UNIVERSITAS INDONESIA

PERSAMAAN HARGA ZERO-COUPON BOND DENGAN MENGGUNAKAN KERANGKA MODEL HEATH-JARROW-MORTON MULTIFAKTOR MARKOVIAN

TESIS

NOORBAITY
0806420221

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

UNIVERSITAS INDONESIA

PERSAMAAN HARGA ZERO-COUPON BOND DENGAN MENGGUNAKAN KERANGKA MODEL HEATH-JARROW-MORTON MULTIFAKTOR MARKOVIAN

TESIS

diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister science

NOORBAITY
0806420221

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Noorbaity

NPM : 0806420221

Tanda tangan :

Tanggal : 9 Juli 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh

Nama	: Noorbaity
NPM	: 0806420221
Program Studi	: Matematika
Judul Tesis	: Persamaan Harga Zero-Coupon Bond Dengan Menggunakan Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Multifaktor Markovian

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Science pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dra. Bevina Desjwiandra H.MSc.,Ph.D	**( )**
Pembimbing II	: Drs. Gatot F.Hertono MSc.,Ph.D	( )
Penguji	: Dr. Dian Lestari	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 9 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Science pada departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Bevina Desjwiandra H .MSc.Ph.D dan bapak Drs. Gatot F.Hertono MSc.Ph.D, selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran dan tenaga untuk bimbingan penulisan tesis ini. Banyak pengetahuan yang telah saya dapat dari Bapak dan Ibu.
2. Prof.Dr.Djati Kerami selaku ketua Program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI, yang memfaslitasi keperluan selama kuliah dan memberi pengetahuan metode penelitian pada tahap awal penyusunan tesis.
3. Dosen-dosen Program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI, Prof.Dr.Belawati H.Widjadja, Prof.Dr.Djati Kerami, Dra. Bevina Desjwiandra H .MSc.Ph.D, Dr. Sri Mardiyati, M.Kom, Dr. Dian Lestari, Dr. Kiki Ariyanti S, yang telah memberikan tambahan ilmu. Saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan bapak-ibu semua.
4. Bapak Prof. Dr. Johni Wahyuadi M. Soedarsono, DEA selaku direktur Politeknik Negeri Jakarta, yang telah memberikan kesempatan pada penulis untuk kuliah pada program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI.
5. Bapak Sidiq Wacono, ST. MT selaku ketua jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Jakarta yang telah memberikan dukungan moral selama

kuliah pada program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI.

6. Departemen Pendidikan Tinggi yang telah memberikan Bea Siswa Program Pasca Sarjana (BPPS).
7. Suami dan kedua anakku tercinta, Yuri dan Fathya yang telah memberikan semangat dan merelakan kehilangan waktu untuk kebersamaan selama pembuatan tesis ini.
8. Segenap karyawan Departemen Matematika FMIPA-UI, dengan pelayanan yang cukup memuaskan.
9. Teman-teman Program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI. Sari, Endah, Yessi, Frida, Satyo, Ketut, Dizul.
10. Teman-teman pengajar jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Jakarta.

Akhir kata, terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 9 Juli 2010

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

===

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Noorbaity

NPM : 0806420221

Departemen : Matematilka

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Persamaan Harga Zero-Coupon Bond Dengan Menggunakan Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Multifaktor Markovian.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Di buat di : Depok

Pada tanggal : 9 Juli 2010

Yang menyatakan

(Noorbaity)

ABSTRAK

Nama : Noorbaity
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Persamaan Harga Zero-Coupon Bond Dengan Menggunakan Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Multifaktor Markovian

Heath-Jarrow-Morton merupakan suatu kerangka model yang inputnya adalah fungsi volatilitas tingkat bunga. Dengan menggunakan input ini, dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton (HJM) dapat diturunkan model tingkat bunga *short rate* yang dapat bersifat non-Markovian dan harga obligasi tanpa kupon terkait. Implementasi model yang bersifat non-Markovian lebih sulit dilakukan dibanding dengan model yang bersifat Markovian. Pada tesis ini akan ditunjukkan dengan menggunakan fungsi volatitas tingkat bunga Ramaprasad Bhar dan Carl Chiarella (R-C) [Bhar, 2000] sebagai input kerangka model HJM multifaktor dapat dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* berupa sebuah sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, serta persamaan harga obligasi tanpa kupon terkait. Kemudian dengan pemilihan fungsi volatilitas tingkat bunga R-C tertentu akan ditunjukkan bahwa model tingkat bunga *short rate* generalisasi Hull-White serta persamaan harga obligasi tanpa kupon terkait dapat diturunkan dari kerangka model HJM multifaktor Markovian.

Kata kunci : obligasi tanpa kupon, Heath Jarrow Morton, fungsi volatilitas tingkat bunga, Markovian.
xi+92 halaman : 2 gambar
Daftar Pustaka : 15 (1992-2006)

ABSTRACT

Name : Noorbaity
Program Study : Magister Matematika
Title : Zero-Coupon Bond Prices Equation With Heath-Jarrow-Morton Multifactor Markovian Framework

Heath-Jarrow-Morton is a framework with input forward rate volatility function. HJM multifactor framework can derive short rate models and the zero-coupon bond prices that can be non-Markovian. But the implementation of the non-Markovian models is more difficult than Markovian models. With the Ramaprasad Bhar dan Carl Chiarella volatility function of forward interest rate [Bhar, 2000], it will be shown how non-Markovian short rate models can be modeled as a system of Markovian stochastic differential equations and the coresponding zero-coupon bond prices. Further, with certain forward rate volatility function, it is possible to obtain the generalized Hull-White model and the coresponding zero-coupon bond price.

Key words : zero-coupon bond, Heath Jarrow Morton, forward rate volatility function, Markovian.
xi+92 pages : 2 pictures
Bibliography : 15 (1992-2006)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sekuritas pendapatan tetap merupakan instrumen investasi yang memberikan pengembalian (*return*) secara tetap selama periode waktu tertentu yang telah ditetapkan instrumen investasi tersebut. Pada lembaran sekuritas pendapatan tetap tertera nilai nominal (nilai pari) sekuritas, jangka waktu, waktu jatuh tempo dan tingkat bunga (kupon). Yang termasuk dalam sekuritas pendapatan tetap diantaranya Sertifikat Bank Indonesia (SBI) , deposito berjangka dan obligasi (*bond*).

Obligasi merupakan salah satu instrumen investasi yang aman selain logam mulia (emas), karena obligasi adalah surat utang jangka panjang yang biasanya dikeluarkan oleh lembaga pemerintah, perusahaan swasta, atau Badan Usaha Milik Negara. Contoh obligasi di Indonesia yaitu, Obligasi Ritel Indonesia (ORI) dan Surat Utang Negara (SUN).

Obligasi kupon (*coupon bond*) merupakan salah satu jenis obligasi yang diperdagangkan di pasar modal dengan tingkat bunga tetap selama masa berlaku obligasi. Insentif menarik berupa tingkat suku bunga (disebut juga kupon obligasi) adalah untuk menarik minat para investor . Sehingga biasanya perusahaan harus memberikan tingkat bunga yang relatif lebih besar dari pada tingkat suku bunga perbankan. Misal harga pembelian obligasi pemerintah adalah Rp. 100 juta untuk masa 3 tahun dengan kupon sebesar 12%. Ini berarti bahwa pemilik obligasi akan memperoleh Rp. 12 juta setiap tahun selama 3 tahun sampai obligasi tersebut jatuh tempo. Pada waktu jatuh tempo, penerbit obligasi akan membayar modal kepada pemilik obligasi Rp.100 juta.

Zero-coupon bond (ZCB) disebut juga obligasi tanpa kupon adalah obligasi yang tidak memberikan pembayaran kupon secara periodik kepada pemegang obligasi dan dijual di bawah nilai nominal yang tertera di kontrak obligasi. Jadi keuntungan yang diperoleh seorang pembeli *zero-coupon bond* hanya didapat dari selisih antara harga obligasi tersebut dengan nilai nominalnya. Selisih harga obligasi dengan nilai nominal terjadi karena adanya bunga.

Sehingga dapat dikatakan bahwa harga *zero-coupon bond* dipengaruhi oleh tingkat bunga yang berlaku di pasar. Harga *zero- coupon bond* cenderung untuk menjadi lebih tinggi ketika tingkat suku bunga rendah dan cenderung untuk menjadi lebih rendah ketika tingkat suku bunga tinggi. Namun tingkat bunga yang berlaku di pasar berubah-ubah secara tidak pasti. Oleh karena itu dibutuhkan model yang dapat menggambarkan perilaku perubahan tingkat suku bunga agar dapat diketahui perkiraan harga *zero-coupon bond* setelah pembelian sebelum waktu jatuh tempo. Dengan mengetahui perkiraan harga *zero-coupond bond* setelah pembelian, pemilik *zero-coupon bond* diharapkan dapat memutuskan untuk tetap memiliki hingga waktu jatuh tempo atau menjualnya sebelum waktu jatuh tempo. Pergerakan harga *zero-coupon bond* dapat diestimasi dengan menggunakan persamaan harga *zero-coupon bond*.

Persamaan harga *zero-coupon bond* dapat diturunkan dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton (Heath-Jarrow-Morton Framework). Persamaan kerangka model Heath-Jarrow-Morton (HJM) dalam bentuk umum, menggunakan n proses Wiener yang saling bebas. Kerangka model ini disebut kerangka model HJM multifaktor. Untuk $n = 1$, kerangka model HJM disebut kerangka model HJM satu faktor [Sen, 2000].

Kerangka model HJM membahas pergerakan *forward rate*. Input kerangka model HJM dalam menurunkan persamaan harga *zero-coupon bond* adalah nilai awal kurva *forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate.* HJM disebut sebagai kerangka model karena dengan menentukan suatu fungsi volatilitas akan menghasilkan model tingkat bunga tertentu dan persamaan harga *ZCB* terkait. Model tingkat bunga *short rate* yang diturunkan dari kerangka model HJM dapat bersifat non-Markovian. Dengan sifat non-Markovian maka implementasi model HJM mengandung perhitungan yang tidak sederhana. Disisi lain model tingkat bunga *short rate* dari kerangka model HJM yang bersifat Markovian akan memiliki perhitungan yang lebih sederhana, sehingga timbul pertanyaan bagaimana spesifikasi fungsi volatilitas *forward rate* yang dapat mentransformasikan kerangka model HJM sehingga bersifat Markovian. Untuk kerangka model HJM satu faktor, salah satu fungsi volatilitas *forward rate* yang dapat mentransformasikan kerangka model HJM bersifat Markovian adalah fungsi volatilitas Ramaprasad-Chiarella (R-C) [Bhar, 2000]. Dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* (R-C) ini akan dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* dengan sistem persamaan diferensial stokastik Markovian serta persamaan harga *ZCB* terkait.

Pada tesis ini akan dikaji penggunaan fungsi volatilitas *forward rate* R-C dalam menurunkan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM satu faktor Markovian. Kemudian dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C pada kerangka model HJM multifaktor akan diturunkan juga model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dengan menentukan suatu fungsi volatilitas tertentu dapat diturunkan model tingkat bunga *short rate* generalisasi Hull-White dan persamaan harga *zero coupon bond* yang terkait.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang akan dibahas pada tesis ini adalah

1. Bagaimana proses penurunan kerangka model HJM satu faktor dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C sehingga dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, dan persamaan harga *ZCB* terkait.
2. Bagaimana mentransformasikan kerangka model HJM multifaktor non-Markovian sehingga dapat dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, dan persamaan harga *ZCB* terkait.
3. Bagaimana fungsi volatilitas *forward rate* dari fungsi volatilitas *forward rate* R-C yang dapat menentukan model tingkat bunga *short rate* generalisasi Hull-White serta persamaan harga *zero-coupon bond* yang terkait.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian adalah :

1. Menjelaskan proses penurunan kerangka model HJM satu faktor dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C sehingga dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, dan persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.
2. Akan ditunjukkan bahwa dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C sebagai input pada kerangka model HJM multifaktor maka dapat dihasilkan suatu model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait.
3. Dengan pemilihan fungsi volatilitas *forward rate* R-C tertentu akan ditunjukkan bahwa model tingkat bunga *short rate* generalisasi Hull-White dan persamaan harga *ZCB* terkait dapat diturunkan dari kerangka model HJM multifaktor Markovian.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian adalah memberi informasi bahwa kerangka model HJM multifaktor Markovian dapat digunakan untuk menurunkan model tingkat bunga *short rate* dan menentukan harga produk turunan tingkat bunga seperti opsi , obligasi dan lain-lain.

1.5 Pembatasan Masalah

Harga *zero-coupon bond* yang dihasilkan memenuhi asumsi

1. Kondisi *no-arbitrage*.
2. Kondisi *risk-neutral*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tesis ini akan terdiri dari 5 bab, yaitu :

BAB I : Pendahuluan

Menjelaskan tentang latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, manfaat peneltian, pembatasan masalah dan sistimatika penulisan.

BAB II : Landasan Teori

Bab ini menjelaskan landasan teori untuk penulisan tesis, yaitu teori probabilitas kontinu, proses Markovian, proses Wiener, proses Ito. Kemudian dibahas juga mengenai *zero-coupon bond* dan tingkat bunga serta pembahasan terakhir mengenai *equivalent martingale measure*.

BAB III : Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Satu Faktor Markovian

Bab ini membahas harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton satu faktor dan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton satu faktor Markovian

BAB IV : Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Multi Faktor Markovian

Bab ini membahas harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton multi faktor, persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton multi faktor Markovian dan terakhir dibahas mengenai contoh model tingkat bunga *short rate* Markovian serta persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.

BAB V : Penutup

Berisi kesimpulan dan saran dari keseluruhan pembahasan tesis.

BAB 2
STUDI LITERATUR

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori dasar yang diperlukan pada pembahasan bab-bab berikutnya. Pembahasan akan meliputi teori probabilitas kontinu, proses Wiener, proses Ito, proses Markovian, *zero-coupon bond* dan tingkat bunga serta terakhir akan dibahas tentang *equivalent martingale measure*.

2.1 Teori Probabilitas Kontinu

Pada sub bab ini akan dijelaskan definisi dasar dari konsep teori probabilitas dengan ruang sample kontinu yang merupakan landasan penting untuk mempelajari matematika keuangan. Beberapa hal yang akan dibahas, diantaranya adalah ruang probabilitas, variabel random, proses stokastik, filtrasi serta proses stokastik yang *adapted*.

Definisi 2.1.1 : [Shreve, 1997]

Suatu ruang probabilitas yang terkait dengan suatu percobaan random adalah *triple* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ dimana

1. Ω adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan random dan disebut ruang sampel.
2. $\mathcal{F}$ adalah koleksi subset-subset dari Ω yang mempunyai struktur σ *-field* :
   a. $\phi \in \mathcal{F}$.
   b. Jika $A \in \mathcal{F}$ maka komplemen A , $A^c \in \mathcal{F}$.
   c. Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. P adalah fungsi yang menghubungkan setiap himpunan $A \in \mathcal{F}$ dengan suatu bilangan $\mathrm{P}(A)$ yang memenuhi sifat berikut :
   a. $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.
   b. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
   c. $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ untuk $A_1, A_2, \ldots$ di $\mathcal{F}$ yang *mutually exclusive*,

   yaitu $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$.

Elemen-elemen dari σ *-field* $\mathcal{F}$ disebut kejadian-kejadian (*events*). Setiap himpunan anggota $\mathcal{F}$ disebut himpunan *measurable*. Fungsi P disebut *probability measure* [Shreve, 1997].

Sebelum mendefinisikan tentang proses stokastik, berikut ini akan dijelaskan lebih dahulu pengertian mengenai variabel random.

Suatu variabel random X pada $(\Omega, \mathcal{F})$ adalah suatu fungsi $X : \Omega \to R$ yang $\mathcal{F}$ *-measurable* , yaitu untuk setiap $x \in R$ maka $\{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$ dimana R adalah himpunan bilangan riil [Klebaner,1999].

Selanjutnya akan diberikan definisi proses stokastik.

Definisi 2.1.3 : [Oksendal, 1998]

Suatu proses stokastik adalah himpunan variabel random $\{X(t), t \in T\}$ yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dan diasumsikan bernilai riil.

T disebut himpunan parameter dan dapat dinyatakan sebagai $T = R_+ = [0, \infty)$ atau $T = [a, b] \subset R_+$, dengan R_+ adalah bilangan riil non-negatif.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\omega \in \Omega$, Ω tetap, maka fungsi

$$t \to X(t, \omega);\ t \in T$$

disebut suatu lintasan dari $X(t)$. Sedangkan untuk setiap $t \in T$, t tetap maka seperti telah dijelaskan sebelumnya, fungsi

$$\omega \to X(t, \omega),\ \omega \in \Omega$$

disebut suatu variabel random [Oksendal, 1998].

Pembahasan selanjutnya adalah mengenai filtrasi. Definisikan $\mathcal{F}_t$ adalah σ *-field* yang dibangun oleh proses stokastik sampai waktu t . Dengan kata lain $\mathcal{F}_t$ adalah informasi yang diperoleh pengamat sampai waktu t . Dengan berlalunya waktu maka informasi yang diperoleh seorang pengamat akan semakin rinci. Untuk memodelkan arus informasi tentang kejadian digunakan definisi filtrasi seperti yang dinyatakan berikut ini.

Definisi 2.1.2 : [Klebaner, 1999]

Suatu filtrasi F adalah himpunan dari σ *-field* $\mathcal{F}_t$, yaitu

$$\mathrm{F}=\left\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,...,\mathcal{F}_t,...,\mathcal{F}_T\right\}, \quad \mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_{t+1}.$$

Definisi di atas berarti dengan semakin bertambahnya waktu maka informasi yang diperoleh pengamat semakin lebih rinci.

Pembahasan terakhir adalah mengenai proses stokastik yang *adapted.*

Definisi 2.1.4 : [Klebaner, 1999]

Suatu proses stokastik disebut $\left\{X(t),0\le t\le T\right\}$ disebut *adapted* pada filtrasi $\mathrm{F}=\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{0\le t\le T}$ jika untuk setiap t , $0\le t\le T$, $X(t)$ adalah $\mathcal{F}_t$ *-measurable*.

Setelah membahas teori probabilitas kontinu maka pada sub bab berikut ini akan dibahas suatu proses atau sifat yang menjadi topik utama pembahasan tesis ini, yaitu proses Markovian.

2.2 Proses Markovian

Suatu variabel random yang memenuhi proses Markov atau proses Markovian maka hanya nilai variabel random saat ini (*present value*)yang relevan untuk memprediksi nilai tersebut di masa depan (*future value*). Sedangkan nilai-nilai variabel random di masa lalu dan bagaimana nilai variabel random saat ini diperoleh dari masa lalu tidak relevan.

Sebagai contoh misal harga *ZCB* saat ini adalah 1 juta rupiah. Maka jika harga *ZCB* mengikuti proses Markov, prediksi untuk harga *ZCB* di masa depan tidak memperhatikan harga *ZCB* satu minggu yang lalu, satu bulan yang lalu atau satu tahun yang lalu. Informasi yang relevan harga *ZCB* saat ini yaitu 1 juta rupiah. Namun prediksi harga *ZCB* di masa depan tidak dapat ditentukan dan harus dinyatakan dalam distribusi probabilitas. Secara matematis definisi proses Markov adalah sebagai berikut .

Definisi 2.2.1: [Klebaner, 1999]

Suatu proses stokastik $\left\{X(t),t\in T\right\}$ adalah suatu proses Markov jika untuk sebarang t dan $s > 0$ maka distribusi bersyarat $X(t+s)$ jika diketahui $\mathcal{F}_t$ adalah sama dengan distribusi bersyarat $X(t+s)$ jika diketahui $X(t)$, jadi

$$\Pr\left\{X(t+s)) \le y \middle| \mathcal{F}_t\right\} = \Pr\left\{X(t+s)) \le y \middle| X(t)\right\}, \tag{2.2.1}$$

dimana $\mathcal{F}_t$ menyatakan σ *-field* yang dibangun oleh proses stokastik sampai waktu t.

Setelah membahas proses Markovian, pembahasan selanjutnya akan mengenai proses Wiener yang merupakan proses utama dalam perhitungan kalkulus yang melibatkan proses stokastik kontinu.

2.3 Proses Wiener

Proses penurunan persamaan pada tesis ini menggunakan kalkulus stokastik waktu kontinu sebagai alat bantu pemodelan keuangan (*financial modelling*). Salah satu keutamaan dasar untuk membangun model yang memenuhi proses stokastik waktu kontinu dan berdistribusi normal adalah proses Wiener. Oleh karena itu berikut ini akan dibahas definisi dan konsep dari proses Wiener.

