali seiring dengan perubahan jarak dari elektroda potensial ke pusat arus listrik. Pada prakteknya, perhitungan beda potensial dilakukan dengan suatu alat yang disebut *voltmeter*. Selain daripada itu, metode resistivitas listrik juga membutuhkan nilai potensial listrik yang didapat dari penurunan sifat-sifat potensial listrik sebagai data pembanding. Hal ini memunculkan permasalahan baru yaitu dapatkah nilai potensial listrik dihitung secara teoritis berdasarkan sifat-sifat potensial listrik itu sendiri?

1.2 Permasalahan

Bagaimanakah cara memperoleh fungsi potensial listrik pada suatu titik di permukaan bumi yang dialiri arus listrik?

1.3 Batasan masalah

Pada tugas akhir ini, diasumsikan bahwa:

- Media atau bumi bersifat isotropik, yang berarti sifat fisik materi tidak bergantung pada arah.
- Media atau bumi terdiri dari beberapa lapisan horisontal yang heterogen dengan resistivitas pada masing-masing lapisan berubah secara eksponensial terhadap kedalaman.
- Media atau bumi dialiri arus listrik searah.
- Panas yang diakibatkan dari konduksi listrik tidak berpengaruh besar terhadap resistivitas materi.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk mencari fungsi potensial listrik pada permukaan bumi yang dialiri arus listrik.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab yang dimulai dengan Bab 1 yang menerangkan secara garis besar isi dari tugas akhir ini. Bab 2 berisi landasan teori tentang persamaan diferensial, vektor, fungsi-fungsi khusus, maupun hal-hal yang berhubungan dengan listrik yang akan digunakan pada pembahasan tugas akhir ini. Pembahasan tentang potensial listrik pada permukaan media dengan beberapa lapisan ditunjukkan pada Bab 3. Bab 4 berisi kesimpulan dari tugas akhir ini.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas landasan teori yang akan digunakan untuk menurunkan fungsi potensial listrik pada media dengan beberapa lapisan yang dialiri arus listrik.

Hal ini dimulai dengan pengertian dari persamaan diferensial Bessel beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.1

Misalkan y merupakan fungsi dari satu peubah x. Persamaan diferensial berikut ini disebut persamaan diferensial Bessel derajat n.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{2.1}$$

(Boyce and DiPrima 275)

Teorema 2.2

Misalkan diberikan persamaan diferensial Bessel derajat n

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Jika pada persamaan tersebut, x diganti dengan λz, dengan λ suatu konstanta, maka persamaan tersebut menjadi:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (\lambda^2 z^2 - n^2)y = 0$$

Bukti

Misalkan $x = \lambda z$, akibatnya, $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dx}\,\lambda$. Serta, $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\lambda\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz}\lambda = \frac{d^2y}{dx^2}\lambda\,\lambda = \lambda^2\frac{d^2y}{dx^2}$. Pandang persamaan diferensial Bessel berikut,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Substitusi $x = \lambda z$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dz}$, dan $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dz^2}$, didapat

$$(\lambda z)^2\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda z\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dz} + ((\lambda z)^2 - n^2)y = 0$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (\lambda^2 z^2 - n^2)y = 0$$

Teorema 2.3 berisikan solusi umum dari persamaan diferensial Bessel derajat nol, yaitu fungsi-fungsi yang memenuhi Persamaan (2.1) untuk $n = 0$.

Teorema 2.3

Misalkan diberikan persamaan diferensial Bessel derajat nol

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

Untuk $x > 0$, solusi umum dari persamaan diferensial tersebut adalah $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$, dengan

a) $J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$ menyatakan fungsi Bessel jenis pertama derajat 0,

b) $Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m\,x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right]$ menyatakan fungsi Bessel jenis kedua derajat 0,

c) $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772$,

d) $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$,

e) c_1, c_2 merupakan bilangan riil.

(Boyce and DiPrima 278)

Pada permasalahan potensial listrik, nilai potensial listrik pada media homogen didapat dengan menghitung integral dari perkalian fungsi eksponensial dengan fungsi Bessel derajat nol yang telah dibuktikan konvergen oleh Lipschitz (1859). Untuk fungsi eksponensial tertentu, perhitungan integralnya dapat menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.4

Jika $J_0(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat nol maka

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$. (2.2)

(Watson 384)

Integral tak wajar pada ruas kiri dari persamaan (2.2) biasa disebut integral Lipschitz.

Perhitungan integral tak wajar dengan integran berbentuk perkalian suatu fungsi dengan fungsi Bessel banyak digunakan pada masalah-masalah yang berkaitan dengan geofisika, khususnya yang berkaitan dengan potensial listrik pada suatu media yang dialiri arus listrik.

Teorema 2.5

Misal diberikan suatu fungsi $f(x)$. Jika $F(y) = \int_0^\infty f(x)\, x\, J_0(yx) dx$ maka $f(x) = \int_0^\infty F(y)\, y\, J_0(xy) dy$.

(Arfken and Weber 928)

Salah satu syarat batas dari masalah pencarian fungsi potensial listrik pada media dengan beberapa lapisan berkaitan dengan turunan dari fungsi potensial listrik yang berbentuk integral tentu yang tak wajar. Proses menurunkan fungsi potensial tersebut memanfaatkan sifat dari konvergensi uniform.

