



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**KONSTRUKSI BARISAN DE BRUIJN**


**Tesis**  
**diajukan sebagai salah satu syarat**  
**untuk memperoleh gelar Magister Sains**

**HENANG PRIYANTO**  
**NPM. 0906577330**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**  
**DEPOK**  
**2010**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : **HENANG PRIYANTO**  
NPM : **0906577330**  
Tanda Tangan :   
Tanggal : **29 Desember 2010**



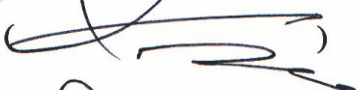

## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Henang Priyanto  
NPM : 0906577330  
Program Studi : Magister Matematika  
Judul Tesis : Konstruksi Barisan De Bruijn

Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi magister matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (  )  
Penguji I : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (  )  
Penguji II : Prof. Dr. Djati Kerami (  )  
Penguji III : Dr. Yudi Satria, M.T (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 29 Desember 2010

## KATA PENGANTAR

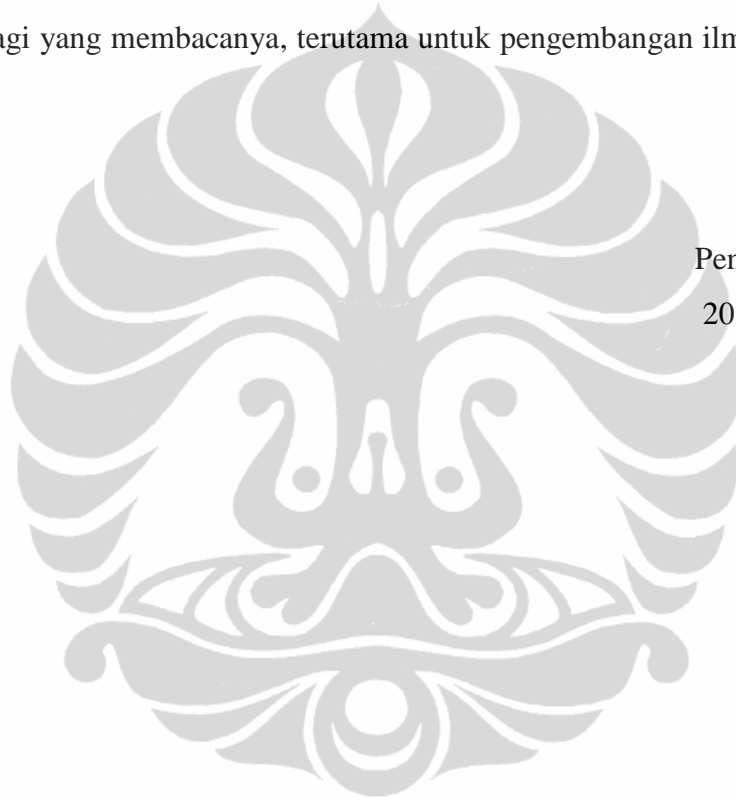
Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah SWT Tuhan yang maha kuasa, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Ibu Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang sekaligus dosen pembimbing akademik dan Ibu Bevina D.Handari, P.hD selaku sekretaris Program Studi Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan masa studi;
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
4. Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
5. Pemerintah Propinsi Jambi melalui Dinas Pendidikan Propinsi yang telah memberikan kesempatan dan dukungan melalui program beasiswa.
6. Orang tua dan keluarga besar saya, yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;
7. Istriku tercinta Khotimah dan anakku tersayang Athifa Aisy Azalia P, atas segala dukungan, kesabaran, semangat, dan doa;
8. Bang Pahrin, Mas Mul, Mbak Desi, Mas Susila dan semua teman-teman seperjuangan yang telah berjuang bersama.

9. Kepada semua teman-teman yang telah memberi semangat terutama teman-teman angkatan 2009 di Matematika UI.
10. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, saya berharap kepada Tuhan Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.



Penulis  
2010

## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama : Henang Priyanto  
NPM : 0906577330  
Program Studi : Magister Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, hak bebas biaya royalti noneksklusif (*non-exclusive royalty-free right*) atas karya ilmiah saya berjudul :

“Konstruksi Barisan De Bruijn”

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada Tanggal : 29 Desember 2010  
Yang menyatakan



Henang Priyanto

## ABSTRAK

Nama : Henang Priyanto  
Program Studi : Magister Matematika  
Judul Tesis : Konstruksi Barisan de Bruijn

Untuk sebarang bilangan bulat positif  $a \geq 2$  dan  $n \geq 1$  yang diberikan, dapat dilakukan konstruksi graf de Bruijn yang didefinisikan sebagai graf berarah dengan banyaknya simpul  $a^{n-1}$ , panjang label simpulnya  $n - 1$ , banyaknya busur berarah  $a^n$ , dan panjang label busurnya  $n$ . Karena setiap graf de Bruijn merupakan graf Euler maka dapat ditentukan sirkuit Euler dengan label minimal. Barisan de Bruijn yang dibangun oleh  $n$  dinyatakan oleh Sirkuit Euler dengan label minimal. Graf de Bruijn tidak mudah dikonstruksi untuk  $n$  yang berukuran besar, kesulitan selanjutnya dijumpai pada penentuan sirkuit Euler dengan label minimal. Oleh karena itu, pada tesis ini akan diberikan metode alternatif sebagai solusi konstruksi barisan de Bruijn dengan menggunakan teorema Fredicksen dan Maiorana. Teorema ini menjamin keberadaan barisan de Bruijn untuk setiap  $n$  yang diberikan dengan merangkai *Lyndon word* yang terurut secara *Lexicographic*. Hasil kajian ini memberikan kontribusi terhadap langkah-langkah untuk merangkai sebarang *Lyndon word* dari suatu alfabet  $A$  dengan panjang  $n$ , sehingga diperoleh barisan de Bruijn yang dibangun oleh  $n$ . Sebagai akhir pembahasan akan diberikan kaitan antara graf de Bruijn dan barisan de Bruijn.

Kata kunci : Graf de Bruijn, Barisan de Bruijn, *Lexicographic*, *Lyndon word*  
Xi+33 halaman; 4 gambar; 1 tabel  
Daftar Pustaka: 9 (1992-2006)

## ABSTRACT

Name : Henang Priyanto  
Study Program : Magister Of Mathematics  
Topic : Constructions of de Bruijn Sequences

Given any integer  $a \geq 2$  and  $n \geq 1$ , de Bruijn graph can be constructed. De Bruijn graph is a digraph with  $a^{n-1}$  vertices, each has  $n - 1$  length label, and  $a^n$  arc, each has  $n$  length label. Since each of de Bruijn graph is an Eulerian graph, then we can find an Eulerian circuit with minimal label. De Bruijn sequence which is spanned by  $n$  can be represented by Eulerian circuit with minimal label. It is not easy to construct de Bruijn graph for  $n$  large, it is implied difficulties to find Eulerian circuit with minimal label. In this “thesis” will be presented alternative method on how to construct de Bruijn sequence using Fredicksen and Maiorana Theorem. This theorem guarantees the existence of de Bruijn sequence for any given  $n$  using concatenation Lexicographic ordered of Lyndon word. The research result has contributed on construct step by step to obtain concatenation any Lyndon word of length  $n$  of alphabet  $A$ , so we obtain de Bruijn sequence span by  $n$ . For conclusi, will be given correlations between de Bruijn graph and de Bruijn sequences.

