



UNIVERSITAS INDONESIA

**INTEGRASI NUMERIK DARI TRANSFORMASI HANKEL
MENGUNAKAN METODE KUADRATUR GAUSS**

TESIS

LISMANTO

0906577343

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS INDONESIA
DEPOK
DESEMBER 2010**



UNIVERSITAS INDONESIA

**INTEGRASI NUMERIK DARI TRANSFORMASI HANKEL
MENGUNAKAN METODE KUADRATUR GAUSS**

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

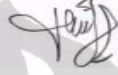
LISMANTO

0906577343

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS INDONESIA
DEPOK
DESEMBER 2010**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Lismanto
NPM : 0906577343
Tanda tangan : 
Tanggal : 29 Desember 2010



HALAMAN PENGESAHAN

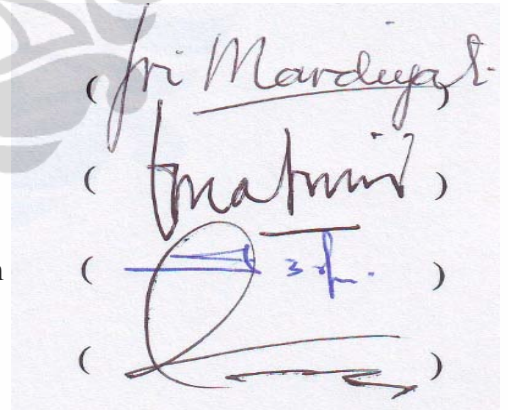
Tesis ini diajukan oleh

Nama : Lismanto
NPM : 0906577343
Program studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Integrasi Numerik dari Transformasi Hankel
menggunakan Metode Kuadratur Gauss

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Program Pascasarjana, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom
Penguji : Bevina D Handari, PhD
Penguji : Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si, M.Kom
Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami



(Sri Mardiyati)
(Bevina D Handari)
(Dr. rer. nat. Hendri Murfi)
(Prof. Dr. Djati Kerami)

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 29 Desember 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadiran Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan penulisan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Maigster Sains pada program studi Matematika, program pascasarjana, Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan semua pihak, dari masa perkuliahan sampai penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi saya untuk dapat menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Sri Mardiyati, M.Kom, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini.
2. Pusat Studi Komputasi Matematika Universitas Gunadarma, yang telah membantu dalam mengarahkan dan memberikan dukungan materiil selama perkuliahan.
3. Semua dosen departemen Matematika FMIPA UI, yang telah membantu dan memberikan banyak pembelajaran..
4. Orangtua, istri tercinta dan semua keluarga yang telah memberikan dukungan materiil dan moral.
5. Semua sahabat, rekan kuliah dan semua pihak yang telah banyak membantu saya dalam penulisan tesis ini.

Akhir kata, saya berharap Allah SWT membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan. Amin.

Depok, 29 Desember 2010

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lismanto
NPM : 0906577343
Program studi : Magister Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusif Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

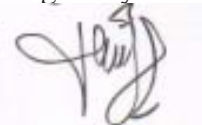
Integrasi Numerik dari Transformasi Hankel menggunakan Metode Kuadratur Gauss

Dengan hak bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media / formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan mempublikasikan tugas akhir saya tanpa meminta izin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis / pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 29 Desember 2010

Yang menyatakan:



(Lismanto)

ABSTRAK

Nama : Lismanto
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Integrasi Numerik dari Transformasi Hankel
menggunakan Metode Kuadratur Gauss

Persamaan differensial banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah fisika dengan menggunakan koordinat silinder seperti yang terjadi pada elektromagnetik, optik, vibrasi, dan seismologi (Chave, 1983). Salah satu fungsi khusus yang banyak ditemukan pada permasalahan itu berupa fungsi Bessel jenis pertama yaitu solusi dari persamaan differensial Bessel. Solusi dari permasalahan tersebut dapat berbentuk transformasi Hankel yang mengandung bentuk integral tak wajar dari fungsi Bessel jenis pertama, fungsi Gamma dan fungsi $f(x)$ tertentu. Oleh karena itu, solusi analitik dari transformasi Hankel tidak mudah untuk dihitung, sehingga metode integrasi kuadratur Gauss menjadi alternatif untuk menghitung transformasi Hankel. Dalam tesis ini akan dihitung beberapa transformasi Hankel yang diklasifikasikan berdasarkan integrand, yaitu fungsi eksponensial dan fungsi trigonometri yang masing-masing telah diketahui nilai eksaknya berdasarkan tabel integral (Gradshteyn dan Ryzhik, 2000). Banyak titik yang akan digunakan dalam kuadratur adalah $n = 4, 8, 16, 32$ dan 64 . Kemudian, dengan mengambil order fungsi Bessel 0 dan 1 , hasil perhitungan tersebut dapat mendekati nilai eksak dengan *error* yang kurang dari 10^{-5} .

Kata kunci :

Transformasi Hankel, transformasi Fourier berganda, kuadratur Gauss, fungsi Bessel, persamaan differensial Bessel

ABSTRACT

Name : Lismanto
Study Program : Graduated of Mathematics
Title : Numerical Integration of Hankel Transform using
Gaussian Quadrature Method

Some differential equations have been used to solve some problems of physics which use cylindrical coordinate system such as electromagnetics, optics, vibration, and seismology (Chave, 1983). A special function that have been discovered on this problems is Bessel function of the first kind, which is a solution of the Bessel differential equation. Solution of these problems can be represented as improper integral which integrand contains Bessel function of the first kind, Gamma function and some function $f(x)$. This improper integral is known as Hankel transform. The solution of the Hankel transform is not easy to be calculated analytically, so the Gaussian quadrature method is used to calculate value of the Hankel transform. Some Hankel transforms which have the analytic solution based on the integral tabel (Gradshteyn dan Ryzhik, 2000), will be calculated by using the Gaussian quadrature method. The Hankel transforms have been classified based on the integrand, those are exponential function and trigonometry function. This process uses the Gaussian quadrature $n = 4, 8, 16, 32$ and 64 points. Finally, for the order 0 and 1 of Bessel function of the first kind, the results have *error* less than 10^{-5} .

Keywords:

Hankel transform, double Fourier transform, Gaussian quadrature, Bessel function, Bessel differential equation

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR GAMBAR	x
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Batasan Masalah	3
1.5 Sistematika Penulisan	4
BAB 2 LANDASAN TEORI.....	5
2.1 Transformasi Hankel.....	5
2.2 Kuadratur Gauss.....	13
BAB 3 INTEGRASI NUMERIK DARI TRANSFORMASI HANKEL MENGUNAKAN METODE KUADRATUR GAUSS.....	19
3.1 Karakteristik Fungsi Bessel.....	19
3.2 Perhitungan Transformasi Hankel menggunakan Kuadratur Gauss	23
3.3 Hasil Percobaan.....	30
3.4 Analisis Hasil	40
BAB 4 KESIMPULAN.....	41
DAFTAR PUSTAKA	41
LAMPIRAN 1: Absis dan Bobot metode Kuadratur Gauss n Titik	43
LAMPIRAN 2: Akar-akar Fungsi Bessel Jenis Pertama	47
LAMPIRAN 3: Contoh program integrasi numerik transformasi Hankel.....	53

DAFTAR TABEL

Tabel 3.2.1: Hasil aproksimasi persamaan (3.1.1)	26
Tabel 3.2.2: Hasil aproksimasi persamaan (3.1.4)	27
Tabel 3.3.1: Hasil percobaan transformasi Hankel tipe eksponensial	35
Tabel 3.3.2: Hasil percobaan transformasi Hankel tipe trigonometri	39



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1.1: Grafik $J_0(x)$	20
Gambar 3.1.2: Grafik $J_1(x)$	21
Gambar 3.1.3: Grafik nilai riil dari integrand $\int_0^\infty x e^{-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}x^2} J_0(2x) dx$	22
Gambar 3.1.4: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} J_1(2x) dx$	22
Gambar 3.3.1: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x^2} J_\nu(2x) x dx$	31
Gambar 3.3.2: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x^2} J_\nu(2x) x^2 dx$	32
Gambar 3.3.3: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x} J_\nu(2x) dx$	32
Gambar 3.3.4: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x} J_\nu(2x) dx$	33
Gambar 3.3.5: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x} J_\nu(2x) x^\nu dx$	33
Gambar 3.3.6: Grafik integrand $\int_0^\infty e^{-(1+i)x} J_\nu(2x) x^\nu dx$	34
Gambar 3.3.7: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} J_1(2x) dx$	37
Gambar 3.3.8: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x} J_1(2x) dx$	38
Gambar 3.3.9: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} J_0(2x) dx$	38

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kejadian atau gejala alam yang selalu berubah dan bersifat dinamis. Kejadian tersebut dapat dimodelkan secara matematis dan salah satunya dapat berbentuk persamaan differensial. Dengan demikian persamaan differensial dapat menggambarkan beberapa kejadian atau gejala alam yang terjadi pada suatu sistem.

Persamaan differensial juga banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah fisika khususnya pada topik simetri silindris seperti yang terjadi pada elektromagnetik, perpindahan panas, vibrasi, difraksi optik dan seismologi (Chave, 1983).

Salah satu fungsi khusus yang banyak ditemukan pada permasalahan diatas adalah fungsi Bessel yang merupakan solusi persamaan differensial Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$$

dimana v adalah bilangan yang diketahui dan menyatakan order dari fungsi Bessel. Solusi umum persamaan itu berbentuk $y = aJ_v(x) + bY_v(x)$ dengan $J_v(x)$ dan $Y_v(x)$ yang masing-masing disebut fungsi Bessel jenis pertama dan kedua order v . Fungsi Bessel dibuat dan dikembangkan pada tahun 1826 oleh Friedrich Wilhelm, seorang astronom dan matematikawan Jerman. Saat ini nilai fungsi Bessel dapat mudah ditemukan pada tabel matematika atau beberapa program seperti *matlab*, *maple* dan *matematica*.

Selanjutnya, solusi masalah fisika diatas sering mengandung bentuk integrasi dari fungsi Bessel yang diboboti suatu fungsi $f(x)$ yaitu

$$g(r) = \int_0^{\infty} f(x)J_v(xr)xdx, \quad v > -\frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} |f(x)|\sqrt{x}dx < \infty$$

Persamaan itu dikenal dengan transformasi Hankel (transformasi Bessel) yang ekuivalen dengan transformasi Fourier berganda. Pada umumnya grafik integrand transformasi Hankel akan berosilasi dan cenderung mendekati sumbu absis seiring peningkatan nilai absisnya.

Dalam kalkulus lanjut, transformasi Hankel merupakan integral tak wajar yang pada umumnya sulit untuk diselesaikan baik secara eksak ataupun secara numerik. Sebelum menyelesaikannya, integral itu perlu ditulis menjadi

$$g(r) = \int_0^{\infty} f(x)J_{\nu}(xr)xdx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)J_{\nu}(xr)xdx$$

tetapi bentuk limit integral tersebut tidak mudah untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu perhitungan numerik menjadi alternatif yang baik untuk menghitung transformasi Hankel, akan tetapi perhitungan numerik juga tidak mudah karena nilai $J_{\nu}(xr)$ yang selalu berosilasi untuk nilai x yang besar. Karena transformasi Hankel merupakan bentuk integral, maka perhitungan numeriknya disebut integrasi numerik.

Integrasi numerik transformasi Hankel dapat dilakukan dengan membentuk jumlahan parsial $P_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)J_{\nu}(xr)xdx$ dimana x_k dan x_{k+1} merupakan akar-akar dari J_{ν} yang berurutan. Perhitungan P_k dilakukan dengan mengambil $x_0 = 0$ dan berlangsung hingga *mix error* $\frac{|P_k - P_{k-1}|}{|P_{k-1} + 1|}$ kurang dari toleransi, kemudian hasil perhitungan yang diperoleh adalah $g(r) = \sum_{k=1}^N P_k$.

Terdapat beberapa metode numerik untuk menghitung P_k seperti aturan trapesium (*trapezoidal rule*), aturan Simpson (*Simpson's rule*) dan kuadratur Gauss (*Gaussian quadrature*). Namun, hanya kuadratur Gauss yang akan digunakan dalam tugas akhir ini karena pada umumnya kuadratur Gauss lebih cermat dalam memilih nilai fungsi dan banyaknya nilai fungsi yang digunakan. (Conte dan Boor, 1980)

Integrasi numerik dengan kuadratur Gauss n titik merupakan jumlahan nilai fungsi terboboti pada n titik di domain, dimana n titik beserta bobot itu ditentukan terlebih dahulu (bersifat deterministik). Secara umum, jika n titik yang digunakan meningkat, maka hasil integrasi numerik cenderung lebih baik karena semakin banyak nilai fungsi yang digunakan. Dalam tugas akhir ini, integrasi

numerik akan dilakukan berulang dengan n titik yang berbeda-beda sehingga akan diperoleh hasil yang paling memuaskan.

Kemudian implementasi program akan dilakukan dengan perangkat lunak *Matlab* yang menyediakan fasilitas perhitungan fungsi Bessel dan dapat menyimpan data dalam bentuk matriks. Dengan penyimpanan data berbentuk matriks akan mempermudah untuk mengontrol nilai-nilai jumlahan parsial P_k yang dihitung berulang menggunakan kuadratur Gauss dengan n titik yang berbeda-beda. Untuk menguji keakuratan hasil integrasi numerik, akan dilakukan untuk beberapa transformasi Hankel yang telah diketahui nilai eksaknya berdasarkan tabel integral.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah dalam penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Apa saja karakteristik dari transformasi Hankel?
2. Bagaimana menyelesaikan transformasi Hankel menggunakan metode integrasi kuadratur Gauss?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Menunjukkan beberapa karakteristik dari transformasi Hankel.
2. Menyelesaikan transformasi Hankel menggunakan metode kuadratur Gauss.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

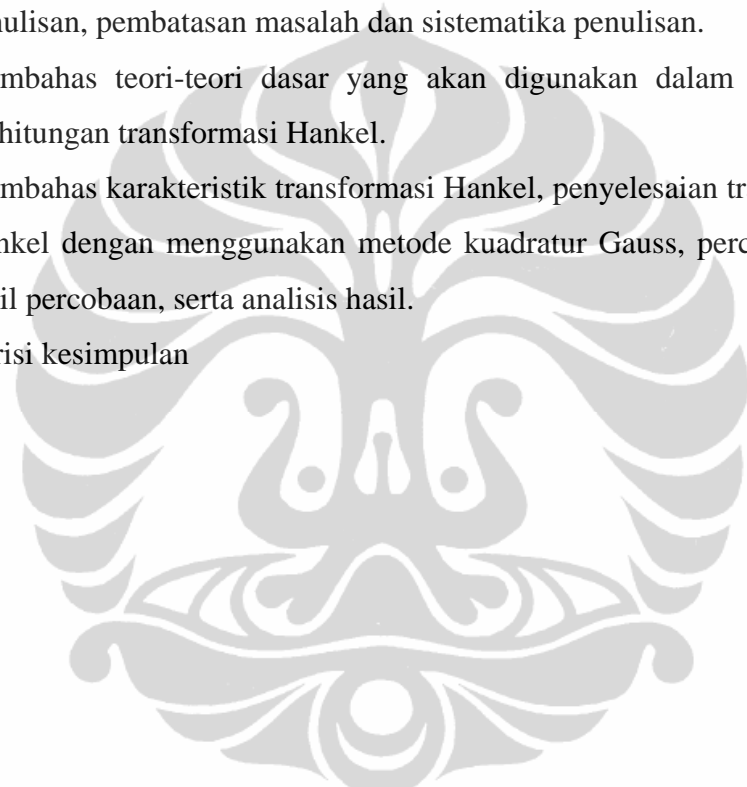
1. Pemilihan n titik pada kuadratur dibatasi untuk $n = 4, 8, 16, 32,$ dan 64 .
2. Order fungsi Bessel jenis pertama dibatasi untuk $\nu = 0$ dan $\nu = 1$.