Teorema 2.6

Misalkan $f(x, \alpha)$ kontinu dan memiliki turunan parsial yang kontinu terhadap α untuk $x \geq a$ dan $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Jika $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ konvergen uniform pada $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ dan a tidak bergantung pada α, maka $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx\right) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$.

(Wrede and Spiegel 314)

Proses penurunan fungsi potensial listrik pada media dengan beberapa lapisan memerlukan definisi *gradient* dari suatu fungsi bernilai riil dari suatu vektor posisi. Berikut ini akan dibahas definisi *gradient* dari suatu fungsi.

Definisi 2.7

Misalkan $f(r,\theta,z)$ merupakan fungsi bernilai riil dari suatu vektor posisi pada koordinat silinder. Jika f memiliki turunan parsial pertama, definisikan *gradient* dari f pada sistem koordinat silinder sebagai:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

(Matthews 109)

Seperti yang terlihat pada Definisi 2.7, suatu fungsi bernilai riil dari vektor posisi dapat dicari *gradient*-nya yang merupakan suatu fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi. Sebaliknya, divergensi dari suatu fungsi bernilai vektor dari vektor posisi, yang merupakan suatu fungsi bernilai riil dari vektor posisi, dapat dicari dengan menggunakan definisi berikut.

Definisi 2.8

Misalkan $\mathbf{A} = A_1(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{r}} + A_2(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_3(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{z}}$ adalah fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi. Jika $A_1(r,\theta,z), A_2(r,\theta,z), A_3(r,\theta,z)$ memiliki turunan parsial pertama, definisikan divergensi dari **A** pada sistem koordinat silinder sebagai:

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

(Matthews 109)

Komponen vertikal dari kepadatan arus listrik bernilai nol pada permukaan bumi, kecuali pada lingkungan yang sangat kecil di sekitar pusat arus. Untuk merepresentasikan hal ini dalam bentuk matematis, diperlukan suatu fungsi khusus yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9

Suatu fungsi δ yang memenuhi sifat:

a) $\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$
b) $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$

dengan titik asal termasuk dalam batas integral, dinamakan fungsi *Dirac delta*.

(Arfken and Weber 81)

Fungsi *Dirac delta* memiliki beberapa sifat. Salah satunya diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.10

Fungsi *Dirac delta* $\delta(x)$ memiliki sifat $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$, untuk $a > 0$.

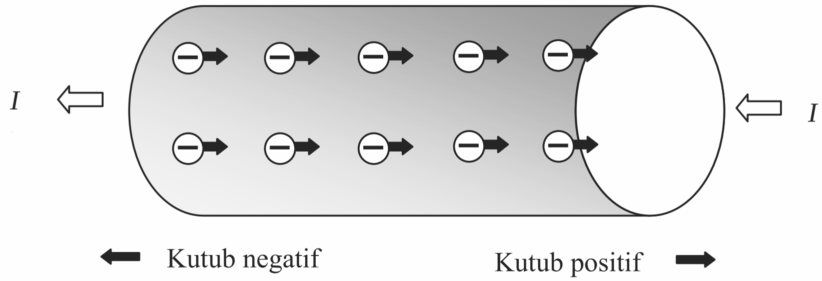
(Arfken and Weber 84)

Selanjutnya akan dibahas definisi maupun sifat yang berkaitan dengan potensial listrik.

Definisi 2.11

Arus listrik, I, merupakan suatu besaran yang menyatakan muatan listrik ΔQ yang mengalir melalui suatu area (*cross-sectional area*) A per interval waktu Δt. Jika arus berubah-ubah selama interval waktu Δt, interval Δt diperkecil hingga arus dapat dipandang sebagai suatu konstanta.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$



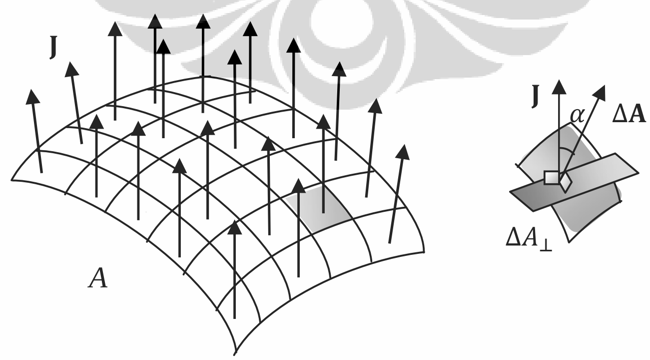
Gambar 2.1. Arus Listrik Dipandang sebagai Pergerakan dari Muatan

(Benenson et al. 426-427)

Definisi 2.12

Kepadatan arus listrik, **J**, menyatakan penyebaran arus listrik pada suatu konduktor. Kepadatan arus listrik merupakan suatu vektor yang searah dengan arus listrik. Nilainya (*magnitude*) dihitung dengan membagi arus ΔI, yang mengalir pada area (*cross-sectional area*) $\Delta A_{\perp}$ yang tegak lurus dengan arah arus listrik, dengan $\Delta A_{\perp}$.

$$\mathrm{J} = \lim_{\Delta A_{\perp} \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}} = \frac{dI}{d\Delta A_{\perp}}$$



Gambar 2.2. Definisi dari Kepadatan Arus **J**

(Benenson et al. 428-429)

Definisi 2.13

Medan listrik, **E**, terbentuk pada daerah di sekitar objek bermuatan. Medan listrik pada suatu titik didefinisikan sebagai gaya listrik **F** yang bekerja pada suatu muatan uji q_0 pada titik tersebut, dibagi dengan besar muatan uji q_0.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