Key words : de Bruijn Graph, de Bruijn Sequence, Lexicographic, Lyndon Word  
Xi+33 pages; 4 pictures; 1 tables  
Bibliography : 9 (1992-2006)



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
KATA PENGANTAR .....	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH .....	vi
ABSTRAK .....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xi
<b>BAB 1 PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Permasalahan.....	3
1.3 Tujuan Penulisan.....	3
1.4 Metode Penelitian.....	3
1.5 Sistematika Penulisan .....	4
<b>BAB 2 LANDASAN TEORI .....</b>	<b>6</b>
2.1 Teori Graf.....	6
2.2 Barisan de Bruijn dan Graf de Bruijn .....	8
2.3 Lexicographic.....	9
2.4 Lyndon Word .....	10
<b>BAB 3 KONSTRUKSI BARISAN DE BRUIJN .....</b>	<b>12</b>
3.1 Konstruksi Barisan de Bruijn dari Graf de Bruijn .....	12
3.1.1 Menghitung Sirkuit Euler .....	12
3.1.2 Menentukan Barisan de Bruijn .....	19
3.2 Konstruksi Barisan de Bruijn dengan Teorema Fredricksen dan Maiorana.....	21
3.2.1 Teorema Fredricksen dan Maiorana .....	21
3.2.2 Metode Konstruksi Barisan de Bruijn dengan Teorema Fredricksen dan Maiorana.....	24
<b>BAB 4 KAITAN ANTARA GRAF DE BRUIJN DAN BARISAN DE BRUIJN.....</b>	<b>29</b>
4.1 Kaitan Antara Graf de Bruijn dan Barisan de Bruijn .....	29
4.2 Perbandingan Metode Konstruksi Barisan de Bruijn .....	30
<b>BAB 5 PENUTUP.....</b>	<b>32</b>
5.1 Kesimpulan.....	32
5.2 Saran .....	32
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>33</b>

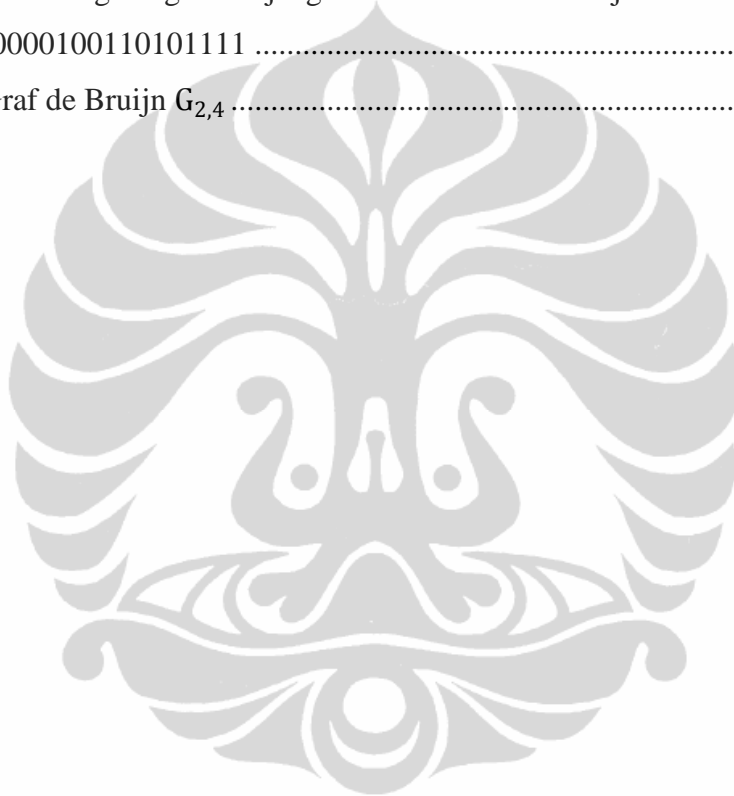
## DAFTAR TABEL

Tabel 4.2.1. Perbedaan Antara Metode 1 dan Metode 2.....	31
--	----



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Contoh Barisan de Bruijn yang Dibangun Dari Alfabet dengan Panjang 5 .....	1
Gambar 2.1. Contoh Graf Euler $G$ .....	4
Gambar 2.2. Contoh Graf de Bruijn $G_{2,2}$ .....	5
Gambar 3.1. Graf de Bruijn $G_{2,3}$ .....	6
Gambar 3.2. Substring dengan Panjang 4 dari Barisan de Bruijn 0000100110101111 .....	27
Gambar 3.3 Graf de Bruijn $G_{2,4}$ .....	28

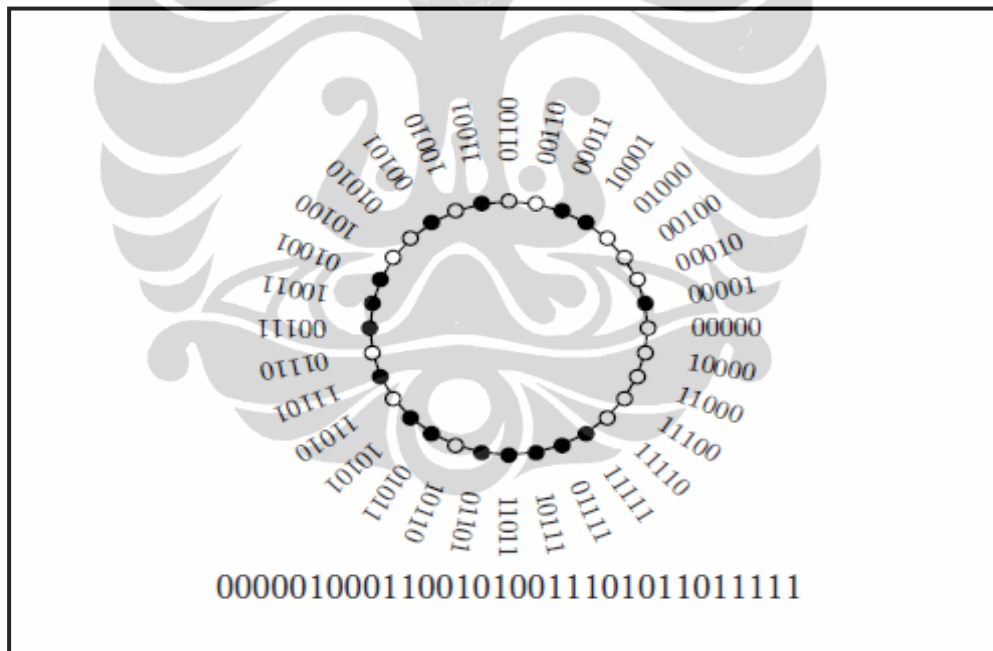


# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 LATAR BELAKANG

Kombinasi dari “kata” (*word*) pada dekade terakhir ini memiliki perkembangan yang cukup signifikan, sehingga menarik bagi para matematikawan dunia dan pengembangan ilmunya diklasifikasikan pada cabang ilmu matematika diskrit. Barisan de Bruijn merupakan bentuk kombinasi dari “kata” yang pertama kali diperkenalkan oleh de Bruijn pada tahun 1946 dengan menggunakan alfabet biner yakni 0 dan 1. Contoh dari barisan de Bruijn diberikan pada Gambar 1.1



Gambar 1.1 Contoh barisan de Bruijn yang dibentuk dari alfabet dengan panjang 5.

Hingga saat ini kombinasi dari “kata” yang dihasilkan dari barisan de Bruijn banyak digunakan pada berbagai bidang, salah satunya adalah bioinformatika guna memprediksi struktur dari DNA. Matamala (2004)

dalam artikelnya yang berjudul “Minimal Eulerian Trail in a Labeled Digraph” menyampaikan bahwa penentuan barisan minimal dari DNA identik dengan menentukan barisan dengan panjang minimal yang mengandung semua kemungkinan asam nukleotida yang terdiri dari empat karakter, yakni A (*Adenine*), G (*Guanine*), T (*Tymine*) dan C (*Cytosine*). Barisan minimal yang demikian bentuk matematisnya identik dengan barisan de Bruijn.

Pada bidang kriptografi bentuk kombinasi dari “kata” dengan alfabet biner 0 dan 1 banyak digunakan untuk menghasilkan suatu informasi yang memiliki kuantitas dan keamanan. Trappe & Washington (2006) mendefinisikan kriptografi dalam buku *Introduction to Cryptography with Coding Theory* sebagai studi teknik matematik yang berkaitan dengan keamanan informasi seperti : kerahasiaan, integritas data, identifikasi, autentifikasi pesan, penandaan serta validasi dan lain sebagainya. Pada mulanya kriptografi banyak digunakan pada bidang yang berhubungan dengan militer, hubungan diplomatik dan pemerintahan. Salah satu bentuk kriptografi yang digunakan pada bidang tersebut yaitu *Public-Key Cryptography* (PKC). Misalkan bentuk barisan de Bruijn  $2^n$  yang terdiri dari 32 digit pada Gambar 1.1 merupakan bentuk informasi yang dibangun dari 5 alfabet. Kelima alfabet tersebut ada pada barisan de Bruijn tepat satu kali, hal ini menyatakan bila masing-masing partisipan diberi *key* dengan 5 alfabet, maka ada 32 partisipan dalam suatu komunitas dengan *key* yang berbeda-beda (Chung F, 1992).