3. Fungsi $f(x)$ pada transformasi Hankel merupakan fungsi kontinu sepanjang domain dan $\int_0^{\infty} |f(x)|\sqrt{x}dx$ bernilai hingga.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi 4 bab, yaitu:

- Bab 1 Membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.
- Bab 2 Membahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam membantu perhitungan transformasi Hankel.
- Bab 3 Membahas karakteristik transformasi Hankel, penyelesaian transformasi Hankel dengan menggunakan metode kuadratur Gauss, percobaan dan hasil percobaan, serta analisis hasil.
- Bab 4 Berisi kesimpulan



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab 2 ini akan dijelaskan mengenai konsep dasar yang akan digunakan dalam perhitungan transformasi Hankel, diantaranya persamaan differensial dan fungsi Bessel, fungsi Gamma, definisi transformasi Hankel serta metode kuadratur Gauss yang akan digunakan untuk mengaproksimasi nilai dari transformasi Hankel.

2.1 Transformasi Hankel

Pembahasan dimulai dengan menerangkan definisi umum persamaan differensial Bessel yang mempunyai solusi berupa fungsi Bessel, dilanjutkan dengan definisi dan sifat fungsi Gamma, definisi integral tak wajar serta definisi transformasi Hankel.

Definisi 2.1.1

Persamaan differensial (PD) adalah suatu persamaan yang merupakan relasi antara fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunan-turunannya. (Edwards Penney, 1996)

Definisi 2.1.2

Persamaan differensial biasa (PDB) adalah persamaan differensial yang mempunyai hanya satu peubah bebas. (Boyce Diprima, 1997).

Definisi 2.1.3

1. Order suatu PD adalah turunan tertinggi yang terkandung dalam persamaan tersebut.
2. Derajat suatu PD adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.

(Boyce Diprima, 1997).

Definisi 2.1.4

1. Solusi dari suatu PD adalah hubungan antar variabel yang tidak mengandung turunan dan memenuhi PD.
2. Solusi umum dari suatu PD order n adalah suatu solusi PD yang mengandung maksimal n buah konstanta.

Dari sekian banyak PD, salah satu yang akan digunakan dalam tugas akhir ini adalah persamaan differensial biasa berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0, \quad x \neq 0, \quad v > -\frac{1}{2} \quad 2.1.1$$

PDB berorder dua dan berderajat satu tersebut dikenal dengan PD Bessel dan mempunyai solusi umum $y = aJ_v(x) + bY_v(x)$ dengan $J_v(x)$ dan $Y_v(x)$ masing-masing disebut fungsi Bessel jenis pertama dan kedua order v . (Watson, 1962)

Metode Frobenius merupakan metode yang digunakan untuk mencari solusi analitik dari PD Bessel dengan cara memisalkan solusi berbentuk deret pangkat yaitu

$$y(x) = x^\alpha (c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots), \quad c_0 \neq 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha}, \quad 2.1.2$$

dimana α dapat bernilai riil atau kompleks dan $c_0 \neq 0$. (Watson, 1962)

Turunan pertama dan kedua dari persamaan (2.1.2) adalah

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

Untuk dapat memenuhi persamaan (2.1.1) perlu dihitung:

$$\begin{aligned} *) \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} **) \quad x \frac{dy}{dx} &= x \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ***) \quad (x^2 - v^2)y &= (x^2 - v^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha+2} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} \end{aligned}$$

Substitusikan *), **) dan ***) ke persamaan (2.1.1), diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha+2} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)^2 x^{k+\alpha} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k[(k+\alpha)^2 - v^2]x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha+2} \end{aligned}$$

Koefisien c_k dari persamaan diatas akan ditentukan dengan mengambil suku demi suku bernilai nol, karena nilai $x \neq 0$ maka diperoleh sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} c_0[\alpha^2 - v^2] & = 0 \\ c_1[(1+\alpha)^2 - v^2] & = 0 \\ c_2[(2+\alpha)^2 - v^2] + c_0 & = 0 \\ c_3[(3+\alpha)^2 - v^2] + c_1 & = 0 \\ \dots & \dots \\ c_k[(k+\alpha)^2 - v^2] + c_{k-2} & = 0 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad 2.1.3$$

Koefisien $c_0 \neq 0$, akibatnya haruslah $\alpha^2 - v^2 = (\alpha + v)(\alpha - v) = 0$ dan terpenuhi hanya jika $\alpha = v$ atau $\alpha = -v$. Untuk mendapatkan solusi formal cukup diambil $\alpha = v$ dan $v > -\frac{1}{2}$, sehingga diperoleh

$$(1+\alpha)^2 - v^2 = (1+\alpha + v)(1+\alpha - v) = (1 + 2\alpha) \neq 0.$$

Dengan demikian, persamaan $c_1[(1+\alpha)^2 - v^2] = 0$ akan terpenuhi hanya jika $c_1 = 0$. (Watson, 1962)

Selanjutnya untuk $k > 1$, sistem persamaan (2.1.3) dapat ditulis menjadi:

$$0 = c_k[(k+\alpha)^2 - v^2] + c_{k-2}$$

Perhatikan uraian untuk $k = 3, 5, 7, \dots$

*) $k = 3$

$$0 = c_3[(3+\alpha)^2 - v^2] + c_1$$

$$0 = c_3[(3+\alpha)^2 - v^2]$$

$$0 = c_3, \text{ karena } (3+\alpha)^2 - v^2 = (3+\alpha)^2 - \alpha^2 \neq 0$$

*) $k = 5$

$$0 = c_5[(5+\alpha)^2 - v^2] + c_3$$

$$0 = c_5[(5+\alpha)^2 - v^2]$$

$$0 = c_5, \text{ karena } (5+\alpha)^2 - v^2 = (5+\alpha)^2 - \alpha^2 \neq 0$$

*) $k = 7$

$$0 = c_7[(7+\alpha)^2 - v^2] + c_5$$

$$0 = c_7[(7+\alpha)^2 - v^2]$$

$$0 = c_7, \text{ karena } (7+\alpha)^2 - v^2 = (7+\alpha)^2 - \alpha^2 \neq 0$$

*) Begitu seterusnya untuk $k = 9, 11, 13, \dots$, sehingga dapat diperoleh:

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$$

2.1.4

Perhatikan pula uraian untuk $k=2, 4, 6, \dots$

*) $k = 2$

$$c_2[(2+\alpha)^2 - v^2] + c_0 = 0$$

$$c_2[(2+v)^2 - v^2] = -c_0, \text{ karena } \alpha = v$$

$$c_2 2(2+2v) = -c_0$$

$$c_2 2 \cdot 2(1+v) = -c_0$$

$$c_2 = \frac{-c_0}{2 \cdot 2(1+v)}$$

$$c_2 = \frac{-c_0}{1! 2^2(1+v)}$$

*) $k = 4$

$$c_4[(4+\alpha)^2 - v^2] + c_2 = 0$$

$$c_4[(4+v)^2 - v^2] = -c_2, \text{ karena } \alpha = v$$

$$c_4 4 \cdot 2(2+v) = -c_2$$

$$c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 2(2+v)}$$

$$c_4 = \frac{(-1)^2 c_0}{1! 2^2(1+v) 4 \cdot 2(2+v)}$$

$$c_4 = \frac{(-1)^2 c_0}{2! 2^4(1+v)(2+v)}$$

*) $k = 6$

$$c_6[(6+\alpha)^2 - v^2] + c_4 = 0$$

$$c_6[(6+v)^2 - v^2] = -c_4, \text{ karena } \alpha = v$$

$$c_6 6 \cdot 2(3+v) = -c_4$$

$$c_6 = \frac{-c_4}{3 \cdot 2 \cdot 2(3+v)}$$

$$c_6 = \frac{(-1)^3 c_0}{3 \cdot 2 \cdot 2(3+v)2! 2^4(1+v)(2+v)}$$

$$c_6 = \frac{(-1)^3 c_0}{3! 2^6(1+v)(2+v)(3+v)}$$

*) Begitu seterusnya untuk $k = 2m$ dengan $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, sehingga dapat diperoleh:

$$c_k = c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{m! 2^{2m}(1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)} \quad 2.1.5$$

Substitusikan persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) ke persamaan (2.1.2), sehingga diperoleh solusi PD Bessel, yaitu:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha}, \quad \alpha = v$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} x^{2m+v} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} x^{2m-1+v}$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} x^{2m+v} + 0$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m c_0}{m! 2^{2m}(1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)} x^{2m+v}$$

$$= c_0 + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} (x)^v}{m! (1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)}$$

$$= c_0 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} (x)^v}{m! (1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)} \right\} \quad 2.1.6$$

Berikut ini akan dicari hubungan antara solusi (2.1.6) dengan fungsi Gamma yang definisinya akan dibahas terlebih dahulu.

Definisi 2.1.5

Fungsi Gamma $\Gamma(v)$ didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt, \quad t > 0 \quad 2.1.7$$

(Andrew, Askey dan Roy, 1999)

Dengan menggunakan integral parsial didapatkan

$$\Gamma(v+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^v dt = [-e^{-t} t^v]_0^{\infty} + v \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt \quad 2.1.8$$

Bagian pertama ruas kanan persamaan (2.1.8) bernilai 0, sedangkan bagian integral di ruas kanan adalah $\Gamma(v)$, sehingga diperoleh sifat berikut ini:

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) \quad 2.1.9$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1,$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.1.9) diperoleh

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \quad \dots$$

dan secara umum dapat ditulis

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 2.1.10$$

Jika ditetapkan $c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)}$, serta berdasarkan sifat fungsi Gamma pada persamaan (2.1.9), maka persamaan (2.1.6) menjadi:

$$y(x) = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} (x)^v}{m! (1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)} \right\}$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(1+v)(1+v)(2+v)(3+v) \dots (m+v)}$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} = J_v(x) \quad 2.1.11$$

Fungsi $y(x)$ tersebut merupakan salah satu solusi PD Bessel dan disebut fungsi Bessel jenis pertama yang dinotasikan dengan $J_v(x)$. Secara khusus, jika v berupa integer, maka (2.1.11) dapat ditulis menjadi:

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{m!(m+v)!}$$

Saat ini nilai $J_v(x)$, baik untuk x integer atau noninteger, dapat diperoleh pada beberapa tabel matematika atau beberapa software seperti *Matlab*, *Maple* dan *Matemtica*.

Pemaparan fungsi Bessel jenis kedua tidak dibahas dalam tugas akhir ini karena hanya fungsi Bessel jenis pertama yang dibutuhkan dalam definisi transformasi Hankel. Namun, sebelum mendefinisikan transformasi Hankel, terlebih dahulu akan dibahas definisi integral tak wajar.

Definisi 2.1.5

Integral tertentu $\int_a^b f(x)dx$ dikatakan integral tak wajar, jika:

1. Integrand $f(x)$ mempunyai satu atau lebih titik diskontinu pada $a \leq x \leq b$, atau jika:
2. Paling sedikit satu dari batas integral adalah tak terhingga.

(Purcel dan Varberg, 1993)

Definisi 2.1.6

Integral tak wajar:

$$g(r) = \int_0^{\infty} f(x)J_v(xr)x dx$$

dengan $f(x)$ fungsi yang mulus dan $\int_0^{\infty} |f(x)|\sqrt{x} dx$ konvergen, disebut transformasi Hankel order v .

(Andreas, Askey dan Roy, 1999)

Secara umum, solusi eksak transformasi Hankel itu sulit dihitung karena mengandung bentuk integral tak wajar, integrand yang berosilasi, serta variasi fungsi $f(x)$ yang sangat beragam. Untuk mengetahui nilai transformasi Hankel untuk beberapa fungsi $f(x)$, akan dilakukan integrasi numerik dari transformasi Hankel dengan kuadratur Gauss.

2.2 Kuadratur Gauss

Sebelum membahas kuadratur Gauss, terlebih dahulu akan dibahas aproksimasi fungsi dengan suatu polinom. Untuk itu, berikut diberikan definisi dari polinom serta teorema-teorema yang terkait.

Definisi 2.2.1:

Polinom $p(x)$ berderajat $\leq n$ adalah suatu fungsi yang berbentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

dengan koefisien tertentu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Polinom ini mempunyai derajat sebesar n jika $a_n \neq 0$ dan dilambangkan dengan $p_n(x)$.

(Conte dan Boor, 1980)

Definisi 2.2.2

Jika $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan titik yang berbeda, maka polinom Lagrange ke- i $l_i(x)$ adalah:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(Conte dan Boor, 1980)

Definisi 2.2.3

Suatu titik x_i dikatakan akar (*zeros*) dari fungsi $f(x)$ jika $f(x_i) = 0$.

Lemma 2.2.4

Jika x_1, x_2, \dots, x_n merupakan akar-akar yang berbeda dari polinom $p(x)$, maka $p(x)$ dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)r(x)$$

dengan $r(x)$ suatu polinom tertentu.

(Conte dan Boor, 1980)

Teorema 2.2.5

Andaikan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan $n + 1$ titik yang berbeda dan terletak pada domain fungsi kontinu $f(x)$, maka terdapat paling sedikit satu polinom berderajat $\leq n$ yang menginterpolasi / mengaproksimasi $f(x)$. Salah satu polinom itu adalah bentuk Lagrange, yaitu:

$$p(x) = a_0l_0(x) + a_1l_1(x) + a_2l_2(x) + \dots + a_nl_n(x)$$

dengan $a_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

(Conte dan Boor, 1980)

Teorema 2.2.6

Andaikan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan $n + 1$ titik yang berbeda dan terletak pada domain fungsi kontinu $f(x)$, maka terdapat polinom bentuk Newton yang menginterpolasi / mengaproksimasi $f(x)$, yaitu:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

dengan

$$f[x_0] = f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \text{ dan}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}.$$

(Conte dan Boor, 1980)

Teorema 2.2.7

Aproksimasi kurva mulus $f(x)$ dengan polinom seperti teorema (2.2.6) akan memenuhi kondisi berikut:

$$f(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]\psi_n(x), \text{ dengan } \psi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

(Conte dan Boor, 1980)

Definisi 2.2.8

Polinomial Legendre didefinisikan sebagai:

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(Dahlquist dan Bjorck, 1974, p.113)

Masalah integrasi numerik, atau kuadratur numerik, adalah mengaproksimasi nilai dari:

$$\int_a^b f(x) dx \tag{2.2.1}$$

Masalah ini timbul bila bentuk (2.2.1) tidak dapat dilakukan secara seksama, atau bila $f(x)$ hanya diketahui pada sejumlah titik yang terbatas. Selanjutnya untuk mempermudah penulisan, bentuk bentuk (2.2.1) akan dinotasikan dengan $I(f)$.

Misalkan kita akan mengaproksimasi $I(f)$ dengan $I(p)$ untuk batas integral $a = -1$ dan $b = 1$, dimana $p(x)$ merupakan polinom berderajat $\leq n$ dan $f(x) = p(x)$ pada titik $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in (-1, 1)$. Aproksimasi ini biasanya ditulis sebagai suatu aturan yang berdasar pada teorema (2.2.5), yaitu sebagai jumlahan berbobot:

$$I(p) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n).$$

Bobot-bobot itu dihitung sebagai $A_i = I(l_i)$, dengan $l_i(x)$ berupa polinom Lagrange ke- i .