(Halliday, Resnick, and Walker 719)

Definisi 2.14

Potensial listrik pada titik A di suatu medan listrik **E**, Φ_A, merupakan hasil yang disebabkan oleh gaya $\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}$ untuk memindahkan muatan Q dari suatu titik tetap P, yang potensialnya ditetapkan nol, ke titik A. Titik di tak berhingga dipilih sebagai titik P.

$$\Phi_A = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{s}$$

(Benenson et al. 447)

Teorema 2.15

Potensial listrik Φ dan medan listrik **E** memiliki hubungan:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

(Grant and West 403)

Kepadatan arus **J** dan medan listrik **E** terbentuk pada suatu konduktor ketika beda potensial dipertahankan di sepanjang konduktor. Jika beda potensial tidak berubah maka arus listrik juga demikian.

Teorema 2.16

Hukum Ohm menyatakan pada suatu materi, rasio dari kepadatan arus **J** dengan medan listrik **E** merupakan suatu konstanta σ yang tidak bergantung pada medan listrik **E**. Dengan perkataan lain:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

dengan konstanta σ disebut konduktivitas dari suatu materi.

(Halliday, Resnick, and Walker 844)

Konduktivitas dari suatu materi, yang didefinisikan sebagai konstanta pembanding antara kepadatan arus dengan medan listrik, mengukur seberapa baik kemampuan suatu materi untuk mengalirkan arus listrik. Istilah lain yang sering digunakan untuk mengukur kemampuan suatu materi dalam mengalirkan arus listrik adalah resistivitas.

Definisi 2.17

Resisitivitas dari suatu materi, ρ, didefinisikan sebagai balikan dari konduktivitas.

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma}$$

(Halliday, Resnick, and Walker 846)

Kepadatan arus listrik pada suatu media yang dialiri arus listrik searah merupakan fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi, sehingga dapat dihitung divergensinya.

Teorema 2.18

Divergensi dari kepadatan arus listrik, $\mathbf{J}$, bernilai nol. Yaitu

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

(Grant and West 404)

BAB 3

POTENSIAL LISTRIK PADA MEDIA DENGAN BEBERAPA LAPISAN

Sesuai dengan Teorema 2.15, potensial listrik Φ pada suatu titik ketika dialirkan arus searah memenuhi

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \tag{3.1}$$

dengan **E** merupakan medan listrik**.** Berdasarkan hukum Ohm pada Teorema 2.16, kepadatan arus **J** dan medan listrik **E** memiliki hubungan

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{3.2}$$

dengan σ merupakan konduktivitas dari media. Sedangkan, sesuai dengan Teorema 2.18, divergensi dari kepadatan arus bernilai nol , yaitu

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{3.3}$$

Substitusi Persamaan (3.2) pada Persamaan (3.3), didapat

$$\nabla \cdot \sigma\mathbf{E} = 0 \tag{3.4}$$

Selanjutnya, substitusi Persamaan (3.1) pada Persamaan (3.4), didapat

$$\nabla \cdot \sigma\nabla\Phi = 0 \tag{3.5}$$

Masalah potensial listrik akan lebih sederhana apabila diselesaikan pada sistem koordinat silinder.

Dengan menggunakan definisi dari $\nabla\Phi$ pada Definisi 2.7, Persamaan (3.5) menjadi

$$\nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}} \hat{\boldsymbol{z}} \right) = 0 \tag{3.6}$$

dengan r menyatakan jarak titik uji dari pusat arus, dan z menyatakan kedalaman titik uji.

Berdasarkan Definisi 2.8 tentang divergensi, didapat

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma \partial \Phi}{\partial r} r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sigma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \left(\frac{\sigma \partial \Phi}{\partial \mathrm{z}} \right) = 0 \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) menjadi

$$\frac{\sigma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{d\sigma}{d\mathrm{z}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}} + \sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.8}$$

Tulis kembali Persamaan (3.8) sebagai

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\mathrm{z}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}} = 0 \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) merupakan persamaan diferensial parsial derajat 2. Persamaan ini akan diselesaikan dengan metode variabel terpisah (O'Neil 89). Asumsikan potensial Φ memiliki bentuk sebagai berikut.

$$\Phi(r, z) = R(r) Z(z) \tag{3.10}$$

Substitusi Persamaan (3.10) pada Persamaan (3.9), didapat

$$Z(z)\frac{d^2R}{dr^2} + Z(z)\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + R(r)\frac{d^2Z}{dz^2} + R(r)\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz} = 0$$

(3.11)

Bagi Persamaan (3.11) dengan $R(r)Z(z)$.