Banyak metode yang telah dikembangkan untuk mengkonstruksi  $n$  barisan de Bruijn, diantaranya yang diperkenalkan oleh Drew yang menyatakan bahwa barisan de Bruijn ekuivalen dengan sirkuit Euler pada graf de Bruijn (Drew, 2006). Namun saat ini yang menarik untuk penulis pelajari yakni suatu metode diperkenalkan oleh Fredicksen dan Maiorana (1978) dan dikembangkan oleh Eduardo (Moreno, 2003) dengan menggunakan teorema Fredicksen dan Maiorana.

## 1.2 PERMASALAHAN

Permasalahan secara umum pada penelitian ini adalah bagaimana mengkonstruksi barisan de Bruijn, oleh karena itu akan disajikan metode untuk mengkonstruksinya. Metode pertama untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn dapat dilakukan dengan cara mengkonstruksi graf de Bruijn terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan dengan menentukan sirkuit Euler yang ada pada graf de Bruijn. Sirkuit Euler dengan lintasan paling minimal pada suatu graf de Bruijn merepresentasikan barisan de Bruijn.

Pada penelitian ini dikaji metode alternatif untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn tanpa konstruksi graf de Bruijn yakni dengan teorema Fredicksen dan Maiorana, teorema ini diperoleh dengan melihat rangkaian *lexicographic* terurut dari *Lyndon word* yang memiliki panjang pembagi  $n$ .

Selanjutnya pada tesis ini, alfabet yang digunakan untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn dibatasi pada alfabet biner 0 dan 1.

## 1.3 TUJUAN PENULISAN

Secara umum penelitian ini bertujuan untuk memberikan informasi tentang konstruksi barisan dan graf de Bruijn, serta dilakukan dengan tahapan berikut :

- a. Mengkaji konstruksi graf de Bruijn dan karakteristik dari barisan de Bruijn yang berhubungan dengan keberadaan sirkuit Euler.
- b. Mengkaji konstruksi barisan de Bruijn dengan rangkaian *Lyndon word* dari “kata” yang terurut secara *lexicographic*.
- c. Menunjukkan keterkaitan antara graf de Bruijn dan barisan de Bruijn, kemudian membandingkan metode konstruksinya.

## 1.4 METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur dengan mempelajari paper, disertasi atau buku-buku yang berhubungan dengan topik penelitian sehingga pada tesis ini hanya diberikan kajian secara teoritis tentang metode konstruksi barisan de Bruijn dan kaitanya dengan graf de Bruijn.

## 1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan tesis ini dibagi menjadi lima bab, dengan sistematika penulisan sebagai berikut :

### **BAB I : PENDAHULUAN**

Penjelasan latar belakang dilakukannya penelitian, permasalahan, tujuan penulisan, metode penelitian dan sistematika penulisan

### **BAB II : LANDASAN TEORI**

Berisi tentang teori yang berhubungan dengan konstruksi graf dan barisan de Bruijn, pengertian Lyndon word dan lexicographic.

### **BAB III : KONSTRUKSI BARISAN DE BRUIJN**

Pada bab ini akan dibagi menjadi dua segmen pembahasan. Bagian pertama membahas tentang penentuan sirkuit Euler dari suatu graf de Bruijn sebagai representasi barisan de Bruijn dengan menggunakan teorema BEST. Kemudian bagian kedua akan dibahas tentang teorema Fredricksen dan Maiorana sebagai metode untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn.

### **BAB IV : KAITAN ANTARA GRAF DE BRUIJN DAN BARISAN DE BRUIJN.**

Pada bab ini akan dibahas mengenai kaitan antara graf de Bruijn dan barisan de Bruijn, kemudian membandingkan metode konstruksinya.

**BAB V : PENUTUP**

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian, dan saran yang dapat diberikan atas hasil penelitian.





## BAB II

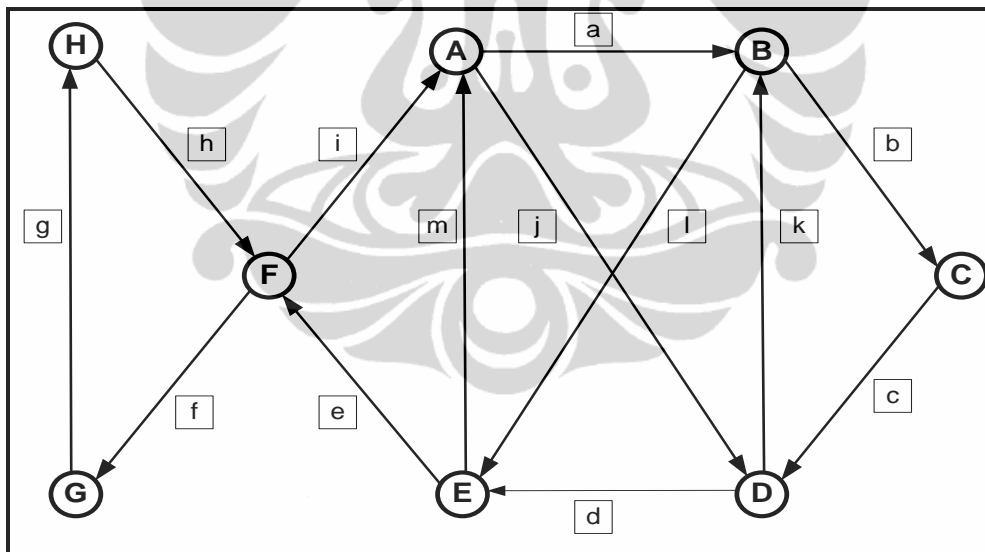
### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Teori Graf

Edgar & Michael (1998) menjelaskan bahwa graf  $G(V, E)$  merupakan struktur diskrit yang terdiri dari simpul-simpul (*vertices*) dan busur-busur (*edge*) yang menghubungkan simpul-simpul. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1707-1783. Awal mula teori ini adalah ide Euler dalam memecahkan masalah jembatan Königsberg. Suatu graf terdiri dari dua himpunan  $V$  dan  $E$ , dengan  $V$  menyatakan himpunan simpul dan  $E$  menyatakan himpunan busur dengan elemennya merupakan pasangan simpul-simpul dari himpunan  $V$ , sebagai contoh bila  $v$  dan  $w$  elemen simpul di  $V$  maka  $e = \{vw\}$  adalah busur yang menghubungkan simpul  $v$  dan  $w$ . Untuk selanjutnya simbol suatu graf digunakan huruf  $G$ .

Graf berarah  $G = (V, A)$  terdiri dari himpunan tak kosong  $V(G)$  sebagai simpul dan  $A(G)$  sebagai busur berarah (*arc*). Pada graf berarah simpul dapat digambarkan sebagai titik  $v$  atau  $w$ , sedangkan busur berarah  $\{vw\} \in A$  sebagai garis yang menghubungkan kedua simpul  $v$  dan  $w$  dengan simpul  $v$  sebagai titik pangkal dan simpul  $w$  sebagai titik ujung. Dua buah simpul  $v$  dan  $w$  dikatakan hadir (*incident*) bila ada busur berarah  $vw$  atau dengan kata lain busur berarah  $vw$  hadir pada kedua simpul tersebut. Misalkan  $e = \{vw\} \in A$  dan  $\{v, w\} \in V$  maka simpul  $u$  dan  $w$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila terdapat busur berarah  $e$  di antara keduanya. Gelang (*loop*) adalah busur berarah yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama, tanpa melalui simpul yang lain. Jumlah busur berarah yang hadir pada suatu simpul  $v$  disebut dengan derajat (*degree*) dari simpul tersebut dan dinotasikan dengan  $deg(v)$ . Derajat keluar dinotasikan dengan  $d^+(v)$ , dan menyatakan jumlah busur berarah yang keluar dari simpul dan juga termasuk gelang dari suatu simpul. Derajat masuk dinotasikan dengan  $d^-(v)$  dan menyatakan jumlah busur berarah yang masuk dari simpul (termasuk gelang).