Dalam aproksimasi diatas, titik $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dipilih agak sembarang dan biasanya diambil dengan jarak sama, konsep inilah yang mendasari metode integrasi *trapezoidal* yang hanya menjamin polinom $p(x)$ berderajat $\leq n$. Ada cara lain untuk memilih titik $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ secara tepat sehingga polinom $p(x)$ akan berderajat $\leq (2n + 1)$. Metode integrasi numerik seperti ini disebut

kuadratur Gauss yang secara umum lebih cermat dibanding metode *trapezoidal*. (Conte dan Boor, 1980)

Metode kuadratur Gauss diawali dengan menuliskan bentuk (2.2.1) menjadi:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 w(x)g(x)dx \quad 2.2.2$$

dimana $w(x)$ merupakan fungsi tak negatif yang dapat diintegrasikan sepanjang $(-1,1)$, sedemikian sehingga $g(x) = \frac{f(x)}{w(x)}$ merupakan kurva mulus. Oleh karena

$g(x)$ mulus, maka berdasarkan teorema (2.2.7) diperoleh:

$$g(x) = p_n(x) + g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]\psi_n(x),$$

dimana $\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Hal ini menjadikan:

$$I(g) = I(p_n) + \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]\psi_n(x)w(x)dx$$

Selanjutnya, perhatikan *error* berikut ini:

$$E(g) = I(g) - I(p_n) = \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]\psi_n(x)w(x)dx$$

Andaikan $\int_{-1}^1 \psi_n(x)w(x)dx = 0$, maka dengan menggunakan identitas yang berlaku untuk sembarang $x_{n+1} \in (-1,1)$, yaitu:

$$g[x_1, x_2, \dots, x_n, x] = g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] + g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}),$$

akan diperoleh:

$$E(g) = \int_{-1}^1 (g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] + g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}))\psi_n(x)w(x)dx$$

Kemudian, karena

$$\int_{-1}^1 g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]\psi_n(x)w(x)dx = g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \int_{-1}^1 \psi_n(x)w(x)dx = 0$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} E(g) &= \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1})\psi_n(x)w(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x]\psi_{n+1}(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

Andaikan pula $\int_{-1}^1 \psi_{n+1}(x)w(x)dx = 0$, jelas dengan cara yang sama akan diperoleh

$$E(g) = \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, \dots, x_{n+2}, x] \psi_{n+2}(x)w(x)dx.$$

Dengan demikian, pada umumnya untuk $i = 0, 1, \dots, m - 1$ dan $x_0, x_1, \dots, x_{n+m} \in (-1, 1)$ yang tertentu, jika terdapat

$$\int_{-1}^1 \psi_{n+i+1}(x)w(x)dx = 0$$

maka untuk sembarang pilihan x_{n+i+1} akan berlaku

$$E(g) = \int_{-1}^1 g[x_0, x_1, \dots, x_{n+m+1}, x] \psi_{n+m+1}(x)w(x)dx \quad 2.2.3$$

Persamaan (2.2.3) tersebut dapat dimodifikasi menjadi

$$E(g) = \int_{-1}^1 p_{n+1}(x)q(x)w(x)dx \quad 2.2.4$$

dengan $q(x) = (x - x_{n+1})(x - x_{n+2}) \dots (x - x_{n+m+1})$ dan

$$p_{n+1}(x) = g[x_0, x_1, \dots, x_{n+m+1}, x](x - x_0) \dots (x - x_n),$$

$p_{n+1}(x)$ dapat difaktorkan menjadi $p_{n+1}(x) = a_{n+1}(x - \xi_0) \dots (x - \xi_n)$ dengan ξ_i adalah akar-akar dari p_{n+1} . Bentuk (2.2.4) inilah yang menjadikan metode kuadratur Gauss merupakan aproksimasi integrand dengan polinom berderajat $\leq (2n + 1)$. (Dahlquist dan Bjorck, 1974, p.302)

Dengan mengambil titik-titik $x_i = \xi_i$, jelas menjadikan $E(g) = 0$, kemudian dengan mengambil $w(x) = 1$, maka $f(x) = g(x)$, $I(f) = I(g)$ dan $E(f) = E(g)$.

Akhirnya diperoleh

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = I(f) = I(g) \approx I(p) = I(l_0f(x_0) + l_1f(x_1) + l_2f(x_2) + \dots + l_nf(x_n)),$$

Misalkan $A_i = \int_{-1}^1 l_i(x)dx$, maka

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &\approx A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \dots + A_nf(x_n) \\ &\approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \end{aligned} \quad 2.2.5$$

Selanjutnya penentuan titik $x_0, x_1, \dots, x_n \in (-1,1)$ pada persamaan (2.2.5) dapat diambil dari akar-akar polinomial Legendre p_{n+1} yang dapat dilihat pada definisi 2.2.8. (Dahlquist dan Bjorck, 1974, p.113)

Selanjutnya, untuk menghitung $I(f) = \int_a^b f(t)dt$, akan disubsitusi dengan $t(x) = \frac{(b-a)x+(b+a)}{2}$, akibatnya $t'(x) = \frac{(b-a)}{2}$ dan batas (a, b) berubah menjadi $(-1,1)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t(x))t'(x)dx \\ &= \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x+(b+a)}{2}\right)dx \end{aligned} \quad 2.2.6$$

Dalam tugas akhir ini, perhitungan integral menggunakan kuadratur Gauss dengan $n = 4, 8, 16, 32$ dan 64 , dimana nilai-nilai x_i dan A_i untuk masing-masing n dapat dilihat pada lampiran.

BAB 3

INTEGRASI NUMERIK DARI TRANSFORMASI HANKEL MENGUNAKAN METODE KUADRATUR GAUSS

Pada bab II telah dijelaskan definisi dari transformasi Hankel, yaitu suatu integral yang berbentuk:

$$g(r) = \int_0^{\infty} f(x)J_v(xr)xdx$$

Transformasi Hankel dapat mengandung fungsi $f(x)$ yang sangat beragam, fungsi bernilai riil atau kompleks, serta tergantung dari $J_v(xr)$, sehingga untuk menghitung nilainya dibutuhkan integrasi numerik. Agar hasil integrasi numerik dapat dibandingkan, maka akan diambil beberapa transformasi Hankel yang telah diketahui nilai eksaknya berdasarkan tabel integral. (Gradshteyn dan Ryzhik, 2000).

Pada bab ini akan dibahas integrasi numerik dari transformasi Hankel. Dimulai dengan karakteristik transformasi Hankel, perhitungan transformasi Hankel menggunakan kuadratur Gauss, kemudian diakhiri dengan memberikan beberapa contoh integrasi numerik dari transformasi Hankel menggunakan perangkat *Matlab 7.1* beserta analisis hasilnya.

3.1 Karakteristik Fungsi Bessel

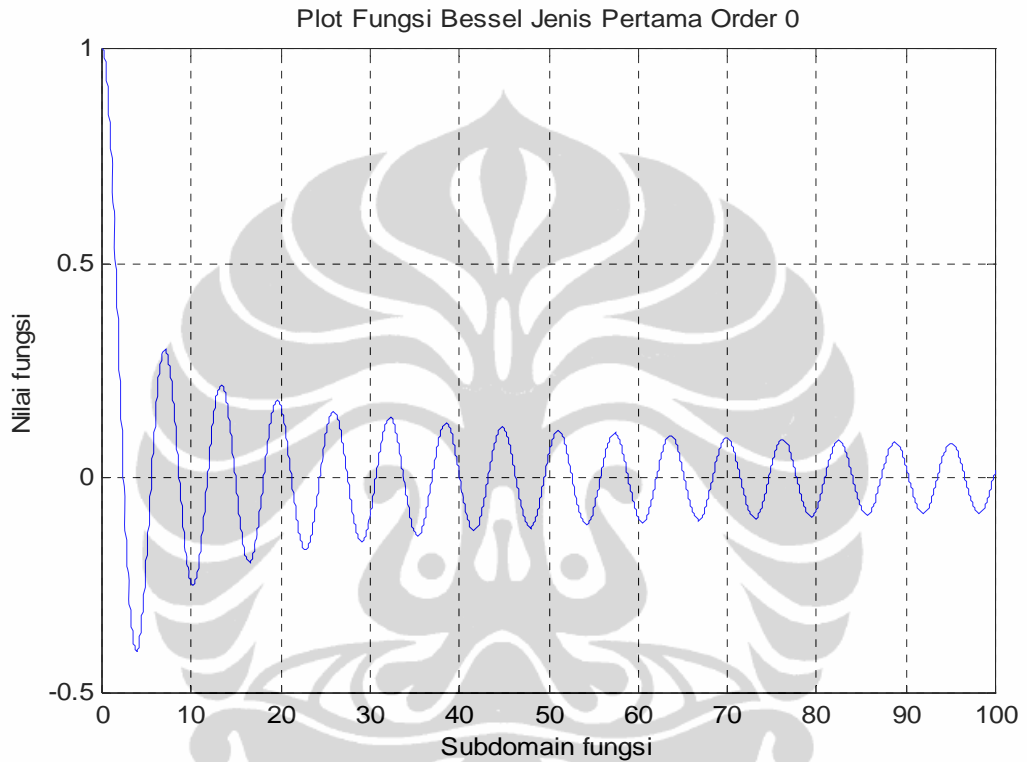
Metode Frobenius merupakan metode penyelesaian persamaan differensial Bessel dengan memisalkan solusi berbentuk deret tak hingga. Salah satu penyelesaiannya adalah fungsi Bessel jenis pertama order ν yang dinotasikan dengan $J_\nu(x)$, sehingga fungsi tersebut mempunyai dua parameter yaitu x dan ν . Perhitungan $J_\nu(x)$ secara analitik tidak mudah dilakukan karena fungsi tersebut berbentuk deret tak hingga yang mengandung fungsi Gamma. Namun, secara

numerik nilai $J_\nu(x)$ dapat diperoleh dengan menginput 2 nilai dari parameter ν dan x ke dalam perintah:

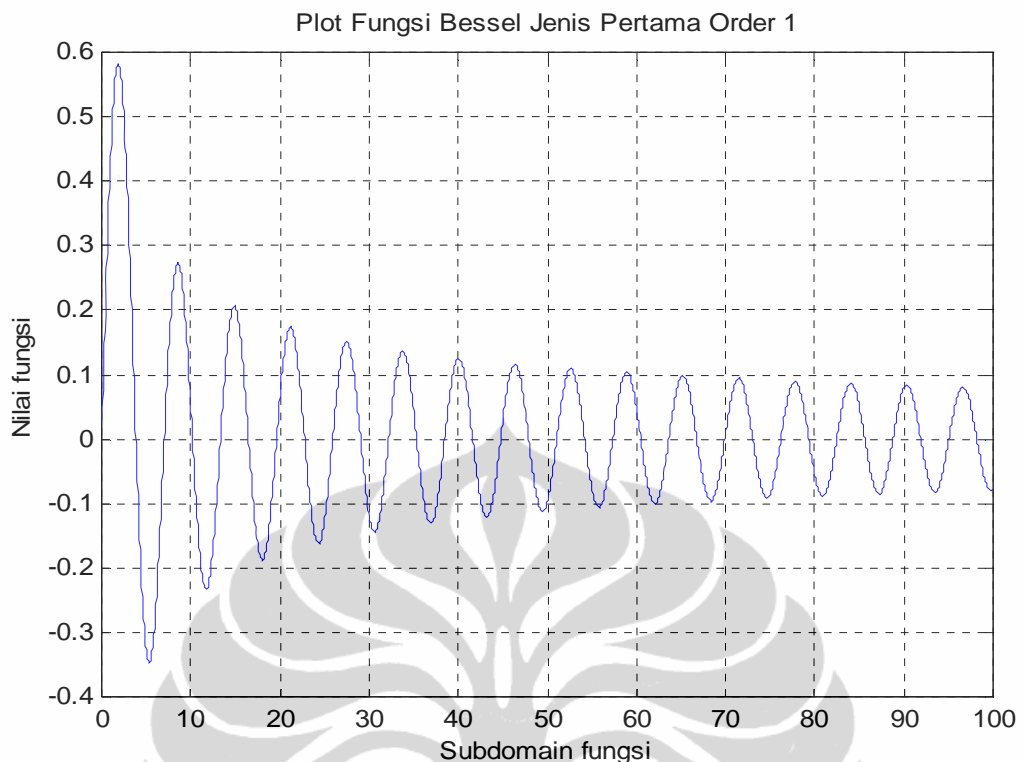
`besselj(v, x)`

yang disediakan oleh perangkat lunak *matlab*.

Perhatikan gambar (3.3.1) dan gambar (3.3.2) yang menunjukkan grafik fungsi Bessel jenis pertama order 0 dan 1.



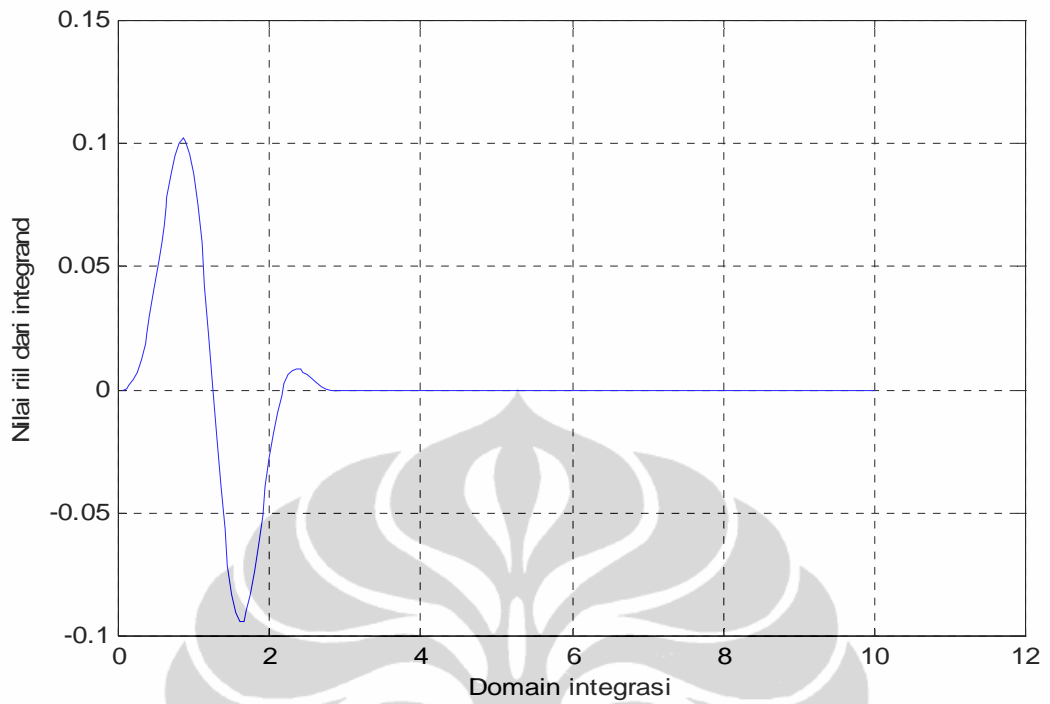
Gambar 3.1.1: Grafik $J_0(x)$



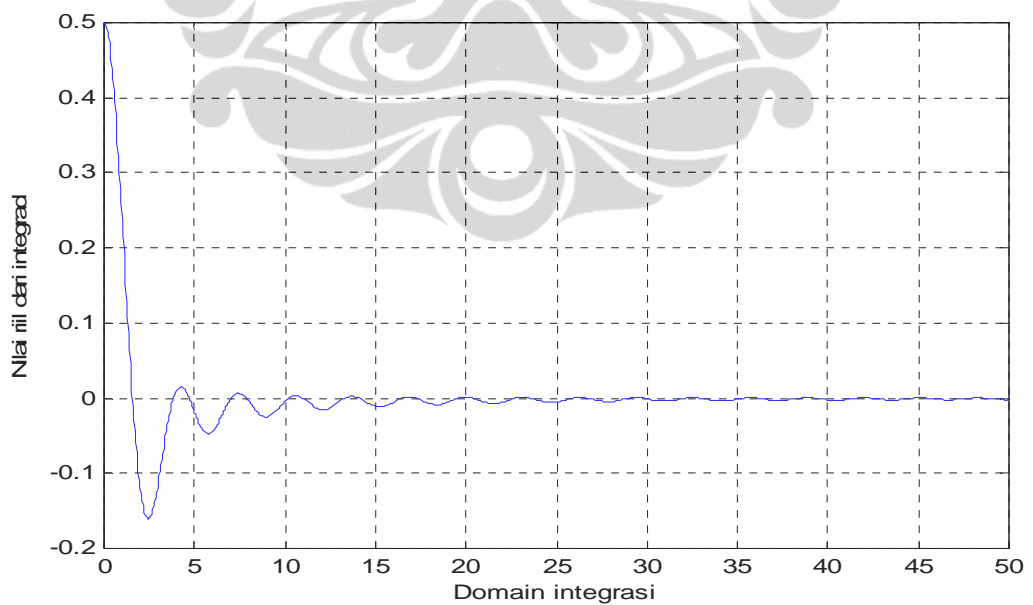
Gambar 3.1.2: Grafik $J_1(x)$

Gambar (3.1.1) dan (3.1.2) memperlihatkan karakteristik dari fungsi Bessel jenis pertama order 0 dan 1, yaitu berosilasi sepanjang sumbu x sehingga fungsi tersebut mempunyai banyak akar (*zeros*). Dengan menuliskan $\{x_k\}$ sebagai barisan naik dari akar-akar fungsi tersebut, maka domain fungsi dapat didiskritisasi menjadi gabungan sub-sub interval $(0, x_1] \cup \{U_{k=1}^{\infty}[x_k, x_{k+1}]\}$. Integrasi numerik dari transformasi Hankel akan dihitung pada setiap sub-sub interval tersebut dengan menggunakan kuadratur Gauss.