Definisi 2.3.1 : [Glasserman, 2003]

Suatu Brownian motion standard pada $[0,T]$ adalah suatu proses stokastik $\{W(t), 0 \le t \le T\}$ yang memenuhi sifat berikut :

i. $W(0) = 0$.

ii. $W(t)$ adalah suatu fungsi kontinu pada $[0,T]$.

iii. Untuk setiap $0 \le t_0 < t_1 ... < t_n \le T$ dan untuk setiap n, pertambahan $W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ saling bebas.

iv. Untuk setiap $0 \le s < t \le T$, $\left[W(t) - W(s)\right]$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $(t-s)$. Dengan kata lain $\left[W(t) - W(s)\right] \sim N(0, t-s)$.

Sebagai akibat dari sifat (i) dan (iv) maka $W(t) \sim N(0,t)$ untuk $0 < t \le T$.

Brownian motion disebut juga sebagai proses Wiener. Untuk pembahasan selanjutnya pada tesis ini Brownian motion akan disebut dengan proses Wiener.

Untuk konstanta α dan $\sigma > 0$, suatu proses stokastik $\{X(t), 0 \le t \le T\}$ disebut suatu proses Wiener dengan koefisien *drift* α dan koefisien difusi σ^2 jika

$$\frac{X(t)-\alpha t}{\sigma}$$

adalah suatu proses Wiener standard . Jadi

$$\frac{X(t)-\alpha t}{\sigma} = W(t).$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$X(t) = \alpha t + \sigma W(t). \tag{2.3.1}$$

Jika $\Delta X(t)$ menyatakan perubahan $X(t)$ selama interval waktu Δt, maka dari persamaan (2.3.1) didapat

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \{\alpha(t+\Delta t) - \sigma W(t+\Delta t)\} - \{\alpha t + \sigma W(t)\}.$$

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \{\alpha(t+\Delta t) - \alpha t\} + \{\sigma W(t+\Delta t) - \sigma W(t)\}.$$

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \alpha\{(t+\Delta t) - t\} + \sigma\{W(t+\Delta t) - W(t)\}.$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\Delta X(t) = \alpha \Delta t + \sigma \Delta W(t). \tag{2.3.2}$$

$$E[\Delta X(t)] = E[\alpha \Delta t + \sigma \Delta W(t)].$$

$$E[\Delta X(t)] = E[\alpha \Delta t] + E[\sigma \Delta W(t)].$$

$$E[\Delta X(t)] = \alpha \Delta t + \sigma E[\Delta W(t)].$$

Karena $\Delta W(t) \sim N(0, \Delta t)$ maka

$$E[\Delta X(t)] = \alpha \Delta t \text{ atau } \alpha = \frac{E[X(t+\Delta t) - X(t)]}{\Delta t}.$$

Jadi α adalah ekspektasi persatuan waktu (*drift rate*) untuk perubahan proses Wiener dengan koefisien *drift* α .

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa σ^2 adalah variansi persatuan waktu untuk proses Wiener dengan koefisien *drift* α .

Variansi dari persamaan (2.3.2) adalah

$$Var[\Delta X(t)] = Var[\alpha \Delta t + \sigma \Delta W(t)].$$

Karena $\alpha\Delta t$ konstan maka $Var\left[\alpha\Delta t\right]=0$. Sehingga $Var\left[\Delta X(t)\right]=\sigma^2 Var\left[\Delta W(t)\right]$. Kemudian $\Delta W(t) \sim N(0,\Delta t)$ maka

$$Var\left[\Delta X(t)\right]=\sigma^2\Delta t \text{ atau } \sigma^2=\frac{Var\left[X(t+\Delta t)-X(t)\right]}{\Delta t}.$$

Jadi σ^2 adalah variansi persatuan waktu (*variance rate*) untuk perubahan proses Wiener dengan koefisien *drift* α.

Jika $\Delta t \to 0$ maka persamaan (2.3.2) dapat ditulis sebagai

$$dX(t)=\alpha dt+\sigma dW(t). \tag{2.3.3}$$

Perhatikan kedua suku ruas kanan pada persamaan (2.3.3). Suku pertama αdt menyatakan bahwa t memiliki *drift rate* sebesar α. Jika suku ke dua $\sigma dW(t)$ pada persamaan tersebut dihilangkan, maka persamaan akan menjadi $dX(t)=\alpha dt$, sehingga bila diintegralkan akan diperoleh hasil $X(t)=X(0)+\alpha t$, dengan $X(0)$ adalah nilai X pada saat $t=0$. Dalam periode waktu sepanjang T, variabel X bertambah sebesar αT. Suku ke dua pada persamaan (2.3.3), $\sigma dW(t)$ menyatakan guncangan atau variabilitas dari perubahan X yang besarnya adalah σ kali dari perubahan proses Wiener standard .

Setelah pembahasan proses Wiener, berikut ini akan dibahas mengenai proses Ito.

2.4 Proses Ito

Pembahasan ini penting mengingat kerangka model Heath-Jarrow Morton diturunkan dari suatu persamaan yang memenuhi proses Ito. Dibawah ini akan diberikan definisi proses Ito.

Definisi 2.4.1 : [Klebaner, 1999]

Misal $\boldsymbol{W}(t)=\left(W_1(t),W_2(t),...,W_n(t)\right)^t$ adalah proses Wiener berdimensi n dengan masing-masing elemen saling bebas dan $\mathcal{F}_t$ adalah σ-field yang dibangun oleh $W(s), s\le t$. Suatu proses Ito mempunyai bentuk

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \alpha(s)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s)dW_i(s),\ 0\le t\le T, \tag{2.4.1}$$

dimana

- $X(0)$ adalah $\mathcal{F}_0$*-measurable*.
- proses $\alpha(t)$ dan untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, $\sigma_i(t)$ adalah $\mathcal{F}_t$*- adapted* .
- $\int_0^T |\alpha(t)| dt < \infty$ a.s dan $\int_0^T \sigma_i^2(t) dt < \infty$ a.s, $i = 1, 2, ..., n$.

Proses $X(t)$ dapat dinyatakan dalam persamaan dfferential stokastik pada $\left[0, T\right]$ sebagai

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t) dW_i(t), 0 \le t \le T. \tag{2.4.2}$$

Proses α dan proses σ_i, $i = 1, 2, ..., n$ pada persamaan di atas dapat tergantung pada $X(t)$ atau $W(t)$, yang dinyatakan sebagai $\alpha(t, X(t))$ dan $\sigma_i(t, X(t))$, $i = 1, 2, ..., n$. Variansi dari $dX(t)$ adalah $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t)dt$ [Baxter, 1996].

Dalam ilmu ekonomi fungsi σ disebut juga fungsi volatilitas yang merupakan ukuran ketidakpastian tingkat pengembalian (*return*) dari suatu asset [Hull,2006]. Ukuran ini dinyatakan dengan standar deviasi perubahan harga suatu asset. Pada pembahasan kerangka model Heath Jarrow Morton, volatilitas *forward rate* merupakan ukuran ketidakpastian pergerakan *forward rate*, dimana volatilitas merupakan fungsi waktu, waktu jatuh tempo dan *short rate* atau *forward rate*. Pembahasan mengenai hal ini akan dijumpai pada sub sub bab 3.1.1.

Sebelum membahas proses Ito , berikut ini akan dibahas mengenai persamaan diferensial stokastik yang berperan penting dalam proses penurunan pesamaan ditesis ini. Persamaan dferensial digunakan untuk memodelkan pergerakan suatu sistem. Suatu persamaan diferensial dengan variabel random disebut persamaan diferensial stokastik, yang penjelasan lengkapnya akan diberikan pada penjelasan berikut.

Misal $W(t)$, $t \ge 0$ adalah suatu proses Wiener . Suatu persaman yang dinyatakan sebagai

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \tag{2.4.3}$$

disebut suatu persamaan diferensial stokastik [Klebaner, 1999].

Kemudian persamaan diferensial stokastik untuk n proses Wiener dinyatakan dengan penjelasan berikut. Misal $\boldsymbol{W}(t) = \left(W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t)\right)^t$ adalah proses Wiener berdimensi n dengan masing-masing elemen saling bebas maka persamaan diferensial stokastik yang dinyatakan dalam bentuk n proses Wiener dapat ditulis sebagai [Klebaner, 1999]

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t, X(t))dW_i(t)$$

(2.4.4)

dengan solusi $X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s, X(s))ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s, X(s))dW_i(s)$.

Proses $X(t)$ adalah $\mathcal{F}_t$*-measurable* [Shreve, 1997].

Teorema berikut menyatakan hubungan antara solusi persamaan (2.4.3) dengan proses Markovian.

Teorema 2.4.1 : [Shreve,1997]
Solusi persamaan diferensial stokastik adalah proses Markov .

Berikutnya akan dibahas mengenai lemma Ito yang berperan dalam proses penurunan persamaan kerangka model HJM.

Lemma 2.4.1 (Lemma Ito): [Glasserman,2003]
Misalkan G merupakan fungsi kontinu hingga turunan kedua dan misalkan $X(t)$ adalah proses Ito yang didefinisikan sebagai berikut :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s)dW_i(s),\ 0 \le t \le T .$$

Maka $G(X,t)$ juga merupakan proses Ito dan

$$dG(X,t) = \left(\frac{\partial G(X,t)}{\partial t} + \alpha(X,t)\frac{\partial G(X,t)}{\partial X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(X,t)\frac{\partial^2 G(X,t)}{\partial X^2} \right)dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X,t)\frac{\partial G(X,t)}{\partial X} dW_i(t) . \qquad (2.4.5)$$

Setelah membahas proses Ito dan lemma Ito, selanjutnya akan dijelaskan teori yang juga berhubungan dengan topik utama tesis adalah *zero-coupon bond* dan tingkat bunga. Pembahasan teori ini penting, mengingat isi dari tesis ini membahas mengenai persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton yang diasumsikan sebagai suatu persamaan *forward rate*. *Forward rate* merupakan salah satu jenis tingkat bunga yang akan dibahas pada sub bab ini.

2.5 *Zero-coupon Bond* Dan Tingkat Bunga

Pada sub bab ini pertama-tama akan dibahas tentang *zero-coupon bond*, yang definisinya dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 : [Bjork, 2003]

Suatu *zero-coupon bond* (*ZCB*) dengan waktu jatuh tempo T adalah suatu kontrak yang hanya menjamin pembayaran satu satuan mata uang kepada pemegang *ZCB* pada waktu T. Harga *ZCB* pada waktu t dengan waktu jatuh tempo T dinyatakan sebagai $B(t,T)$, dimana $0 \le t \le T$. Jelas $B(T,T) = 1, \forall T$.

Selain asumsi untuk harga *zero-coupon bond* yang telah disebutkan pada pembatasan masalah, asumsi berikut juga diberlakukan untuk harga *zero-coupon bond.*

Asumsi 2.5.1 : [Bjork, 2003]

Kita asumsikan 3 kondisi berikut :

1. Terdapat *ZCB* dengan waktu jatuh tempo T untuk setiap $T > 0$.
2. Relasi $B(t,t) = 1$ berlaku untuk setiap t.
3. Untuk setiap t yang tetap, harga *ZCB,* $B(t,T)$ adalah *differentiable* terhadap waktu jatuh tempo, T.
4. $B(t,T) > 0 \forall T$ [Heath,1992].

Harga *ZCB* $B(t,T)$ merupakan suatu proses stokastik dengan dua variabel waktu t dan T. Untuk suatu nilai t yang tetap, $B(t,T)$ adalah fungsi dari T. Fungsi ini memberikan harga *ZCB* pada semua waktu jatuh tempo yang mungkin. Grafik dari fungsi ini disebut kurva harga *ZCB* pada waktu t, t tetap. Grafik ini adalah sebuah grafik *smooth* bernilai riil, yaitu untuk setiap t, $B(t,T)$ bersifat *differentiable* terhadap T. Sifat *smooth* ini sesuai dengan asumsi ketiga di atas. Kemudian untuk waktu jatuh tempo T yang tetap, $B(t,T)$ merupakan suatu proses stokastik. Proses ini memberikan harga *ZCB* dengan jatuh tempo T yang tetap pada waktu t yang berbeda-beda dan lintasan proses ini tidak teratur.

Untuk menjelaskan asumsi kedua, akan dijelaskan lebih dahulu pengertian *arbitrage***.** Penjelasan ini perlu mengingat kondisi *no-arbitrage* diperlukan dalam penurunan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM. Kondisi ini juga berhubungan dengan *equivalent martingale measure* yang akan dibahas pada sub bab 2.6 .

Arbitrage adalah jenis transaksi dimana seorang investor mencari keuntungan tanpa adanya investasi dengan cara menjual aset yang sama pada dua harga yang berbeda pada waktu yang bersamaan. Jelas, transaksi tersebut melibatkan pembelian aset dengan harga lebih rendah dan menjualnya dengan harga lebih tinggi [Neftci, 2000].

Perhatikan asumsi kedua pada asumsi 2.5.1. Asumsi kedua $B(t,t)=1$, adalah untuk menghindari *arbitrage*. Jika $B(t,t)<1$ maka harga *ZCB* pada waktu t yang jatuh tempo pada hari yang sama, t, adalah lebih kecil dari 1. Sehingga para pelaku *arbitrage* akan membeli *ZCB* ini pada hari yang sama dengan waktu jatuh tempo dan mendapatkan 1 satuan mata uang.

Perubahan harga *zero-coupon bond* sangat dipengaruhi oleh perubahan tingkat bunga. Bunga merupakan sejumlah uang, selain dari pokok utang, yang harus dibayarkan oleh pihak peminjam dana sebagai kompensasi kepada pihak yang meminjamkan dana. Tingkat bunga adalah perbandingan besarnya bunga dengan besarnya pokok utang . Pada umumnya ukuran tingkat bunga yang dikenakan kepada peminjam dana bergantung pada faktor masa jatuh tempo pembayaran pinjaman, atau yang dikenal dengan istilah *maturity date*.

Terdapat beberapa jenis tingkat bunga, yaitu spot *rate, short rate, forward rate, instantaneous forward rate* dan *instantaneous short rate*. *Spot rate* $s(t)$ adalah tngkat bunga yang dikenakan mulai saat ini hingga saat jatuh tempo t.

Short rate $r(t)$ adalah tingkat bunga yang berlaku pada suatu interval waktu t. *Forward rate* $f(t_1,t_2)$ dengan $t_1 < t_2$, t_1 dan t_2 merupakan waktu di masa yang akan datang, adalah tingkat bunga yang dikenakan pada uang yang dipinjam pada waktu t_1 dan dibayar pada waktu t_2 dan besarnya sesuai dengan kesepakatan yang dibuat saat ini. Pembahasan tentang *instantaneous forward rate* dan *instantaneous short rate* akan diberikan pada bagian akhir sub bab ini.

Hubungan antara *spot rate*, $s(t)$, dengan *short rate*, $r(t)$, dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\{1+s(t)\}^t = \{1+r(0)\}\{1+r(1)\}...\{1+r(t-1)\}.$$

Kemudian *spot rate*, $s(t)$, dan *forward rate*, $f(t_1,t_2)$, dapat dihubungkan dengan persamaan di bawah ini

$$\{1+s(t)\}^t = \{1+s(u)\}^u\{1+f(u,t)\}^{t-u}, \text{ dengan } u < t.$$

Sedangkan hubungan antara *forward rate*, $f(t_1,t_2)$,dan *short rate*, $r(t)$, adalah

$$\{1+f(u,t)\}^{t-u} = \{1+r(u)\}\{1+r(u+1)\}...\{1+r(t-1\}$$ [Luenberger, 1998].

Kenyataannya tingkat bunga berubah-ubah secara tidak pasti. Tidak ada yang dapat menduga besarnya tingkat bunga di masa yang akan datang. Untuk itu pada pembahasan di bab 3 tingkat bunga akan dimodelkan dengan suatu variabel yang mememenuhi proses stokastik.

Pembahasan selanjutnya mengenai tingkat bunga akan dijelaskan secara matematis melalui definisi *bank account.* Ketika kita menyimpan sejumlah uang pada *bank account* maka diharapkan jumlah uang tersebut akan bertambah sesuai dengan berjalannya waktu. Investasi melalui *bank account* merupakan investasi tanpa risiko dengan *risk-free rate*. Definisi *bank account* ini penting karena akan digunakan sebagai *numeraire* untuk perhitungan harga relatif yang pembahasannya akan dijelaskan pada sub bab 2.6.

Definisi 2.5.2 *Bank Account* : [Brigo, 2006]

Misal $\beta(t)$ adalah nilai suatu *bank account* pada waktu $t \geq 0$, dengan asumsi

$\beta(0)=1$, maka perubahan nilai *bank account* dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial berikut

$$d\beta(t)=r(t)\beta(t)dt, \qquad (2.5.1)$$

dengan solusi

$$\beta(t)=e^{\int_0^t r(s)ds}. \qquad (2.5.2)$$

Definisi di atas menyatakan bahwa dengan investasi satu satuan mata uang pada waktu 0 akan menghasilkan sejumlah nilai yang dinyatakan pada persamaan (2.5.2) pada waktu t, dimana $r(t)$ adalah *instantaneous short rate* pada waktu t.

Jenis tingkat bunga yang akan dibicarakan pada tesis ini dinyatakan pada definisi berikut yang berperan dalam penurunan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model HJM.

Definisi 2.5.3 :

1. ***Instantaneous forward rate*** $f(t,T)$ adalah tingkat bunga yang dikenakan pada uang yang dipinjam pada waktu t dan dibayar pada waktu dimasa T yang akan datang dan didefinisikan sebagai

   $$f(t,T)=-\frac{\partial B(t,T)}{\partial T}. \qquad (2.5.3)$$

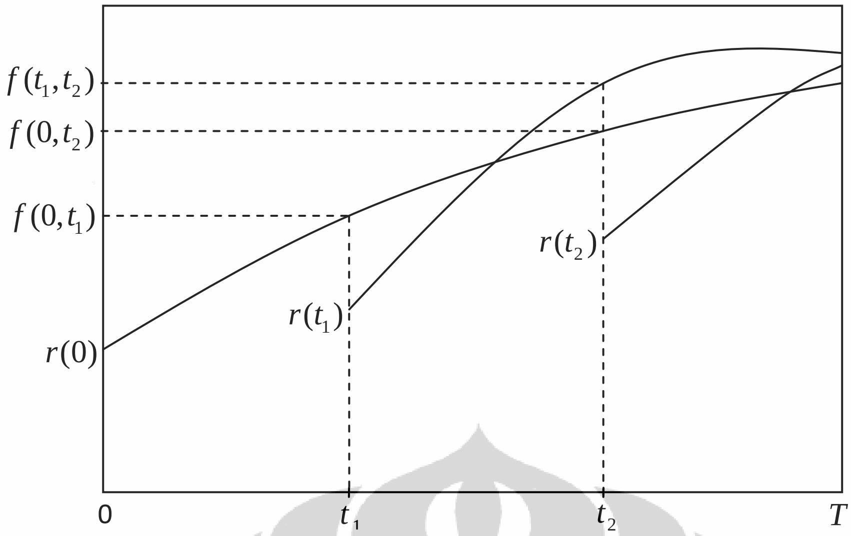
   Dari persamaan di atas maka diperoleh

   $$B(t,T)=\exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\} \text{ [Bjork, 2003].} \qquad (2.5.4)$$

2. ***Instantaneous short rate*** pada waktu t, $r(t)$ adalah tingkat bunga yang dikenakan pada pinjaman diwaktu t.

   $$r(t)=f(t,t) \text{ [Glasserman, 2003].} \qquad (2.5.5)$$

Pada pembahasan selanjutnya di tesis ini instantaneous *forward rate* akan disebut sebagai *forward rate* dan instantaneous *short rate* akan disebut sebagai *short rate*. Hubungan antara *short rate*, $r(t)$, dan pergerakan kurva *forward rate*, $f(t,T)$ dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 2.5.1.Pergerakan kurva *forward rate*.
Pada waktu 0 kurva *forward rate* $f(0,.)$ didefinisikan untuk waktu jatuh tempo $[0,T]$ dan *short rate* $r(0) = f(0,0)$. Pada $t > 0$ kurva *forward rate* $f(t,.)$ didefinisikan untuk waktu jatuh tempo $[t,T]$ dan *short rate* $r(t) = f(t,t)$.
[Sumber : Monte Carlo Methods in Financial Engineering, 2003]

Pada pembatasan masalah yang diberikan di bab 1 dikatakan bahwa persamaan harga *zero-coupon bond* yang dihasilkan diasumsikan memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk-neutral*. Teori selanjutnya akan membahas hal yang berhubungan dengan kedua kondisi tersebut.

2.6 *Equivalent Martingale Measure*

Sebelum membahas mengenai *Equivalent Martingale Measure* atau *measure martingale* yang ekivalen, berikut ini akan diberikan terlebih dahulu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup untuk suatu model *term structure* memenuhi kondisi *no-arbitrage*.