Jalan (*walk*) pada suatu graf berarah adalah barisan dari simpul dan busur berarah yang menyatakan lintasan yang berawal dan berakhir pada suatu simpul. *Trail* adalah suatu jalan dengan busur berarah yang dilalui semua berbeda. Lintasan (*path*) adalah jalan dengan semua simpulnya berbeda. Jika simpul pangkal pada suatu trail sama dengan simpul akhir maka lintasan ini disebut trail tertutup, selanjutnya setiap trail tertutup disebut sirkuit. Suatu sirkuit yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lingkaran (*cycle*). Suatu lingkaran- $n$  adalah lingkaran dengan  $n$  busur (dan  $n$  simpul). Sirkuit Euler (*Eulerian circuit*) pada suatu graf  $G$  adalah sirkuit yang mengandung semua simpul di  $G$  dan melalui semua busur berarahnya tepat satu kali. Keberadaan sirkuit Euler pada suatu graf dapat diidentifikasi dengan melihat apakah jumlah derajat keluar dan derajat masuk pada setiap simpulnya sama. Graf Euler adalah graf yang mengandung suatu sirkuit Euler (Edgar & Michael, 1998).



Gambar 2.1 Contoh Graf Euler  $G$

Pada gambar 2.1 disajikan contoh dari jalan, trail, lintasan, lingkaran, dan sirkuit Euler sebagai berikut :

- Jalan pada graf  $G$  yaitu :  $(A, a, B, b, C, c, D)$ ,  $(E, e, F, f, G, g, H, h, F, i, A)$
- Trail pada graf  $G$  yaitu :  $(B, b, C, c, D, k, B, l, E, m, A, a, B)$
- Lintasan pada graf  $G$  yaitu :  $(A, j, D, d, E, e, F, f, G)$

- Lingkaran pada graf  $G$  yaitu :  $(B,b,C,c,D,k,B)$ ,  $(F,f,G,g,H,h,F)$
- Sirkuit Euler pada graf  $G$  yaitu :  
 $\{A,a,B,b,C,c,D,d,E,e,F,f,G,g,H,h,F,i,A,j,D,k,B,l,E,m,A,\}$

## 2.2 Barisan de Bruijn dan Graf de Bruijn

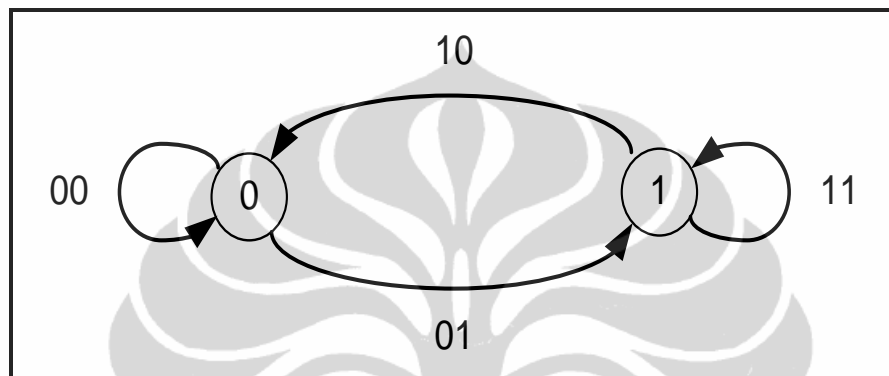
Barisan de Bruijn merupakan barisan yang dibentuk dari string berhingga dengan sifat-sifat tertentu. *String* adalah barisan berhingga (*finite*) simbol-simbol. Sebagai contoh, jika  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah tiga buah simbol maka  $abc$  adalah sebuah string yang dibangun dari ketiga simbol tersebut. *Substring* dari string  $w$  adalah string yang dihasilkan dari string  $w$  dengan menghilangkan nol atau lebih simbol-simbol paling depan dan/atau simbol-simbol paling belakang dari string  $w$  tersebut.

Suatu string dengan panjang  $2^n$  disebut barisan de Bruijn  $(2, n)$  jika setiap string dengan panjang  $n$  hadir tepat satu kali sebagai substring dari  $2^n$ . Contoh string yang dibentuk dari alfabet berukuran 2 yaitu  $\{0,1\}$  adalah barisan de Bruijn  $(2, n)$ . Untuk kasus  $n = 1, 2, 3, 4$  barisan de Bruijnya secara berturut-turut sebagai berikut : 01, 0110, 01110100, 0000100110101111 (Gross & Yellen, 2006).

Selanjutnya pada tesis ini alfabet yang digunakan dibatasi pada 0 dan 1 (alfabet biner). Kemudian barisan de Bruijn disimbolkan dengan  $B^n$ , artinya suatu barisan de Bruijn yang direntang oleh  $n$  adalah *string*  $B^n$ , dengan panjang  $|A|^n$  sedemikian sehingga semua "kata" yang panjangnya  $n$  terdapat pada substring  $B^n$  tepat satu kali. Dalam hal ini suatu "kata" yang dibangun dari alfabet  $A$  adalah barisan berhingga dari elemen-elemen  $A$ .

Graf de Bruijn adalah suatu graf berarah  $G_{a,n}$ , ( $a \geq 2, n \geq 1$ ) yang dibentuk dari setiap bilangan bulat positif  $n$  dan  $a$  ( $a$  adalah alfabet biner) yang diberikan dan memiliki jumlah simpul  $a^{n-1}$ , dilabel dengan "kata" yang panjangnya  $n - 1$  dari suatu alfabet  $A$ , dan jumlah busur berarahnya sebanyak  $a^n$ , dilabel dengan "kata" yang panjangnya  $n$ . Busur berarah yang berawal dari  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  dan masuk ke  $w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, w_n$  dinyatakan (dilabel) dengan "kata"  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n$ . Notasi  $G_{a,1}$  menyatakan suatu graf dengan satu simpul dan  $a$  sebagai gelang (Rosenfeld, 2003).

Sebagai contoh untuk alfabet  $A$  berukuran  $a = 2$  yaitu  $\{0,1\}$  dan  $n = 2$  maka akan diperoleh jumlah simpulnya  $2^{n-1} = 2^{2-1} = 2$  dengan panjang label “kata” pada simpul  $n - 1 = 1$ , terdiri dari “kata” yang berbentuk  $\{0, 1\}$ . Jumlah busur berarahnya  $2^n = 2^2 = 4$ , dengan panjang label “kata” pada busur  $n = 2$ , terdiri dari  $\{00,01,10,11\}$ , berikut contoh grafnya diberikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Contoh Graf de Bruijn  $G_{2,2}$

### 2.3 Lexicographic

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai bentuk penggunaan Lexicographic, contohnya pada penulisan kamus bahasa Inggris-Indonesia. Penulisan kamus yang menggunakan lexicographic memudahkan pembaca untuk dapat segera menemukan kata yang dikehendaki, karena semua kata telah terurut berdasarkan alphabet. Konsep yang digunakan untuk menuliskan himpunan lexicographic menggunakan *partial ordering*.

Rosen (1995) dalam Discrete Mathematic and Its Application mendefinisikan suatu relasi pada himpunan  $S$  sebagai *partial ordering* jika memenuhi sifat refleksi, antisimetri, dan transitif. Suatu himpunan  $S$  yang terurut secara parsial disebut *partial ordered set (poset)* dan dinotasikan dengan  $(S, \preceq)$ . Jika  $(S, \preceq)$  adalah poset dan setiap dua elemen dari himpunan  $S$  dapat dibandingkan, maka  $S$  disebut himpunan terurut secara linier. Pernyataan  $a \preceq b$  memiliki arti bahwa  $(a, b)$  memenuhi relasi pada himpunan  $S$  yang memenuhi sifat :

- a. Refleksi :  $a \preceq a$  untuk semua  $a \in S$ , dan
- b. Antisimetri : jika  $a, b \in S$ , kemudian  $a \preceq b$  dan  $b \preceq a$ , maka  $a = b$ , dan
- c. Transitif : jika  $a, b, c \in S$ , kemudian  $a \preceq b$  dan  $b \preceq c$ , maka  $a \preceq c$ .