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma\,Z(z)}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz} = 0$$

(3.12)

Tulis kembali Persamaan (3.12) sebagai

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{1}{\sigma\,Z(z)}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz}$$

(3.13)

Ruas kiri dari Persamaan (3.13) merupakan fungsi dari satu peubah r, sedangkan ruas kanan dari Persamaan (3.13) merupakan fungsi dari satu peubah z. Agar Persamaan (3.13) tidak menyebabkan kontradiksi, maka asumsikan

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{dR}{dr} = -\lambda^2$$

(3.14)

dengan λ merupakan konstanta pemisah. Akibatnya

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma\,Z(z)}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz} = \lambda^2$$

(3.15)

Tulis kembali Persamaan (3.14) sebagai

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R(r) = 0$$

(3.16)

Tulis kembali Persamaan (3.15) sebagai

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z(z) = 0$$

(3.17)

Dengan mengasumsikan $\Phi(r,z) = R(r)Z(z)$ dan mengasumsikan λ terletak pada interval $[0,\infty)$ didapatkan solusi umum dari Persamaan (3.9) berbentuk

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty F(\lambda)\, R(\lambda,r)\, Z(\lambda,z)\, d\lambda$$

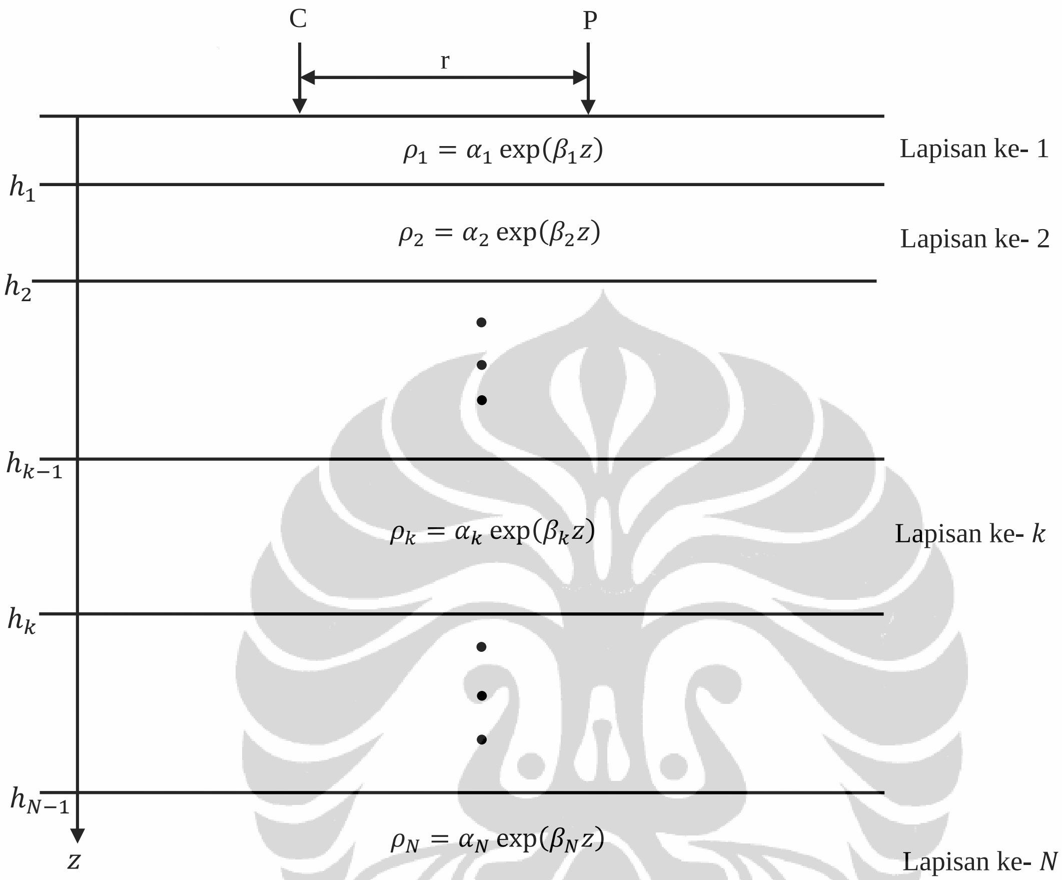
(3.18)

Pandang Persamaan (3.16), persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial Bessel derajat nol, sehingga berdasarkan Teorema 2.2 dan Teorema 2.3, solusi dari Persamaan (3.16) adalah

$$R(\lambda,r) = J_0(\lambda r)$$

(3.19)

Untuk memperjelas masalah potensial listrik pada media dengan beberapa lapisan, berikut ini diberikan geometri dari model masalah potensial listrik pada media dengan beberapa lapisan.



Gambar 3.1.

Geometri dari Model Masalah Potensial Listrik pada Permukaan Media dengan Beberapa Lapisan

Keterangan gambar:

- C merupakan elektroda listrik
- P merupakan elektroda potensial
- Media diasumsikan terdiri dari N lapisan
- Lapisan ke- k pada media memiliki ketebalan $h_k - h_{k-1}$

- Resistivitas pada lapisan ke-k (ρ_k) merupakan fungsi eksponensial dari peubah z yang menyatakan kedalaman.

Sesuai dengan Gambar 3.1, C yang merupakan sumber dari arus listrik I terletak pada permukaan bumi ($z = 0$). Resistivitas pada lapisan ke- k diasumsikan berbentuk

$$\rho_k = \alpha_k \exp(\beta_k z), \qquad h_{k-1} < z < h_k \tag{3.20}$$

dengan α_k dan β_k merupakan bilangan riil. Akibatnya konduktivitas pada lapisan ke- k, σ_k, berbentuk

$$\sigma_k = {\alpha_k}^{-1} \exp(-\beta_k z) \tag{3.21}$$

Substitusi Persamaan (3.21) pada Persamaan (3.17) didapat

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \beta_k \frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z = 0, \qquad h_{k-1} < z < h_k \tag{3.22}$$

Persamaan (3.22) merupakan persamaan diferensial homogen derajat dua koefisien konstan. Solusi dari Persamaan (3.22) adalah

$$Z(\lambda, z) = C \exp(\gamma_k^+ z) \text{ dan } Z(\lambda, z) = C \exp(\gamma_k^- z) \tag{3.23}$$

dengan $\gamma_k^+ = \frac{\beta_k + \sqrt{{\beta_k}^2 + 4\lambda^2}}{2}$ dan $\gamma_k^- = \frac{\beta_k - \sqrt{{\beta_k}^2 + 4\lambda^2}}{2}$.