Teorema 2.6.1 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) : [Shreve, 1997]
Suatu model *term structure* adalah *no-arbitrage* jika dan hanya jika ada suatu *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* P sedemikian sehingga untuk setiap $T \in [0,\tau]$, proses $\dfrac{B(t,T)}{\beta(t)}$ adalah *martingale* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Term structure yang disebut pada teorema di atas dinyatakan dengan definisi berikut.

Definisi 2.6.1 : [Shreve, 1997]

Model *term structure* adalah sebarang model matematik yang merupakan proses-proses stokastik $A(t,T)$, untuk setiap T, $T \in [0,\tau]$ dan $0 \le t \le T$.

Proses $\dfrac{B(t,T)}{\beta(t)}$ yang disebut pada teorema 2.6.1 menyatakan harga *ZCB* $B(t,T)$ pada saat t dengan waktu jatuh tempo T dalam satuan *numeraire* $\beta(t)$. Suatu *numeraire*.adalah suatu aset bernilai positif dimana semua aset lainnya dinilai berdasarkan *numeraire* yang dipilih tersebut [Shreve,1997]. Jika $\dfrac{B(t,T)}{\beta(t)} = Z(t,T)$ maka $Z(t,T)$ adalah harga relatif *bond* pada saat t dengan waktu jatuh tempo T. Kemudian dengan menggunakan nilai *bank account* (lihat pembahasan pada sub bab. 2.5) sebagai *numeraire* maka $Z(t,T)$ yaitu harga relatif *bond* pada saat t dengan waktu jatuh tempo T dapat dinyatakan dengan persamaan [Sen, 2000]

$$Z(t,T) = \frac{B(t,T)}{\beta(t)} = e^{-\int_0^t r(s)ds} B(t,T). \tag{2.6.1}$$

Pembahasan berikutnya tentang *martingale* yang disebut pada teorema 2.6.1.

Definisi 2.6.2 : [Glasserman,2003]

Suatu proses *adapted* bernilai riil $\{X(t), t \ge 0\}$ adalah suatu *martingale* jika

i. $E\left[|X(t)|\right] < \infty$ untuk setiap $t \ge 0$;

ii. $E\left[X(t) | \mathcal{F}_s\right] = X(s)$ untuk setiap $0 \le s < t < \infty$.

Perhatikan persamaan diferensial stokastik (2.4.4) . Solusi PDS adalah *martingale* jika koefisien *drift* persamaan tersebut adalah nol. Dengan kata lain, [Baxter, 1996] solusi PDS $dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t, X(t))dW_i(t)$ adalah *martingale* jika $\alpha(t, X(t)) = 0$, $\forall t$ dan persamaan (2.4.4) dapat ditulis kembali sebagai $dX(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t, X(t))dW_i(t)$.

Teorema berikut merupakan konsep *martingale* yang berguna untuk membuat model keuangan.

Teorema 2.6.2 *Exponential martingale* : [Sen,2000]

Jika $dX(t) = X(t)\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t)dW_i(t)$. (2.6.2)

dan $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)\right] < \infty$ untuk setiap $t \le T$, dimana

- $\sigma(t) = \left(\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t)\right) \in R^n$,

  $R^n = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), x_i \in R, i = 1, 2, ..., n\right\}$, R himpunan bilangan riil.
- $\sigma_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ adalah $\mathcal{F}_t$ - *adapted.*
- $W(t) = \left(W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t)\right)^t$ adalah proses Wiener berdimensi n dengan masing-masing elemen saling bebas.

maka $X(t)$ adalah suatu *exponential martingale*.

Kemudian yang dimaksud dengan *measure* ekivalen yang disebut pada teorema 2.6.1, didefinisikan berikut ini.

Definisi 2.6.3 : [Klebaner, 1999]

Probability measure P ekivalen dengan *probability measure* $\mathbb{Q}$ jika untuk sebarang himpunan A, A adalah kejadian pada ruang sampel maka $\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$.

Selanjutnya untuk mendapatkan *measure* yang ekivalen dinyatakan dalam teorema 2.6.2 dibawah ini.

Teorema 2.6.3 (Teorema Cameron-Martin-Girsanov) : [Sen,2000]

Jika $\{W(t)\}$ adalah suatu proses Wiener pada *probability measure* P dan $\gamma(t)$

adapted pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t<T}$ serta asumsikan $E_{\mathrm{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^2(s)ds\right)\right]<\infty$ maka terdapat *probability measure* $\mathbb{Q}$ sedemikian sehingga

i. P ekivalen $\mathbb{Q}$.

ii. $$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathrm{P}}=\exp\left\{-\int_0^t \gamma(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^2(s)ds\right\}$$

iii. $\tilde{W}(t)=W(t)+\int_0^t \gamma(s)ds$, $\{\tilde{W}(t)\}$ adalah proses Wener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Persamaan (iii) dapat ditulis sebagai

$$d\tilde{W}(t)=dW(t)+\gamma(t)dt\,. \tag{2.6.3}$$

Teorema berikut adalah Teorema Cameron-Martin-Girsanov untuk multifaktor.

Teorema 2.6.4 (Teorema Cameron-Martin-Girsanov untuk multifaktor) [Baxter, 1996] :

Misal $\boldsymbol{W}(t)=\left(W_1(t),W_2(t),...,W_n(t)\right)$ Brownian motion berdimensi n pada *probability measure* P dan $\boldsymbol{\gamma}(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),...,\gamma_n(t))$ *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t<T}$ serta asumsikan $E_{\mathrm{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\gamma}^2(s)ds\right)\right]<\infty$ maka terdapat *probability measure* $\mathbb{Q}$ sedemikian sehingga

i. P ekivalen $\mathbb{Q}$.

ii. $$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathrm{P}}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \gamma_i(s)dW_i(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\gamma}^2(s)ds\right\}.$$

iii. $\tilde{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{W}(t)+\int_0^t \boldsymbol{\gamma}(s)ds$ adalah proses Wiener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Persamaan (iii) dapat ditulis sebagai

$$d\tilde{\boldsymbol{W}}(t)=d\boldsymbol{W}(t)+\boldsymbol{\gamma}(t)dt\,. \tag{2.6.4}$$

Kemudian definisi berikut memberikan penjelasan mengenai *risk-neutral measure* (*martingale measure*).

Definisi 2.6.4 : [Shreve, 1997]
Suatu *risk-neutral measure* (*martingale measure*) adalah sebarang *probability measure* yang ekivalen dengan *market measure* $\mathbb{P}$, dimana semua harga relatif adalah *martingale* .

BAB 3
KERANGKA MODEL HEATH-JARROW-MORTON SATU FAKTOR

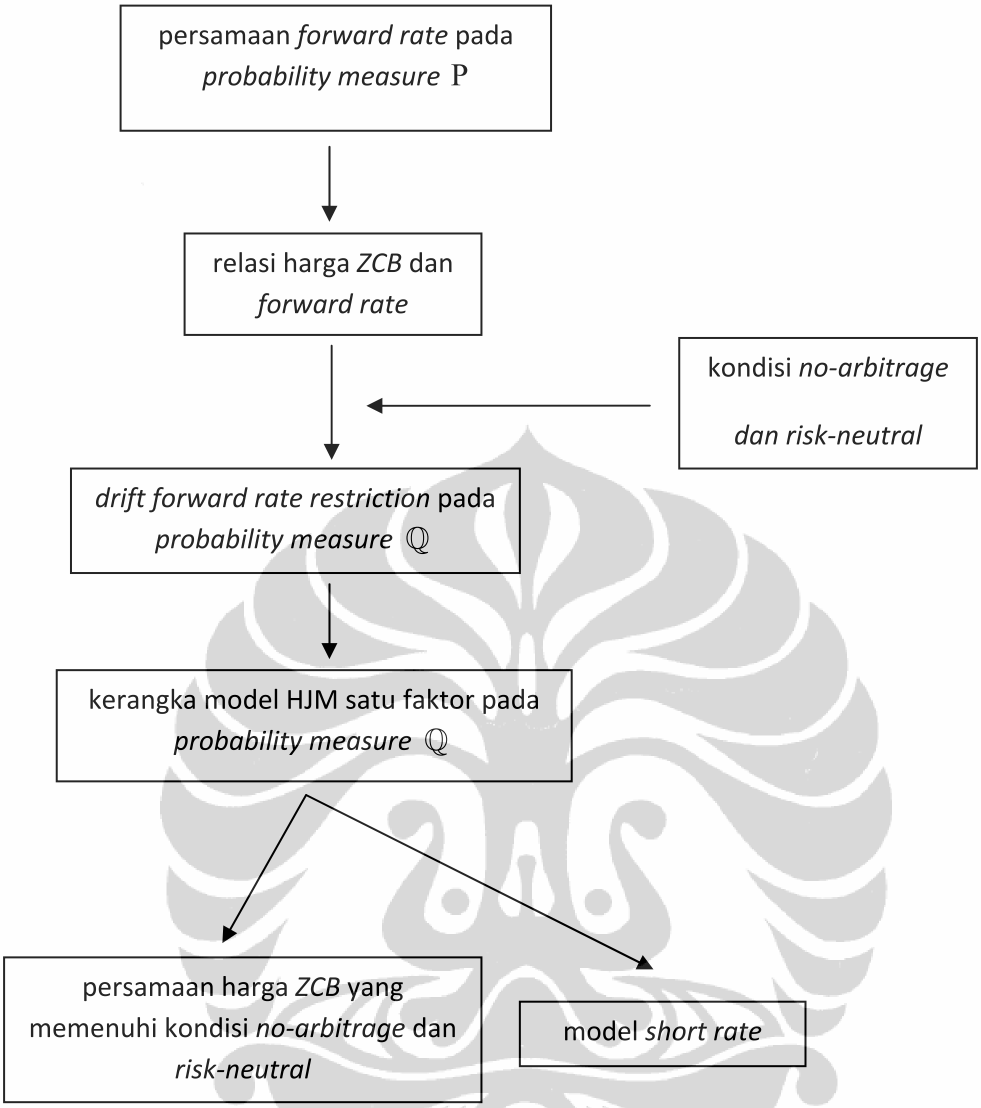
Sebelum membahas penurunan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton multifaktor pada bab 4, pada bab ini akan dijelaskan lebih dulu penurunan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton satu faktor. Heath Jarrow Morton (HJM) yang akan dibahas pada bab ini merupakan kerangka model kontinu yang dibangun oleh satu proses Wiener sehingga disebut sebagai kerangka model satu faktor.

Kerangka model HJM membahas pergerakan *forward rate.* Dengan menggunakan persamaan (2.5.5) dari kerangka model HJM dapat diturunkan model tingkat bunga *short rate*. Selain model tingkat bunga *short rate*, dapat diturunkan juga persamaan harga *ZCB*. Untuk menghasilkan model tingkat bunga *short rate* tertentu, kerangka model HJM membutuhkan input nilai awal kurva *forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate*. Model tingkat bunga *short rate* dan persamaan harga *ZCB* yang diturunkan dari kerangka model HJM dapat bersifat non-Markovian atau bergantung pada lintasan. Karena bergantung pada lintasan maka model non- Markovian dalam implementasinya memerlukan komputasi yang lebih sulit dilakukan dibanding model Markovian [Bhar, 2000]. Pada bagian akhir bab ini akan ditunjukkan bahwa dengan substitusi fungsi volatilitas R-C [Bhar, 2000] pada kerangka model HJM dapat diturunkan suatu model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem pesamaan diferensial stokastik Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait.

Bab 3 ini terdiri terdiri dari 2 pokok bahasan. Pada sub bab 3.1 akan dibahas penurunan persamaan harga ZCB dari kerangka model HJM satu faktor. Kemudian pada sub bab 3.2 akan dibahas penurunan persamaan harga ZCB dari kerangka model HJM satu faktor Markovian.

3.1 Persamaan Harga *Zero-Coupon Bond* Dari Kerangka Model HJM Satu Faktor

Secara garis besar penurunan persamaan harga ZCB dari kerangka model HJM satu faktor dapat digambarkan dengan skema berikut



Gambar 3.1.1 Skema penurunan persamaan harga *zero-coupon bond* dan model *short rate* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton

Penjelasan skema diatas adalah sebagai berikut : kerangka model HJM diasumsikan sebagai persamaan *forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{P}$. Dengan menggunakan persamaan (2.5.4) (persamaan yang menyatakan relasi harga *ZCB* dan *forward rate*) maka dari kerangka model HJM dapat diturunkan dinamika harga *ZCB*. Hal ini akan dijelaskan lebih lanjut pada sub sub bab 3.1.1. Pembatasan masalah pada sub bab 1.4 menyatakan bahwa persamaan harga *zero-coupon bond* yang dihasilkan dari kerangka model HJM pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ diasumsikan memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk- neutral*.

Untuk menurunkan persamaan harga *zero-coupon bond* yang memenuhi kedua kondisi ini maka ada batasan tertentu yang harus dipenuhi koefisien *drift forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Dengan menggunakan batasan *drift forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ (*drift forward rate restriction* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$) ini akan dihasilkan kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang penjelasannya akan diberikan pada sub sub bab 3.1.2 dan 3.1.3. Selanjutnya dari kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ dapat diturunkan persamaan harga *ZCB* dan model tingkat bunga *short rate* .

Pembahasan pada sub bab ini terdiri dari sub sub bab 3.1.1 mengenai relasi harga *zero-coupon bond* dan *forward rate.* Kemudian sub sub bab 3.1.2 mengenai *drift forward rate restriction* (batasan *drift forward rate).* Terakhir pada sub sub bab 3.1.3 akan dibahas penurunan persamaan harga *ZCB.*

3.1.1 Relasi Harga *Zero-Coupon Bond* Dan *Forward Rate*

Pada sub sub bab ini pertama-tama diperkenalkan suatu kerangka model HJM yang diasumsikan sebagai persamaan *forward rate* pada *probability measure* dunia nyata P. Kemudian dengan menggunakan suatu persamaan yang menyatakan relasi harga ZCB dan *forward rate* (persamaan (2.5.4)) akan diturunkan dinamika harga *ZCB*. Tetapi dinamika harga *ZCB* dapat juga dinyatakan sebagai model kontinu yang mengikuti proses Ito, sehingga dengan menggunakan lemma Ito dapat diturunkan dinamika harga *ZCB* berdasarkan lemma Ito. Berdasarkan persamaan dinamika yang diturunkan dari persamaan (2.5.4) dan dinamika harga *ZCB* berdasarkan lemma Ito tersebut dapat diturunkan persamaan dinamika harga *zero-coupon bond* yang mengikuti proses Ito yang dinyatakan dalam koefisien *drift* dan fungsi volatilitas *forward rate*, serta *short rate.*

Sebelum membahas lebih lanjut tentang hal di atas perlu dijelaskan lebih dahulu mengenai asumsi berikut. Asumsikan suatu perdagangan ekonomi yang kontinu pada interval waktu perdagangan $[0,\tau]$ untuk $\tau > 0$, τ tetap, dan suatu perdagangan c*ontinuum default free zero-coupon bond* $\{B(t,T): 0 \le t \le T \le \tau\}$.

$B(t,T)$ adalah harga *ZCB* pada waktu t dengan waktu jatuh tempo T (lihat definisi 2.5.1). Ketidakpastian perekonomian didekati dengan suatu ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, dimana Ω adalah ruang sampel, $\mathcal{F}$ adalah σ *-field* yang merupakan *measurable events* dan P adalah suatu *probability measure* pada dunia nyata. Perubahan informasi pada interval waktu perdagangan dinyatakan dengan filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ yang dibangun oleh satu proses Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$ pada *probability measure* P [Sen, 2000].

Untuk setiap waktu jatuh tempo T yang tetap, kerangka model HJM satu faktor $\{ f(t,T) : 0 \leq t \leq T \leq \tau \}$ diasumsikan sebagai suatu persamaan integral stokastik *forward rate* pada *probability measure* P sebagai berikut

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T,.)ds + \int_0^t \sigma(s,T,.)dW(s), \forall t \in [0,T], \qquad (3.1.1)$$

dimana $\{ f(0,T)\}_{T\geq 0}$ adalah nilai awal kurva *forward rate* yang dapat diketahui dari pengamatan [Sen,2000]. Untuk setiap pilihan T yang tetap, persamaan di atas merupakan persamaan integral stokastik dalam variabel t. Parameter T hanya menyatakan waktu jatuh tempo pengamatan.

Turunan terhadap t dari persamaan (3.1.1) dapat dinyatakan dengan

$$df(t,T) = \alpha(t,T,.)dt + \sigma(t,T,.)dW(t), \forall t \in [0,T],$$

dimana :

- $\alpha(t,T)$ adalah koefisien *drift forward rate* dan $\sigma(t,T)$ adalah fungsi volatilitas *forward-rate*. Secara ekonomi $\alpha(t,T)$ adalah ekspektasi pergerakan *forward rate* persatuan waktu dan $\sigma(t,T)$ adalah ukuran ketidakpastian pergerakan *forward rate* persatuan waktu.
- Untuk setiap T yang tetap dan $T \leq \tau$, diasumsikan proses stokastik $\{\alpha(t,T), 0 \leq t \leq T\}$, dan $\{\sigma(t,T), 0 \leq t \leq T\}$ adalah *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
- $\int_0^T |\alpha(t,T)| dt < +\infty$ dan $\int_0^T \sigma^2(t,T)dt < +\infty$.

Selain bergantung pada waktu t dan T koefisien *drift forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate* dapat juga bergantung pada variabel random lain seperti tingkat bunga *short rate* $r(t)$ atau *forward rate* $f(t,T)$ yang dinyatakan dengan argumen ketiga $(,.)$ [Sen,2000]. Karena tidak mempengaruhi proses penurunan persamaan , maka untuk penyederhanaan notasi, argumen ke tiga $(,.)$ tersebut untuk sementara ditiadakan dalam pembahasan. Sehingga turunan persamaan (3.1.1) terhadap t dapat ditulis kembali sebagai

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t), \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.2}$$

Untuk menentukan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model HJM gunakan persamaan 2.5.4 berikut, yang menyatakan relasi harga *zero-coupon bond* dan *forward rate*

$$B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\}.$$

Persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$\ln B(t,T) = -\int_t^T f(t,u)du\ . \tag{3.1.3}$$

Turunan persamaan di atas adalah

$$d\ln B(t,T) = d\left(-\int_t^T f(t,u)du\right).$$

Pada integral persamaan di atas variabel t muncul sebagai batas bawah integrasi dan dalam *integrand* $f(t,u)$. Menurut [Bjork,2003] keadaan yang seperti ini tidak dapat diselesaikan dengan *standard* Ito *formula*, sehingga jawaban untuk persoalan tersebut diselesaikan dengan cara berikut. Untuk variabel t yang muncul sebagai batas bawah integrasi akan menghasilkan suku berikut

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_t^T f(t,u)du\right\}dt,$$

Lalu untuk variabel t dalam *integrand* $f(t,u)$ akan menghasilkan suku sebagai berikut

$$\int_t^T df(t,u)du\ .$$

Sehingga

$$d \ln B(t,T) = -d\left(\int_t^T f(t,u)du\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_t^T f(t,u)du\right\}dt - \int_t^T df(t,u)du \; .$$

Kemudian dengan menggunakan teorema dasar kalkulus (lihat lampiran 1) maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$d \ln B(t,T) = f(t,t)dt - \int_t^T df(t,u)du \; . \tag{3.1.4}$$

Substitusi persamaan (2.5.5) dan (3.1.2) pada persamaan di atas maka didapat

$$d \ln B(t,T) = r(t)dt - \int_t^T \left\{\alpha(t,u)dt + \sigma(t,u)dW(t)\right\} du \; .$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left\{r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)du\right\}dt - \int_t^T \left\{\sigma(t,u)du\right\} dW(t) \; . \tag{3.1.5}$$

Persamaan (3.1.5) merupakan dinamika harga *zero-coupon bond* yang dinyatakan dalam *short rate,* $r(t)$, koefisien *drift forward rate,* $\alpha(t,u)$ dan fungsi volatilitas *forward rate,* $\sigma(t,u)$. Tetapi dinamika harga *zero-coupon bond* merupakan suatu model kontinu yang memenuhi proses Ito sebagai berikut : [Bjork, 2003]

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \alpha_B(t,T)dt + \sigma_B(t,T)dW(t), \tag{3.1.6}$$

dimana $\alpha_B(t,T)$ menyatakan sebagai ekpektasi tingkat pengembalian (*rate of return*) harga *zero-coupon bond* persatuan waktu dan $\sigma_B(t,T)$ dinyatakan sebagai ukuran ketidakpastian tingkat pengembalian harga *zero-coupon bond* persatuan waktu. $\sigma_B(t,T)$ dapat juga dinyatakan sebagai fungsi volatilitas harga *zero-coupon bond.*

Persamaan (3.1.6) dapat ditulis kembali sebagai

$$dB(t,T) = \alpha_B(t,T)B(t,T)dt + \sigma_B(t,T)B(t,T)dW(t) \; . \tag{3.1.7}$$

Untuk menghasilkan dinamika harga *zero-coupon bond* berdasarkan lemma Ito dan dinyatakan dalam *short rate* $r(t)$, koefisien *drift forward rate* $\alpha(t,u)$ serta fungsi volatilitas *forward rate* $\sigma(t,u)$, berikut ini akan ditunjukkan lebih dulu hubungan antara fungsi volatilitas harga *zero-coupon bond* dengan fungsi volatilitas *forward rate* serta hubungan antara ekpektasi tingkat pengembalian (*rate of return*) harga *zero-coupon bond* persatuan waktu dengan koefisien *drift forward rate* dan *short rate*. Proses untuk menunjukkan hubungan tersebut dimulai dengan menurunkan dinamika harga *zero-coupon bond* berdasarkan lemma Ito. Misal terdapat suatu fungsi G dari harga *zero-coupon bond* dan waktu, yaitu

$$G\left(B(t,T),t\right) = \ln B(t,T). \tag{3.1.8}$$

dengan $B(t,T)$ adalah proses yang memenuhi persamaan (3.1.7).