**Lexicographic** didefinisikan sebagai himpunan yang terdiri dari beberapa alfabet atau simbol yang memenuhi *poset* dengan relasi  $\preceq$ . Bila diberikan dua buah “kata”  $a = a_1, a_2, \dots, a_n$  dan  $b = b_1, b_2, \dots, b_m$  maka  $a \preceq b$  jika :

- $a$  dan  $b$  identik .  
Misalkan  $a = 0011$  dan  $b = 0011$ , maka  $a$  dan  $b$  identik, atau
- $a_i \preceq b_i$  di dalam susunan alfabet, yakni pada suatu posisi  $i$  pertama memiliki kesamaan “kata” dan selanjutnya “kata” yang berbeda.  
Misalkan  $a = 00101$  dan  $b = 00110$ , maka  $a \preceq b$ , karena pada 3 posisi pertama “kata”  $a$  dan  $b$  memiliki kesamaan, namun pada posisi ke empat “kata”  $a$  mendahului  $b$ , atau
- $a_i = b_i$  untuk  $i = 1, \dots, n$  tetapi  $n < m$ . (kondisi “kata”  $a$  lebih pendek dari  $b$ ).  
Misalkan  $a = 001$  dan  $b = 00101$ , maka “kata”  $a$  lebih pendek dari  $b$ . Untuk  $i = 3$  diperoleh  $a_i = b_i$ .

## 2.4 Lyndon Word

Misalkan  $A$  himpunan berhingga dan terurut secara linier ( $\preceq$ ). Suatu “kata”  $w$  pada alfabet  $A$  adalah barisan berhingga dari elemen-elemen  $A$ .  $A^*$  adalah himpunan dari semua “kata” yang mungkin dari alfabet  $A$  dan terurut secara linier dengan urutan lexicographic yang dinyatakan dengan ( $\preceq$ ). Panjang “kata”  $w \in A^*$  dinotasikan dengan  $|w|$ . “kata”  $p$  disebut awalan dari “kata”  $w$  bila ada “kata”  $u$  sedemikian sehingga  $w = pu$ . Demikian juga  $p$  disebut akhiran dari “kata”  $w$  bila terdapat  $u$  sedemikian sehingga  $w = up$ . Bila  $w = upv$  maka  $p$  disebut sebagai faktor dari  $w$ .

Definisi  $x \preceq y$ , bila  $x$  mendahului dari  $y$ , atau dengan kata lain jika  $x = uav$  dan  $y = ubw$  dengan  $u, v, w \in A^*$  dan  $a, b \in A$  maka  $a < b$ . Sifat mendasar dari urutan lexicographic adalah sebagai berikut : jika  $x \preceq y$  dan bila  $x$  bukan suatu awalan dari  $y$  maka  $xu < yv$  untuk semua “kata”  $(u, v)$ . Dua buah “kata”  $x$  dan  $y$  memenuhi sifat konjugat bila ada “kata”  $u, v$  di dalam  $A^*$  sedemikian sehingga  $x = uv$  dan  $y = vu$ . Konjugasi adalah relasi ekuivalen di dalam  $A^*$ .

Rosen (1995) mendefinisikan suatu relasi pada himpunan  $A$  disebut relasi ekuivalen bila memenuhi sifat refleksi, simetri dan transitif. Selanjutnya jika  $R$  menyatakan relasi ekuivalen pada himpunan  $A$ , maka himpunan semua anggota yang memiliki relasi pada  $a \in A$  disebut kelas ekuivalen dan dinotasikan dengan  $[a]_R$ . Suatu “kata” disebut minimal bila “kata” tersebut memiliki ukuran terkecil di dalam kelas konjugasinya. Suatu “kata” disebut primitif bila tidak berbentuk pangkat ( $u^n$  untuk  $u \in A^*$  dan  $n \geq 2$ ). Suatu “kata” Lyndon (*Lyndon Word*) adalah “kata” yang memenuhi keduanya yakni minimal dan primitif.

Sebagai contoh, bila diberikan alfabet  $A = \{0, 1\}$  dan  $n = 2$  maka dapat ditentukan himpunan  $A^* = \{00, 01, 10, 11, 0, 1, \varepsilon\}$ . Dari himpunan  $A^*$  dapat ditentukan kelas konjugasi yang dimungkinkan sebagai berikut :

1.  $[00] = \{00\}$
2.  $[01] = \{01, 10\}$
3.  $[11] = \{11\}$
4.  $[0] = \{0\}$
5.  $[1] = \{1\}$

Dari kelima kelas konjugasi diatas dapat ditentukan “kata” minimalnya yaitu  $\{00, 01, 11, 0, 1\}$ . Kemudian “kata” primitif dapat ditentukan dari himpunan  $A^*$  yaitu  $\{01, 0, 1\}$ , sehingga himpunan Lyndon Wordnya adalah  $\{0, 01, 1\}$ .

## BAB III

### KONSTRUKSI BARISAN DE BRUIJN

Pada Bab ini akan dibahas dua buah metode untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn. Metode pertama, yakni dengan menentukan sirkuit Euler dari graf de Bruijn, sirkuit Euler dengan label minimal merupakan representasi dari barisan de Bruijn. Metode kedua, yaitu konstruksi barisan de Bruijn dengan menggunakan teorema Fredricksen dan Maiorana, yakni melalui rangkaian lexicographic terurut dari himpunan Lyndon word.

#### 3.1 Konstruksi Barisan De Bruijn dari Graf De Bruijn

Pembahasan pada subbab ini akan diawali dengan menghitung sirkuit Euler pada graf berarah, dan dilanjutkan dengan menentukan barisan de Bruijn dari representasi sirkuit Euler pada graf de Bruijn.

##### 3.1.1 Menghitung Sirkuit Euler pada Graf Berarah

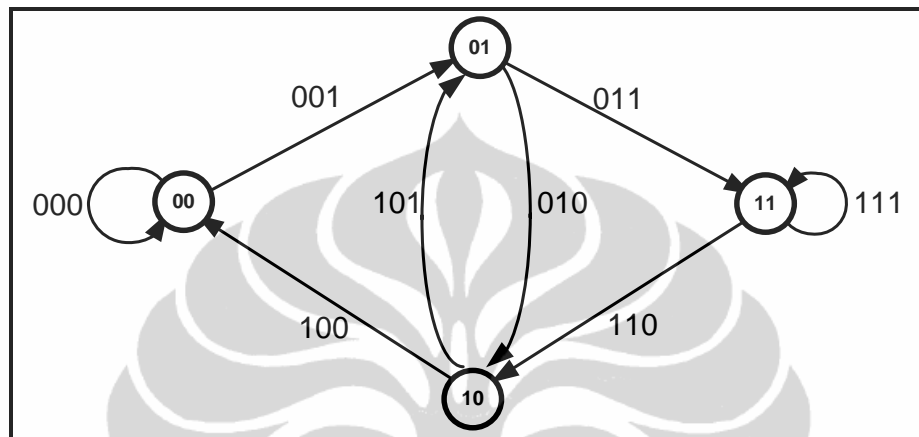
Suatu graf berarah  $G$  disebut Euler bila ada jalan tertutup  $W$  yang melalui setiap busur berarah tepat satu kali dan konsisten pada arahnya, dan jumlah busur berarah yang masuk sama dengan yang keluar. Bentuk jalan tertutup di  $G$  yang demikian disebut sirkuit Euler. Urutan dari busur berarah pada sirkuit Euler memiliki peran yang penting karena suatu graf berarah bisa mempunyai lebih dari satu sirkuit Euler (bergantung pada variasi busur berarah yang dilalui). Selanjutnya menentukan sirkuit Euler pada suatu graf berarah dimulai dengan melihat matriks adjacency dari graf berarah  $G$  yang dinotasikan dengan  $C(G) = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$  yakni matriks berukuran  $n \times n$  dengan entri-entrinya nol dan satu dan didefinisikan sebagai berikut,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ dan } j \text{ adjacent} \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Matriks lain yang dapat dibuat dari  $G$  adalah matriks *Laplace* dan dinotasikan dengan  $T(G) = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , entri-entrinya didefinisikan sebagai :

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & , \text{jika } i \neq j, \text{ dan} \\ c_{ii} - d^+(i) & , \text{jika } i = j \end{cases}$$

Jadi jumlah dari entri-entri pada masing-masing kolom matriks Laplace sama dengan 0. Berikut contoh dari matriks adjacency dan matriks Laplace dari suatu graf berarah pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Graf de Bruijn  $G_{2,3}$

Contoh matriks adjacency dari  $G_{2,3}$  pada Gambar 3.1 adalah

$$C(G_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh matriks Laplace dari  $G_{2,3}$  pada Gambar 3.1 adalah

$$T(G_{2,3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Setiap matriks Laplace  $T(G)$  pada suatu graf berarah Euler memiliki nilai kofaktor yang sama. Kofaktor dari matriks  $T(G)$  adalah  $T_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , dengan  $M_{ij}$  menyatakan determinan matriks berukuran  $(n-1) \times (n-1)$  yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $T(G)$ .