Dalam praktik, diskritisasi sub-sub interval dilakukan sampai akar tertentu yaitu $(0, x_1] \cup \{U_{k=1}^{N_1}[x_k, x_{k+1}]\}$. Pemilihan N_1 dilakukan sedemikian sehingga nilai integrand transformasi Hankel pada interval $U_{k=N_1}^{\infty}[x_k, x_{k+1}]$ sudah sangat dekat dengan nol, sehingga proses integrasi numerik cukup dilakukan sampai interval ke N_1 . Agar lebih jelas, perhatikan dua grafik integrand dari transformasi Hankel berikut ini:



Gambar 3.1.3: Grafik nilai riil dari integrand $\int_0^\infty x e^{-\frac{(1+i)x^2}{\sqrt{2}}} J_0(2x) dx$



Gambar 3.1.4: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} J_1(2x) dx$

Gambar (3.1.3) dan (3.1.4) memperlihatkan karakteristik integrand dari transformasi Hankel, yaitu berosilasi sepanjang sumbu x , sehingga integrand-integrand tersebut mempunyai banyak akar (*zeros*) sesuai dengan jumlah akar-akar dari fungsi $f(x)$ dan $J_1(rx)$. Kedua gambar itu juga memperlihatkan nilai integrand cenderung mendekati sumbu x , sehingga perhitungan numerik transformasi Hankel cukup sampai interval tertentu.

3.2 Perhitungan Transformasi Hankel menggunakan Kuadratur Gauss

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai perhitungan transformasi Hankel menggunakan metode kuadratur Gauss n titik. Metode ini mengaproksimasi nilai transformasi Hankel yang berbentuk integral tak wajar hingga interval tertentu.

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab (2.2) bahwa metode kuadratur Gauss n titik didasarkan pada aproksimasi suatu integrand dengan polinom $p(x)$ berderajat $\leq (2n - 1)$. Secara umum hasil aproksimasi semakin baik jika derajat polinom semakin besar, sehingga untuk memperoleh hasil yang lebih baik perlu dilakukan dengan kuadratur Gauss n titik yang berbeda-beda. Misalnya, dipilih n_1, n_2, \dots, n_m titik dengan $n_1 < n_2 < \dots < n_m$, integrasi numerik transformasi Hankel dapat dihitung sebanyak m kali dengan kuadratur Gauss n_i titik. Semua perhitungan ini perlu dilakukan karena tidak adanya jaminan hasil integrasi kuadratur Gauss n_{i+1} akan lebih baik dari n_i .

Domain integral terlebih dahulu didiskritisasi berdasarkan akar-akar fungsi Bessel yaitu $(0, x_1] \cup \{\cup_{k=1}^N [x_k, x_{k+1}]\}$. Perhitungan numerik transformasi Hankel diawali dengan menghitung jumlahan parsial pertama, yaitu

$$P_1 = \int_0^{x_1} f(x) J_\nu(xr) x dx$$

Kemudian dihitung parsial kedua P_2 , hasil aproksimasi $\hat{g}(r)$ dan *mix error* $\hat{\epsilon}$, yaitu

$$P_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) J_\nu(xr) x dx, \quad \hat{g}(r) = P_1 + P_2 \quad \text{dan} \quad \hat{\epsilon} = \left| \frac{P_2 - P_1}{P_1 + 1} \right|$$

Jika *mix error* $\hat{\varepsilon}$ belum memenuhi batas toleransi, maka perlu dihitung jumlahan parsial ketiga, *update* $\hat{g}(r)$ dan *mix error* $\hat{\varepsilon}$ dengan rumus

$$\hat{g}(r) = \sum_{k=1}^3 P_k \text{ dan } \hat{\varepsilon} = \left| \frac{P_3 - P_2}{P_2 + 1} \right|$$

Begitu seterusnya, jika *mix error* $\hat{\varepsilon}$ belum memenuhi batas toleransi, maka proses tersebut dilanjutkan hingga diperoleh $\hat{\varepsilon}$ yang memenuhi batas toleransi. Dalam hal ini, *mix error* bertindak sebagai *absolute error* jika nilai P_k dan P_{k-1} sangat kecil, tetapi *mix error* akan bertindak sebagai *relative error* jika $|P_k - P_{k-1}|$ mempunyai nilai yang kecil dibandingkan $|P_{k-1}|$.

Misalkan pada jumlahan parsial P_{N_1} (sampai akar ke- N_1) telah diperoleh hasil aproksimasi yang memenuhi batas toleransi yang diberikan, maka kontribusi nilai jumlahan-jumlahan parsial setelah P_{N_1} ke dalam $\hat{g}(r)$ sudah tidak signifikan karena nilai-nilainya dekat dengan 0. Hal ini menunjukkan bahwa

$$\int_{x_{N_1}}^{\infty} f(x) J_v(xr) x dx \approx 0 \quad 3.2.1$$

Dengan demikian perhitungan transformasi Hankel cukup dilakukan hanya sampai akar ke- N_1 dan diperoleh hasil perhitungan

$$\hat{g}(r) = \sum_{k=1}^{N_1} P_k.$$

Berikut ini diberikan algoritma metode kuadratur Gauss n titik untuk menghitung transformasi Hankel.

Algoritma Kuadratur Gauss dengan n Titik

INPUT : order fungsi besel v ; nilai variabel r , banyak sub interval N , batas toleransi ε , dan bilangan n yang menyatakan banyak titik dalam kuadratur.

OUTPUT : hasil aproksimasi $\hat{g}(r)$, banyak akar yang dibutuhkan N_1 , dan *mix error* $\hat{\varepsilon}$

Langkah 1 : inialisasi awal $a = 0$, dan $b = x_1$ dengan x_1 adalah akar

- yang pertama dari $J_v(rx)$
- Langkah 2 : untuk setiap $k = 1, 2, \dots, N$ lakukan langkah 3, 4, dan 5
(metode kuadratur Gauss n titik digunakan di langkah 3 dan 4, sedangkan langkah 5 kriteria pemberhentian)
- Langkah 3 : tetapkan bobot $W = \frac{(b-a)}{2}$,
untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, hitung
 $X_{ki} = \frac{1}{2}((b-a)x_i + (b+a))$ dan
 $P_{ki} = WA_{if}(X_{ki})J_v(rX_{ki})X_{ki}$
dengan A_i dan x_i adalah bobot dan absis dari kuadratur Gauss n titik.
(perhitungan ini berdasarkan persamaan (2.2.5) dan (2.2.6) pada subbab 2.2)
- Langkah 4 : kemudian hitung jumlahan
$$P_k = \sum_{i=1}^n P_{ki}$$
- Langkah 5 : untuk $k > 1$, hitung
$$\text{mix error } \hat{\varepsilon} = \left| \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1} + 1} \right|$$
 - jika $\hat{\varepsilon} < \varepsilon$,
lakukan langkah 6 dan 7
 - jika $\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon$,
update nilai $a = x_k$ dan $b = x_{k+1}$, dengan x_k dan x_{k+1} adalah akar yang ke- k dan ke- $(k+1)$ dari $J_v(rx)$,
kemudian kembali ke langkah 2
- Langkah 6 : banyaknya akar yang digunakan $N_1 = k$,
 $\text{mix error} = \hat{\varepsilon}$
OUTPUT ($N_1, \hat{\varepsilon}$)
- Langkah 7 : hitung hasil perhitungan
$$\hat{g}(r) = \sum_{k=1}^{N_1} P_k$$

OUTPUT ($\hat{g}(r)$)

Algoritma kuadratur Gauss digunakan untuk menghitung nilai transformasi Hankel hanya sampai akar ke- N_1 , namun demikian perhitungan sudah cukup baik karena kontribusi P_k untuk $k > N_1$ relatif kecil.

Selanjutnya, dilakukan simulasi awal perhitungan dua transformasi Hankel berikut dengan algoritma kuadratur Gauss n titik.

$$g_1(2) = \int_0^{\infty} x e^{-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}x^2} J_0(2x) dx \quad 3.1.3$$

dan

$$g_2(2) = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} J_1(2x) dx \quad 3.1.4$$

Grafik integrand dari dua transformasi Hankel itu masing-masing dapat dilihat pada gambar (3.1.3) dan (3.1.4). Berdasarkan tabel integral (Lihat di [Gradshteyn dan Ryzhik]), nilai eksak dari dua transformasi Hankel diatas adalah

$$g_1(2) = \frac{\exp\left(-\frac{2^2\sqrt{2}}{4(1+i)}\right)}{\sqrt{2}(1+i)} \quad \text{dan} \quad g_2(2) = \frac{\sqrt{2^2-1}}{2}$$

Tabel berikut merupakan hasil simulasi perhitungan numerik persamaan (3.1.3) dan (3.1.4) dengan menggunakan kuadratur Gauss $n = 4$ dan 8 , banyaknya akar (*zeros*) fungsi Bessel yang digunakan $N = 15$ dan 20 , serta *absolute error* yang dihitung dengan rumus:

Absolute error = |nilai eksak – nilai aproksimasi|

Kuadratur	N	Nilai Eksak		Nilai Aproksimasi		<i>Absolute error</i>
		Riil	Imajiner	Riil	Imajiner	
$n = 4$	15	0.2457791604	-0.0188285922	0.2457896760	-0.0192818025	0.0004533322
	20	0.2457791604	-0.0188285922	0.2457896760	-0.0192818025	0.0004533322
$n = 8$	15	0.2457791604	-0.0188285922	0.2457791633	-0.0192817988	0.0004532066
	20	0.2457791604	-0.0188285922	0.2457791633	-0.0192817988	0.0004532066

Tabel 3.2.1: Hasil aproksimasi persamaan (3.1.3)

Kuadratur	N	Nilai Eksak		Nilai Aproksimasi		<i>Absolute error</i>
		Riil	Imaginer	Riil	Imaginer	
$n=4$	15	0.8660254038	0.0000000000	0.8676261280	0.0000000000	0.0016007242
	20	0.8660254038	0.0000000000	0.8656762050	0.0000000000	0.0003491988
$n=8$	15	0.8660254038	0.0000000000	0.8676256400	0.0000000000	0.0016002362
	20	0.8660254038	0.0000000000	0.8656763218	0.0000000000	0.0003490820

Tabel 3.2.2: Hasil aproksimasi persamaan (3.1.4)

Tabel 3.2.1 dan 3.2.2 memperlihatkan hasil aproksimasi persamaan (3.1.3) dan (3.1.4) dengan menggunakan kuadratur Gauss $n = 4$ dan 8 serta banyak akar fungsi Bessel (*zeros*) $N = 15$ dan 20. Pada kedua tabel itu terlihat bahwa untuk kuadratur Gauss n titik yang semakin besar dengan N tetap, diperoleh *absolute error* yang cenderung mengecil. Sebaliknya, pada tabel 3.2.2, jika banyak akar N yang diperbesar sedangkan n tetap, maka diperoleh *absolute error* yang juga cenderung mengecil. Namun, pada tabel 3.2.1, hasil yang diperoleh cenderung tetap untuk N yang lebih besar dari 15. Hal ini terjadi karena jumlahan parsial untuk P_k , $k > 4$, bernilai sangat kecil seperti yang terlihat pada gambar 3.1.3, akibatnya hanya dibutuhkan sekitar 4 akar dalam menghitung persamaan 3.1.1.

Dari semua hasil perhitungan untuk order fungsi Bessel $\nu = 0$ dan 1, ada dua hal yang perlu digarisbawahi. Pertama, semakin besar n titik yang digunakan pada kuadratur dengan banyak akar N yang tetap, maka hasil aproksimasi semakin mendekati nilai eksaknya. Kedua, semakin besar banyak akar N yang digunakan dalam suatu kuadratur Gauss n titik, maka hasil aproksimasi juga semakin mendekati nilai eksaknya. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk suatu kuadratur Gauss n titik, hasil aproksimasi yang lebih baik dapat diperoleh dengan menambah banyak akar fungsi Bessel sampai N tertentu.

Ada kalanya dengan menambah banyak akar yang digunakan, belum tentu diperoleh hasil yang lebih baik seperti yang terjadi pada tabel 3.2.1. Oleh karena

itu, selain menambah banyak akar fungsi Bessel yang digunakan, untuk memperoleh hasil yang lebih baik dapat dilakukan dengan menambah n titik yang digunakan dalam kuadratur. Dalam hal ini penambahan n tidak perlu berurutan dan boleh agak sembarang karena tidak ada jaminan bahwa penambahan n ini selalu memberikan hasil yang lebih baik.

Berikut ini diberikan algoritma metode kuadratur Gauss dengan n_1, n_2, \dots, n_m titik yang merupakan modifikasi dari algoritma metode kuadratur Gauss n titik. Algoritma ini dapat digunakan untuk mengaproksimasi nilai dari transformasi Hankel yang sudah diketahui nilai eksaknya, hal ini bertujuan untuk membandingkan hasil yang diperoleh dengan nilai eksaknya.

Algoritma Kuadratur Gauss dengan n_1, n_2, \dots, n_m titik

INPUT : order fungsi bessel v ; nilai variabel r , banyak sub interval N , batas toleransi ε , nilai eksak $g(r)$ dan bilangan n_1, n_2, \dots, n_m (dalam hal ini $n_1 < n_2 < \dots < n_m$)

OUTPUT : hasil aproksimasi $\hat{g}(r)$, banyak akar yang dibutuhkan N_1 , dan *mix error* $\hat{\varepsilon}$

Langkah 1 : untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m$ inialisasi awal $\hat{g}_j(r) = 0$, $a = 0$, dan $b = x_1$ dengan x_1 adalah akar yang pertama dari $J_v(rx)$, kemudian lakukan langkah 2

Langkah 2 : untuk setiap $k = 1, 2, \dots, N$ lakukan langkah 3, 4, dan 5 (metode kuadratur Gauss n_j titik digunakan di langkah 3 dan 4, sedangkan langkah 5 kriteria pemberhentian)

Langkah 3 : tetapkan bobot $W = \frac{(b-a)}{2}$,
 untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n_j$, hitung
 $X_{ki} = \frac{1}{2}((b-a)x_i + (b+a))$ dan
 $P_{ki} = WA_i f(X_{ki}) J_v(rX_{ki}) X_{ki}$
 dengan A_i dan x_i adalah bobot dan absis dari kuadratur Gauss n_j titik.