Berdasarkan Persamaan (3.19) dan (3.23), didapat solusi partikulir dari persamaan diferensial (3.9) adalah

$$\Phi_k = C\exp(\gamma_k^+ z)\,J_0(\lambda r) \text{ dan } \Phi_k = C\exp(\gamma_k^- z)\,J_0(\lambda r)$$

(3.24)

Sehingga solusi umum dari Persamaan (3.9) adalah

$$\Phi_k = \int_0^\infty [A_k(\lambda)\exp(\,\gamma_k^+ z) + B_k(\lambda)\exp(\,\gamma_k^- z)]\,J_0(\lambda r)d\lambda,$$

(3.25)

dengan Φ_k menyatakan potensial listrik pada lapisan ke-k, $k = 1,2,\dots,N$. Pada Persamaan (3.25), $A_k(\lambda)$ dan $B_k(\lambda)$ merupakan suatu fungsi sembarang dari λ yang ditentukan dengan menggunakan syarat batas berikut ini: (Koefoed 23)

1. Potensial listrik bersifat kontinu pada setiap batas dari lapisan-lapisan bumi.

$$\Phi_k(h_k) = \Phi_{k+1}(h_k), \qquad k = 1,2,\dots,N-1$$

(3.26)

2. Komponen vertikal dari kepadatan arus bersifat kontinu pada setiap batas dari lapisan-lapisan bumi.

$$\frac{1}{\rho_k(h_k)}\frac{\partial\Phi_k}{\partial \mathrm{z}} = \frac{1}{\rho_{k+1}(h_k)}\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial \mathrm{z}}, \qquad k = 1,2,\dots,N-1$$

(3.27)

3. Komponen vertikal dari kepadatan arus bernilai nol pada permukaan bumi $(z = 0)$, kecuali pada lingkungan yang sangat kecil di sekitar pusat arus.

$$-\frac{1}{\rho_1(0)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial \mathrm{z}}\bigg|_{z=0} = \frac{I}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r}$$

(3.28)

4. Potensial listrik pada kedalaman tak hingga mendekati nol.

Pada lapisan pertama, fungsi resistivitas berbentuk $\rho_1 = \alpha_1 \exp(\beta_1 z)$. Jika kita asumsikan $\beta_1 = 0$, maka ρ_1 merupakan suatu konstanta. Sehingga berdasarkan Persamaan (3.25) didapat

$$\Phi_1 = \int_0^\infty [A_1(\lambda) \exp(\lambda z) + B_1(\lambda) \exp(-\lambda z)]\, J_0(\lambda r) d\lambda \tag{3.29}$$

Dengan mensubstitusi Φ_1 di Persamaan (3.29) ke Persamaan (3.28), serta dengan menggunakan Teorema 2.6, didapat,

$$-\frac{1}{\rho_1}\int_0^\infty [A_1(\lambda) - B_1(\lambda)]\, \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{I}{2\pi r}\delta(r) \tag{3.30}$$

Tulis kembali Persamaan (3.30) sebagai

$$\int_0^\infty [B_1(\lambda) - A_1(\lambda)]\, \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{\rho_1 I}{2\pi r}\delta(r) \tag{3.31}$$

Berdasarkan Teorema 2.5, didapat

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\rho_1 I}{2\pi r}\delta(r)\, r J_0(\lambda r) dr \tag{3.32}$$

Tulis kembali Persamaan (3.32) sebagai

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \delta(r)\, J_0(\lambda r) dr$$

(3.33)

Berdasarkan Definisi 2.9 dan Teorema 2.10 mengenai fungsi Dirac delta, didapat

$\int_0^\infty \delta(r)\, J_0(\lambda r) dr = \int_0^\infty \delta(\lambda r) \lambda\, J_0(\lambda r) \frac{d(\lambda r)}{\lambda} = \int_0^\infty \delta(\lambda r) J_0(\lambda r) d(\lambda r) = J_0(0) = 1,$

sehingga

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi}$$

(3.34)

Substitusi $B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi}$ pada Persamaan (3.29), didapat

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \left\{ A_1(\lambda)[\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] + \frac{\rho_1 I}{2\pi} \exp(-\lambda z) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

(3.35)

Tulis kembali Persamaan (3.35) sebagai

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{\exp(-\lambda z) + \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)]\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

(3.36)

dengan $\theta_1(\lambda) = \frac{2\pi A_1(\lambda)}{\rho_1 I}$.

Berdasarkan Teorema 2.4, $\int_0^\infty \exp(-\lambda z)\, J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$, sehingga Persamaan (3.36) menjadi

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^\infty \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)]\, J_0(\lambda r)d\lambda$$

(3.37)

Bagian $\frac{\rho_1 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$ pada Persamaan (3.37), adalah potensial listrik yang dihasilkan oleh sumber arus elektroda tunggal pada media homogen (Koefoed 22), sedangkan bagian $\frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^\infty \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)]\, J_0(\lambda r)d\lambda$ merupakan faktor potensial listrik yang muncul akibat adanya lapisan-lapisan heterogen pada media.