Nilai kofaktor  $T_{ij}$  dari matriks Laplace pada suatu graf berarah Euler  $G$  sama dengan banyaknya pohon rentangan (*Spanning Trees*) yang keluar atau masuk dari sebarang simpul di  $G$ . Oleh karena itu diperoleh hubungan banyaknya sirkuit Euler pada graf  $G$  dan jumlah pohon rentangannya, hasil ini dirangkum oleh de Bruijn, Ehrenfest, Smith dan Tutte dalam teorema BEST sebagai berikut.

Teorema 3.1.1. Teorema BEST. (Rosenfeld, 2003). *Banyaknya sirkuit Euler  $\varepsilon(G)$  pada suatu graf berarah  $G$  sama dengan :*

$$\varepsilon(G) = |c| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!,$$

dengan  $c$  adalah nilai kofaktor  $T_{ij}$  di dalam  $T(G)$ , dan  $d_i = d^+(i) = d^-(i)$ .

Bukti :

Diberikan graf berarah  $G$  dengan himpunan simpul tak kosong  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  dengan derajat masuk dan derajat keluar dari setiap simpulnya sama ( $d^+(v_i) = d^-(v_i) = d_i$ ). Karena pada setiap graf berarah akan mengandung sirkuit Euler jika dan hanya jika jumlah derajat yang masuk dan keluar dari setiap simpul harus sama, maka hal ini menjamin minimal ada satu sirkuit Euler pada graf  $G$ . Misalkan  $S$  adalah jalur Euler pada  $G$ , secara umum banyaknya kemungkinan jalur Euler pada  $G$  setara dengan banyaknya pohon rentangan terhadap simpul  $v_1$ . Oleh karena itu

$$\varepsilon(G) = d^+(v_1)! \prod_{i=2}^n (d(v_i) - 1)! \dots \dots \dots (1)$$

Faktorial dari derajat keluar pada simpul  $v_1$  ( $d^+(v_1)!$ ) menyatakan ada berapa cara yang dapat dilalui jalur Euler  $S$ , dan produk faktorial  $\prod_{i=2}^n (d(v_i) - 1)!$  menyatakan bahwa terdapat satu busur yang berkurang, dimana busur tersebut keluar dari simpul  $v_i$  pada saat jalur Euler  $S$  melaluinya. Oleh karena itu, karena banyaknya pohon rentangan terhadap simpul  $v_1$  sama dengan kofaktor matriks Laplace  $T_{11}$ , maka banyaknya sirkuit Euler adalah :

$$\varepsilon(G) = |T_{11}| \prod_{i=1}^n (d(v_i) - 1)! \dots \dots \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), dan karena nilai kofaktor  $T_{ij}$  dari matriks Laplace secara umum sama ( $T_{ij} = c$ ), maka bukti terpenuhi. ■

Contoh 3.1. Menentukan jumlah sirkuit Euler dari graf  $G_{2,3}$  pada Gambar 3.1

Dengan persamaan  $T_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  dari matriks Laplace diperoleh nilai kofaktor  $c = T_{ij} = -2$ . Selanjutnya dapat ditentukan banyaknya sirkuit Euler pada graf  $G_{2,3}$  dengan menggunakan Teorema 3.1.1. Dalam hal ini  $G_{2,3}$  memiliki empat simpul dengan derajat  $d_i = d^+(i) = d^-(i) = 2$ , maka diperoleh  $\varepsilon(G)$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varepsilon(G) &= |c| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)! \\ &= |-2| ((2 - 1)! \times (2 - 1)! \times (2 - 1)! \times (2 - 1)!) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Hasil sirkuit Euler  $\varepsilon(G) = 2$  ini menunjukkan bahwa pada  $G_{2,3}$  terdapat dua buah sirkuit Euler dengan lintasan paling minimal. Secara umum dari Teorema 3.1.1 hasilnya dirangkum pada Teorema 3.1.2 sebagai berikut.

**Teorema 3.1.2.** (Rosenfeld, 2003). *Jumlah dari lingkaran lengkap dengan panjang  $a^n$  pada alfabet  $A$  ( $|A| = a \geq 2 ; n \geq 1$ ) sama dengan jumlah sirkuit Euler  $\varepsilon(G)$  di dalam graf de Bruijn  $G_{a,n}$ .*

**Bukti :**

Dengan menggunakan definisi graf de Bruijn  $G_{a,n}$  dapat dilihat bahwa setiap busur berarahnya memiliki label yang berbeda dengan panjang  $n$  atas alfabet  $A$ , dan dalam hal ini semua busur berarahnya terdiri dari semua kemungkinan  $a^n$ . Karena sirkuit Euler pada graf  $G_{a,n}$  melalui busur berarahnya tepat satu kali, maka mengakibatkan ada korespondensi satu-satu dengan lingkaran lengkap yang memiliki panjang  $a^n$ . ■

Selanjutnya akan dilihat keterhubungan polinomial karakteristik dari masing-masing matriks adjacency dan juga matriks Laplace. Misalkan  $I$  menyatakan matriks identitas dengan entri diagonalnya 1 dan yang lainnya 0, polinomial karakteristik dari matriks adjacency  $C(G)$  dinotasikan dengan  $P(G; x)$ . Artinya  $P(G; x) = P(C(G); x) = \det[xI - C(G)]$ , karena matriks  $C(G)$  diperoleh dari  $G_{a,n}$  maka bentuk polinomial karakteristiknya dapat juga ditentukan dengan persamaan

$$P(G_{a,n}; x) = x^{a^{n-1}-1}(x - a), \quad (a \geq 2, n \geq 1) \dots \dots \dots (3.1)$$

Dengan cara yang sama diperoleh polinomial karakteristik dari matriks Laplace  $T(G)$  yaitu :

$$L(G; x) = P(T(G); x) = \det[xI - T(G)].$$

Polinomial karakteristik ini dapat digunakan untuk menentukan kofaktor dari matriks Laplace. Karena semua kofaktor dari  $T(G)$  sama dengan  $c$ , dalam hal ini prinsip minor kofaktor dari matriks berukuran  $(n - 1) \times (n - 1)$  pada matriks  $T(G)$  menghasilkan kofaktor yang sama yaitu  $c$ . Maka  $c$  dapat ditentukan dengan persamaan :

$$c = c(G) = \frac{1}{n} L'(G; x)|_{x=0}, \quad (3.2)$$

dengan  $L'(G; x) = \frac{d}{dx} L(G; x)$  dan  $n$  menyatakan banyaknya simpul. Karena matriks Laplace diperoleh dari matriks adjacency dari graf  $G_{a,n}$  maka kofaktor dari matriks Laplace juga dapat ditentukan dengan

$$c(G_{a,n}) = \frac{a^{a^{n-1}}}{a^n}, \quad (a \geq 2, n \geq 1) \dots \dots \dots (3.3)$$

Kemudian untuk setiap graf berarah yang reguler jumlah derajat masuk dan derajat keluar dari suatu simpul sama (terutama graf de Bruijn), maka polinomial karakteristik  $L(G; x) = P(G; x + d)$ . Selanjutnya nilai kofaktor secara umum dapat ditentukan dengan Teorema 3.1.3 sebagai berikut :

Teorema 3.1.3. (Rosenfeld, 2003). Nilai  $c$  sebagai kofaktor  $T_{ij}$  di dalam matriks  $T(G)$  dapat dihitung dengan persamaan :

$$c = c(G) = \frac{1}{n} P'(G; x)|_{x=d} ,$$

dengan  $n$  menyatakan banyaknya simpul dan  $d$  jumlah derajat masuk atau keluar dari suatu simpul.