(perhitungan ini berdasarkan persamaan (2.2.5) dan (2.2.6) pada subbab 2.2)

Langkah 4 : kemudian hitung jumlahan parsial dan hasil aproksimasi

$$P_k = \sum_{i=1}^{n_j} P_{k_i}$$

$$\hat{g}_j(r) = \hat{g}_j(r) + P_k$$

Langkah 5 : untuk $k > 1$, hitung

$$\text{mix error } \hat{\varepsilon}_{1,j} = \left| \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1} + 1} \right|$$

$$\text{absolute error } \hat{\varepsilon}_{2,j} = |g_j(r) - \hat{g}_j(r)|$$

- jika $\hat{\varepsilon}_{1,j} < \varepsilon$ dan $\hat{\varepsilon}_{2,j} < \varepsilon$,

$$N_{1,j} = k$$

lakukan langkah 6 dan 7

- jika $\hat{\varepsilon}_{1,j} \geq \varepsilon$ atau $\hat{\varepsilon}_{2,j} \geq \varepsilon$, dan $k < N$,
update nilai $a = x_k$ dan $b = x_{k+1}$, dengan x_k dan x_{k+1} adalah akar yang ke- k dan ke- $(k+1)$ dari $J_\nu(rx)$, kemudian kembali ke langkah 2

- jika $\hat{\varepsilon}_{1,j} \geq \varepsilon$ atau $\hat{\varepsilon}_{2,j} \geq \varepsilon$, dan $k = N$,

$$N_{1,j} = k$$

kembali ke langkah 1

Langkah 6 hasil perhitungan

$$\hat{g}(r) = \{\hat{g}_j(r) \mid \hat{\varepsilon}_{2,j} \text{ minimum}\}$$

$$N_1 = \{N_{1,j} \mid \hat{\varepsilon}_{2,j} \text{ minimum}\}$$

$$\hat{\varepsilon} = \text{minimum}\{\hat{\varepsilon}_{2,j}\}$$

Langkah 7 : OUTPUT $(r, g(r), \hat{g}(r), N_1$ dan $\hat{\varepsilon}$)

Algoritma tersebut akan digunakan untuk melakukan perhitungan beberapa transformasi Hankel yang akan ditunjukkan pada subbab 3.3.

3.3 Hasil Percobaan

Untuk menunjukkan perhitungan dan karakteristik dari transformasi Hankel, akan dilakukan perhitungan numerik dari beberapa transformasi Hankel yang telah diketahui nilai eksaknya berdasarkan tabel integral. Untuk itu, perhitungan akan dilakukan dengan menggunakan algoritma kuadratur gauss dengan 4, 8, 16, 32 dan 64 titik. Sesuai dengan langkah-langkah dalam algoritma kuadratur gauss dengan n_1, n_2, \dots, n_m titik, maka percobaan akan dimulai dengan kuadratur Gauss 4 titik sampai N tertentu. Jika hasil yang belum memuaskan, maka perhitungan dilanjutkan dengan menggunakan kuadratur Gauss 8 titik, begitu seterusnya hingga menggunakan kuadratur Gauss 64 titik.

Berikut ini diberikan beberapa transformasi Hankel yang telah diketahui nilai eksaknya berdasarkan tabel integral (Gradshteyn dan Ryzhik, 2000). Pembahasan terbagi dalam 2 kategori yaitu tipe eksponensial dan tipe trigonometri.

1. Tipe Eksponensial

Transformasi Hankel tipe eksponensial merupakan transformasi Hankel yang mengandung fungsi eksponensial. Pada tipe eksponensial ini akan diambil 3 transformasi Hankel yang nilai eksaknya telah diketahui berdasarkan tabel integral.

$$g_1(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} J_\nu(xr) x^{\nu+1} dx = \frac{r^\nu e^{-\frac{r^2}{4}\alpha}}{(2\alpha)^{\nu+1}} \quad 3.3.1$$

(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000, p.698)

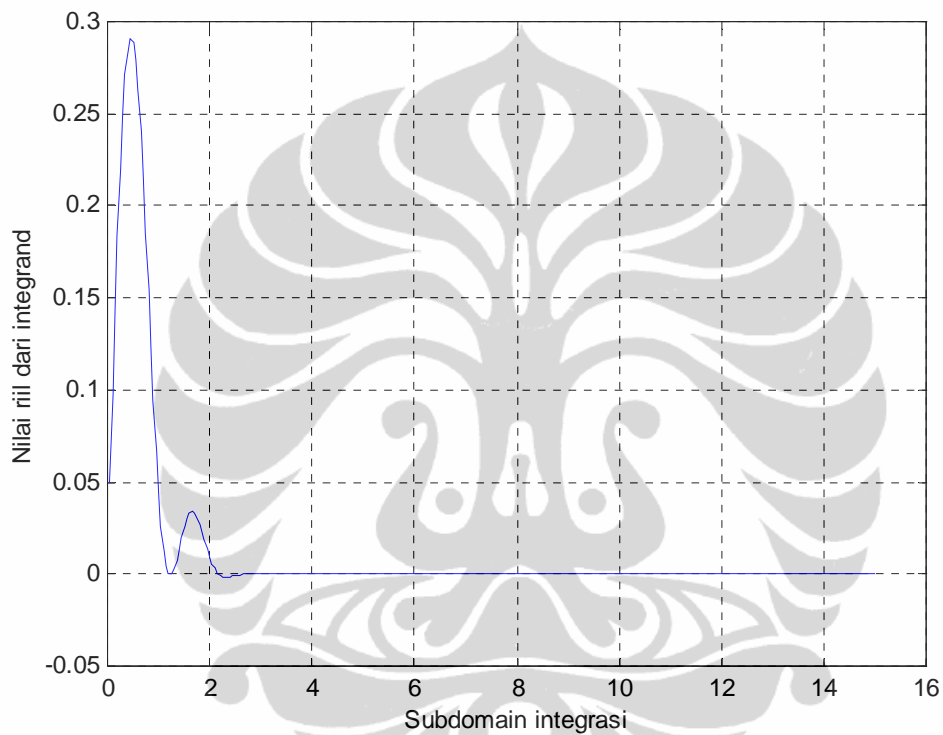
$$g_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_\nu(xr) dx = \frac{(\sqrt{r^2 + \alpha^2} - \alpha)^\nu}{r^\nu \sqrt{r^2 + \alpha^2}} \quad 3.2.2$$

(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000, p.686)

$$g_3(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_\nu(xr) x^\nu dx = \frac{(2r)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(r^2 + \alpha^2)^{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}} \quad 3.3.3$$

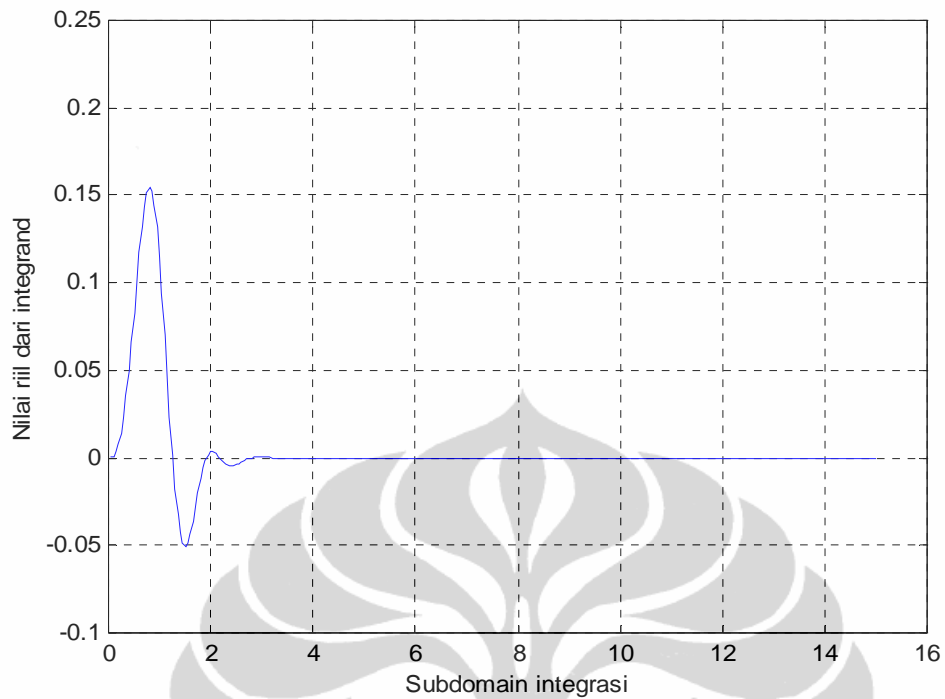
(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000, p.694)

Berikut ini diberikan grafik tiga transformasi Hankel diatas untuk $\nu = 0$ dan 1, $r = 2$, dan $\alpha = 1 + i$

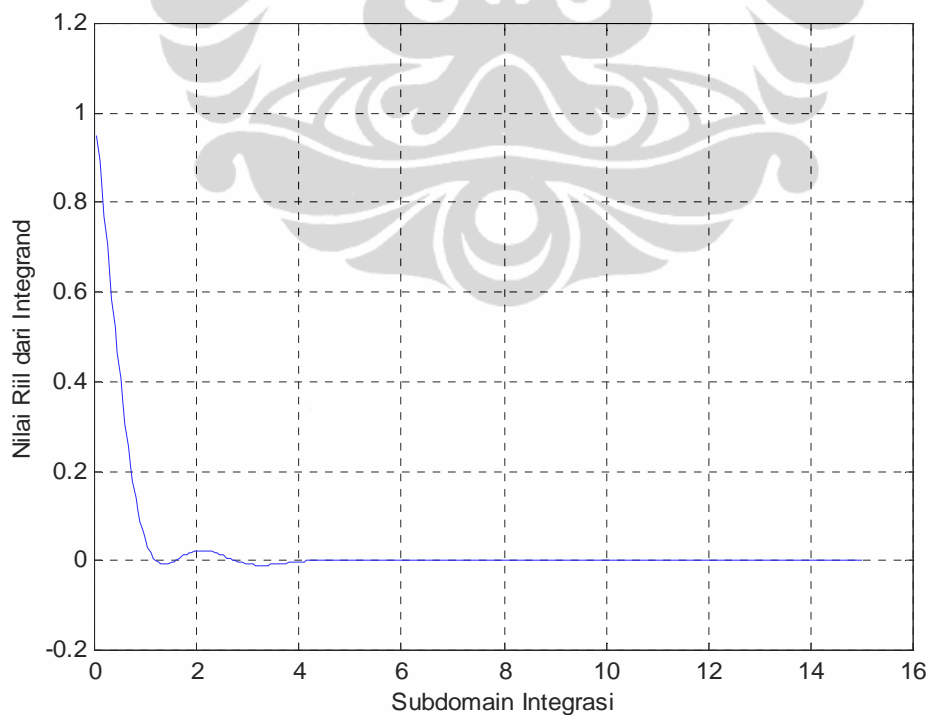


Gambar 3.3.1: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x^2} J_0(2x) x dx$, persamaan (3.3.1)

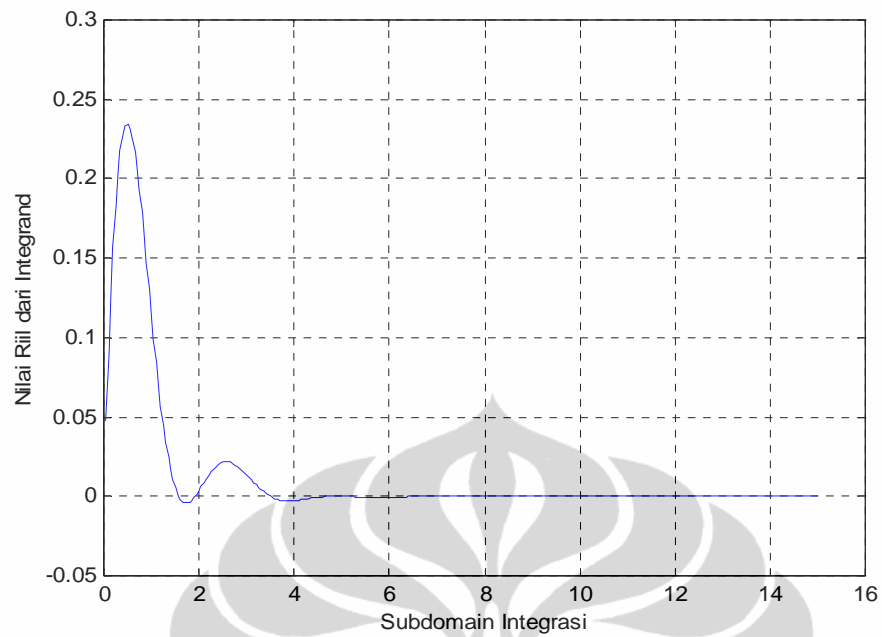
dengan $\nu = 0$, $r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$



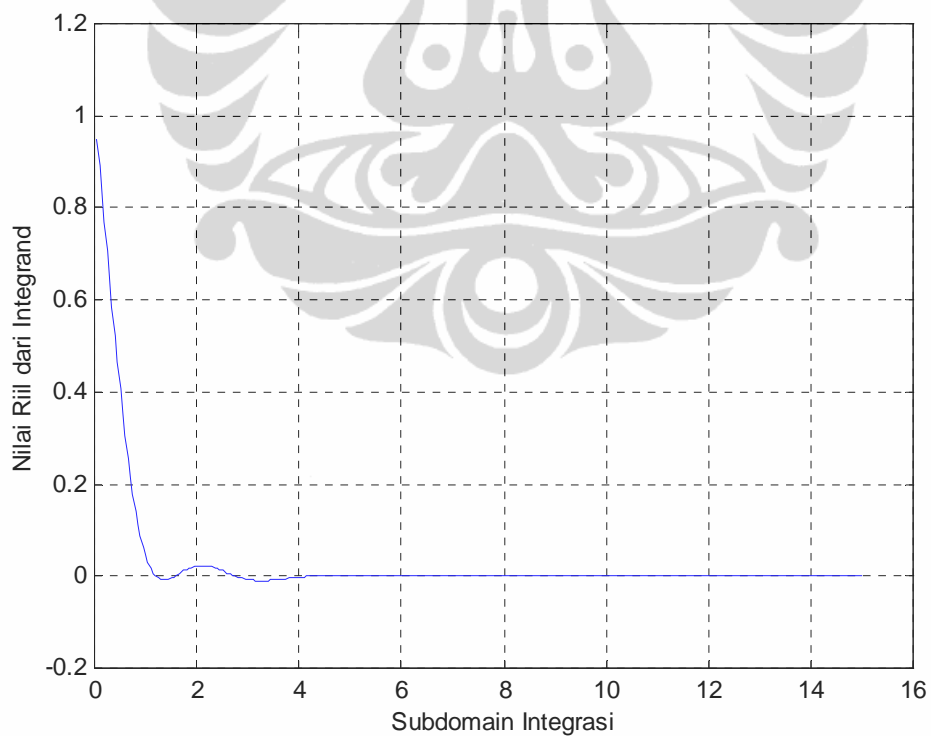
Gambar 3.3.2: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x^2} J_1(2x)x^2 dx$, persamaan (3.3.1) dengan $\nu = 1$, $r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$