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (3.26), pada kedalaman h_k, potensial pada lapisan ke$-k$ (Persamaan (3.25)), dan potensial pada lapisan ke$-k+1$ (Persamaan (3.25)), harus bernilai sama, untuk $k = 2, \ldots, N-1$. Hal ini mengakibatkan

$$\int_0^\infty [A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)]\, J_0(\lambda r)d\lambda$$
$$= \int_0^\infty [A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k)$$
$$+ B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)]\, J_0(\lambda r)d\lambda$$

(3.38)

Persamaan (3.38) hanya dapat dipenuhi untuk setiap nilai r jika integran pada kedua ruas persamaan sama. Sehingga didapat

$$A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)$$
$$= A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)$$

(3.39)

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (3.27), pada kedalaman h_k, komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke$-k$ (Persamaan (3.25)), dan komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke$-k+1$ (Persamaan (3.25)), harus bernilai sama, untuk $k = 2, \dots, N-1$. Hal ini mengakibatkan

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_k}\left[\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)\right] J_0(\lambda r)d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{\rho_{k+1}}\left[\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)\right] J_0(\lambda r)d\lambda \tag{3.40}$$

Persamaan (3.40) hanya dapat dipenuhi untuk setiap nilai r jika integran pada kedua ruas persamaan sama. Sehingga didapat

$$\frac{1}{\rho_k}\left[\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)\right] = \frac{1}{\rho_{k+1}}\left[\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)\right] \tag{3.41}$$

Dengan membagi Persamaan (3.39) dengan Persamaan (3.41), didapat

$$\frac{A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\frac{A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)}{\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda)\exp(\gamma_{k+1}^- h_k)} \tag{3.42}$$

Definisikan fungsi $S_k(\lambda)$ dengan:

$$S_k(\lambda) = \frac{A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_{k-1})}{\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_{k-1})} \tag{3.43}$$

Tulis kembali Persamaan (3.42) sebagai

$$\frac{A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \tag{3.44}$$

Tulis kembali Persamaan (3.43) sebagai

$$S_k(\lambda) = \frac{\chi\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + \exp(\gamma_k^- h_{k-1})}{\gamma_k^+ \chi\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- h_{k-1})} \tag{3.45}$$

dengan $\chi = \frac{A_k(\lambda)}{B_k(\lambda)}$.

Pandang Persamaan (3.42). Bagian kiri dari persamaan tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} &\frac{A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_k)} \\ &\qquad = \frac{\chi\exp(\gamma_k^+ h_k) + \exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ \chi\exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- h_k)} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dari Persamaan (3.45), didapat

$$\begin{aligned} &\gamma_k^+ S_k(\lambda)\chi\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + \gamma_k^- S_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_{k-1}) \\ &\qquad = \chi\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) + \exp(\gamma_k^- h_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \chi[\gamma_k^+ S_k(\lambda)\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) - \exp(\gamma_k^+ h_{k-1})] \\ &\qquad = \exp(\gamma_k^- h_{k-1}) - \gamma_k^- S_k(\lambda)\exp(\gamma_k^- h_{k-1}) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\chi = -\frac{\exp(\gamma_k^- h_{k-1})\,[1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{\exp(\gamma_k^+ h_{k-1})\,[1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]} \tag{3.47}$$

Substitusi Persamaan (3.47) pada Persamaan (3.46), dan dengan mendefinisikan $\exp(\gamma_k^- t_k) = \exp(-\gamma_k^- h_{k-1}) \exp(\gamma_k^- h_k)$, didapat

$$\frac{\exp(\gamma_k^- h_k) - \exp(\gamma_k^- h_{k-1}) \exp(\gamma_k^+ t_k) \dfrac{[1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{[1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]}}{\gamma_k^- \exp(\gamma_k^- h_k) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^- h_{k-1}) \exp(\gamma_k^+ t_k) \dfrac{[1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{[1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]}} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \qquad (3.48)$$

Kalikan ruas kiri dari Persamaan (3.48) dengan $\frac{\exp(-\gamma_k^- h_{k-1})}{\exp(-\gamma_k^- h_{k-1})}$, didapat

$$\frac{\exp(\gamma_k^- t_k) - \exp(\gamma_k^+ t_k) \dfrac{[1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{[1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]}}{\gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^+ t_k) \dfrac{[1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{[1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]}} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \qquad (3.49)$$

Lakukan beberapa operasi aljabar pada Persamaan (3.49), didapat

$$\frac{\dfrac{\gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \exp(\gamma_k^- t_k) - \exp(\gamma_k^+ t_k)}{1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)}}{\dfrac{\gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^+ t_k)}{1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)}} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \qquad (3.50)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \exp(\gamma_k^- t_k) - \exp(\gamma_k^+ t_k)}{\gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^+ t_k)} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \qquad (3.51)$$