Bukti :

Untuk setiap graf berarah regular jumlah derajat masuk dan derajat keluar dari setiap simpulnya sama, sehingga polinomial karakteristik dari matriks Laplace dapat diperoleh dari polinomial karakteristik matriks adjacency dengan menambahkan nilai  $d^+(v) = d^-(v) = d$  pada variabel  $x$ . Lebih lanjut polinomial karakteristik  $L(G; x) = P(G; x + d)$ . Dengan menerapkan persamaan (3.2) maka diperoleh  $c = c(G) = \frac{1}{n} P'(G; x)|_{x=d}$ . ■

Contoh 3.2. Penggunaan persamaan (3.2) dan Teorema 3.1.1 untuk menentukan kofaktor secara umum

Dari Gambar 3.1. dapat diperoleh matrik Laplace sebagai berikut:

$$T(G_{2,3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari matriks Laplacanya adalah :

$$\begin{aligned} L(G_{2,3}; x) &= P(T(G_{2,3}); x) = \det[xI - T(G_{2,3})] \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x \end{aligned}$$

Dengan menerapkan persamaan (3.2) diperoleh nilai kofaktornya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} c = c(G_{2,3}) &= \frac{1}{n} L'(G_{2,3}; x) \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{4} (4x^3 + 18x^2 + 24x + 8) \Big|_{x=0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dari Gambar 3.1 diperoleh matriks adjacency sebagai berikut :

$$C(G_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari matriks adjacencynya adalah :

$$\begin{aligned} P(G_{2,3}; x) &= P(C(G_{2,3}); x) = \det(xI - C(G_{2,3})) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= x^4 - 2x^3 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan Teorema 3.1.3 nilai kofaktornya sebagai berikut

$$\begin{aligned} c = c(G) &= \frac{1}{n} P'(G; x) \Big|_{x=d} \\ &= \frac{1}{4} (4x^3 - 6x^2) \Big|_{x=2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dari pembahasan ini dapat dilihat bahwa setiap graf Euler akan memuat sirkuit Euler, selanjutnya setiap graf de Bruijn merupakan graf Euler, oleh karena itu mengandung sirkuit Euler. Pada pembahasan berikutnya akan ditunjukkan bahwa sirkuit Euler yang ada pada graf de Bruijn merupakan representasi dari barisan de Bruijn.

### 3.1.2 Menentukan Barisan de Bruijn

Suatu lingkaran adalah barisan  $u_1 u_2 \dots u_r$  yang memuat lintasan melingkar yaitu  $u_1$  mengikuti  $u_r$ . Kemudian  $u_2 u_3 \dots u_r u_1, \dots, u_r u_1 \dots u_{r-1}$  semuanya adalah lingkaran yang sama seperti  $u_1 u_2 \dots u_r$ . Bila diberikan bilangan bulat positif  $a \geq 1$  dan  $n \geq 2$ , maka suatu lingkaran dari string  $a^n$  dinamakan lingkaran lengkap atau barisan de Bruijn, jika sub-barisan  $u_i u_{i+1} \dots u_{i+n-1}$  ( $1 \leq i \leq a^n$ ) terdiri dari semua kemungkinan string  $a^n$  yaitu barisan terurut  $w_1 w_2 \dots w_n$  atas alfabet  $A$  ( $|A| = a$ ).

**Teorema 3.1.4.** (Rosenfeld, 2003). *Untuk suatu bilangan asli positif  $a \geq 2$  dan  $n \geq 1$  terdapat tepat  $(a!)^{a^{n-1}-n}$  lingkaran lengkap dengan panjang  $a^n$ .*

Bukti :

Dengan menggunakan persamaan (3.3) diketahui bahwa  $c = \frac{a^{a^{n-1}}}{a^n}$ , dan pada persamaan (3.1) diketahui polinomial karakteristik dari matriks adjacency graf  $G_{a,n}$  ditentukan oleh  $P(G_{a,n}) = x^{a^{n-1}-1}(x - a)$ . Pada definisi graf de Bruijn dijelaskan bahwa jumlah busur yang masuk (in-degree) dan keluar (out-degree) di setiap simpul akan sama dengan nilai  $a = d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Sehingga dengan menerapkan Teorema 3.1.1 diperoleh hubungan,

$$\varepsilon(G) = |c| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

$$\varepsilon(G) = \frac{a^{a^{n-1}}}{a^n} \prod_{i=1}^n (a - 1)!$$

$$\varepsilon(G) = \frac{a^{a^{n-1}}}{a^n} [(a - 1)!]^n = a^{a^{n-1}-n},$$

dengan menerapkan Teorema 3.1.2 terlihat bahwa banyaknya sirkuit Euler  $\varepsilon(G)$  sama dengan jumlah lingkaran lengkap dengan panjang  $a^n$ , dan alfabet yang digunakan  $\{0,1\}$  dengan demikian bukti selesai. ■

Sebagai contoh penggunaan Teorema 3.1.4 kembali dapat dilihat contoh graf de Bruijn  $G_{2,3}$  pada Gambar 3.1, yakni graf de Bruijn yang dibentuk dari alfabet  $A = \{0,1\}$  berukuran  $a = 2$  dan  $n = 3$ . Dengan menggunakan Teorema 3.1.4 dapat ditentukan lingkaran lengkap yaitu  $(a!)^{a^{n-1}-n} = 2$ . Bentuk lingkaran lengkap dengan panjang  $2^3 = 8$  adalah :

- 00010111
- 00011101

Dua buah lingkaran lengkap (sirkuit Euler) di atas disebut barisan de Bruijn dari graf de Bruijn  $G_{2,3}$ . Selanjutnya suatu “kata” dengan panjang  $a^n + n - 1$  yang memuat himpunan yang sama dari  $a^n$  terdiri dari  $n$  bagian “kata” seperti lingkaran lengkap yang utuh dinamakan barisan de Bruijn linear. Sesungguhnya, barisan de bruijn linear dapat diperoleh dengan menambahkan  $n - 1$  susunan huruf pertama dari setiap “kata”  $a^n$ . Lebih lanjut hasilnya dinyatakan pada Akibat 3.1.5 sebagai berikut.

Akibat 3.1.5. (Rosenfeld, 2003). *Untuk suatu bilangan asli positif  $a \geq 2$  dan  $n \geq 1$  terdapat tepat  $(a!)^{a^{n-1}}$  barisan de Bruijn linier dengan panjang  $a^n + n - 1$ .*

Bukti :

Dari Teorema 3.1.2 terlihat bahwa banyaknya sirkuit Euler  $\varepsilon(G)$  itu sama dengan jumlah lingkaran lengkap  $a^n$ , dan dengan definisi barisan de Bruijn linier, “kata” minimal dengan panjang  $a^n + n - 1$  jumlahnya sama dengan lingkaran lengkap  $a^n$ . Oleh karena itu dari bukti Teorema 3.1.4 diperoleh kesimpulan pembuktian. ■

Dengan menggunakan Gambar 3.1 dapat ditentukan barisan de Bruijn linier  $(a!)^{a^{n-1}} = (2!)^{2^{3-1}} = 16$ , dengan panjang  $a^n + n - 1 = 2^3 + 3 - 1 = 10$ . Barisan de Bruijn linier ini diawali dari setiap simpul yang ada pada  $G_{2,3}$ , barisannya sebagai berikut :

➤ 0001011100	➤ 0101110001	➤ 1110001011
➤ 0001110100	➤ 0100011101	➤ 1110100011
➤ 0010111000	➤ 0111010001	➤ 1100010111
➤ 0011101000	➤ 0111000101	➤ 1101000111
	➤ 1000111010	
	➤ 1000101110	
	➤ 1011100010	
	➤ 1010001110	

Dari pembahasan diatas beberapa masalah akan cukup menyulitkan, bila diberikan suatu  $n$  yang besar, terutama pada konstruksi graf de Bruijn. Pada subbab berikutnya akan dibahas metode alternatif untuk menentukan barisan de Bruijn yakni dengan teorema Fredricksen dan Maiorana.