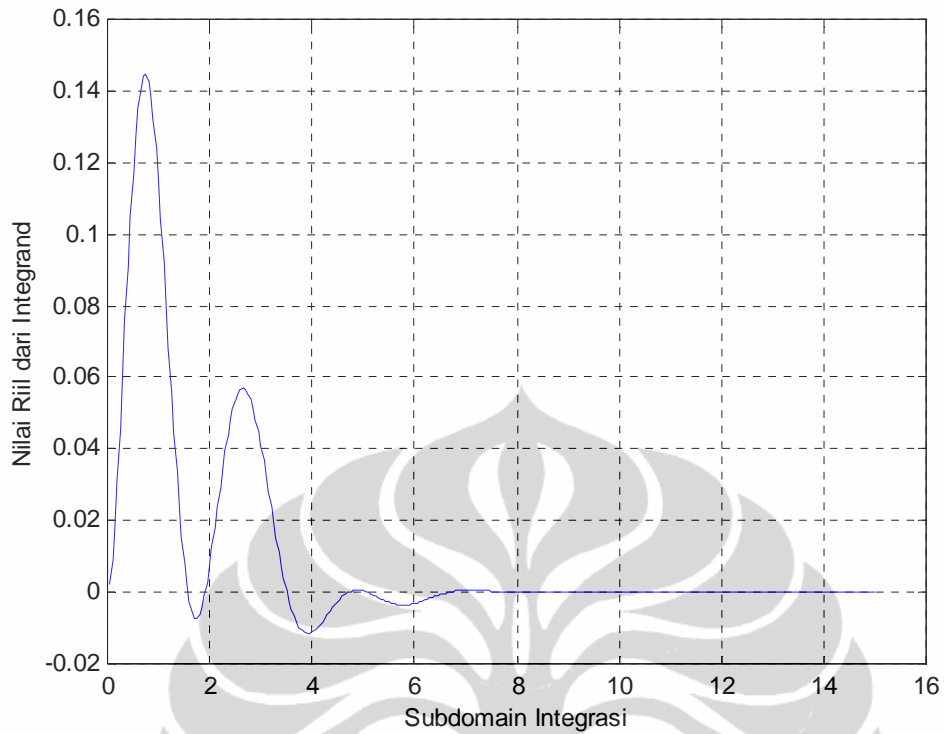
Gambar 3.3.3: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x} J_0(2x) dx$, persamaan (3.3.2) dengan $\nu = 0$, $r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$



Gambar 3.3.4: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x} J_1(2x) dx$, persamaan (3.3.2) dengan $v = 1, r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$



Gambar 3.3.5: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x} J_0(2x) x^v dx$, persamaan (3.3.3) dengan $v = 0, r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$



Gambar 3.3.6: Grafik integrand $\int_0^{\infty} e^{-(1+i)x} J_1(2x) x^v dx$, persamaan (3.3.3) dengan $v = 1, r = 2$ dan $\alpha = 1 + i$

Percobaan dilakukan dengan mengambil $v = 0$ dan $1, r = 0.5, 2$ dan $10, \alpha = 1 + i$, serta toleransi 10^{-5} . Hasil perhitungan dari ketiga transformasi Hankel diatas dapat dilihat pada tabel (3.3.1) berikut ini.

Tabel 3.3.1: Hasil Percobaan Transformasi Hankel Tipe Eksponensial

No	TH	r	v	Nilai eksak		Nilai aproksimasi		Abs. error	N_1	n
				Riil	Imaginer	Riil	Imaginer			
1	3.3.1	0.5	0	0.2497609059	-0.2346191014	0.2497608382	-0.2346191839	0.000000106721788	3	16
2	3.3.2	0.5	0	0.5280517967	-0.4661547366	0.5280505132	-0.4661548823	0.000001291743295	2	8
3	3.3.3	0.5	0	0.5280517967	-0.4661547366	0.5280505132	-0.4661548823	0.000001291743295	2	8
4	3.3.1	0.5	1	0.0018927256	-0.0605475009	0.0018927256	-0.0605475009	0.0000000000000000	1	32
5	3.3.2	0.5	1	0.0115869336	-0.1237941202	0.0115863489	-0.1237937597	0.000000686901987	2	8
6	3.3.3	0.5	1	-0.0984980337	-0.1443252034	-0.0984984501	-0.1443300850	0.000004899327252	2	8
7	3.3.1	2	0	0.2057667546	-0.0603736105	0.2057667609	-0.0603736312	0.000000021637468	3	8
8	3.3.2	2	0	0.4602210326	-0.1086434484	0.4602233052	-0.1086380949	0.000005815898298	7	4
9	3.3.3	2	0	0.4602210326	-0.1086434484	0.4602233052	-0.1086380949	0.000005815898298	7	4
10	3.3.1	2	1	0.0726965721	-0.1330701826	0.0726959236	-0.1330702404	0.000000651070726	2	8
11	3.3.2	2	1	0.2155677595	-0.1757887921	0.2155705823	-0.1757920429	0.000004305333957	6	8
12	3.3.3	2	1	0.1623597234	-0.1355015859	0.1623671612	-0.1354949282	0.000009982276200	7	8
13	3.3.1	10	0	0.0000008678	-0.0000009914	0.0000000000	0.0000000000	0.000001317554857	3	8
14	3.3.2	10	0	0.0999850044	-0.0009997501	0.0999897031	-0.0010055999	0.000007503195435	23	4
15	3.3.3	10	0	0.0999850044	-0.0009997501	0.0999897031	-0.0010055999	0.000007503195435	23	4
16	3.3.1	10	1	-0.0000003089	-0.0000046481	0.0000005220	-0.0000083632	0.000003806883610	10	4
17	3.3.2	10	1	0.0899015246	-0.0098985254	0.0899036034	-0.0099023811	0.000004380391755	23	4
18	3.3.3	10	1	0.0099925039	-0.0002998251	0.0099997621	-0.0002947835	0.000008837375051	28	4

Dapat dilihat pada tabel 3.3.1 bahwa perhitungan transformasi Hankel dapat memberikan hasil yang memuaskan karena memenuhi batas toleransi yang diberikan, yaitu 10^{-5} . Dalam hal ini hasil perhitungan bernilai kompleks, karena pemberian nilai $\alpha = 1 + i$. Dari tabel tersebut terlihat bahwa transformasi Hankel tipe eksponensial memerlukan banyak akar (N_I) yang kurang dari 29, hal ini dapat terlihat pula pada grafik integrand masing-masing transformasi Hankel yang cenderung cepat mendekati sumbu x. Mengenai n titik yang digunakan dalam kuadratur, hanya transformasi Hankel 3.3.1 untuk $r = 0,5$ yang memerlukan 32 titik, sedangkan yang lainnya cukup dengan 4, 8 atau 16 titik. Hal ini menunjukkan bahwa proses perhitungan diatas tidak perlu menggunakan kuadratur 64 titik.

2. Tipe Trigonometri

Transformasi Hankel tipe trigonometri merupakan transformasi Hankel yang mengandung fungsi trigonometri. Pada tipe trigonometri ini akan diambil 4 transformasi Hankel yang nilai eksaknya telah diketahui berdasarkan tabel integral.

$$g_4(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)J_1(xr)}{x} dx = \begin{cases} \frac{a}{r}, & \text{jika } a \leq r \\ r \\ \frac{r}{(a + \sqrt{a^2 - r^2})}, & \text{jika } a \geq r \end{cases} \quad 3.3.4$$

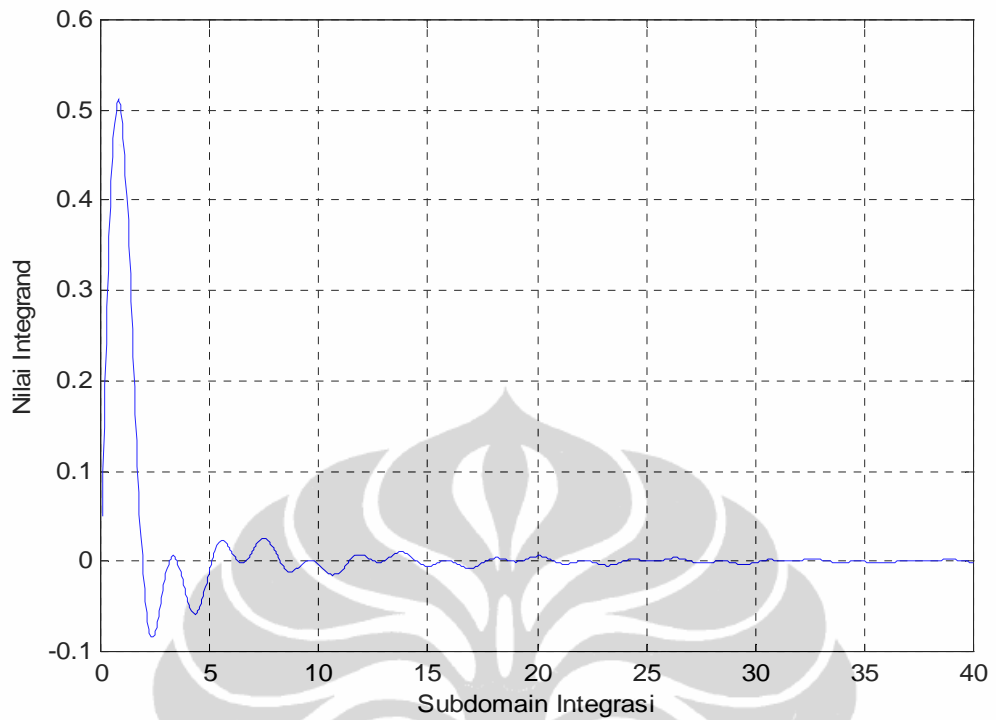
$$g_5(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)J_1(xr)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, & \text{jika } a \leq r \\ 0, & \text{jika } a \geq r \end{cases} \quad 3.3.5$$

(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000, p.720)

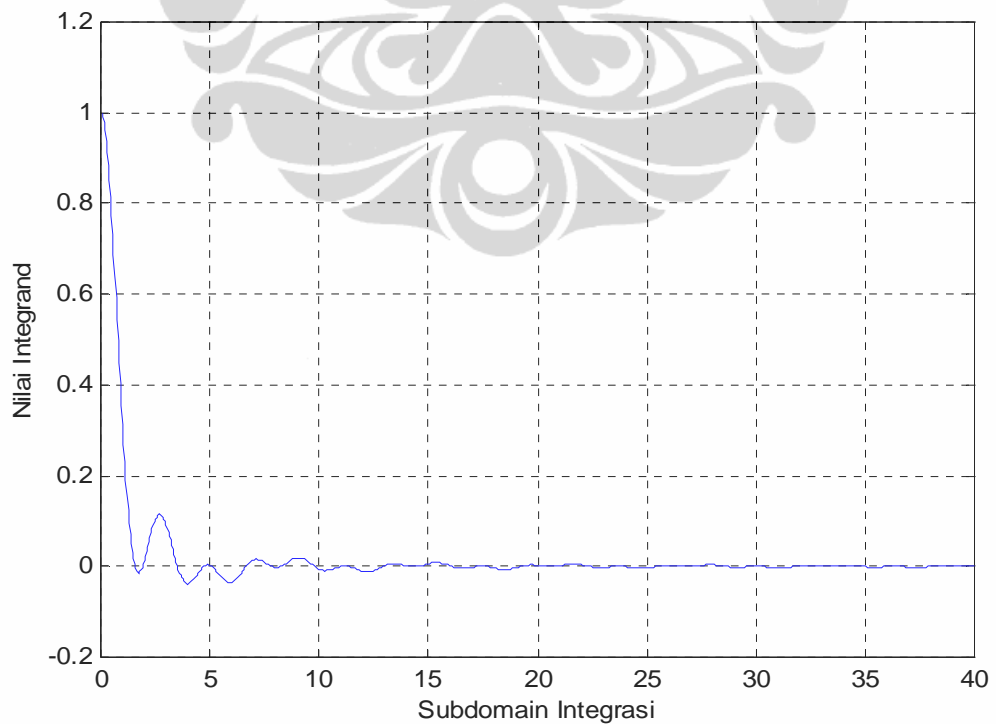
$$g_6(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)J_0(xr)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{jika } 0 < r < 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{r}\right), & \text{jika } r > 1 \end{cases} \quad 3.3.6$$

(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000, p.721)

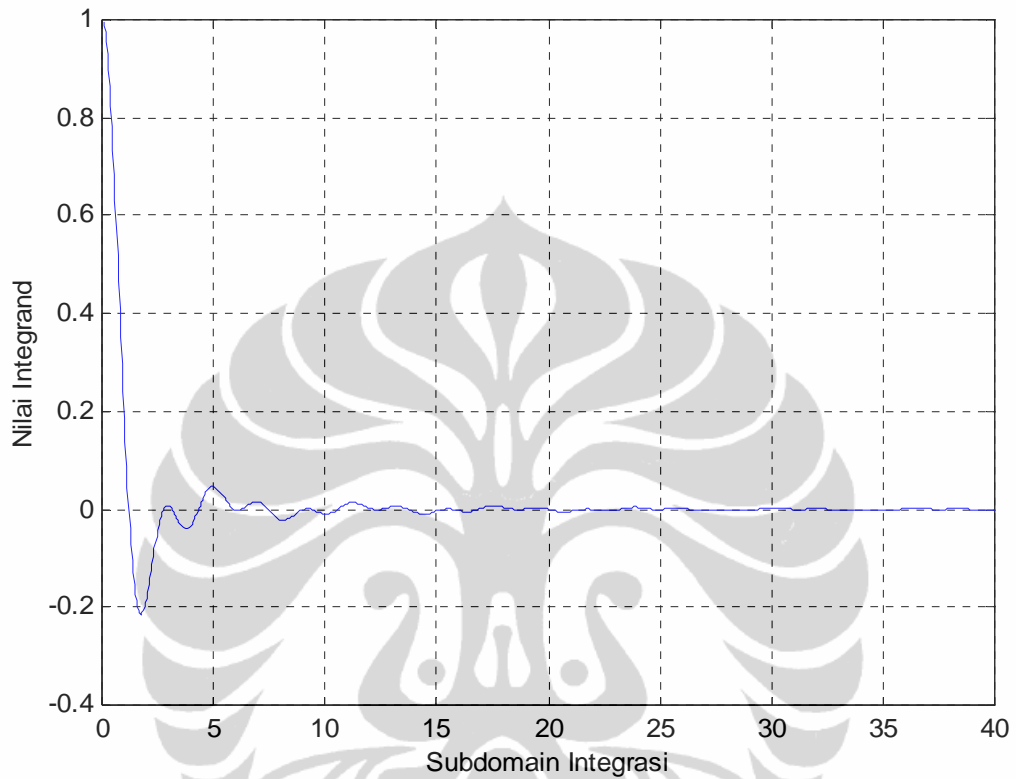
Berikut ini diberikan grafik tiga transformasi Hankel diatas untuk $r = 2$.



Gambar 3.3.7: Grafik integrand $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} J_1(2x) dx$, persamaan (3.3.4) dengan $r = 2$ dan $a = 1$



Gambar 3.3.8: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x} J_1(2x) dx$, persamaan (3.3.5) dengan $r = 2$ dan $a = 1$



Gambar 3.3.9: Grafik integrand $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} J_0(2x) dx$, persamaan (3.3.6) dengan $r = 2$ dan $a = 1$

Pada tipe trigonometri tersebut, percobaan dilakukan dengan mengambil $r = 0.5, 2$ dan $10, a = 1$, serta toleransi 10^{-5} . Hasil perhitungan dari transformasi Hankel tipe trigonometri diatas dapat dilihat pada tabel (3.3.2) berikut ini.