Dari persamaan (3.1.8) diperoleh

$$\frac{\partial G\left(B(t,T),t\right)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G\left(B(t,T),t\right)}{\partial B(t,T)} = \frac{1}{B(t,T)}, \quad \frac{\partial^2 G\left(B(t,T),t\right)}{\partial B^2(t,T)} = -\frac{1}{B^2(t,T)}. \tag{3.1.9}$$

Kemudian dengan menggunakan lemma Ito, maka differensiasi fungsi G dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d\left[G\left(B(t,T),t\right)\right] = \left[\frac{\partial G\left(B(t,T),t\right)}{\partial t} + \alpha_B(t,T)B(t,T)\frac{\partial G\left(B(t,T),t\right)}{\partial B(t,T)}\right]dt$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left\{\sigma_B(t,T)B(t,T)\right\}^2 \frac{\partial^2 G\left(B(t,T),t\right)}{\partial B^2(t,T)}\right]dt + \sigma_B(t,T)B(t,T)\frac{\partial G\left(B(t,T),t\right)}{\partial B(t,T)}dW(t). \tag{3.1.10}$$

Substitusi persamaan (3.1.8) dan (3.1.9) pada persamaan (3.1.10) sehingga didapat hasil

$$d\left[\ln B(t,T)\right] = \left[0 + \alpha_B(t,T)B(t,T)\frac{1}{B(t,T)} + \frac{1}{2}\sigma_B^2(t,T)B^2(t,T)\left(-\frac{1}{B^2(t,T)}\right)\right]dt$$

$$+\sigma_B(t,T)B(t,T)\frac{1}{B(t,T)}dW(t).$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left\{\alpha_B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma_B^2(t,T)\right\}dt + \sigma_B(t,T)dW(t). \tag{3.1.11}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.11) dan persamaan (3.1.5) didapat hubungan antara fungsi volatilitas harga *zero-coupon bond* dengan fungsi volatilitas *forward rate* , yaitu

$$\sigma_B(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,u)du. \tag{3.1.12}$$

dan hubungan antara ekpektasi tingkat pengembalian (*rate of return*) harga *zero-coupon bond* persatuan waktu dan fungsi volatilitas harga *zero-coupon* dengan *short rate* dan koefisien *drift forward rate*, yaitu

$$\alpha_B(t,T)-\frac{1}{2}\sigma_B^2(t,T)=r(t)-\int_t^T \alpha(t,u)du\,.$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\alpha_B(t,T)=r(t)-\int_t^T \alpha(t,u)du+\frac{1}{2}\sigma_B^2(t,T)\,. \qquad (3.1.13)$$

Substitusi persamaan (3.1.12) pada persamaan di atas maka didapat

$$\alpha_B(t,T)=r(t)-\int_t^T \alpha(t,u)du+\frac{1}{2}\left\{\int_t^T \sigma(t,u)du\right\}^2.$$

Setelah didapat hubungan yang dinyatakan pada persamaan (3.1.12) dan (3.1.13), substitusikan kedua persamaan tersebut pada persamaan (3.1.6) maka dinamika harga *zero-coupon bond* yang memenuhi proses Ito dan dinyatakan dalam *short rate*, $r(t)$, koefisien *drift forward rate*, $\alpha(t,u)$ dan fungsi volatilitas *forward rate*, $\sigma(t,u)$ adalah sebagai berikut

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=\left[r(t)-\int_t^T \alpha(t,u)du+\frac{1}{2}\left\{\int_t^T \sigma(t,u)du\right\}^2\right]dt-\left[\int_t^T \sigma(t,u)du\right]dW(t)\,.$$

Setelah membahas dinamika harga *zero-coupon bond* yang berdasarkan lemma Ito yang dinyatakan dalam *short rat*e, koefisien *drift forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate*, pembahasan berikutnya adalah mengenai batasan yang harus dipenuhi koefisien *drift forward rate* dalam tujuan untuk menghasilkan harga *ZCB* yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk- neutral*.

3.1.2 *Drift Forward Rate Restriction*

Pada pembatasan masalah sub bab 1.4 dikatakan bahwa persamaan harga *zero-coupon bond* yang dihasilkan dari kerangka model HJM diasumsikan memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk- neutral*. Untuk memenuhi kondisi ini ada batasan tertentu yang harus dipenuhi koefisien *drift forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Sebelum membahas mengenai batasan *drift forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$, akan dijelaskan lebih dulu mengenai asumsi kondisi *no-arbitrage*. Tahapan pembahasan kondisi *no-arbitrage* adalah sebagai berikut

1. Gunakan teorema 2.6.1 untuk menghasilkan suatu model *term structure* yang memenuhi *no-arbitrage.*
2. Menurunkan persamaan dinamika harga relatif *bond* pada *probability measure* $\mathbb{P}$.
3. Gunakan teorema 2.6.3 untuk mendapatkan *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang yang ekivalen dengan *probability measure* $\mathbb{P}$.
4. Tunjukkan bahwa harga relatif *bond* adalah *martingale* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Penjelasan mengenai keempat tahapan di atas adalah sebagai berikut :
Pertama akan dibahas tahap 1.

1. Teorema 2.6.1 menyatakan suatu model *term structure* adalah *no-arbitrage* jika dan hanya jika ada suatu *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* $\mathbb{P}$ sedemikian sehingga untuk setiap $T \in [0,\tau]$, proses $\dfrac{B(t,T)}{\beta(t)}$ adalah *martingale* pada $\mathbb{Q}$. Penjelasan untuk teorema 2.6.1 adalah sebagai berikut. Model *term structure* yang dibahas pada tesis ini adalah harga *ZCB* $B(t,T)$. Kemudian jika $\dfrac{B(t,T)}{\beta(t)} = Z(t,T)$, maka $Z(t,T)$ adalah harga relatif *bond* pada waktu t dengan waktu jatuh tempo T (lihat penjelasan sub bab 2.6) dimana $\beta(t)$ adalah *numeraire*. Dengan menggunakan nilai *bank account* sebagai *numeraire* maka dengan persamaan (2.6.1)

$$Z(t,T) = \frac{B(t,T)}{\beta(t)} = e^{-\int_0^t r(s)ds} B(t,T)$$

   dimana $r(t)$ adalah tingkat bunga *short rate* pada waktu t .

Setelah tahap 1 selesai dibahas, berikutnya akan dibahas tahap 2.

2. Akan diturunkan dinamika harga relatif *bond* pada *probability measure* $\mathbb{P}$. Dengan memperhatikan persamaan (2.6.1), $Z(t,T)$ dapat dinyatakan

sebagai fungsi dari harga *zero coupon bond* $B(t,T)$ dan waktu t, atau dengan kata lain $Z(t,T)=F\left(B(t,T),t\right)$. Jadi turunan parsial $F\left(B(t,T),t\right)$ terhadap $B(t,T)$ dan t adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial F\left(B(t,T),t\right)}{B(t,T)}=e^{-\int_0^t r(s)ds}\ ; \quad \frac{\partial^2 F\left(B(t,T),t\right)}{\partial B^2(t,T)}=0\ ;$$

$$\frac{\partial F\left(B(t,T),t\right)}{\partial t}=-e^{-\int_0^t r(s)ds}r(t)B(t,T). \tag{3.1.14}$$

Selanjutnya dengan menggunakan lemma Ito didapat persamaan berikut,

$$\begin{aligned} dF\left(B(t,T),t\right)=&\left[\frac{\partial F\left(B(t,T),t\right)}{\partial t}+\frac{\partial F\left(B(t,T),t\right)}{\partial B(t,T)}\alpha_B(t,T)B(t,T)\right]dt\\ &+\left[\frac{1}{2}\left\{\sigma_B(t,T)B(t,T)\right\}^2\frac{\partial^2 F\left(B(t,T),t\right)}{\partial B^2(t,T)}\right]dt\\ &+\sigma_B(t,T)B(t,T)\frac{\partial F\left(B(t,T),t\right)}{\partial B(t,T)}dW(t)\,. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Sustitusikan persamaan (3.1.14) pada persamaan (3.1.15), maka didapat

$$\begin{aligned} dF\left(B(t,T),t\right)=&\left[-e^{-\int_0^t r(s)ds}r(t)B(t,T)+\alpha_B(t,T)B(t,T)e^{-\int\limits_0^t r(s)ds}\right]dt\\ &+\left[\sigma_B(t,T)B(t,T)e^{-\int\limits_0^t r(s)ds}\right]dW(t). \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$dF\left(B(t,T),t\right)=e^{-\int_0^t r(s)ds}B(t,T)\left[\left\{\alpha_B(t,T)-r(t)\right\}dt+\sigma_B(t,T)dW(t)\right].$$

Karena $Z(t,T)=F\left(B(t,T),t\right)$ maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$dZ(t,T)=e^{-\int_0^t r(s)ds}B(t,T)\left[\left\{\alpha_B(t,T)-r(t)\right\}dt+\sigma_B(t,T)dW(t)\right].$$

Substitusikan persamaan (2.6.1) pada persamaan di atas maka didapat

$$dZ(t,T)=Z(t,T)\left[\left\{\alpha_B(t,T)-r(t)\right\}dt+\sigma_B(t,T)dW(t)\right].$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \{\alpha_B(t,T) - r(t)\} dt + \sigma_B(t,T) dW(t). \qquad (3.1.16)$$

Persamaan ini merupakan persamaan dinamika harga relatif *bond* , $Z(t,T)$ pada *probability measure* P .

Tulis kembali persamaan (3.1.16) sehingga menjadi

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \sigma_B(t,T)\left(dW(t) + \frac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)} dt \right)$$

Kemudian untuk waktu jatuh tempo T , misal $\frac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)} = \lambda(t)$, $\sigma_B(t,T) \neq 0$. Dengan asumsi proses stokastik $\{\alpha(t,T), 0 \le t \le T\}$ dan $\{\sigma(t,T), 0 \le t \le T\}$ adalah *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ maka berdasarkan persamaan (3.1.12), (3.1.13) dan pemisalan $\frac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)} = \lambda(t)$, $\lambda(t)$ juga diasumsikan *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$. Berikutnya substitusikan $\frac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)} = \lambda(t)$ pada persamaan

$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \sigma_B(t,T)\left(dW(t) + \frac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)} dt \right)$, maka persamaan dinamika harga relatif *bond* $Z(t,T)$ pada *probability measure* P dapat ditulis sebagai

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \sigma_B(t,T)\big(dW(t) + \lambda(t)dt\big). \qquad (3.1.17)$$

Proses selanjutnya adalah membahas tahap 3.

3. Untuk menentukan *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* P gunakan teorema 2.6.3. Perhatikan persamaan (3.1.17). $W(t)$ adalah proses Wiener pada *probability measure* P, $\lambda(t) \in \mathcal{F}_t$. Kemudian asumsikan $E\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) ds \right) \right] < \infty$. Jadi

berdasarkan teorema 2.6.3 (i) terdapat *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* P dan dengan teorema 2.6.3 (iii)

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \lambda(t)dt\,, \tag{3.1.18}$$

dimana $\tilde{W}(t)$ adalah proses wiener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Substitusikan $d\tilde{W}(t) = dW(t) + \lambda(t)dt$ pada persamaan (3.1.17), maka didapat dinamika harga relatif $Z(t,T)$, pada *probability measure* $\mathbb{Q}$,yaitu

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \sigma_B(t,T)d\tilde{W}(t)\,. \tag{3.1.19}$$

Tahap terakhir adalah pembahasan tahap 4.

4. Pada tahap ini akan ditunjukkan harga relatif *bond* adalah *martingale* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Persamaan (3.1.19) memenuhi persamaan (2.6.2) untuk $n = 1$, sehingga berdasarkan teorema 2.6.2, harga relatif *bond* yang memenuhi persamaan (3.1.19) adalah suatu *exponential martingale*. Jadi telah dipenuhi harga relatif *bond* adalah *martingale* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Setelah dibahas asumsi kondisi *no-arbitrage*, Penjelasan selanjutnya adalah tentang asumsi kondisi *risk-neutral*. Untuk itu akan dijelaskan lebih dulu mengenai $\lambda(t) = \dfrac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)}$ yang terdapat pada persamaan (3.1.17) dan biasa disebut sebagai *market price of risk*. Disini *market price of risk* $\lambda(t)$, hanya dinyatakan sebagai fungsi waktu t, sehingga timbul pertanyaan bagaimana *market price of risk* untuk *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda, apakah besarnya *market price of risk* juga berbeda. Dengan kata lain apakah $\lambda(t,T_1) \neq \lambda(t,T_2)$?. Penjelasan tentang *market price of risk* selengkapnya adalah sebagai berikut.

Pertama-tama buat *risk-free portolio* Π. Tujuan pembuatan portofolio adalah untuk melindung nilai (*hedging*) *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda [Kwok,1998]. Secara ekonomi, *hedging* dilakukan untuk lindung nilai dari suatu aset sehingga tidak terlalu terpengaruh oleh risiko perubahan tingkat bunga. Sedangkan secara matematis, tujuan dilakukannya *hedging* adalah untuk menghilangkan faktor ketidakpastian dari perubahan tingkat bunga.

Misalkan portofolio dibuat dengan cara membeli θ_1 unit *ZCB* $B(t,T_1)$ dengan waktu jatuh tempo T_1, dan membeli θ_2 buah unit *ZCB* $B(t,T_2)$ dengan waktu jatuh tempo T_2 , sedemikian sehingga $T_1 < T_2$. Kedua harga *ZCB* diturunkan oleh proses Wiener yang sama, $W(t)$. Nilai total portofolio pada waktu t dinyatakan dengan

$$\Pi = \theta_1 B(t,T_1) + \theta_2 B(t,T_2) .$$

Perubahan nilai portofolio dalam interval waktu dt adalah

$$d\Pi = \theta_1 dB(t,T_1) + \theta_2 dB(t,T_2) .$$

Substitusikan persamaan (3.1.7) pada persamaan di atas, sehingga didapat

$$d\Pi = \theta_1 B(t,T_1)\left\{\alpha_B(t,T_1)dt + \sigma_B(t,T_1)dW(t)\right\}$$
$$+\theta_2 B(t,T_2)\left\{\alpha_B(t,T_2)dt + \sigma_B(t,T_2)dW(t)\right\} .$$

Kelompokan koefisien *drift* dan koefisien diffusi (koefisien $dW(t)$) sehingga diperoleh

$$d\Pi = \left\{\theta_1 B(t,T_1)\alpha_B(t,T_1) + \theta_2 B(t,T_2)\alpha_B(t,T_2)\right\} dt$$
$$+\left\{\theta_1 B(t,T_1)\sigma_B(t,T_1) + \theta_2 B(t,T_2)\sigma_B(t,T_2)\right\} dW(t) . \quad (3.1.20)$$

Untuk menghilangkan risiko tingkat bunga maka θ_1 dan θ_2 dipilih sedemikian sehingga koefisien $dW(t)$ menjadi 0, yaitu

$$\theta_1 = \frac{\sigma_B(t,T_2)}{B(t,T_1)\left\{\sigma_B(t,T_2) - \sigma_B(t,T_1)\right\}} \prod \text{ dan}$$

$$\theta_2 = \frac{-\sigma_B(t,T_1)}{B(t,T_2)\left\{\sigma_B(t,T_2) - \sigma_B(t,T_1)\right\}} \prod .$$

Maka koefisien $dW(t)$ menjadi 0 dan persamaan (3.1.20) menjadi

$$d\Pi = \left[\frac{\sigma_B(t,T_2)\alpha_B(t,T_1) - \sigma_B(t,T_1)\alpha_B(t,T_2)}{\left\{\sigma_B(t,T_2) - \sigma_B(t,T_1)\right\}}\right] \prod dt . \quad (3.1.21)$$

Persamaan di atas tidak lagi mempunyai koefisien diffusi dan perubahan $d\Pi$ dapat diprediksi (*predictable*). Kemudian agar portofolio memenuhi kondisi *no-*

arbitrage maka perubahan Π diasumsikan hanya tergantung pada tingkat bunga, $r(t)$ [Bjork, 2003], yaitu

$$\frac{d\Pi}{dt} = r(t)\Pi \text{ atau}$$

$$d\Pi = r(t)\Pi dt . \tag{3.1.22}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.21) dan (3.1.22) maka didapat persamaan berikut

$$r(t)\Pi dt = \left[\frac{\sigma_B(t,T_2)\alpha_B(t,T_1) - \sigma_B(t,T_1)\alpha_B(t,T_2)}{\{\sigma_B(t,T_2) - \sigma_B(t,T_1)\}}\right]\prod dt ,$$

$$r(t) = \left[\frac{\sigma_B(t,T_2)\alpha_B(t,T_1) - \sigma_B(t,T_1)\alpha_B(t,T_2)}{\{\sigma_B(t,T_2) - \sigma_B(t,T_1)\}}\right],$$

$$r(t)\sigma_B(t,T_2) - r(t)\sigma_B(t,T_1) = \sigma_B(t,T_2)\alpha_B(t,T_1) - \sigma_B(t,T_1)\alpha_B(t,T_2) ,$$

$$\sigma_B(t,T_1)\alpha_B(t,T_2) - r(t)\sigma_B(t,T_1) = \sigma_B(t,T_2)\alpha_B(t,T_1) - r(t)\sigma_B(t,T_2) ,$$

$$\frac{\alpha_B(t,T_2) - r(t)}{\sigma_B(t,T_2)} = \frac{\alpha_B(t,T_1) - r(t)}{\sigma_B(t,T_1)} . \tag{3.1.23}$$

Berikut akan ditunjukkan bahwa *market price of risk* adalah sama untuk harga *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda.

Perhatikan persamaan (3.1.23). Persamaan tersebut menyatakan bahwa besarnya *risk premium* $\alpha_B(t,T) - r(t)$, yang diberikan oleh *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda dibagi dengan fungsi volatilitas harga *ZCB* yang bersesuaian adalah sama. *Risk premium* $\alpha_B(t,T) - r(t)$, didefinisikan sebagai besarnya pengembalian diluar tingkat bunga $r(t)$. Seperti telah dijelaskan sebelumnya kedua ruas persamaan (3.1.23) menyatakan besaran yang disebut *market price of risk*. Dengan memperhatikan kembali persamaan (3.1.23) berarti kedua *ZCB*, yaitu *ZCB* $B(t,T_1)$ dengan masa jatuh tempo T_1 dan *ZCB* $B(t,T_2)$ dengan masa jatuh tempo T_2 memiliki *market price of risk* yang sama. Dengan kata lain *market price of risk* tidak tergantung waktu jatuh tempo T dan dapat dinyatakan hanya sebagai fungsi waktu t, yaitu $\lambda(t)$.

Pembahasan berikutnya adalah mengenai asumsi kondisi *risk-neutral* . Sesuai dengan definisi 2.6.4, *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* P dimana harga relatif *martingale* disebut *risk-neutral measure*. Pada *risk-neutral measure*, tingkat pengembalian harga *ZCB* sama dengan tingkat bunga $r(t)$ atau $\alpha_B(t,T) = r(t)$ [Glasserman, 2003]. Jadi sampai pada tahapan ini persamaan harga *ZCB* telah memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *probability measure* telah berubah menjadi *risk-neutral measure* $\mathbb{Q}$.