Definisikan:

$$\varepsilon^{+} = \exp(\,\gamma_k^{+} t_k)$$

$$\varepsilon^{-} = \exp(\,\gamma_k^{-} t_k)$$

Substitusi $\varepsilon^{+} = \exp(\,\gamma_k^{+} t_k)$, $\varepsilon^{-} = \exp(\,\gamma_k^{-} t_k)$, pada Persamaan (3.51) didapat

$$\frac{\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} S_k(\lambda) - \gamma_k^{+}\varepsilon^{-} S_k(\lambda) + \varepsilon^{-} - \varepsilon^{+}}{\gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} S_k(\lambda) - \gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{-} S_k(\lambda) + \gamma_k^{-}\varepsilon^{-} - \gamma_k^{+}\varepsilon^{+}} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \tag{3.52}$$

Selesaikan Persamaan (3.52) untuk $S_k(\lambda)$.

$$\begin{aligned}\rho_k\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} S_k(\lambda) - \rho_k\gamma_k^{+}\varepsilon^{-} S_k(\lambda) + \rho_k\varepsilon^{-} - \rho_k\varepsilon^{+} \\ = \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)\gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} S_k(\lambda) - \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)\gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{-} S_k(\lambda) \\ + \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)\gamma_k^{-}\varepsilon^{-} - \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)\gamma_k^{+}\varepsilon^{+}\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow S_k(\lambda)[\rho_k(\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} - \gamma_k^{+}\varepsilon^{-}) - \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} - \gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{-})] \\ = \rho_k(\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-}) + \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^{-}\varepsilon^{-} - \gamma_k^{+}\varepsilon^{+})\end{aligned} \tag{3.54}$$

Didapat

$$S_k(\lambda) = \frac{\rho_k(\varepsilon^{+} - \varepsilon^{-}) + \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^{-}\varepsilon^{-} - \gamma_k^{+}\varepsilon^{+})}{\rho_k(\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} - \gamma_k^{+}\varepsilon^{-}) - \rho_{k+1}S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{+} - \gamma_k^{+}\gamma_k^{-}\varepsilon^{-})} \tag{3.55}$$

Dengan mendefinisikan $P_k = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$, relasi rekursif antara $S_k(\lambda)$ dan $S_{k+1}(\lambda)$ diberikan oleh persamaan berikut:

$$S_k(\lambda) = \frac{(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) + P_k S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^- \varepsilon^- - \gamma_k^+ \varepsilon^+)}{(\gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \varepsilon^-) - P_k S_{k+1}(\lambda)(\gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^-)} \quad (3.56)$$

Untuk memenuhi syarat batas bahwa pada kedalaman tak hingga potensial listrik mendekati nol, haruslah $A_N(\lambda)$ bernilai nol pada bagian terdalam dari lapisan ke-N. Sehingga berdasarkan Persamaan (3.43), didapat $S_N(\lambda) = \frac{1}{\gamma_N^-}$. Dari $S_N(\lambda)$ dan relasi rekursif pada Persamaan (3.56), nilai $S_k(\lambda),\ k = 2,3,\dots,N-1$, dapat dicari secara rekursif.

Persamaan (3.37) menyatakan potensial listrik pada lapisan pertama yang resisitivitasnya diasumsikan konstan $(\beta_1 = 0)$. Untuk menghitung potensial listrik pada $z = 0$ (permukaan bumi), $\theta_1(\lambda)$ harus diturunkan berdasarkan syarat batas yang diberikan.

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (3.26), pada kedalaman h_1, potensial pada lapisan ke-2 (Persamaan (3.25)), dan potensial pada lapisan ke-1 (Persamaan (3.36)), harus bernilai sama. Hal ini mengakibatkan

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^\infty \{\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_1)]\} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$
$$= \int_0^\infty [A_2(\lambda)\exp(\gamma_2^+ h_1) + B_2(\lambda)\exp(\gamma_2^- h_1)]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad (3.57)$$

Persamaan (3.57) hanya dapat dipenuhi untuk setiap nilai r jika integran pada kedua ruas persamaan sama. Sehingga didapat

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi}\{\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_1)]\}$$
$$= A_2(\lambda)\exp(\gamma_2^+ h_1) + B_2(\lambda)\exp(\gamma_2^- h_1)$$

(3.58)

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (3.27), pada kedalaman h_1, komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke-2 (Persamaan (3.25)), dan komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke-1 (Persamaan (3.36)), harus bernilai sama. Hal ini mengakibatkan

$$\frac{I}{2\pi}\int_0^\infty \{-\lambda\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda\exp(\lambda h_1) - \lambda\exp(-\lambda h_1)]\} J_0(\lambda r)d\lambda$$
$$= \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty [\gamma_2^+ A_2(\lambda)\exp(\gamma_2^+ h_1)$$
$$+ \gamma_2^- B_2(\lambda)\exp(\gamma_2^- h_1)] J_0(\lambda r)d\lambda$$

(3.59)

Persamaan (3.59) hanya dapat dipenuhi untuk setiap nilai r jika integran pada kedua ruas persamaan sama. Sehingga didapat

$$\frac{I}{2\pi}\{-\lambda\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda\exp(\lambda h_1) - \lambda\exp(-\lambda h_1)]\}$$
$$= \frac{1}{\rho_2}[\gamma_2^+ A_2(\lambda)\exp(\gamma_2^+ h_1) + \gamma_2^- B_2(\lambda)\exp(\gamma_2^- h_1)]$$

(3.60)

Dengan membagi Persamaan (3.58) dengan Persamaan (3.60), didapat

$$\rho_1 \frac{\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\exp(\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_1)]}{-\lambda\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda\exp(\lambda h_1) - \lambda\exp(-\lambda h_1)]} = \rho_2 S_2(\lambda)$$