Tabel 3.3.2: Hasil Percobaan Transformasi Hankel Tipe Trigonometri

No	TH	r	V	Nilai eksak		Nilai aproksimasi		Abs. error	Abs. error	N_1	n
				Riil	Imaginer	Riil	Imaginer				
1	3.3.4	0.5	1	0.2679491924	0.0000000000	0.2679392591	0.0000000000	0.0000099333	9.93E-06	283	8
2	3.3.5	0.5	1	0.0000000000	0.0000000000	0.0000097907	0.0000000000	0.0000097907	9.79E-06	28	8
3	3.3.6	0.5	0	1.5707963268	0.0000000000	1.5707863336	0.0000000000	0.0000099932	9.99E-06	284	8
4	3.3.4	2	1	0.5000000000	0.0000000000	0.5000092872	0.0000000000	0.0000092872	9.29E-06	142	4
5	3.3.5	2	1	0.8660254038	0.0000000000	0.8660169125	0.0000000000	0.0000084913	8.49E-06	141	4
6	3.3.6	2	0	0.5235987756	0.0000000000	0.5235888010	0.0000000000	0.0000099746	9.97E-06	370	4
7	3.3.4	10	1	0.1000000000	0.0000000000	0.1000076380	0.0000000000	0.0000076380	7.64E-06	110	4
8	3.3.5	10	1	0.9949874371	0.0000000000	0.9949972570	0.0000000000	0.0000098199	9.82E-06	115	4
9	3.3.6	10	0	0.1001674212	0.0000000000	0.1001577945	0.0000000000	0.0000096266	9.63E-06	110	4

Dapat dilihat pada tabel 3.3.2 bahwa perhitungan transformasi Hankel dapat memberikan hasil yang memuaskan karena memenuhi batas toleransi yang diberikan, yaitu 10^{-5} . Dalam hal ini hasil perhitungan bernilai riil, karena integrand dari masing-masing transformasi adalah fungsi bernilai riil. Dari tabel tersebut terlihat bahwa transformasi Hankel tipe trigonometri memerlukan sekurang-kurangnya 28 akar (N_I), hal ini dapat terlihat pula pada grafik integrand yang cenderung berosilasi dan mendekati sumbu x dengan perlahan. Mengenai n titik yang digunakan dalam kuadratur, untuk memperoleh hasil dengan toleransi 10^{-5} cukup dengan menggunakan kuadratur 4 atau 8 titik.

3.4 Analisis Hasil

Pada subbab ini akan dibahas analisis perhitungan transformasi Hankel tipe eksponensial dan trigonometri yang meliputi perbandingan banyak akar (N_I) yang digunakan, n titik yang digunakan dalam kuadratur serta grafik integrand dari transformasi Hankel.

Dari dua tabel 3.3.1 dan 3.3.2, dapat dilihat bahwa transformasi Hankel tipe eksponensial memerlukan maksimal 28 akar (N_I), sedangkan tipe trigonometri minimal 28 akar (N_I). Hal ini menunjukkan bahwa transformasi Hankel tipe eksponensial cenderung memerlukan banyak akar yang lebih sedikit dibandingkan tipe trigonometri, atau dengan kata lain transformasi Hankel tipe eksponensial lebih cepat konvergen dibandingkan dengan tipe trigonometri.

Mengenai n titik yang digunakan dalam kuadratur, berdasarkan hasil pada tabel 3.3.1 dan 3.3.2, transformasi Hankel tipe eksponensial dan trigonometri memerlukan $n = 4$ atau 8 untuk dapat memenuhi batas toleransi yang diberikan kecuali transformasi tipe eksponensial pada persamaan 3.3.1 yang membutuhkan $n = 8, 16$ dan 32. Namun, hasil untuk $n = 32$ tersebut justru menunjukkan *absolute error* yang kurang dari 10^{-10} . Hal ini menunjukkan bahwa untuk n titik yang kian besar, maka hasil cenderung lebih baik.

Mengenai grafik integrand dari kedua jenis transformasi diatas, transformasi Hankel tipe trigonometri cenderung berosilasi serta perlahan mendekati sumbu x , sedangkan tipe eksponensial cenderung cepat mendekati sumbu x .

BAB 4

KESIMPULAN

Sesuai pembahasan di bab 3 dari tugas akhir ini, perhitungan secara numerik dari transformasi Hankel didasarkan pada dua hal, yaitu karakteristik dari transformasi Hankel dan cara penyelesaiannya dengan metode kuadratur Gauss.

Karakteristik dari transformasi Hankel adalah:

1. Integrand transformasi Hankel mempunyai banyak akar (*zeros*) yang merupakan jumlahan dari akar-akar fungsi Bessel dan fungsi $f(x)$.
2. Dengan banyak akar tersebut, maka integrand transformasi Hankel berosilasi sepanjang sumbu- x dan nilai-nilainya mendekati sumbu- x untuk nilai x yang besar.

Berdasarkan karakteristik itu, integrasi numerik dari transformasi Hankel dapat dilakukan dengan membagi domain integrasi berdasarkan akar fungsi Bessel, kemudian menghitung integral tersebut pada subdomain dengan metode kuadratur Gauss. Karena grafik integrand cenderung mendekati sumbu- x , maka perhitungan cukup dilakukan sampai akar tertentu.

Simulasi perhitungan transformasi Hankel dilakukan untuk dua tipe integrand, yaitu tipe eksponensial (lihat gambar 3.1.3) dan tipe trigonometri (lihat gambar 3.1.4). Hasil perhitungan tipe eksponensial dan trigonometri masing-masing dapat dilihat pada tabel 3.3.3 dan 3.3.4. Berdasarkan dua tabel tersebut, dapat disimpulkan bahwa transformasi Hankel tipe trigonometri membutuhkan minimal 28 akar (lihat tabel 3.3.4) yang lebih banyak dibandingkan tipe eksponensial yang membutuhkan minimal 1 akar dan maksimal 28 akar (lihat tabel 3.3.3). Berdasarkan jumlah titik yang digunakan pada kuadratur Gauss, terlihat bahwa hasil perhitungan transformasi Hankel tipe eksponensial menjadi lebih baik jika banyak titik yang digunakan dalam kuadratur ditingkatkan (lihat tabel 3.3.3). Sedangkan untuk tipe trigonometri, selain dengan meningkatkan banyak titik yang digunakan dalam kuadratur, perbaikan hasil perhitungan dapat juga dilakukan dengan menambah banyak akar (lihat tabel 3.3.4).

DAFTAR PUSTAKA

- Andrews, G.E., Askey dan Roy, Ranjan. 1999 .“*Special Functions*”. Ed. Encyclopedia of Mathematics and Its application 71. Universitas Cambridge, Cambridge
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C. 1996. “*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*”. Ed. ke-6. Departemen of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute, John Wiley and Sons, INC
- Chave, A. D.,1983. “*Numerical integration of Related Hankel Transform by Quadrature and Continued Fraction Expansion*”. Geophysics, Vol 48. No. 12, Hal. 1671-1686
- Conte, SD dan Boor, CD. “*Dasar-dasar Analisis Numerik*”. Alih bahasa: Mursaid. Ed. Ke-3. Erlangga, Jakarta
- Dahlquist, Germund dan Bjorck, Ake.1974. “*Numerical Methods*”.Alih bahasa: Ned Anderson. Prentice Hall, Englewood Cliffs
- Edward, C. H. dan Penney, D.R. 1996. “*Differential equations, Computing and Modeling*”. Prentice hall, Upper saddle river, New Jersey
- Ferryanto, SG. 1988. “*Metode-Metode Numeris dan Penerapannya dalam Komputer Pribadi*”. Jilid 2. UKSW, Salatiga
- Gradshteyn, L.S and Ryzhik, I.M.,2000.”*Tabel of Integrals Series and Product*”. Ed. Ke-6.USA:cademic Press
- Kincaid, Davin.1996.”*Numerical Analysis*”.Ed. Ke-2. Universitas Texas, Austin.
- Murray, R. S. 1992.”*Kalkulus lanjutan*”.Alih bahasa: Pantur Silaban, Institut Teknologi Bandung, Bandung
- Pennington, R.H. 1967.”*Introductory computer Methods and Numerical Analysis*”. Ed-Student. New York: Macmillan
- Purcell, E.J dan Varberg, Dale. 1997. “*Calculus*”. Ed. ke-7. Prentice Hall International, Inc
- Watson, G.N.,1962.”*A Treatise on the Theory of Bessel Function*”. Ed. ke-2. Universitas Cambridge, Cambridge

LAMPIRAN 1

Absis dan Bobot Metode Kuadratur Gauss n Titik

untuk $n = 4$

No	Absis	Bobot
1	-0.86113631159405200	0.34785484513745300
2	-0.33998104358485600	0.65214515486254600
3	0.33998104358485600	0.65214515486254600
4	0.86113631159405200	0.34785484513745300

untuk $n = 8$

No	Absis	Bobot
1	-0.96028985649753600	0.10122853629037600
2	-0.79666647741362600	0.22238103445337400
3	-0.52553240991632800	0.31370664587788700
4	-0.18343464249564900	0.36268378337836100
5	0.18343464249564900	0.36268378337836100
6	0.52553240991632800	0.31370664587788700
7	0.79666647741362600	0.22238103445337400
8	0.96028985649753600	0.10122853629037600

untuk $n = 16$

No	Absis	Bobot
1	-0.98940093499164900	0.02715245941175400
2	-0.94457502307323200	0.06225352393864780
3	-0.86563120238783100	0.09515851168249270
4	-0.75540440835500300	0.12462897125553300
5	-0.61787624440264300	0.14959598881657600
6	-0.45801677765722700	0.16915651939500200
7	-0.28160355077925800	0.18260341504492300
8	-0.09501250983763740	0.18945061045506800
9	0.09501250983763740	0.18945061045506800
10	0.28160355077925800	0.18260341504492300

11	0.45801677765722700	0.16915651939500200
12	0.61787624440264300	0.14959598881657600
13	0.75540440835500300	0.12462897125553300
14	0.86563120238783100	0.09515851168249270
15	0.94457502307323200	0.06225352393864780
16	0.98940093499164900	0.02715245941175400

untuk $n = 32$

No	Absis	Bobot
1	-0.99726386184948100	0.00701861000947009
2	-0.98561151154526800	0.01627439473090560
3	-0.96476225558750600	0.02539206530926200
4	-0.93490607593773900	0.03427386291302140
5	-0.89632115576605200	0.04283589802222660
6	-0.84936761373256900	0.05099805926237610
7	-0.79448379596794200	0.05868409347853550
8	-0.73218211874028900	0.06582222277636180
9	-0.66304426693021500	0.07234579410884850
10	-0.58771575724076200	0.07819389578707030
11	-0.50689990893222900	0.08331192422694670
12	-0.42135127613063500	0.08765209300440380
13	-0.33186860228212700	0.09117387869576380
14	-0.23928736225213700	0.09384439908080450
15	-0.14447196158279600	0.09563872007927480
16	-0.04830766568773830	0.09654008851472780
17	0.04830766568773830	0.09654008851472780
18	0.14447196158279600	0.09563872007927480
19	0.23928736225213700	0.09384439908080450
20	0.33186860228212700	0.09117387869576380
21	0.42135127613063500	0.08765209300440380
22	0.50689990893222900	0.08331192422694670
23	0.58771575724076200	0.07819389578707030
24	0.66304426693021500	0.07234579410884850
25	0.73218211874028900	0.06582222277636180
26	0.79448379596794200	0.05868409347853550
27	0.84936761373256900	0.05099805926237610
28	0.89632115576605200	0.04283589802222660
29	0.93490607593773900	0.03427386291302140
30	0.96476225558750600	0.02539206530926200
31	0.98561151154526800	0.01627439473090560
32	0.99726386184948100	0.00701861000947009

untuk $n = 64$

No	Absis	Bobot
1	-0.99930504173577200	0.00178328072169643
2	-0.99634011677195500	0.00414703326056246
3	-0.99101337147674400	0.00650445796897836
4	-0.98333625388462500	0.00884675982636394
5	-0.97332682778991000	0.01116813946013110
6	-0.96100879965205300	0.01346304789671860
7	-0.94641137485840200	0.01572603047602470
8	-0.92956917213193900	0.01795171577569730
9	-0.91052213707850200	0.02013482315353020
10	-0.88931544599511400	0.02227017380838320
11	-0.86599939815409200	0.02435270256871080
12	-0.84062929625258000	0.02637746971505460
13	-0.81326531512279700	0.02833967261425940
14	-0.78397235894334100	0.03023465707240240
15	-0.75281990726053100	0.03205792835485150
16	-0.71988185017161000	0.03380516183714160
17	-0.68523631305423300	0.03547221325688230
18	-0.64896547125465700	0.03705512854024000
19	-0.61115535517239300	0.03855015317861560
20	-0.57189564620263400	0.03995374113272030
21	-0.53127946401989400	0.04126256324262350
22	-0.48940314570705200	0.04247351512365350
23	-0.44636601725346400	0.04358372452932340
24	-0.40227015796399100	0.04459055816375650
25	-0.35722015833766800	0.04549162792741810
26	-0.31132287199021000	0.04628479658131440
27	-0.26468716220876700	0.04696818281621000
28	-0.21742364374000700	0.04754016571483030
29	-0.16964442042399200	0.04799938859645830
30	-0.12146281929612000	0.04834476223480290
31	-0.07299312178779900	0.04857546744150340
32	-0.02435029266342440	0.04869095700913970
33	0.02435029266342440	0.04869095700913970
34	0.07299312178779900	0.04857546744150340
35	0.12146281929612000	0.04834476223480290
36	0.16964442042399200	0.04799938859645830
37	0.21742364374000700	0.04754016571483030
38	0.26468716220876700	0.04696818281621000

39	0.31132287199021000	0.04628479658131440
40	0.35722015833766800	0.04549162792741810
41	0.40227015796399100	0.04459055816375650
42	0.44636601725346400	0.04358372452932340
43	0.48940314570705200	0.04247351512365350
44	0.53127946401989400	0.04126256324262350
45	0.57189564620263400	0.03995374113272030
46	0.61115535517239300	0.03855015317861560
47	0.64896547125465700	0.03705512854024000
48	0.68523631305423300	0.03547221325688230
49	0.71988185017161000	0.03380516183714160
50	0.75281990726053100	0.03205792835485150
51	0.78397235894334100	0.03023465707240240
52	0.81326531512279700	0.02833967261425940
53	0.84062929625258000	0.02637746971505460
54	0.86599939815409200	0.02435270256871080
55	0.88931544599511400	0.02227017380838320
56	0.91052213707850200	0.02013482315353020
57	0.92956917213193900	0.01795171577569730
58	0.94641137485840200	0.01572603047602470
59	0.96100879965205300	0.01346304789671860
60	0.97332682778991000	0.01116813946013110
61	0.98333625388462500	0.00884675982636394
62	0.99101337147674400	0.00650445796897836
63	0.99634011677195500	0.00414703326056246
64	0.99930504173577200	0.00178328072169643

LAMPIRAN 2

Akar-Akar Fungsi Bessel Jenis Pertama Order 0 dan 1

No	Order 0	Order 1
1	2.404825557695772768621632	3.831705970207512315614436
2	5.520078110286310649596604	7.015586669815618753537050
3	8.653727912911012216954199	10.17346813506272207718571
4	11.79153443901428161374304	13.32369193631422303239368
5	14.93091770848778594776259	16.47063005087763281255246
6	18.07106396791092254314788	19.61585851046824202112507
7	21.21163662987925895907839	22.76008438059277189805301
8	24.35247153074930273705794	25.90367208761838262549586
9	27.49347913204025479587729	29.04682853491685506664782
10	30.63460646843197511754958	32.18967991097440362662298
11	33.77582021357356868423855	35.33230755008386510263448
12	36.91709835366404397976949	38.47476623477161511205220
13	40.05842576462823929479931	41.61709421281445088586352
14	43.19979171317673035752407	44.75931899765282173277935
15	46.34118837166181401868579	47.90146088718544712127401
16	49.48260989739781717360276	51.04353518357150946873303
17	52.62405184111499602925129	54.18555364106132053209997
18	55.76551075501997931168349	57.32752543790101074509050
19	58.90698392608094213283441	60.46945784534749155939875
20	62.04846919022716988285250	63.61135669848123263103976
21	65.18996480020686044063603	66.75322673409849341530526
22	68.33146932985679827099230	69.89507183749577396973054
23	71.47298160359373282506307	73.03689522557383482650612
24	74.61450064370183788382054	76.17869958464145757285261
25	77.75602563038805503773937	79.32048717547629939118448
26	80.89755587113762786377214	82.46225991437355645398661
27	84.03909077693819015787964	85.60401943635023096594943
28	87.18062984364115365126180	88.74576714492630690373592
29	90.32217263721048005571777	91.88750425169498528055362
30	93.46371878194477417119059	95.02923180804469526805100
31	96.60526795099626877812162	98.17095073079078197353776
32	99.74681985868059647027998	101.3126618230387301371411
33	102.8883742541947945964200	104.4543657912827600713634
34	106.0299309164516155101769	107.5960632595091721826704