Setelah selesai membahas kondisi *no-arbitrage* dan *risk-neutral*, pembahasan selanjutnya mengenai batasan *drift forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Pertama-tama substitusikan $\alpha_B(t,T) = r(t)$ pada

$\lambda(t) = \dfrac{\alpha_B(t,T) - r(t)}{\sigma_B(t,T)}$ maka didapat $\lambda(t) = 0$. Substitusikan hasil ini pada

persamaan (3.1.18) sehingga didapat

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) . \qquad (3.1.24)$$

Persamaan (3.1.24) menunjukkan bahwa perubahan proses Wiener pada *risk-neutral measure* $\mathbb{Q}$ sama dengan perubahan proses Wiener *probability measure* P. Selanjutnya substitusikan $\alpha_B(t,T) = r(t)$ pada persamaan (3.1.13), sehingga didapat

$$\int_0^t \alpha(t,u)du = \frac{1}{2}\sigma_B^2(t,T) \ .$$

Substitusikan persamaan (3.1.12) pada persamaan di atas maka diperoleh

$$\int_t^T \alpha(t,u)du = \frac{1}{2}\left\{\int_t^T \sigma(t,u)du\right\}^2 . \qquad (3.1.25)$$

Turunan parsial terhadap T persamaan di atas menghasilkan

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)du . \qquad (3.1.26)$$

Dari persamaan di atas berarti untuk memenuhi kondisi *no-arbitrage* pada *risk-neutral measure* $\mathbb{Q}$, maka untuk setiap t dan $T \geq t$, koefisien *drift forward rate* harus memenuhi batasan yang dinyatakan pada persamaan (3.1.26).

Proses selanjutnya adalah membahas penurunan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Pembahasan selengkapnya akan diberikan pada sub sub bab berikut ini.

3.1.3 Penurunan Persamaan Harga *Zero-Coupon Bond*

Setelah diperoleh batasan *drift forward rate* yang dinyatakan dengan persamaan (3.1.26) tahapan berikutnya adalah menurunkan persamaan kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Dari kerangka model ini kemudian akan diturunkan model *short rate* dan persamaan harga ZCB yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk neutral*.

Substitusikan $t = s$ pada persamaan (3.1.24) dan (3.1.26). Lalu gunakan hasil yang didapat untuk disubstitusikan pada persamaan (3.1.1), maka diperoleh kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$, yaitu

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \left\{ \sigma(s,T) \int_s^T \sigma(s,u)du \right\} ds + \int_0^t \sigma(s,T) d\tilde{W}(s). \tag{3.1.27}$$

Persamaan diferensial stokastik kerangka model HJM satu faktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ didapat dengan substitusi persamaan (3.1.24) dan (3.1.26) pada persamaan (3.1.2), yaitu

$$df(t,T) = \left\{ \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,u)du \right\} dt + \sigma(t,T) d\tilde{W}(t). \tag{3.1.28}$$

Dengan mesubstitusi $T = t$ pada persamaan (3.1.27) maka didapat persamaan *short rate*, $r(t) = f(t,t)$, yaitu

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \left\{ \sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right\} ds + \int_0^t \sigma(s,t) d\tilde{W}(s). \tag{3.1.29}$$

Proses penentuan persamaan *short rate* ini penting mengingat dalam persaman harga *ZCB* yang diperoleh dari kerangka model HJM satu Markovian, yang akan dibahas pada sub bab 3.2, persamaan tersebut akan bergantung pada *short rate*.

Pada awal bab ini disebutkan bahwa input kerangka model HJM adalah nilai awal kurva *forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate* . Hal ini dapat ditunjukkan dengan memperhatikan persamaan (3.1.27). Dari persamaan tersebut terlihat selain nilai awal kurva *forward rate* $f(0,T)$, input lain kerangka model HJM adalah fungsi volatilitas *forward rate* $\sigma(s,T)$ dan $\sigma(s,u)$.

Selanjutnya akan ditentukan persamaan model tingkat bunga *short rate*. Turunan terhadap t dari persamaan (3.1.29) adalah

$$dr(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(0,t) + \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds + \int_0^t \sigma(s,t) d\tilde{W}(s) \right] dt .$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$dr(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) \right\} dt + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds \right\} dt + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \sigma(s,t) d\tilde{W}(s) \right\} dt .$$

Suku ke tiga ruas kanan persamaan di atas dapat diuraikan menjadi

$$dr(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) \right\} dt + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds \right\} dt + \left\{ \int_0^t \frac{\partial \sigma(s,t)}{\partial t} d\tilde{W}(s) \right\} dt + \sigma(t,t) d\tilde{W}(t). \tag{3.1.30}$$

Gunakan Rumus Leibniz (lihat lampiran 2) pada turunan parsial suku ke dua ruas kanan persamaan di atas. Berikut prosesnya

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds =$$

$$\int_0^t \frac{\partial \left\{ \sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right\} ds}{\partial t} + \sigma(t,t) \int_t^t \sigma(t,u)du \frac{\partial t}{\partial t} - \left\{ \sigma(0,t) \int_0^t \sigma(0,u)du \frac{\partial 0}{\partial t} \right\} .$$

Karena integral dari t sampai t adalah 0 dan $\frac{\partial 0}{\partial t}$ juga 0 maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds = \int_0^t \frac{\partial \left\{ \sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right\} ds}{\partial t} .$$

Uraikan turunan parsial pada ruas kanan sehingga persamaan menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds = \int_0^t \frac{\partial \{\sigma(s,t)\}}{\partial t} \int_s^t \sigma(s,u)duds + \int_0^t \sigma(s,t) \frac{\partial \int_s^t \sigma(s,u)du}{\partial t} ds.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)du \right) ds = \int_0^t \frac{\partial \{\sigma(s,t)\}}{\partial t} \int_s^t \sigma(s,u)duds + \int_0^t \sigma^2(s,t)ds.$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.1.30) maka didapat model tingkat bunga *short rate* berikut

$$dr(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} dt + \left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial \sigma(s,t)}{\partial t} \int_s^t \sigma(s,u) du \right) ds + \int_0^t \sigma^2(s,t) ds \right\} dt$$

$$+ \left\{ \int_0^t \frac{\partial \sigma(s,t)}{\partial t} d\tilde{W}(s) \right\} dt + \sigma(t,t) d\tilde{W}(t) . \qquad (3.1.31)$$

Keempat suku pada ruas kanan dapat diinterpretasikan sebagai berikut. Suku pertama menyatakan ukuran kemiringan (*slope*) dari kurva nilai awal *forward rate,* yang memberikan kontribusi pada koefisien *drift* $r(t)$. $\sigma(t,t)$ pada suku terakhir menyatakan simpangan baku dari $dr(t)$. Seperti telah dijelaskan pada hal 27 $\sigma(s,t), s < t$ dapat tergantung pada variabel random yang dinyatakan dengan argument ketiga. Dengan demikian maka $\sigma(s,t), s < t$ pada suku ke dua dan ke tiga ruas kanan persamaan (3.1.31) dapat tergantung pada nilai variabel random yang diamati pada waktu-waktu sebelum t sehingga hal ini dapat menyebabkan $r(t)$ bersifat non-Markovian. Jika $\sigma(s,t)$ hanya tergantung pada s dan t maka suku ke tiga merupakan satu-satunya penyebab $r(t)$ bersifat non-Markovian karena suku tersebut tergantung juga pada nilai $d\tilde{W}(s)$, $s < t$. Jadi persamaan (3.1.31) memperlihatkan bahwa koefisien *drift* dari $r(t)$ bergantung lintasan karena melibatkan seluruh lintasan proses Wiener $\tilde{W}(s)$ antara waktu 0 sampai waktu t. Dengan kata lain jika fungsi volatilitas *forward rate* tidak konstan maka $r(t)$ bersifat non-Markovian [Kwok, 1998].

Setelah didapat model tingkat bunga *short rate,* pembahasan selanjutnya adalah proses untuk menentukan persamaan harga *zero-coupon bond* yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk-neutral,* kembali pada persamaan (3.1.3)

$$\ln B(t,T) = -\int_t^T f(t,u) du .$$

Ambil $T = u$ lalu substitusikan pada persamaan (3.1.27) sehingga persamaan (3.1.27) menjadi

$$f(t,u) = f(0,u) + \int_0^t \left\{ \sigma(s,u) \int_s^u \sigma(s,v) dv \right\} ds + \int_0^t \sigma(s,u) d\tilde{W}(s) .$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.1.3) maka didapat

$$\ln B(t,T) = -\int_t^T f(0,u)du - \int_t^T \left[\int_0^t \left\{ \sigma(s,u) \int_s^u \sigma(s,v)dv \right\} ds \right] du - \int_t^T \left[\int_0^t \sigma(s,u)d\tilde{W}(s) \right] du. \tag{3.1.32}$$

Substitusikan $t = 0$ pada persamaan (3.1.3) sehingga diperoleh

$$\ln B(0,T) = -\int_0^T f(0,u)du\ . \tag{3.1.33}$$

Dengan substitusi $T = t$ pada persamaan (3.1.33) maka dihasilkan

$$\ln B(0,t) = -\int_0^t f(0,u)du\ . \tag{3.1.34}$$

Kemudian uraikan $\int_0^T f(0,u)du$ pada persamaan (3.1.32) sehingga menjadi penjumlahan integral berikut

$$\int_0^T f(0,u)du = \int_0^t f(0,u)du + \int_t^T f(0,u)du\ .$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$-\int_t^T f(0,u)du = -\int_0^T f(0,u)du - \left(-\int_0^t f(0,u)du \right).$$

Substitusikan persamaan (3.1.33) dan (3.1.34) pada persamaan di atas maka didapat

$$-\int_t^T f(0,u)du = \ln B(0,T) - \ln B(0,t)\ \ .$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$-\int_t^T f(0,u)du = \ln \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right]\ . \tag{3.1.35}$$

Substitusi persamaan di atas pada persaman (3.1.32) akan menghasilkan

$$\ln B(t,T) = \ln \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right] - \int_t^T \left[\int_0^t \left\{ \sigma(s,u) \int_s^u \sigma(s,v)dv \right\} ds \right] du - \int_t^T \left[\int_0^t \sigma(s,u)d\tilde{W}(s) \right] du.$$

Persamaan di atas dapat juga ditulis kembali sebagai

$$B(t,T) = \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)} \right] \exp \left[-\int_t^T \left\{ \int_0^t \left(\sigma(s,u) \int_s^u \sigma(s,v)dv \right) ds \right\} du - \int_t^T \left\{ \int_0^t \sigma(s,u)d\tilde{W}(s) \right\} du \right]. \tag{3.1.36}$$

Persamaan (3.1.36) merupakan persamaan harga *ZCB* yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk-neutral*.

Sama seperti penjelasan untuk persamaan (3.1.31) maka $\sigma(s,u), s < u < t$ pada persamaan di atas dapat tergantung pada nilai variabel random yang diamati pada waktu-waktu sebelum t. Kemudian karena persamaan tersebut tergantung juga pada nilai $d\tilde{W}(s)$, $s < t$ berarti persamaan tersebut bergantung lintasan karena melibatkan seluruh lintasan proses Wiener $\tilde{W}(s)$ antara waktu 0 sampai waktu t. Atau dengan kata lain persamaan harga *ZCB* dapat bersifat non-Markovian.

Kesimpulan yang dapat ditarik dari pembahasan sejauh ini adalah tahapan untuk menggunakan kerangka model HJM dapat dijelaskan dengan algoritma berikut.

Algoritma 3.1.1 :

1. Tentukan volatulitas *forward rate* $\sigma(t,T)$.
2. Parameter koefisien *drift forward rate* ditentukan dengan persaman (3.1.26).
3. Amati struktur *forward rate* pada pasar hari ini $\{ f(0,T); T \geq 0 \}$.
4. Untuk memperoleh *forward rate* gunakan persamaan (3.1.27).
5. Untuk memperoleh model tingkat bunga *short rate* gunakan persamaan (3.1.31).
6. Harga *zero-coupon bond* ditentukan dengan menggunakan formula (3.1.36).

Berikut akan diberikan suatu contoh model tingkat bunga *short rate* Ho-Lee dan persamaan harga *ZCB* yang diturunkan dari kerangka model HJM satu faktor dengan menggunakan algoritma 3.1.1.

CONTOH :

Model tingkat bunga *short rate* Ho-Lee dapat diturunkan dari kerangka model HJM satu faktor dengan menentukan fungsi volatilitas *forward rate* $\sigma(t,T) = \sigma$, dimana untuk setiap t, $t < T$, σ adalah suatu konstanta. Lalu gunakan algoritma 3.1.1 untuk menggunakan kerangka model HJM :

1. Tentukan fungsi volatilitas *forward rate* $\sigma(t,T) = \sigma$, dimana untuk setiap t, $t < T$, σ adalah suatu konstanta.
2. Dari persamaan (3.1.26) didapat

$$\alpha(t,T) = \sigma\int_t^T \sigma du = \sigma^2(T-t).$$

3. Amati struktur *forward rate* pada pasar hari ini $\{f(0,T);T \geq 0\}$.
4. Dari persamaan (3.1.27) didapat *forward rate* sebagai berikut

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2\int_0^t (T-s)ds + \sigma\int_0^t d\tilde{W}(s), \forall t \in [0,T]$$

$$= f(0,T) + \sigma^2\left\{Ts - \frac{1}{2}s^2\right\}\Bigg|_0^t + \sigma d\tilde{W}(t)$$

$$= f(0,T) + \sigma^2\left\{Tt - \frac{1}{2}t^2\right\} + \sigma d\tilde{W}(t).$$

5. Dari persamaan (3.1.31) didapat model tingkat bunga *short rate* sebagai berikut

$$dr(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}dt + \left\{0 + \sigma^2\int_0^t ds + 0\right\}dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

$$dr(t) = \left\{\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t\right\}dt + \sigma d\tilde{W}(t). \tag{3.1.37}$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.1.37) merupakan model tingkat bunga *short rate* Ho-Lee [Bjork,2003]

$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma d\tilde{W}(t)$, dimana $\theta(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t$.

6. Persamaan harga *ZCB* model tingkat bunga *short rate* Ho-Lee [Bjork, 2003] didapat dengan melakukan substitusi fungsi volatilitas $\sigma(t,T) = \sigma$ pada persamaan (3.1.36).

$$B(t,T) = \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right]\exp\left[-\int_t^T\left\{\int_0^t\left(\sigma\int_s^u \sigma dv\right)ds\right\}du - \int_t^T\left\{\int_0^t \sigma d\tilde{W}(s)\right\}du\right].$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$B(t,T) = \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right]\exp\left[-\sigma^2\int_t^T\left\{\int_0^t\left(\int_s^u dv\right)ds\right\}du - \sigma\int_t^T\left\{\tilde{W}(t)\right\}du\right].$$

Dengan menyelesaikan perhitungan integral di atas, didapat persamaan harga *ZCB* sebagai

$$B(t,T)=\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right]\exp\left[-\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 Tt(T-t)-\sigma(T-t)\tilde{W}(t)\right\}\right].$$

Setelah membahas penurunan model tingkat bunga *short rate* dan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM satu faktor, maka pada sub bab berikut ini akan dibahas penurunan model tingkat bunga *short rate* dan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM satu faktor Markovian.

3.2 Persamaan Harga *Zero-Coupon Bond* Dari Kerangka Model HJM Satu Faktor Markovian

Telah dijelaskan pada sub bab 3.1 bahwa salah satu input kerangka model HJM adalah fungsi volatilitas *forward rate.* Selain itu dijelaskan juga bahwa model tingkat bunga *short rate* dan persamaan harga *ZCB* yang diturunkan dari kerangka model HJM dapat bersifat non-Markovian atau bergantung pada lintasan. Implementasi model yang bersifat non-Markovian lebih sulit dilakukan dibanding model yang bersifat Markovian . Pada sub bab ini akan ditunjukkan bahwa dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* Ramaprasad Bhar and Carl Chiarella (R-C) [Bhar , 2000] sebagai input untuk kerangka model HJM satu faktor, dapat diturunkan suatu model tingkat bunga *short rate* berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian. Setelah itu akan diturunkan persamaan harga *ZCB* terkait.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai fungsi volatilitas *forward rate* R-C, perlu diingatkan kembali bahwa pada penjelasan di awal sub sub bab 3.1.1, dikatakan bahwa fungsi volatilitas *forward rate* tidak hanya merupakan fungsi waktu t, dan waktu jatuh tempo T, tetapi dapat juga merupakan fungsi tingkat bunga *short rate* $r(t)$ atau *forward rate* $f(t,T)$ yang dinyatakan dengan argumen ketiga $(,.)$. Jadi fungsi volatilitas *forward rate* dapat dinyatakan dengan $\sigma(t,T,r(t))$ atau $\sigma(t,T,f(t,T))$. Untuk fungsi volatilitas *forward rate* R-C selain sebagai fungsi waktu t, waktu jatuh tempo T dan *short rate* $r(t)$, fungsi volatilitas *forward rate* juga dinyatakan sebagai fungsi *forward rate* dengan waktu jatuh tempo tertentu $f(t,\vartheta)$. Pada pembahasan selanjutnya di sub bab ini fungsi volatilitas akan dinyatakan sebagai fungsi dari waktu t, waktu jatuh tempo

T , *short rate* $r(t)$ dan fungsi *forward rate* dengan waktu jatuh tempo tertentu $f(t,\vartheta)$. Dengan kata lain fungsi volatilitas akan ditulis dengan $\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))$. Pembahasan lengkap mengenai proses penurunan model tingkat bunga dan persamaan harga ZCB dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C akan diberikan pada penjelasan berikut.

Fungsi volatilitas *forward rate* R-C untuk kerangka model HJM satu faktor dinyatakan dengan [Bhar, 2000]

$$\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta)) = g(r(t),f(t,\vartheta))e^{-\lambda(T-t)}, 0 \le t \le \vartheta < T, \tag{3.2.1}$$

dimana $g(r(t),f(t,\vartheta))$ merupakan fungsi tingkat bunga *short rate* $r(t)$ dan tingkat bunga *forward rate* $f(t,\vartheta)$, dengan waktu jatuh tempo tertentu ϑ, dan λ adalah suatu konstanta.

Dengan mengacu petunjuk penyelesaian pada [Bhar, 2000], berikut ini akan dijelaskan lebih mendalam bagaimana menurunkan suatu model tingkat bunga *short rate* berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait dari kerangka model HJM satu faktor.