(3.61)

Kalikan $\frac{-\lambda\exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda\exp(\lambda h_1) - \lambda\exp(-\lambda h_1)]}{\exp(-\lambda h_1)}$ pada kedua ruas dari Persamaan (3.61) untuk menghasilkan

$$\rho_1 + \rho_1\theta_1(\lambda)[\exp(\ 2\lambda h_1) + 1]$$
$$= -\rho_2 S_2(\lambda)\lambda + \rho_2 S_2(\lambda)\theta_1(\lambda)[\lambda\ \exp(\ 2\lambda h_1) - \lambda]$$

(3.62)

Dengan mengelompokkan suku-suku yang mengandung $\theta_1(\lambda)$ pada Persamaan (3.62), didapat

$$\theta_1(\lambda)\big[\exp(2\lambda h_1)\left(\rho_1 - \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right) + \left(\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right)\big]$$
$$= -\left(\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right)$$

(3.63)

Bagi kedua ruas pada Persamaan (3.63) dengan $\left(\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right)\left[\exp(2\lambda h_1)\left(\rho_1 - \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right) + \left(\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)\right)\right]$, untuk menghasilkan

$$\theta_1(\lambda) = \frac{-1}{\exp(\ 2\lambda h_1)\dfrac{\rho_1 - \lambda\rho_2 S_2(\lambda)}{\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)} + 1}$$

(3.64)

Potensial listrik pada permukaan bumi $(z = 0)$ diperoleh dengan mensubstitusi $z = 0$ pada Persamaan (3.36), sedangkan $\theta_1(\lambda)$ dihitung dengan menggunakan Persamaan (3.64). Didapat

$$\Phi_1(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^\infty [1 + 2\theta_1(\lambda)]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

(3.65)

BAB 4

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dari bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa potensial listrik pada suatu titik di permukaan bumi yang dialiri arus listrik searah dengan resistivitas pada tiap-tiap lapisan berubah terhadap kedalaman dapat dihitung dengan formula:

$$\Phi(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty [1 + 2\theta_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda$$

dengan

a) I menyatakan besaran arus listrik.

b) $\theta_1(\lambda) = \frac{-1}{\exp(2\lambda h_1)\frac{\rho_1 - \lambda\rho_2 S_2(\lambda)}{\rho_1 + \lambda\rho_2 S_2(\lambda)} + 1}$, h_1 menyatakan ketebalan lapisan pertama media, sedangkan $S_2(\lambda)$ dihitung dengan relasi rekursi yang dinyatakan pada Persamaan (3.56).

c) ρ_i menyatakan resistivitas pada lapisan ke$-i$.

d) $J_0(\lambda r)$ menyatakan fungsi Bessel jenis pertama derajat nol.

DAFTAR REFERENSI

Arfken, G.B., and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists* (4th ed.).San Diego: Academic Press, 1995.

Benenson, W.et al., ed. *Handbook of Physics*. New York: Springer-Verlag, 2002.

Boyce, William E., and Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (6th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc, 1997.

Grant F.S., and G.F. West. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*. New York: McGraw-Hill, 1965.

Halliday, D., Robert Resnick, and Jearl Walker. *Fundamentals of Physics* (7th ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2005.

Kim, H.S., and Lee, K. "Response of a Multilayered Earth with Layers Having Exponentially Varying Resistivities". *Geophysics* **61**:(1996): 180-191.

Koefoed, Otto. *Geosounding Principles, 1 Resistivity Sounding Measurements*. New York: Elsevier Science Publishers B.V., 1979.

Matthews, P.C. *Vector Calculus*. London: Springer-Verlag, 1998.

O'Neil, Peter V. *Beginning Partial Differential Equations*. Canada: John Wiley & Sons, Inc, 1999.

Sharma, Prem V. *Enviromental and Engineering Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Watson, G.N. *A Treatise on the Theory of the Bessel Functions* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

Wrede, R., and M.R. Spiegel. *Advanced Calculus* (2nd ed.). United States of America: McGraw-Hill, 2002.

Lampiran 1. Contoh Perhitungan Potensial Listrik

Contoh Perhitungan Potensial Listrik

Pandang suatu media dengan 2 lapisan:

- Ketebalan lapisan pertama 2 meter,
- Resistivitas pada lapisan pertama 25 Ohm meter
- Resistivitas pada lapisan kedua 15 Ohm meter
- Media dialiri arus listrik searah sebesar 1 A

Dengan menggunakan Maple 11, didapat

- Nilai potensial listrik pada suatu titik di permukaan media yang berjarak $r = 1$ dari pusat arus adalah: $\Phi(1) = \frac{25}{2\pi}\int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{4\exp(4\lambda)+1}\right] J_0(\lambda) d\lambda \cong$ 3.549345838
- Nilai potensial listrik pada suatu titik di permukaan media yang berjarak $r = 2$ dari pusat arus adalah: $\Phi(2) = \frac{25}{2\pi}\int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{4\exp(4\lambda)+1}\right] J_0(2\lambda) d\lambda \cong$ 1.596285834
- Nilai potensial listrik pada suatu titik di permukaan media yang berjarak $r = \frac{1}{2}$ dari pusat arus adalah: $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2\pi}\int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{4\exp(4\lambda)+1}\right] J_0\left(\frac{1}{2}\lambda\right) d\lambda \cong$ 7.517544901