35	109.1714896498053835520660	110.7377547808992151086087
36	112.3130502804949096274945	113.8794408475949981348842
37	115.4546126536669396281178	117.0211218988924250275765
38	118.5961766308725317156294	120.1627983281490037581194
39	121.7377420879509629652344	123.3044704886357180167600
40	124.8793089132329460452591	126.4461386985165956977945
41	128.0208770060083240797636	129.5878032451039967537414
42	131.1624462752139146078961	132.7294643885096158867746
43	134.3040166383054660993529	135.8711223647890005918016
44	137.4455880202842777877827	139.0127773886597041784335
45	140.5871603528542965484889	142.1544296558590290327009
46	143.7287335736897325339507	145.2960793451959072324222
47	146.8703076257966495941327	148.4377266203422303959393
48	150.0118824569547574908805	151.5793716314014279927835
49	153.1534580192278924875916	154.7210145162859535247666
50	156.2950342685335238195495	157.8626554019302978050947
51	159.4366111642631463234910	161.0042944053619934638934
52	162.5781886689466775190598	164.1459316346496354021325
53	165.7197667479550208666904	167.2875671897440838035648
54	168.8613453692358256874563	170.4292011632266323477455
55	172.0029245030782002154004	173.5708336409759286303670
56	175.1445041219027430653728	176.7124647027637574552977
57	178.2860842000737706814840	179.8540944227883848450849
58	181.4276647137310507942122	182.9957228701529660840844
59	184.5692456406387181411154	186.1373501092955080202398
60	187.7108269600493597800753	189.2789762003760140932258
61	190.8524086525815223217808	192.4206011996257054217711
62	193.9939907001091197899404	195.5622251596625824307829
63	197.1355730856614147362120	198.7038481297770521261181
64	200.2771557933324117833621	201.8454701561908823049998
65	203.4187388081986461712488	204.9870912822923441443587
66	206.5603221162444736554572	208.1287115488500590814872
67	209.7019057042940751974824	211.2703309942077666144628
68	212.8434895599494827507456	214.4119496544619698287003
69	215.9850736715340131569956	217.5535675636241894017848
70	219.1266580280405674651891	220.6951847537693597448129
71	222.2682426190843143412845	223.8368012551717287402916
72	225.4098274348593298985132	226.9784170964294717884802
73	228.5514124660988133011978	230.1200323045790986476248
74	231.6929977040385387809738	233.2616469052006153543463
75	234.8345831403832410198080	236.4032609225143012086734

76	237.9761687672756628555576	239.5448743794698705812589
77	241.1177545772680225149970	242.6864872978287095851298
78	244.2593405632956825588066	245.8280996982398071075521
79	247.4009267186528248480879	248.9697116003099371623525
80	250.5425130369699554704464	252.1113230226685940010349
81	253.6840995121930810046928	255.2529339830281320490806
82	256.8256861385644130243177	258.3945444982395187642312
83	259.9672729106044715730648	261.5361545843440692973803
84	263.1088598230954706927040	264.6777642566214968097544
85	266.2504468710658801188410	267.8193735296345809709431
86	269.3920340497760671381734	270.9609824172707291023154
87	272.5336213547049314535143	274.1025909327806792647524
88	275.6752087815374538478978	277.2441990888145719904636
89	278.8167963261530865784618	280.3858068974555970383792
90	281.9583839846149198543167	283.5274143702514032587152
91	285.0999717531595645391306	286.6690215182434431627341
92	288.2415596281876964381174	289.8106283519944089128676
93	291.3831476062552122416890	292.9522348816139030037287
94	294.5247356840649514582332	296.0938411167824747437305
95	297.6663238584589425240492	299.2354470667741426352574
96	300.8079121264111347716690	302.3770527404775127692336
97	303.9495004850205811060578	305.5186581464155942916188
98	307.0910889315050391147738	308.6602632927644047708068
99	310.2326774631949609525961	311.8018681873704508125112
100	313.3742660775278447196902	314.9434728377671624580656
101	316.5158547720429222184775	318.0850772511903536967889
102	319.6574435443761599488873	321.2266814345927757639819
103	322.7990323922555520032475	324.3682853946578247303100
104	325.9406213134966851673705	327.5098891378124601684895
105	329.0822103059985580383430	330.6514926702393873669457
106	332.2237993677396373454899	333.7930959978885516094793
107	335.3653884967741359209434	336.9346991264879894208539
108	338.5069776912284979209795	340.0763020615540783600026
109	341.6485669492980779584523	343.2179048084012238976768
110	344.7901562692440017789754	346.3595073721510191190562
111	347.9317456493901970068082	349.5011097577409104217423
112	351.0733350881205833077720	352.6427119699324000155327
113	354.2149245838764120723287	355.7843140133188138542128
114	357.3565141351537464179663	358.9259158923326616248675
115	360.4981037405010729514569	362.0675176112526135720338
116	363.6396933985170373231119	365.2091191742101172289147

117	366.7812831078482961511060	368.3507205851956755536596
118	369.9228728671874783981774	371.4923218480648065143109
119	373.0644626752712497490183	374.6339229665437028213778
120	376.2060525308784739676671	377.7755239442346092629992
121	379.3476424328284656130799	380.9171247846209339459923
122	382.4892323799793288604465	384.0587254910721086792076
123	385.6308223712263775181196	387.2003260668482127466365
124	388.7724124055006316474346	390.3419265151043734003819
125	391.9140024817673864872114	393.4835268388949555521802
126	395.0555925990248496581621	396.6251270411775523514373
127	398.1971827563028428764478	399.7667271248167876029421
128	401.3387729526615646417550	402.9083270925879402941833
129	404.4803631871904105848778	406.0499269471804008665353
130	407.6219534590068483641816	409.1915266912009682728426
131	410.7635437672553441906415	412.3331263271769963127683
132	413.9051341111063382384651	415.4747258575593972236193
133	417.0467244897552663636083	418.6163252847255100254016
134	420.1883149024216257066657	421.7579246109818406720047
135	423.3299053483480819004966	424.8995238385666806433003
136	426.4714958267996157372832	428.0411229696526102233755
137	429.6130863370627072752192	431.1827220063488923461001
138	432.7546768784445554823246	434.3243209507037625489087
139	435.8962674502723316245713	437.4659198047066202573502
140	439.0378580518924647081335	440.6075185702901263250601
141	442.1794486826699573816391	443.7491172493322114748911
142	445.3210393419877307942660	446.8907158436580000256692
143	448.4626300292459969898168	450.0323143550416530441853
144	451.6042207438616574959280	453.1739127852081348324515
145	454.7458114852677268416657	456.3155111358349064449017
146	457.8874022529127798062941	459.4571094085535497281087
147	461.0289930462604212672620	462.5987076049513251858481
148	464.1705838647887775767442	465.7403057265726667941018
149	467.3121747079900084536544	468.8819037749206167231199
150	470.4537655753698384321634	472.0235017514582027662023
151	473.5953564664471069586501	475.1650996576097611267865
152	476.7369473807533362768792	478.3066974947622070760959
153	479.8785383178323162862533	481.4482952642662558624613
154	483.0201292772397056003975	484.5898929674375961299310
155	486.1617202585426480732848	487.7314906055580179874562
156	489.3033112613194040977458	490.8730881798764977602981
157	492.4449022851589960166860	494.0146856916102413519512

158	495.5864933296608670207868	497.1562831419456880473910
159	498.7280843944345529380228	500.2978805320394764964873
160	501.8696754790993663501078	503.4394778630193745296146
161	505.0112665832840924990941	506.5810751359851743755330
162	508.1528577066266964738965	509.7226723520095547741963
163	511.2944488487740411915927	512.8642695121389114039968
164	514.4360400093816157120542	516.0058666173941569738201
165	517.5776311881132734468657	519.1474636687714922649056
166	520.7192223846409798446849	522.2890606672431493456795
167	523.8608135986445691552365	525.4306576137581081242134
168	527.0024048298115098931093	528.5722545092427873475911
169	530.1439960778366786404818	531.7138513546017111050291
170	533.2855873424221418449084	534.8554481507181518419362
171	536.4271786232769452844120	537.9970448984547508450488
172	539.5687699201169108873902	541.1386415986541171141832
173	542.7103612326644406093189	544.2802382521394054938719
174	545.8519525606483270819532	547.4218348597148748980573
175	548.9935439038035707637448	550.5634314221664274229849
176	552.1351352618712033325405	553.7050279402621291073423
177	555.2767266345981170733475	556.8466244147527130644371
178	558.4183180217369000250756	559.9882208463720656786720
179	561.5599094230456766607359	563.1298172358376965276851
180	564.7015008382879538856081	566.2714135838511926621648
181	567.8430922672324721474293	569.4130098910986578474580
182	570.9846837096530614617208	572.5546061582511373445680
183	574.1262751653285021639868	575.6962023859650287829261
184	577.2678666340423902087180	578.8377985748824796533347
185	580.4094581155830068429282	581.9793947256317719266623
186	583.5510496097431924893711	585.1209908388276942821527
187	586.6926411163202246816489	588.2625869150719024085421
188	589.8342326351156999001435	591.4041829549532678214888
189	592.9758241659354191641086	594.5457789590482156220759
190	596.1174157085892772413557	597.6873749279210516032858
191	599.2590072628911553427809	600.8289708621242790943228
192	602.4005988286588171745176	603.9705667621989059164385
193	605.5421904057138082257790	607.1121626286747418084454
194	608.6837819938813581754902	610.2537584620706866653535
195	611.8253735929902863056110	613.3953542628950099194914
196	614.9669652028729098136319	616.5369500316456213800492
197	618.1085568233649549210978	619.6785457688103338341661
198	621.2501484543054706791861	622.8201414748671177004526

199	624.3917400955367453763498	625.9617371502843480141597
200	627.5333317469042254568406	629.1033327955210440120519
201	630.6749234082564368625613	632.2449284110271015743844
202	633.8165150794449087141664	635.3865239972435187712060
203	636.9581067603240992506502	638.5281195546026147504749
204	640.0996984507513239498306	641.6697150835282421961759
205	643.2412901505866857551685	644.8113105844359935757323
206	646.3828818596930073372633	647.9529060577334013874988
207	649.5244735779357653211354	651.0945015038201326109872
208	652.6660653051830264130622	654.2360969230881775546903
209	655.8076570413053853632693	657.3776923159220332889205
210	658.9492487861759047032100	660.5192876826988818439463
211	662.0908405396700561984918	663.6608830237887633468860
212	665.2324323016656639607351	666.8024783395547442642764
213	668.3740240720428491637799	669.9440736303530809109756
214	671.5156158506839763117044	673.0856688965333783800571
215	674.6572076374736010080696	676.2272641384387450426070
216	677.7987994322984191776860	679.3688593564059427608258
217	680.9403912350472176939917	682.5104545507655329525558
218	684.0819830456108263668568	685.6520497218420186402926
219	687.2235748638820712472813	688.7936448699539826128841
220	690.3651666897557292070376	691.9352399954142218234642
221	693.5067585231284837528294	695.0768350985298781426987
222	696.6483503638988820359982	698.2184301796025655821401
223	699.7899422119672930202059	701.3600252389284940983666
224	702.9315340672358667708680	704.5016202767985900846403
225	706.0731259296084948313993	707.6432152934986136530228

Sumber: Output Software Maple

LAMPIRAN 3

Contoh Program Integrasi Numerik Transformasi Hankel

Berikut diberikan contoh program untuk menghitung transformasi Hankel seperti pada persamaan 3.3.1

$$g_1(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} J_v(xr) x^{v+1} dx = \frac{r^v e^{-\frac{r^2}{4}\alpha}}{(2\alpha)^{v+1}}$$

```
% Program menghitung transformasi Hankel dengan metode
% kudratur Gauss
Clc; clear; % Perintah untuk membersihkan layar
% Berikut perintah untuk dapat mengakses data di excel
channel=ddeinit('excel','tabel.xls');
zeros_besselj = ddereq(channel,'r4c21:r1003c22');
absis_point = ddereq(channel,'r4c4:r203c17');

% RERR atau toleransi diinput oleh user
RERR=input('masukkan RERR:');
r=input('masukkan r:');
v=input('masukkan v:');
alfa= input('masukkan v:');% dpt bernilai riil/komplek

% Deklarasi awal variabel hasil
hasil=0;
nilai_eksak=(r^v)*exp(-r^2)/(4*alfa)/((2*alfa)^(v+1));
    [banyak_akar, dua ]=size(zeros_besselj);

% variabel g untuk menyimpan nilai transformasi Hankel
g=zeros(5,1);
error=zeros(5,1);
```



```

% N1 menghitung banyak akar yang dibutuhkan
N1=zeros(5,1);
counter=1;
for j=1:5
    for n=1:banyak_akar
        for i=1:2^(j+1)
            if n>1
                a=zeros_besselj(n-1,v+1)/r;
            else
                a=0;
            end

% Metode kuadratur Gauss
            b=zeros_besselj(n,v+1)/r;
            bobot=absis_point(i,2*j);
            absis=absis_point(i,2*j-1);
            aj=0.5*((b-a)*absis+(b+a));
            hj=0.5*(b-a)*bobot;
            p(i,j)=hj*exp(alfa*aj^2)*
                besselj(v,aj*r)*aj^(v+1);

            if j==1
                X(counter)=aj;
                Y(counter)=
                    exp(-alfa*aj^2)*besselj(v,aj*r)*aj^(v+1);

                counter=counter+1;
            end
        end
    end

p(n,j)=sum(pp(:,j));
g(j)=g(j)+p(n,j);

```

```

% Kriteria pemberhentian pertama
    if ( n>1 & abs((p(n,j)-p(n-1,j))/
        (p(n-1,j)+1))<RERR)

        N1(j)=n; break;
    end

% Kriteria pemberhentian kedua
    if sqrt((real(g(j))-real(nilai_eksak))^2+
        (imag(g(j))-imag(nilai_eksak))^2)<RERR

        error(j)=sqrt((real(g(j))-real(nilai_eksak))^2+
            (imag(g(j))-imag(nilai_eksak))^2);

        N1(j)=n; break;
    end
end

% Kriteria pemberhentian ketiga
    if sqrt((real(g(j))-real(nilai_eksak))^2+
        (imag(g(j))-imag(nilai_eksak))^2)<RERR

        error(j)=sqrt((real(g(j))-real(nilai_eksak))^2+
            imag(g(j))-imag(nilai_eksak))^2);

        break;
    else
        error(j)=sqrt((real(g(j))-real(nilai_eksak))^2+
            (imag(g(j))-imag(nilai_eksak))^2);
    end
end
end

```

```
% Untuk mencari nilai yang terbaik
for j=1:5
    if error(j)<=min(error);
        terbaik=j;
        break;
    end
end
hasil=g(terbaik);
absolute_error= error(terbaik);
```