Untuk menurunkan model tingkat bunga *short rate*, pertama-tama tulis kembali persamaan diferensial stokastik kerangka model HJM pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ (lihat persamaan (3.1.28) dengan argumen pada fungsi volatilitas sesuai persamaan (3.2.1), yaitu

$$df(t,T) = \left\{\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))\int_t^T \sigma(t,u,r(t),f(t,\vartheta))du\right\}dt + \sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t).$$

Substitusi $T = u$ pada persamaan (3.2.1) lalu gunakan hasil yang didapat untuk disubstitusikan pada integrand suku pertama ruas kanan persamaan di atas, sehingga persamaan menjadi

$$df(t,T) = \left(\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))\int_t^T g(r(t),f(t,\vartheta))e^{-\lambda(u-t)}du\right)dt$$
$$+\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t). \tag{3.2.2}$$

Karena tidak mengandung variabel u maka $g(r(t),f(t,\vartheta))$ dapat keluar dari tanda integral sehingga persamaan (3.2.2) menjadi

$$df(t,T) = \left(\sigma(t,T,r(t),f(t,\vartheta))g(r(t),f(t,\vartheta))\int_t^T e^{-\lambda(u-t)}du\right)dt$$

$$+\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta)d\tilde{W}(t)\ .$$

Di bawah ini adalah penyelesaian untuk menghitung integral persamaan di atas

$$df(t,T)=\left(\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))g(r(t),\ f(t,\vartheta))\left(\frac{e^{-\lambda(u-t)}}{-\lambda}\bigg|_t^T\right)\right)dt$$

$$+\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ .$$

$$=\left(\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))g(r(t),\ f(t,\vartheta))\left(\frac{e^{-\lambda(T-t)}-1}{-\lambda}\right)\right)dt$$

$$+\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ .$$

$$=\left(\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))g(r(t),\ f(t,\vartheta))\left(\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}\right)\right)dt$$

$$+\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ . \qquad (3.2.3)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.1) pada persamaan (3.2.3) maka persamaan pergerakan *forward rate* dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C adalah

$$df(t,T)=\left(\sigma^2(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))\left(\frac{e^{\lambda(T-t)}-1}{\lambda}\right)\right)dt+\sigma(t,T,r(t),\ f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ .$$

Ambil $T=\vartheta$ maka persamaan pergerakan *forward rate* dengan waktu jatuh tempo ϑ dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$df(t,\vartheta)=\left(\sigma^2(t,\vartheta,r(t),\ f(t,\vartheta))\left(\frac{e^{\lambda(\vartheta-t)}-1}{\lambda}\right)\right)dt+\sigma(t,\vartheta,r(t),\ f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ . \quad (3.2.4)$$

Selanjutnya akan dibahas bagaimana menurunkan model tingkat bunga *short rate* dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C. Untuk itu sesuaikan penulisan argumen fungsi volatilitas persamaan (3.1.31), sehingga persamaan (3.1.31) menjadi

$$dr(t)=\left[\frac{\partial}{\partial t}f(0,t)+\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial\sigma(s,t,r(s),\ f(s,\vartheta)}{\partial t}\int_s^t\sigma(s,u,r(s),\ f(s,\vartheta))du\right)ds\right\}\right]dt$$

$$+\left[\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),\ f(s,\vartheta))ds+\int_0^t\frac{\partial\sigma(s,t,r(s),\ f(s,\vartheta))}{\partial t}d\tilde{W}(s)\right]dt$$

$$+\sigma(t,t,r(t),f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ . \qquad (3.2.5)$$

Ambil $t = s$ dan $T = t$ maka persamaan (3.2.1) dapat ditulis menjadi

$$\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta)) = g(r(s),f(s,\vartheta))e^{-\lambda(t-s)},\ 0 \le s \le \vartheta < t\ . \qquad (3.2.6)$$

Turunan parsial terhadap t dari persamaan (3.2.6) adalah

$$\frac{\partial\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))}{\partial t} = -\lambda g(r(s),f(s,\vartheta))e^{-\lambda(t-s)}\ . \qquad (3.2.7)$$

Dari persamaan (3.,2.6) dan (3.2.7) didapat

$$\frac{\partial\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))}{\partial t} = -\lambda\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))\ .$$

Substitusikan persamaan di atas pada suku ke dua dan suku ke empat ruas kanan persamaan (3.2.5) sehingga didapat

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}f(0,t) - \lambda\left\{\int_0^t\left(\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))\int_s^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta))du\right)ds\right\}\right]dt$$

$$+\left\{\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),f(s,\vartheta))ds\right\}dt - \left\{\lambda\int_0^t\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))d\tilde{W}(s)\right\}dt$$

$$+\sigma(t,t,r(t),f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ .$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}f(0,t) - \lambda\left\{\int_0^t\left(\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))\int_s^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta))du\right)ds\right\}\right]dt$$

$$-\left\{\lambda\int_0^t\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))d\tilde{W}(s)\right\}dt + \left\{\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),f(s,\vartheta))ds\right\}dt$$

$$+\sigma(t,t,r(t),f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\ . \qquad (3.2.8)$$

Tulis kembali persamaan (3.1.29) sebagai

$$r(t) - f(0,t) = \int_0^t\left(\sigma(s,t)\int_s^t\sigma(s,u)du\right)ds + \int_0^t\sigma(s,t)d\tilde{W}(s)\ .$$

Tulis kembali persamaan di atas dengan argumen fungsi volatilitas sesuai dengan persamaan (3.2.1) dimana $t = s$ dan $T = t$, sehingga persamaan menjadi

$$r(t) - f(0,t) = \int_0^t\left(\sigma(s,t,r(s),f(s,\vartheta))\int_s^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta))du\right)ds$$

$$+\int_0^t\sigma_i(s,t,r(s),f(s,\vartheta))d\tilde{W}(s)\ . \qquad (3.2.9)$$

Kalikan kedua ruas persamaan di atas dengan $(-\lambda)$ sehingga persamaan menjadi

$$-\lambda\left\{r(t)-f(0,t)\right\}=-\lambda\int_0^t\left(\sigma(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))\int_s^t\sigma(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))du\right)ds$$

$$-\lambda\int_0^t\sigma_i(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))d\tilde{W}(s).$$

Substitusikan hasil persamaan terakhir di hal 47 pada persamaan (3.2.8) sehingga persamaan (3.2.8) menjadi

$$dr(t)=\left[\frac{\partial}{\partial t}f(0,t)-\lambda\left\{r(t)-f(0,t)\right\}\right]dt+\left\{\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))ds\right\}dt+\sigma(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t).$$

Tulis kembali persamaan di atas sebagai

$$dr(t)=\left[\frac{\partial}{\partial t}f(0,t)-\lambda\left\{r(t)-f(0,t)\right\}+\psi(t)\right]dt+\sigma(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t)\,, \qquad (3.2.10)$$

dimana

$$\psi(t)=\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))ds\,. \qquad (3.2.11)$$

Persamaan (3.2.10) merupakan model tingkat bunga *short rate* dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C.

Untuk menunjukkan bahwa model tingkat bunga *short rate* yang diturunkan dari kerangka model HJM satu faktor merupakan model tingkat bunga *short rate* berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, berikut ini akan ditentukan lebih dulu persamaan diferensial dari $\psi(t)$. Dengan menggunakan Rumus Leibniz (lihat lampiran 2) maka didapat persamaan berikut

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\sigma^2(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))ds+\sigma^2(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))\frac{dt}{dt}-\sigma^2(0,t,r(0),\,f(0,\vartheta))\frac{d0}{dt}.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$d\psi(t)=\left\{2\int_0^t\sigma(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))\frac{\partial\sigma(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))}{\partial t}ds+\sigma^2(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))\right\}dt.$$

Substitusikan (3.2.7) pada suku pertama ruas kanan persamaan di atas, maka didapat

$$d\psi(t)=\left\{-2\lambda\int_0^t\sigma(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(t-s)}ds+\sigma^2(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))\right\}dt.$$

Lalu dengan menggunakan persamaan (3.2.6) pada suku pertama ruas kanan persamaan di atas, maka didapat

$$d\psi(t)=\left\{-2\lambda\int_0^t\sigma^2(s,t,r(s),\,f(s,\vartheta))ds+\sigma^2(t,t,r(t),\,f(t,\vartheta))\right\}dt.$$

Terakhir substitusikan (3.2.11) pada suku pertama ruas kanan persamaan di atas, maka persamaan diferensial dari $\psi(t)$ adalah

$$d\psi(t) = \left\{-2\lambda\psi(t) + \sigma^2(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta))\right\} dt.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$d\psi(t) = \left\{\sigma^2(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta)) - 2\lambda\psi(t)\right\} dt. \qquad (3.2.12)$$

Selanjutnya perhatikan model tingkat bunga *short rate* berupa sistem persamaan diferensial stokastik (3.2.13) berikut yang terdiri dari persamaan(3.2.10), (3.2.4) , dan (3.2.12)

$$\left.\begin{aligned} dr(t) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0,t) - \lambda\left\{r(t) - f(0,t)\right\} + \psi(t)\right]dt + \sigma(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t) \\ df(t,\vartheta) &= \left(\sigma^2(t,\vartheta,r(t),\, f(t,\vartheta))\left(\frac{e^{\lambda(\vartheta-t)}-1}{\lambda}\right)\right)dt + \sigma(t,\vartheta,r(t),\, f(t,\vartheta))d\tilde{W}(t) \\ d\psi(t) &= \left\{\sigma^2(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta)) - 2\lambda\psi(t)\right\}dt \end{aligned}\right\}.$$

(3.2.13)

Akan ditunjukkan sistem persamaan diferensial stokastik (3.2.13) adalah Markovian. Pertama-tama perhatikan persamaan (3.2.12) pada sistem persamaan diferensial stokastik (3.2.13). Persamaan tersebut tidak mengandung komponen stokastik, dan perubahan $\psi(t)$ dapat diprediksi. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Untuk interval waktu Δt tertentu persamaan (3.2.12) dapat ditulis sebagai

$$\psi(t+\Delta t) - \psi(t) = \left\{\sigma^2(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta)) - 2\lambda\psi(t)\right\}\Delta t.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) + \left\{\sigma^2(t,t,r(t),\, f(t,\vartheta)) - 2\lambda\psi(t)\right\}\Delta t.$$

Artinya jika pada waktu t nilai $\psi(t)$, $r(t)$ dan $f(t,\vartheta)$ diketahui maka nilai $\psi(t+\Delta t)$ dapat ditentukan, dengan kata lain perubahan $\psi(t)$ dapat diprediksi. Jadi dapat disimpulkan $\psi(t)$ bersifat Markovian.

Berikutnya perhatikan kedua persamaan diferensial stokastik lainnya pada sistem persamaan diferensial stokastik (3.2.13), yaitu persamaan (3.2.10) dan (3.2.4). Kedua persamaan tersebut merupakan sistem persamaan diferensial stokastik dengan solusi $r(t)$ dan $f(t,\vartheta)$. Menurut teorema (2.4.1) kedua solusi sistem persamaan diferensial stokastik tersebut bersifat Markovian.

Jadi sampai pada tahapan ini model tingkat bunga non-Markovian (lihat persamaan 3.1.31) telah direduksi menjadi model tingkat bunga berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian (3.2.13) yang terdiri dari persamaan diferensial stokastik (3.2.4) , persamaan diferensial stokastik (3.2.10) dan persamaan diferensial (3.2.12).

Pada bagian akhir bab ini akan dibahas proses penurunan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM satu faktor dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C. Tulis kembali persamaan (3.1.36) dengan argumen fungsi volatilitas sesuai dengan persamaan (3.2.1) dimana $t = s$ dan $T = u$ sehingga persamaan (3.1.36) menjadi

$$B(t,T) = \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right]\times$$

$$\exp\left[-\int_t^T\left\{\int_0^t\left(\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta)))\int_s^u\sigma(s,v)dv\right)ds\right\}du - \int_t^T\left\{\int_0^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta)))d\tilde{W}(s)\right\}du\right].$$

Kemudian tulis kembali persamaan di atas dengan argumen fungsi volatilitas sesuai dengan persamaan (3.2.1) dimana $t = s$ dan $T = v$ sehingga persamaan menjadi

$$B(t,T) = \left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right]\times$$

$$\exp\left[-\int_t^T\left\{\int_0^t\left(\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta)))\int_s^u\sigma(s,v,r(s),f(s,\vartheta))dv\right)ds\right\}du - \int_t^T\left\{\int_0^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta)))d\tilde{W}(s)\right\}du\right].$$

(3.2.14)

Untuk menyederhanakan persamaan di atas, misal

$$\sigma^*(s,u,r(s),f(s,\vartheta)) = \sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta))\int_s^u\sigma(s,v,r(s),f(s,\vartheta))dv. \qquad (3.2.15)$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.2.14) sehingga diperoleh persamaan berikut

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\times$$

$$\exp\left\{-\int_t^T\int_0^t\left(\sigma^*(s,u,r(s),f(s,\vartheta))\right)dsdu - \int_t^T\int_0^t\sigma(s,u,r(s),f(s,\vartheta))d\tilde{W}(s)du\right\}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan teorema Fubini (lihat lampiran 3), yaitu tukar urutan integrasi persamaan di atas sehingga persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$B(t,T)=\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\times$$

$$\exp\left\{-\int_0^t\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)duds-\int_0^t\int_t^T\sigma(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))dud\tilde{W}(s)\right\}.$$

(3.2.16)

Dengan menggunakan persamaan (3.2.15) maka $\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)du$ pada ruas kanan persamaan (3.2.16) dapat ditulis menjadi

$$\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)du=\int_t^T\left(\sigma(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\int_s^u\sigma(s,v,r(s),\,f(s,\vartheta))dv\right)du\,.$$

(3.2.17)

Substitusikan $t=s$ dan $T=u$ pada persamaan (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan (3.2.17) sehingga persamaan (3.2.17) menjadi

$$\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)=\int_t^T g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(u-s)}\int_s^u\sigma(s,v,r(s),\,f(s,\vartheta))dvdu.$$

Substitusikan juga $t=s$ dan $T=v$ pada persamaan (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan di atas, sehingga didapat

$$\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)=\int_t^T g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(u-s)}\int_s^u g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(v-s)}dvdu.$$

Uraikan integral dari s sampai u sebagai penjumlahan integral dari s sampai t dan integral dari t sampai u, yaitu

$$\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)du=\int_t^T g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(u-s)}\left\{\int_s^t g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(v-s)}dvdu\right\}$$

$$+\int_t^T g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(u-s)}\left\{\int_t^u g(r(s),\,f(s,\vartheta))e^{-\lambda(v-s)}dvdu\right\}.$$

Karena tidak mengandung variabel v dan u, maka $g(r(s),\,f(s,\vartheta))$ dapat keluar dari tanda integral. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$\int_t^T\left(\sigma^*(s,u,r(s),\,f(s,\vartheta))\right)du=g^2(r(s),\,f(s,\vartheta))\int_t^T e^{-\lambda(u-s)}du\left\{\int_s^t e^{-\lambda(v-s)}dv\right\}$$

$$+g^2(r(s),\,f(s,\vartheta))\int_t^T e^{-\lambda(u-s)}\left\{\int_t^u e^{-\lambda(v-s)}dvdu\right\}.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s),\, f(s,\vartheta))\right) = g^2(r(s),\, f(s,\vartheta))\int_t^T e^{-\lambda(u-s)}du\int_s^t e^{-\lambda(v-s)}dv$$

$$+g^2(r(s),\, f(s,\vartheta))\int_t^T\int_t^u e^{-\lambda(u-s)}e^{-\lambda(v-s)}dvdu. \qquad (3.2.18)$$

Perhatikan $e^{-\lambda(u-s)}$ pada suku pertama ruas kanan persamaan (3.2.18) dan $e^{-\lambda(u-s)}e^{-\lambda(v-s)}$ pada suku ke dua ruas kanan persamaan (3.2.18). Uraikan $e^{-\lambda(u-s)}$ dan $e^{-\lambda(u-s)}e^{-\lambda(v-s)}$ sehingga menjadi

$$e^{-\lambda(u-s)} = e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda(u-t)} \text{ dan } e^{-\lambda(u-s)}e^{-\lambda(v-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}e^{-\lambda(u-t)}e^{-\lambda(v-t)}.$$

Dengan menggunakan persamaan di atas , maka persamaan (3.2.18) dapat ditulis sebagai

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s),\, f(s,\vartheta))\right)du = g^2(r(s),\, f(s,\vartheta))e^{-\lambda(t-s)}\int_t^T e^{-\lambda(u-t)}du\int_s^t e^{-\lambda(v-s)}dv$$

$$+g^2(r(s),\, f(s,\vartheta))e^{-2\lambda(t-s)}\int_t^T\int_t^u e^{-\lambda(u-t)}e^{-\lambda(v-t)}dvdu.$$

$$(3.2.19)$$

Untuk menyelesaikan integral ruas kanan persamaan (3.2.19), buat pemisalan berikut

$$\varphi(t,T) = \int_t^T e^{-\lambda(u-t)}du = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(u-t)}\Big|_t^T = \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(T-t)}+\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda(T-t)}\right). \quad (3.2.20)$$

Hitung integral suku ke dua ruas kanan persamaan (3.2.19) sebagai berikut

$$\int_t^T\int_t^u e^{-\lambda(u-t)}e^{-\lambda(v-t)}dvdu = \int_t^T e^{-\lambda(u-t)}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(v-t)}\Big|_t^u\right)du$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_t^T e^{-\lambda(u-t)}\left(e^{-\lambda(u-t)}-1\right)du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_t^T\left(-e^{-2\lambda(u-t)}+e^{-\lambda(u-t)}\right)du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda(u-t)}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(u-t)}\right)\Bigg|_t^T$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left(e^{-2\lambda(T-t)}-2e^{-\lambda(T-t)}-1+2\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left(e^{-2\lambda(T-t)}-2e^{-\lambda(T-t)}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda(T-t)}\right)^2.$$

Gunakan (3.2.20) pada persamaan di atas, maka integral suku ke dua ruas kanan persamaan (3.2.19) menjadi

$$\int_t^T \int_t^u e^{-\lambda(u-t)} e^{-\lambda(v-t)} dvdu = \frac{1}{2}\varphi^2(t,T). \qquad (3.2.21)$$

Substitusikan persamaan (3.2.20) pada suku pertama ruas kanan persamaan (3.2.19) dan substitusikan (3.2.21) pada suku ke dua ruas kanan persamaan (3.2.19) maka didapat

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s), f(s,\vartheta))\right) du = \varphi(t,T) g^2(r(s), f(s,\vartheta)) e^{-\lambda(t-s)} \int_s^t e^{-\lambda(v-s)} dv$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^2(t,T) g^2(r(s), f(s,\vartheta)) e^{-2\lambda(t-s)}. \qquad (3.2.22)$$

Substitusikan $t = s$ dan $T = u$ pada persamaan (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan (3.2.22) sehingga didapat

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s), f(s,\vartheta))\right) du = \varphi(t,T)\sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta)) g(r(s), f(s,\vartheta)) \int_s^t e^{-\lambda(v-s)} dv$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^2(t,T) g^2(r(s), f(s,\vartheta)) e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Substitusikan juga $t = s$ dan $T = v$ pada persamaan (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan di atas, maka diperoleh

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s), f(s,\vartheta))\right) du = \varphi(t,T)\sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta)) \int_s^t \sigma(s,v,r(s), f(s,\vartheta)) dv$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta)).$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.15) pada suku pertama ruas kanan persamaan di atas, maka persamaan menjadi

$$\int_t^T \left(\sigma^*(s,u,r(s), f(s,\vartheta))\right) = \varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta)$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta)).$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (3.2.16) sehingga diperoleh

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\int_0^t \left[\varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) + \frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta))\right] ds\right\} \times$$
$$\exp\left\{-\int_0^t \int_t^T \sigma(s,u,r(s), f(s,\vartheta)) du d\tilde{W}(s)\right\}.$$

Substitusikan $t = s$ dan $T = u$ pada persamaan (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan di atas sehingga didapat

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\int_0^t \left[\varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) + \frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta))\right] ds\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\int_0^t g(r(s), f(s,\vartheta))\int_t^T e^{-\lambda(u-s)} du d\tilde{W}(s)\right\}.$$

Perhatikan $e^{-\lambda(u-s)} = e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda(u-t)}$, lalu substitusi pada persamaan di atas sehingga menjadi

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\int_0^t \left[\varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) + \frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta))\right] ds\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\int_0^t g(r(s), f(s,\vartheta))e^{-\lambda(t-s)}\int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du d\tilde{W}(s)\right\}.$$

Substitusikan $t = s$ dan $T = t$ pada (3.2.1), lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan di atas, sehingga didapat

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\int_0^t \left[\varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) + \frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta))\right] ds\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\int_0^t \sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta)\int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du d\tilde{W}(s)\right\}.$$

Lalu substitusikan persamaan (3.2.20) pada persamaan di atas sehingga persamaan menjadi

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\int_0^t \left[\varphi(t,T)\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) + \frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta))\right] ds\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\int_0^t \varphi(t,T)\sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta) d\tilde{W}(s)\right\}.$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\int_0^t \sigma^2(s,t,r(s), f(s,\vartheta) ds\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\varphi(t,T)\int_0^t \left[\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) ds + \sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta) d\tilde{W}(s)\right]\right\}.$$

Substitusikan persamaan (3.2.11) pada persamaan di atas, maka di dapat persamaan harga *zero-coupon bond* sebagai berikut

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\psi(t) - \varphi(t,T)\int_0^t \left[\sigma^*(s,t,r(s), f(s,\vartheta) ds + \sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta) d\tilde{W}(s)\right]\right\}.$$

Substitusikan $t = u$ pada persamaan (3.2.15) lalu gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan di atas, sehingga persamaan menjadi

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\psi(t)\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\varphi(t,T)\int_0^t \left[\left\{\sigma(s,u,r(s), f(s,\vartheta))\int_s^u \sigma(s,v,r(s), f(s,\vartheta))dv\right\} ds + \sigma(s,t,r(s), f(s,\vartheta)d\tilde{W}(s)\right]\right\}.$$

(3.2.23)

Kemudian substitusikan $u = v$ pada persamaan (3.2.9) dan gunakan hasilnya untuk disubstitusikan pada persamaan (3.2.23) sehingga didapat persamaan harga *zero-coupon bond* berikut

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \times \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\varphi^2(t,T)\psi(t) - \varphi(t,T)(r(t) - f(0,t))\right]\right\}, \qquad (3.2.24)$$

dengan $\varphi(t,T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)$ yang merupakan persamaan (3.2.20).

Persamaan (3.2.24) merupakan persamaan harga *zero-coupon bond* sebagai fungsi dari waktu t , waktu jatuh tempo T, tingkat bunga *short rate* $r(t)$ dan *forward rate* $f(t,\vartheta)$ dengan waktu jatuh tempo tertentu ϑ. Kemudian $r(t)$, $f(t,\vartheta)$ dan $\psi(t)$ memenuhi sistem persamaan differensial stokastik Markovian (3.2.13) yang terdiri dari persamaan differensial stokastik (3.2.4), (3.2.10) dan (3.2.12).

BAB 4
KERANGKA MODEL HEATH-JARROW-MORTON MULTIFAKTOR MARKOVIAN

Pada bab ini pertama-tama akan dibahas penurunan model tingkat bunga *short rate* dan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model Heath-Jarrow-Morton multifaktor. Akan ditunjukkan model *short rate* dan persamaan harga *ZCB* yang diturunkan dari kerangka model HJM multifaktor dapat bersifat non-Markovian atau bergantung pada lintasan. Implementasi model yang bersifat non-Markovian lebih sulit dilakukan dibanding model yang bersifat Markovian. Pada pembahasan di bab ini akan digunakan generalisasi fungsi volatilitas *forward rate* R-C sebagai input kerangka model HJM multifaktor untuk menurunkan model tingkat bunga sehingga dihasilkan model tingkat bunga berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian, serta persamaan harga *ZCB* terkait. Kerangka model Heath-Jarrow-Morton yang dibahas pada bab ini menggunakan n proses Wiener yang saling bebas, sehingga disebut kerangka model Heath-Jarrow-Morton multifaktor. Berikutnya dengan menentukan fungsi volatilitas *forward rate* tertentu akan diturunkan model tingkat bunga generalisasi Hull-White dan persamaan harga *zero-coupon bond (ZCB)* terkait.

4.1 Persamaan Harga *Zero-Coupon Bond* Dari Kerangka Model Heath-Jarrow-Morton Multifaktor

Konsep dan tahapan penurunan model tingkat bunga dan persamaan harga *ZCB* yang akan dilakukan pada sub bab ini hampir sama dengan konsep dan tahapan penurunan persamaan model tingkat bunga dan harga *ZCB* yang telah dilakukan pada sub bab 3.1 dan sub bab 3.2. Perbedaannya adalah pada bab 3 penurunan persamaan diawali dengan kerangka model HJM satu faktor yang diasumsikan sebagai persamaan *forward rate* pada *probability measure* P di dunia nyata dengan satu proses Wiener sementara pada bab ini penurunan persamaan diawali dengan kerangka model HJM multifaktor yang diasumsikan sebagai persamaan *forward rate* pada *probability measure* P di dunia nyata dengan n proses Wiener yang saling bebas. Kemudian dengan menggunakan suatu persamaan yang menyatakan relasi antara harga ZCB dan *forward rate* (persamaan (2.5.4)) akan diturunkan dinamika harga *ZCB*. Tetapi dinamika harga *ZCB* dapat juga dinyatakan sebagai model kontinu yang mengikuti proses Ito, sehingga dengan menggunakan lemma Ito dapat diturunkan dinamika harga *ZCB* berdasarkan lemma Ito. Kemudian dengan menggunakan dinamika harga *ZCB* yang diturunkan dari persamaan (2.5.4) dan dinamika harga *ZCB* berdasarkan lemma Ito tersebut dapat diturunkan dinamika harga *zero-coupon bond* yang memenuhi proses Ito dan dinyatakan dalam *short rate* , koefisien *drift forward rate* dan fungsi volatilitas *forward rate*.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang hal di atas perlu dijelaskan lebih dahulu tentang ruang probabilitas ketidakpastian ekonomi tingkat bunga. Asumsikan suatu perdagangan ekonomi yang kontinu pada interval waktu perdagangan $\left[0,\tau\right]$ untuk $\tau > 0$, τ tetap, dan suatu perdagangan c*ontinuum default free zero-coupon bond* $\left\{B(t,T): 0 \le t \le T \le \tau\right\}$. $B(t,T)$ adalah harga *ZCB* pada waktu t dengan waktu jatuh tempo T (lihat definisi 2.5.1). Ketidakpastian perekonomian didekati dengan suatu ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, dengan Ω adalah ruang sampel, $\mathcal{F}$ adalah σ *-field* yang merupakan *measurable events* dan P adalah suatu *probability measure* pada dunia nyata. Perubahan informasi pada interval waktu perdagangan dinyatakan dengan filtrasi $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\ge 0}$ yang dibangun oleh proses Wiener berdimensi $n \ge 1$ yaitu $\boldsymbol{W}(t) = \left\{W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t)\right\}_{0\le t\le \tau}$ dimana $W_i(t)$, $W_j(t)$; $i, j = 1,...,n$ saling bebas [Sen, 2000].

Untuk setiap waktu jatuh tempo T yang tetap, kerangka model HJM multifaktor $\left\{ f(t,T): 0 \le t \le T \le \tau\right\}$ diasumsikan sebagai suatu persamaan integral stokastik *forward rate* pada *probability measure* P sebagai berikut

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s,T)dW_i(s), \forall t \in \left[0,T\right]. \qquad (4.1.1)$$

Turunan persamaan (4.1.1) terhadap t dapat dinyatakan dengan

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)dW_i(t), \forall t \in [0,T], \tag{4.1.2}$$

dimana :

- $\alpha(t,T)$ adalah koefisien *drift forward rate* dan $\sigma_i(t,T)$, $i = 1,...,n$ adalah fungsi volatilitas *forward-rate* untuk proses Wierner ke i, $i = 1,...,n$. Secara ekonomi $\alpha(t,T)$ adalah ekspektasi pergerakan tingkat bunga persatuan waktu dan $\sigma_i(t,T)$ adalah ukuran ketidakpastian pergerakan tingkat bunga persatuan waktu yang diakibatkan oleh proses Wiener ke i, $i = 1,...,n$.
- Untuk setiap T yang tetap dan $T \le \tau$, diasumsikan proses stokastik $\{\alpha(t,T), 0 \le t \le T\}$, dan $\{\sigma_i(t,T), 0 \le t \le T\}$, $i = 1,...,n$ adalah *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$.
- $\int_0^T |\alpha(t,T)| dt < +\infty$ dan $\int_0^T \sigma_i^2(t,T)dt < +\infty$ untuk i, $i = 1,...,n$.

Untuk menentukan persamaan harga *zero-coupon bond* dari kerangka model HJM multifaktor, gunakan persamaan yang menyatakan relasi harga *zero-coupon bond* dan *forward rate* (persamaan (2.5.4)) berikut ini

$$B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\}.$$

Dengan menggunakan proses penurunan yang serupa dengan proses yang dilakukan pada kerangka model HJM satu faktor (lihat hal 27-28) akan diperoleh dinamika harga *zero-coupon bond* yang dinyatakan dalam *short rate* , $r(t)$, koefisien *drift forward rate,* $\alpha(t,u)$ dan fungsi volatilitas *forward rate,* $\sigma_i(t,u), i = 1,2,...,n$ sebagai berikut

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left\{r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)du\right\}dt - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right)dW_i(t). \tag{4.1.3}$$

(lihat persamaan (3.1.5) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor).

Tetapi dinamika harga *zero-coupon bond* dapat juga dinyatakan sebagai model kontinu yang mengikuti proses Ito dengan persamaan diferensial stokastik berikut [Bjork, 2003]:

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \alpha_B(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}(t,T)dW_i(t) \qquad (4.1.4)$$

(lihat persamaan (3.1.6) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor), dimana $\alpha_B(t,T)$ menyatakan koefisien *drift* , $\sigma_{iB}(t,T), i = 1,2,...,n$ menyatakan fungsi volatilitas harga *zero-coupon bond* yang berhubungan dengan proses Wiener ke-*i*, $i = 1,2,...,n$. $\alpha_B(t,T)$ dapat juga dinyatakan sebagai ekpektasi tingkat pengembalian (*rate of return*) harga *zero-coupon bond* persatuan waktu dan $\sigma_{iB}(t,T)$ adalah ukuran ketidakpastian tingkat pengembalian harga *zero-coupon bond* persatuan waktu yang diakibatkan oleh proses Wiener ke i, $i = 1,...,n$.

Berikutnya dengan menggunakan lemma Ito dapat ditentukan dinamika harga *ZCB* berdasarkan lemma Ito berikut

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left\{ \alpha_B(t,T) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \sigma_{iB}^2(t,T) \right\} dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}(t,T)dW_i(t) \,. \qquad (4.1.5)$$

(lihat persamaan (3.1.11) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor).

Dari persamaan (4.1.5) dan (4.1.3) akan didapat hubungan antara fungsi volatilitas harga *zero-coupon bond* dengan fungsi volatilitas *forward rate*. Atau dengan kata lain, untuk setiap $i = 1,2,...,n$ akan didapat hubungan antara $\sigma_{iB}(t,T)$ dengan $\sigma_i(t,T)$ (lihat persamaan (4.1.6)). Selain itu didapat juga hubungan antara koefisien *drift* harga *zero-coupon bond* dengan koefisien *drift forward rate* dan *short rate* (lihat persamaan (4.1.7)). Hubungan ini dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\sigma_{iB}(t,T) = -\int_t^T \sigma_i(t,u)du, i = 1,2,...,n \qquad (4.1.6)$$

(lihat persamaan (3.1.12) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor) dan

$$\alpha_B(t,T) = r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}^2(t,T) \,.$$

Substitusikan persamaan (4.1.6) pada persamaan di atas maka didapat

$$\alpha_B(t,T) = r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right)^2, i = 1, 2, ..., n. \qquad (4.1.7)$$

(lihat persamaan (3.1.13) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor). Dengan mensubstitusikan persamaan (4.1.6) dan (4.1.7) pada persamaan (4.1.4) maka dinamika harga *zero-coupon bond* yang mengikuti proses Ito dalam koefisien *drift* dan fungsi volatilitas *forward rate*, serta *short rate* dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left[r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right)^2 \right] dt - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right) dW_i(t) \right].$$

Setelah menurunkan dinamika harga *zero-coupon bond* yang mengikuti proses Ito dan dinyatakan dalam koefisien *drift* dan fungsi volatilitas *forward rate* serta *short rate*, pembahasan selanjutnya adalah mengenai batasan yang harus dipenuhi koefisien *drift forward rate* agar dapat dihasilkan harga *ZCB* yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* dan *risk- neutral*. Untuk mendapatkan harga *ZCB* yang memenuhi kondisi *no-arbitrage* maka harus dipenuhi lebih dulu kondisi *no-arbitrage*. Sebelum membahas kondisi ini lebih lanjut berikut ini akan dibahas mengenai dinamika harga relatif *bond* untuk kasus kerangka model HJM multifaktor.

Dinamika harga relatif *bond* $Z(t,T)$ dengan n proses Wiener pada *probability measure* P dinyatakan dengan

$$dZ(t,T) = Z(t,T)\left[\left\{\alpha_B(t,T) - r(t)\right\} dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}(t,T)dW_i(t) \right]. \qquad (4.1.8)$$

Persamaan (4.1.8) identik dengan persamaan (3.1.16) untuk kasus kerangka model HJM satu faktor. Kemudian pandang n *zero-coupon bond* dengan waktu jatuh tempo $T_1, T_2, ..., T_n$, maka dinamika harga relatif *bond* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\left.\begin{aligned} dZ(t,T_1) &= Z(t,T_1)\left[\left\{\alpha_B(t,T_1)-r(t)\right\}dt+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{iB}(t,T_1)dW_i(t)\right] \\ dZ(t,T_2) &= Z(t,T_2)\left[\left\{\alpha_B(t,T_2)-r(t)\right\}dt+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{iB}(t,T_2)dW_i(t)\right] \\ &\dots \\ dZ(t,T_n) &= Z(t,T_n)\left[\left\{\alpha_B(t,T_n)-r(t)\right\}dt+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{iB}(t,T_n)dW_i(t)\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.9)$$

Persamaan (4.1.9) akan dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks. Pandang himpunan dari proses $Z(t,T_i)$, yaitu $\left\{Z(t,T_i): 0 \le t \le T_i, i=1,2,...,n\right\}$ sebagai vektor kolom berdimensi n, yaitu $Z(t;T_1,T_2,...,T_n)=(Z(t,T_1),Z(t,T_2),...,Z(t,T_n))^t$. Vektor kolom berdimensi n lainnya adalah

$A(t;T_1,T_2,...,T_n)=(\alpha_B(t,T_1)-r(t),\alpha_B(t,T_2)-r(t),...,\alpha_B(t,T_n)-r(t))^t$ dan

$\boldsymbol{W}(t)=\left(W_1(t),W_2(t),...,W_n(t)\right)^t$. Kemudian $\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)$ adalah matriks ukuran $n \times n$, yaitu

$$\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)=\begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & \dots & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & \dots & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1B}(t,T_n) & \sigma_{2B}(t,T_n) & \dots & \sigma_{nB}(t,T_n) \end{bmatrix}$$, dan matriks diagonal

$$diag\left\{Z(t;T_1,T_2,...,T_n)\right\}=\begin{bmatrix} Z(t,T_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z(t,T_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z(t,T_n) \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan matriks-matriks di atas maka dinamika harga relatif *bond* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda (4.1.9) dapat ditulis sebagai persamaan matriks berikut

$$dZ(t;T_1,T_2,...,T_n)=diag\left\{Z(t;T_1,T_2,...,T_n)\right\}\left[A(t;T_1,T_2,...,T_n)dt+\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)d\boldsymbol{W}(t)\right]. \qquad (4.1.10)$$

Untuk waktu waktu jatuh tempo $T_1,T_2,...,T_n$, asumsikan ada suatu fungsi

$$\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)=\left(\lambda_1(t;T_1,T_2,...,T_n),\lambda_2(t;T_1,T_2,...,T_n),...,\lambda_n(t;T_1,T_2,...,T_n)\right)^t$$

sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n) = \sigma_B^{-1}(t;T_1,T_2,...,T_n)A(t;T_1,T_2,...,T_n)\,. \qquad (4.1.11)$$

Dengan asusi proses stokastik $\left\{\alpha(t,T), 0 \le t \le T_j\right\}$ dan $\left\{\sigma_i(t,T), 0 \le t \le T_j\right\}$; $i, j = 1,...,n$ adalah *adapted* pada filtrasi $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\ge 0}$ maka berdasarkan persamaan (4.1.6), (4.1.7) dan (4.1.11), $\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)$ juga diasumsikan *adapted* pada filtrasi $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\ge 0}$ (lihat hal 33 untuk kasus kerangka model HJM satu faktor). Fungsi $\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)$ disebut *market price of risk* dan $\lambda_i(t;T_1,T_2,...,T_n)$ adalah *market price of risk* yang berhubungan dengan proses Wiener ke-*i*, $i = 1,2,...,n$.

Selanjutnya persamaan (4.1.11) dapat ditulis kembali sebagai

$$A(t;T_1,T_2,...,T_n) = \sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n) \qquad (4.1.12)$$

atau

$A(t;T_1,T_2,...,T_n) - \sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n) = \mathbf{0}$. Dalam bentuk matriks persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \alpha_B(t,T_1) - r(t) \\ \alpha_B(t,T_2) - r(t) \\ \cdots \\ \alpha_B(t,T_n) - r(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & \cdots & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & \cdots & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1B}(t,T_n) & \sigma_{2B}(t,T_n) & \cdots & \sigma_{nB}(t,T_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t;T_1,T_2,...,T_n) \\ \lambda_2(t;T_1,T_2,...,T_n) \\ \cdots \\ \lambda_n(t;T_1,T_2,...,T_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(4.1.13)

Dengan memperhatikan sistem persamaan linier homogen di atas asumsi (4.1.11) untuk keberadaan *market price of risk* terpenuhi jika matriks $\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)$ non singular. Selanjutnya substitusikan persamaan (4.1.12) pada persamaan (4.1.10) sehingga didapat

$$dZ(t;T_1,T_2,...,T_n) = diag\left\{Z(t;T_1,T_2,...,T_n)\right\}\left[\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)dt + \sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)d\boldsymbol{W}(t)\right].$$

Berikutnya persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$dZ(t;T_1,T_2,...,T_n) = diag\left\{Z(t;T_1,T_2,...,T_n)\right\}\left[\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)\left\{d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)dt\right\}\right] \qquad (4.1.14)$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai *market price of risk* $\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n)$ untuk *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda, apakah *market price of risk* tersebut juga berbeda. Penjelasan tentang *market price of risk* adalah sebagai berikut.

Seperti untuk kasus satu faktor dimana portofolio yang dibuat terdiri dari 2 jenis *ZCB* dengan waktu jatuh tempo berbeda, untuk kasus n faktor ini buat portofolio yang terdiri dari $(n+1)$ *ZCB* dengan waktu jatuh tempo yang berbeda, dimana n adalah banyaknya proses Wiener. Banyaknya *ZCB* dengan waktu jatuh tempo T_i dinyatakan dengan θ_i dan portofolio dapat ditulis sebagai berikut

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k B(t,T_k)$$

Perubahan nilai portofolio dalam interval waktu dt adalah

$$d\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k dB(t,T_k)\,. \tag{4.1.15}$$

Perhatikan persamaan (4.1.4), untuk waktu jatuh tempo $T = T_k$ persamaan tersebut dapat ditulis kembali sebagai

$$dB(t,T_k) = \alpha_B(t,T_k)B(t,T_k)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}(t,T_k)B(t,T_k)dW_i(t)\,.$$

Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (4.1.15)

$$d\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k \left\{ \alpha_B(t,T_k)B(t,T_k)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iB}(t,T_k)B(t,T_k)dW_i(t) \right\}.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$d\Pi = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k \alpha_B(t,T_k)B(t,T_k) \right\} dt + \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \theta_k \sigma_{iB}(t,T_k)B(t,T_k)dW_i(t) \right\}.$$

Tukar urutan penjumlahan suku kedua ruas kanan persamaan di atas menjadi

$$d\Pi = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \theta_k \alpha(t,T_k)B(t,T_k) \right] dt + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \theta_k \sigma_{iB}(t,T_k)B(t,T_k) \right] dW_i(t)\,. \tag{4.1.16}$$

Untuk menghilangkan risiko tingkat bunga asumsikan ada θ_k, $k = 1,2,...,n$ sedemikian sehingga koefisien $dW(t)$ menjadi 0, yaitu

$$\sum_{k=1}^{n+1} \theta_k B(t,T_k)\sigma_{iB}(t,T_k) = 0\,, \text{ untuk } i = 1,2,...,n \tag{4.1.17}$$

Sekarang persamaan (4.1.16) menjadi

$$d\Pi = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k \alpha_B(t,T_k)B(t,T_k) \right\} dt\,. \tag{4.1.18}$$

Persamaan di atas tidak lagi mempunyai koefisien difusi dan perubahan $d\Pi$ dapat diprediksi (*predictable*). Kemudian agar portofolio memenuhi kondisi *no-arbitrage* maka menurut [Bjork, 2003] harus dipenuhi

$$d\Pi = r(t)\Pi dt .$$

Substitusikan $\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k B(t,T_k)$ pada persamaan di atas maka didapat

$$d\Pi = r(t)\left\{\sum_{k=1}^{n+1} \theta_k B(t,T_k)\right\} dt . \tag{4.1.19}$$

Dari persamaan (4.1.18) dan (4.1.19) didapat

$$\sum_{k=1}^{n+1} \theta_k B(t,T_k)\left\{\alpha_B(t,T_k) - r(t)\right\} = 0 . \tag{4.1.20}$$

Berikutnya tulis persamaan (4.1.17) dan (4.1.20) sebagai sistem persamaan linier homogen yang dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \dots & \sigma_{1B}(t,T_{n+1}) \\ \sigma_{2B}(t,T_1) & \dots & \sigma_{2B}(t,T_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{nB}(t,T_1) & \dots & \sigma_{nB}(t,T_{n+1}) \\ \alpha_B(t,T_1)-r(t) & \dots & \alpha_B(t,T_{n+1})-r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 B(t,T_1) \\ \theta_2 B(t,T_2) \\ \dots \\ \theta_{n+1} B(t,T_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Misal $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \dots & \sigma_{1B}(t,T_{n+1}) \\ \sigma_{2B}(t,T_1) & \dots & \sigma_{2B}(t,T_{n+1}) \\ & \dots & \\ \sigma_{nB}(t,T_1) & \dots & \sigma_{nB}(t,T_{n+1}) \\ \alpha_B(t,T_1)-r(t) & \dots & \alpha_B(t,T_{n+1})-r(t) \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \theta_1 B(t,T_1) \\ \theta_2 B(t,T_2) \\ \dots \\ \theta_{n+1} B(t,T_{n+1}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.

Kemudian pandang sistem persamaan homogen $\boldsymbol{Ub} = \mathbf{0}$,dimana $\mathbf{0}$ adalah matriks kolom nol. Khusus untuk persamaan di atas matriks kolom nol berukuran $((n+1)\times 1)$. Karena $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ maka sistem persamaan ini punya solusi jika $\boldsymbol{U}$ singular. Sebab jika $\boldsymbol{U}$ non singular maka ada $\boldsymbol{U}^{-1}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{U}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, yang kontradiksi dengan asumsi $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. Agar matriks $\boldsymbol{U}$ singular maka baris terakhir dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari baris-baris lainnya. Dengan demikian ada $c_i(t)$, $i = 1,2,...,n$ sedemikian sehingga

$$\left[\alpha_B(t,T_1)-r(t) \quad \ldots \quad \alpha_B(t,T_{n+1})-r(t)\right]=c_1(t)\left[\sigma_{1B}(t,T_1) \quad \ldots \quad \sigma_{1B}(t,T_{n+1})\right]$$

$$+c_2(t)\left[\sigma_{2B}(t,T_1) \quad \ldots \quad \sigma_{2B}(t,T_{n+1})\right]+\ldots+c_n(t)\left[\sigma_{nB}(t,T_1) \quad \ldots \quad \sigma_{nB}(t,T_{n+1})\right].$$

Dari persamaan di atas didapat persamaan berikut

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_B(t,T_1)-r(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\sigma_{iB}(t,T_1) \\ \alpha_B(t,T_2)-r(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\sigma_{iB}(t,T_2) \\ \ldots \\ \alpha_B(t,T_{n+1})-r(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\sigma_{iB}(t,T_{n+1}) \end{array}\right\}. \qquad (4.1.21)$$

Dengan memperhatikan persamaan di atas, besaran $c_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ tidak tergantung pada waktu jatuh tempo harga *ZCB* T_k, $k=1,2,\ldots,n+1$. Selanjutnya persamaan (4.1.21) dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \alpha_B(t,T_1)-r(t) \\ \alpha_B(t,T_2)-r(t) \\ \ldots \\ \alpha_B(t,T_{n+1})-r(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{1B}(t,T_{n+1}) & \sigma_{2B}(t,T_{n+1}) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_{n+1}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \ldots \\ c_n(t) \end{bmatrix}.$$

Persamaan matriks di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{bmatrix} \alpha_B(t,T_1)-r(t) \\ \alpha_B(t,T_2)-r(t) \\ \ldots \\ \alpha_B(t,T_n)-r(t) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{1B}(t,T_n) & \sigma_{2B}(t,T_n) & \ldots & \sigma_{nB}(t,T_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \ldots \\ c_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan membandingkan persamaan di atas dan persamaan (4.1.13) maka didapat

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \ldots \\ c_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \\ \lambda_2(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \\ \ldots \\ \lambda_n(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \end{bmatrix}.$$

Karena $c_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ tidak bergantung pada waktu jatuh tempo *ZCB* maka

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \\ \lambda_2(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \\ \ldots \\ \lambda_n(t;T_1,T_2,\ldots,T_n) \end{bmatrix}$$

juga tidak bergantung pada waktu jatuh tempo *ZCB*. Jadi *market price of risk*

$$\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n) = \left(\lambda_1(t;T_1,T_2,...,T_n),\lambda_2(t;T_1,T_2,...,T_n),...,\lambda_n(t;T_1,T_2,...,T_n)\right)^t$$

dapat dinyatakan hanya sebagai fungsi waktu t, yaitu $\boldsymbol{\lambda}(t)$.

Setelah membahas dinamika harga relatif dan *market price of risk*, berikutnya akan dilanjutkan pembahasan mengenai asumsi kondisi *no-arbitrage*. Kondisi *no-arbitrage* terpenuhi jika dapat ditentukan suatu *equivalent matrtingale measure* (EMM) untuk harga relatif (Pernyataan mengenai hal ini selengkapnya terdapat pada teorema 2.6.1). EMM untuk harga relatif ditentukan dengan menggunakan teorema 2.6.4. Penjelasan mengenai penentuan EMM ini adalah sebagai berikut. Perhatikan persamaan (4.1.14) dimana $\boldsymbol{W}(t)$ adalah proses Wiener pada *probability measure* P dan $\boldsymbol{\lambda}(t;T_1,T_2,...,T_n) = \boldsymbol{\lambda}(t)$ *adapted* pada filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t<T}$ serta asumsikan $E_{\mathrm{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\lambda}^2(s)ds\right)\right] < \infty$ maka berdasarkan teorema 2.6.4 (i) terdapat *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen dengan *probability measure* P dan berdasarkan teorema (2.6.4) (iii)

$$d\tilde{\boldsymbol{W}}(t) = d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t)dt. \tag{4.1.22}$$

Substitusikan hasil ini pada persamaan (4.1.14) akan didapat

$$dZ(t;T_1,T_2,...,T_n) = diag\left\{Z(t;T_1,T_2,...,T_n)\right\}\left[\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)d\tilde{\boldsymbol{W}}(t)\right], \tag{4.1.23}$$

dimana $\tilde{\boldsymbol{W}}(t)$ adalah prosesWiener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ dan $d\tilde{\boldsymbol{W}}(t)$ adalah perubahan prosesWiener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$.

Persamaan (4.1.23) merupakan dinamika harga relatif *bond* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Tulis persamaan (4.1.23) sebagai

$$\left.\begin{array}{c} dZ(t,T_1) = Z(t,T_1)\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T_1)d\tilde{W}_i(t) \\ dZ(t,T_2) = Z(t,T_2)\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T_2)d\tilde{W}_i(t) \\ \cdots \\ dZ(t,T_n) = Z(t,T_n)\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T_n)d\tilde{W}_i(t) \end{array}\right\}.$$

Dengan memperhatikan persamaan di atas, untuk setiap $i, j = 1, 2, ..., n$

$$dZ(t,T_j) = Z(t,T_j)\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T_j)d\tilde{W}_i(t)$$

memenuhi persamaan (2.6.2). Sehingga untuk setiap waktu jatuh tempo $T_1, T_2, ..., T_n$ harga relatif *bond* adalah suatu *exponential martingale* . Jadi sampai pada tahapan ini telah ditentukan suatu harga relatif *bond* yang *martingale* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$. Dengan demikian telah dipenuhi asumsi kondisi *no-arbitrage* .

Kemudian agar dapat dihasilkan harga *ZCB* yang memenuhi kondisi *risk-neutral* maka harus dipenuhi lebih dulu kondisi *risk- neutral*. *S*esuai dengan definisi 2.6.4 *probability measure* $\mathbb{Q}$ yang ekivalen *probability measure* P dimana harga relatif *martingale* disebut *risk-neutral measure*. Pada *risk-neutral measure* $\mathbb{Q}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ $\alpha_B(t,T_i) = r(t)$ [Glasserman, 2000]. Substitusikan hasil ini pada persamaan (4.1.13) maka persamaan menjadi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & ... & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & ... & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{1B}(t,T_n) & \sigma_{2B}(t,T_n) & ... & \sigma_{nB}(t,T_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t;T_1,T_2,...,T_n) \\ \lambda_2(t;T_1,T_2,...,T_n) \\ ... \\ \lambda_n(t;T_1,T_2,...,T_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.1.24}$$

dimana $\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n) = \begin{bmatrix} \sigma_{1B}(t,T_1) & \sigma_{2B}(t,T_1) & ... & \sigma_{nB}(t,T_1) \\ \sigma_{1B}(t,T_2) & \sigma_{2B}(t,T_2) & ... & \sigma_{nB}(t,T_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{1B}(t,T_n) & \sigma_{2B}(t,T_n) & ... & \sigma_{nB}(t,T_n) \end{bmatrix}$ maka persamaan (4.1.24) dapat dinyatakan dengan $\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0}$. Karena $\sigma_B(t;T_1,T_2,...,T_n)$ non singular maka ada $\sigma_B^{-1}(t;T_1,T_2,...,T_n)$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{\lambda}(t) = \sigma_B^{-1}(t;T_1,T_2,...,T_n)\mathbf{0} = \mathbf{0}$ atau dengan kata lain *market price of risk* $\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0}$. Substitusikan hasil yang telah didapat pada persamaan (4.1.22) sehingga diperoleh $d\tilde{\boldsymbol{W}}(t) = d\boldsymbol{W}(t)$, dengan kata lain perubahan proses Wiener pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ sama dengan perubahan proses Wiener pada *probability measure* P.

Setelah selesai membahas kondisi *no-arbitrage* dan *risk-neutral*, pembahasan selanjutnya mengenai batasan *drift forward rate* pada *probability* *measure* $\mathbb{Q}$. Pertama-tama untuk sebarang waktu jatuh tempo T substitusikan $\alpha_B(t,T) = r(t)$ pada persamaan (4.1.7) maka diperoleh hasil

$$\int_t^T \alpha(t,u)du = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right)^2 .$$

Turunan parsial persamaan di atas terhadap T menghasilkan

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_i(t,u)du . \qquad (4.1.25)$$

Jadi untuk memenuhi kondisi *no-arbitrage* pada *risk-neutral measure* $\mathbb{Q}$, koefisien *drift forward rate* $\alpha(t,T)$ harus memenuhi batasan yang dinyatakan pada persamaan (4.1.25) untuk setiap t dan $T \geq t$.

Proses selanjutnya adalah menurunkan model *short rate* dan persamaan harga *ZCB* dari kerangka model HJM multifaktor. Substitusikan persamaan di atas pada persamaan (4.1.1) maka kerangka model HJM multifaktor pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left(\sigma_i(s,T)\int_s^T \sigma_i(s,u)du\right)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s,T)d\tilde{W}_i(s) . \qquad (4.1.26)$$

Selanjutnya dengan melakukan substitusi persamaan (4.1.25) pada persamaan (4.1.2), didapat persamaan pergerakan *forward rate* pada *probability measure* $\mathbb{Q}$ sebagai berikut

$$df(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_i(t,u)du\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)d\tilde{W}_i(t) . \qquad (4.1.27)$$

Dengan substitusi $T = t$ pada persamaan (4.1.26) didapat persamaan *short rate* dari kerangka model HJM multifaktor, yaitu

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t,t) \\ &= f(0,t) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s,t)d\tilde{W}_i(s) . \end{aligned} \qquad (4.1.28)$$

Persamaan model tingkat bunga *short rate* dinyatakan dengan menurunkan persamaan di atas terhadap t

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0,t)dt + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^t \sigma_i(s,t)d\tilde{W}_i(s)\right\}\right]dt.$$

Perhatikan suku ke tiga pada ruas kanan persamaan di atas dimana variabel t muncul sebagai batas atas integrasi dan dalam integrand $\sigma_i(s,t)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Dengan menguraikan diferensial suku ketiga ruas kanan, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0,t)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial \sigma_i(s,t)}{\partial t} d\tilde{W}_i(s)\right]dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \sigma_i(s,t)d\tilde{W}_i(s)dt.$$

Lalu dengan menggunakan teorema dasar kalkulus (lihat lampiran 1), persamaan di atas akan menjadi

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0,t)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial \sigma_i(s,t)}{\partial t} d\tilde{W}_i(s)\right]dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,t)d\tilde{W}_i(t). \tag{4.1.29}$$

Gunakan Rumus Leibniz (lihat lampiran 2) pada diferensial parsial suku kedua ruas kanan persamaan di atas, sehingga suku kedua ruas kanan dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t \frac{\partial\left\{\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right\}ds}{\partial t} + \sigma_i(t,t)\int_t^t \sigma_i(t,u)du\frac{\partial t}{\partial t} - \left\{\sigma_i(0,t)\int_0^t \sigma_i(0,u)du\frac{\partial 0}{\partial t}\right\}\right].$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t \frac{\partial\left\{\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right\}ds}{\partial t}\right].$$

Uraikan diferensial parsial pada ruas kanan persamaan di atas sehingga persamaan menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t \frac{\partial\{\sigma_i(s,t)\}}{\partial t}\int_s^t \sigma_i(s,u)duds + \int_0^t \sigma_i(s,t)\frac{\partial \int_s^t \sigma_i(s,u)du}{\partial t}ds\right].$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\sigma_i(s,t)\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t \frac{\partial\{\sigma_i(s,t)\}}{\partial t}\int_s^t \sigma_i(s,u)duds + \int_0^t \sigma^2{}_i(s,t)ds\right].$$

Substitusikan hasil persamaan di atas pada persamaan (4.1.29) maka didapat

$$dr(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial \sigma_i(s,t)}{\partial t}\int_s^t \sigma_i(s,u)du\right)ds + \int_0^t \sigma_i^2(s,t)ds\right\}dt$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial \sigma_i(s,t)}{\partial t}d\tilde{W}_i(s)\right\}dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,t)d\tilde{W}_i(t). \qquad (4.1.30)$$

Keempat suku pada ruas kanan dapat diinterpretasikan sebagai berikut. $\frac{\partial}{\partial t}f(0,t)$ pada suku pertama menyatakan ukuran kemiringan (*slope*) dari kurva nilai awal *forward rate*, yang memberikan kontribusi pada *drift* $r(t)$. $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(t,t)dt$ pada suku terakhir menyatakan variansi dari $dr(t)$ (lihat keterangan di bawah definisi (2.4.1)). Kemudian $\sigma_i(s,t), s < t$, $i = 1.2,...,n$ pada suku kedua dan ketiga dapat bergantung pada suatu variabel random (lihat pada awal pembahasan sub sub bab.3.1.1 hal 26) sehingga $\sigma_i(s,t), s < t$, $i = 1.2,...,n$ dapat tergantung pada nilai variabel random yang diamati pada waktu-waktu sebelum t sehingga hal ini dapat menyebabkan $r(t)$ bersifat non-Markovian. Jika untuk setiap $i = 1.2,...,n$, $\sigma_i(s,t)$ hanya tergantung pada s dan t maka suku ketiga merupakan satu-satunya penyebab proses $r(t)$ bersifat non-Markovian karena untuk setiap $i = 1.2,...,n$ suku tersebut tergantung juga pada nilai $d\tilde{W}_i(s)$, $s < t$. Jadi jika fungsi volatilitas $\sigma_i(s,t), s < t$, $i = 1.2,...,n$ tidak konstan, maka persamaan (4.1.30) memperlihatkan bahwa koefisien *drift* dari $r(t)$ bergantung lintasan karena melibatkan seluruh lintasan proses Wiener $\tilde{W}_i(s)$, $i = 1.2,...,n$ antara waktu 0 sampai waktu t, Atau dengan kata lain model tingkat bunga yang diturunkan dari kerangka model HJM bersifat non-Markovian.

Setelah selesai proses menurunkan model tingkat bunga, tahapan berikutnya adalah proses untuk menurunkan persamaan harga *ZCB*, perhatikan kembali persamaan (3.1.3), yaitu

$$\ln B(t,T) = -\int_t^T f(t,u)du.$$

Lalu perhatikan proses penurunan persamaan (3.1.32) sampai (3.1.36). Dengan proses penurunan yang sama dengan yang dilakukan pada HJM satu faktor maka didapat persamaan harga *ZCB* berikut yang diturunkan dari kerangka model HJM multifaktor

$$B(t,T)=\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\times\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\int_0^t\sigma_i^*(s,u)dsdu-\sum_{i=1}^{n}\int_t^T\int_0^t\sigma_i(s,u)d\tilde{W}_i(s)du\right\},$$

(4.1.31)

dimana

$$\sigma_i^*(s,u)=\sigma_i(s,u)\int_s^u\sigma_i(s,v)dv,\; i=1.2,...,n.$$

(4.1.32)

Perhatikan persamaan (4.1.31). Seperti penjelasan untuk model tingkat bunga pada halaman 70, maka untuk persamaan (4.1.31) dapat dijelaskan sebagai berikut. $\sigma_i(s,u), s<u<t$, $i=1.2,...,n$ dapat tergantung pada variabel random yang dinyatakan sebagai argumen ketiga (lihat penjelasan di awal sub sub bab 3.1.1) sehingga $\sigma_i(s,u), s<u<t$, $i=1.2,...,n$ pada ruas kanan persamaan (4.1.31) dapat tergantung pada nilai variabel stokastik yang diamati pada waktu-waktu sebelum t. Kemudian jika untuk setiap $i=1.2,...,n$, $\sigma_i(s,u)$ hanya tergantung pada s dan u, $s<u<t$ maka karena suku kedua ruas kanan persamaan (4.1.31) yang merupakan pangkat dari exponen melibatkan perhitungan $d\tilde{W}_i(s)$, $s<t$, $i=1.2,...,n$ berarti persamaan (4.1.31) tersebut bergantung lintasan karena melibatkan seluruh lintasan proses Wiener $\tilde{W}_i(s)$, $i=1.2,...,n$ antara waktu 0 sampai waktu t. Sehingga untuk fungsi volatilitas tidak konstan, persamaan harga *ZCB* bersifat non-Markovian.

Sampai pada tahap ini telah ditunjukkan bahwa model tingkat bunga dan persamaan harga ZCB yang diturunkan dari kerangka model HJM multifaktor dapat bersifat non-Markovian. Tujuan tesis ini adalah menghasilkan model tingkat bunga *short rate* yang berupa sistem persamaan diferensial stokastik Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait. Dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C, pada sub bab selanjutnya akan dibahas proses untuk menentukan model *short rate* dengan sistem persamaan difensial stokastik

Markovian dan persamaan harga *ZCB* terkait dari kerangka model HJM multifaktor Markovian.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil pembahasan pada tesis ini dapat diuraikan sebagai berikut

1. Dengan menggunakan fungsi volatilitas *forward rate* R-C maka model tingkat bunga non-Markovian dapat direduksi menjadi model tingkat bunga yang bergantung pada tiga variabel random dan memenuhi sistem persamaan diferensial stokastik Markovian. Berdasarkan model tingkat bunga ini dapat diturunkan persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.
2. Penggunaan fungsi volatilitas *forward rate* R-C sebagai input untuk kerangka model Heath-Jarrow-Morton multifaktor mereduksi model tingkat bunga non-Markovian menjadi model tingkat bunga yang bergantung pada empat variabel random dan memenuhi sistem persamaan diferensial stokastik Markovian. Selain itu dapat diturunkan juga persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.
3. Dengan spesifikasi fungsi volatilitas *forward rate* yang sesuai dengan fungsi volatilitas *forward rate* R-C sebagai input kerangka model HJM, dapat diturunkan model tingkat bunga generalisasi Hull-White dan persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.

5.2. Saran

Untuk penelitian lanjutan adalah kemungkinan untuk menentukan suatu fungsi volatilitas *forward rate* yang sesuai dengan fungsi volatilitas *forward rate* R-C untuk memperoleh jenis model tingkat bunga lain selain yang dibahas pada tesis ini dan persamaan harga *zero-coupon bond* terkait.

Lampiran 1. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema Dasar Kalkulus

Misal h adalah fungsi kontinu pada interval I dan a suatu bilangan pada I .

Definisikan fungsi H pada I sebagai $H(t) = \int_a^t h(s)ds$. Maka $H'(t) = h(t)$ atau

dengan kata lain $\frac{d}{dt}\int_a^t h(s)ds = h(t)$.

Lampiran 2. Rumus Leibniz

Rumus Leibniz

Jika $g(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$, dimana a dan b fungsi α, yang nilainya bertambah sebesar Δa dan Δb saat α bertambah sebesar $\Delta\alpha$.

Maka $\dfrac{dg(\alpha)}{d\alpha}=\int_a^b \dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)dx + f(b,\alpha)\dfrac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\dfrac{da}{d\alpha}$.

Lampiran 3. Teorema Fubini

Teorema Fubini

Misal $f(x,y) \in L(I)$, $I = I_1 \times I_2$. Maka

i. Untuk setiap $x \in I_1$, $f(x,y)$ adalah *measurable* dan *integrable* pada I_2 sebagai suatu fungsi y.

ii. Sebagai suatu fungsi x, $\int_{I_2} f(x,y)dy$ adalah *measurable* dan *integrable* pada I_1, dan $\iint_I f(x,y)dxdy = \int_{I_1}\left[\int_{I_2} f(x,y)dy\right]dx$ [Bjork,2003].

DAFTAR REFERENSI

Baxter, Martin dan Andrew Rennie. (2002). *Financial Calculus*. Cambridge

University Press.

Bhar, Ramaprasad dan Carl Chiarella. (2000). *Approximating Heath-Jarrow-Morton Non-Markovian Term Structure of Interest Rate Models with Markovian Systems.* Working paper No.76 September 2000. ISSN:1036-7373.

Bjork, Tomas. (2003). *Arbitrage Theory in Continuaous Time*. Oxford University Press.

Brigo, Damiano dan Fabio Mercurio. (2006). *Interest Rate Models Theory and Practice*. Springer Finance.

Glasserman, Paul. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*.. Springer.

Heath, David, Robert Jarrow dan Andrew Morton. (1992). *Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates : A New Methodology For Contingent Claims Valuation*. Econometrica, Vol 60. No. 1 (Januari 1992), 77-105.

Hull, John C. (2006). *Options, Futures and Other Derivates.* sixth edition. Prentice Hall.

Klebaner, Fima C. (1999). *Introduction Stochastic Calculus With Application.* Imperial Collage Press.

Kwok, Yue Kuen. (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer.

Luenberger, David.G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.

Musiela, Marek dan Rutkowski, Marek. (1997). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer. Berlin.

Neftci, Salih N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, second edition. Academic Press.

Oksendal, Bernt. (1998). *Stochastic Differential Equation*. fifth edition. Springer.

Sen, Saurav. (2000). *Interest Rate Modelling*. Advanced Finance Lecture Series.

Shreve, Steven E. (1997). *Stochastic Calculus For Finance* II. Springer.