### 3.2 Konstruksi Barisan De Bruijn dengan Teorema Fredricksen dan Maiorana.

Pada subbab ini akan diberikan metode alternatif dengan pembuktian teorema Fredricksen dan Maiorana untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn melalui rangkaian Lyndon word di dalam lexicographic terurut. Bukti ini memberikan posisi yang tepat dari semua “kata” dalam barisan, dan mengembangkan hasilnya pada rangkaian dari sebarang himpunan Lyndon word yang terurut sehingga menghasilkan suatu barisan de Bruijn.

#### 3.2.1 Teorema Fredricksen dan Maiorana

Teorema ini merupakan metode alternatif untuk mengkonstruksi suatu barisan de Bruijn yang dibangun oleh alfabet  $A$  dengan panjang  $n$ , yaitu berupa string  $B^n$  yang memiliki panjang  $|A|^n$  sedemikian sehingga semua “kata” dengan panjang  $n$  hadir sebagai substring  $B^n$  tepat sekali. Metode ini dapat menghasilkan barisan de Bruijn dengan merangkai suatu lexicographic terurut dari Lyndon word yang memiliki panjang pembagi  $n$ . Pada pembuktian teorema ini diberikan alternatif posisi yang tepat dari semua “kata” di dalam barisan agar dapat merepresentasikan semua kondisi untuk menjamin kebera-



daan barisan de Bruijn dengan merangkai suatu lexicographic terurut dari Lyndon word. Kondisi ini sebagai jaminan keberadaan barisan de Bruijn dari sebarang Lyndon word di dalam lexicographic yang terurut.

**Teorema 3.2.1.** (Moreno, 2003). *Untuk suatu  $n$  yang diberikan, rangkaian lexicographic terurut dari Lyndon word yang memiliki panjang pembagi  $n$  membentuk barisan de Bruijn yang dibangun  $n$ .*

**Bukti :**

Misalkan  $a$  dan  $z$  berturut-turut menyatakan huruf minimum dan maksimum pada suatu alfabet  $A$ , dan misalkan  $\sigma$  adalah suatu operator, kemudian  $B^n$  menyatakan barisan de Bruijn yang dibangun oleh  $n$ .

Pertama akan dibuktikan untuk sebarang “kata” minimal  $w$  dengan panjang  $n$ , semua “kata” konjugatnya  $\sigma^i(w)$  dengan  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  adalah substring dari  $B^n$ .

Misalkan  $w = w_1 w_2 \dots w_j z^{n-j}$  “kata” minimal dengan  $w_j < z$ . Pertama akan ditunjukkan  $n - 1$  “kata” konjugat berikutnya adalah substring dari  $B^n$ . Dengan catatan “kata” ini memiliki bentuk  $z^i w_1 w_2 \dots w_j z^{n-j-i}$  untuk  $i = 1 \dots n - j$ .

Misalkan  $v$  Lyndon word yang minimal dengan awalan  $w_1 w_2 \dots w_j z^{n-j-i}$ . Maka “kata” minimal sebelumnya di dalam lexicographic terurut memiliki bentuk  $u = u_1 u_2 \dots u_{n-i} z^i$  dengan  $u_1 u_2 \dots u_{n-i} < w_1 w_2 \dots w_j z^{n-j-i}$ . Oleh karena itu Lyndon word sebelum  $v$  memiliki akhiran  $z^i$ , dan kemudian  $z^i w_1 w_2 \dots w_j z^{n-j-i}$  adalah substring dari  $B^n$ .

Kedua akan dibuktikan untuk rotasi  $j - 1$  pertama.

Jika  $w$  bukan Lyndon word.

Misalkan  $w$  tidak primitif, anggap  $\bar{w}$  adalah akar primitif dari  $w$  dengan panjang  $l$ . Catatan bahwa  $\bar{w}$  memiliki bentuk  $\bar{w}_1 \bar{w}_2 \dots \bar{w}_j z^{l-j'}$  dengan  $l - j' = n - j$ . Jika  $\bar{w} \neq z$  maka Lyndon word berikutnya di dalam lex-

icographic terurut adalah  $x$  bentuknya  $x = \bar{w}^{n/l-1}w_1 \cdots w_{j'-1}(w_{j'+1} + 1)b_{j'+1} \cdots b_l$ , jadi  $\sigma^i(w)$  adalah substring dari  $\bar{w}x$  untuk  $i = 0 \cdots j - 1$ .  
 Jika  $w$  primitif, misalkan  $x$  “kata” minimal berikutnya di dalam lexicographic terurut (tidak perlu primitif). Oleh karena itu  $x$  memiliki bentuk  $x_1x_2 \cdots x_{j-1}(x_j + 1)b_{j'+1} \cdots b_n$  dan dalam hal ini  $\sigma^i(w)$  adalah substring dari  $wx$  untuk  $i = 0 \cdots j - 1$ . Jika  $x$  primitif, maka  $wx$  adalah substring dari  $B^n$ , cara lain dengan pendapat sebelumnya bahwa  $x$  adalah awalan dari  $\bar{x}y$  dengan  $y$  adalah Lyndon word berikutnya di dalam lexicographic terurut, oleh karena itu  $wx$  adalah substring dari  $w\bar{x}y$  dan lebih lanjut substring dari  $B^n$ . ■

Dari Teorema 3.2.1 bahwa barisan de Bruijn dijamin keberadaannya untuk setiap  $n$  yang diberikan dari suatu alfabet  $A$ . Selanjutnya untuk sebarang himpunan Lyndon word yang dihasilkan dari alfabet  $A$  akan menghasilkan barisan de Bruijn, dan hasilnya dirangkum pada Akibat 3.2.2 berikut.

Akibat 3.2.2. (Moreno, 2003). *Misalkan  $L_1L_2 \cdots L_m$  suatu Lyndon word dari  $A^n$  dengan panjangnya membagi  $n$  terurut di dalam urutan lexicographic, maka untuk sebarang  $s < m$ ,  $L_sL_{s+1} \cdots L_m$  adalah barisan de Bruijn parsial.*

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa semua rotasi dari “kata” minimal  $w$  adalah substring dari barisan.

Jika  $w$  bukan suatu Lyndon word (artinya jika  $w$  adalah pangkat dari Lyndon word  $L_k$  dengan  $|L_k| < n$ ) maka dengan bukti sebelumnya diketahui bahwa semua rotasi dari  $w$  termuat di dalam  $L_{k-1}L_kL_{k+1}$ . Oleh karena itu hanya perlu memeriksa kasus  $i = s$ , tapi pada kasus ini untuk  $m \geq 2$  diketahui bahwa  $z^n$  adalah akhiran dari barisan tersebut, dan diketahui juga huruf  $z$  digunakan untuk menemukan semua rotasi dari  $w$  yang dimulai dari  $z$ .

Misalkan  $w = w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j}$  suatu Lyndon word  $L_k$  dengan  $w_j < z$ . Dengan bukti sebelumnya juga diketahui rotasi  $j - 1$  pertama dari  $w$  termuat di dalam  $L_k L_{k+1} \cdots L_m$ . Jadi hanya perlu memeriksa  $n - j$  "kata" konjugat berikutnya, yang memiliki bentuk  $z^i w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j-i}$  untuk  $i = 1 \cdots n - j$ .

Dengan bukti sebelumnya, jika Lyndon word minimal memiliki awalan  $w_1 w_2 \cdots w_j$  maka akan termasuk ke dalam barisan, kemudian diketahui bahwa semua rotasi dari  $w$  adalah substring dari barisan, sebaliknya diketahui bahwa  $w_1 w_2 \cdots w_j < L_s \leq w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j}$ , artinya bahwa Lyndon word yang pertama dari barisan tersebut memiliki bentuk  $L_s = w_1 w_2 \cdots w_j b_{j+1} \cdots b_n$  dengan demikian  $z^{n-j-i} w_1 w_2 \cdots w_j$  adalah substring dari barisan.

Selanjutnya akan diperiksa rotasi dari bentuk  $z^i w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j-i}$  untuk  $i = 1 \cdots n - j - 1$ . Jika Lyndon word minimalnya memiliki awalan  $w_1 w_2 \cdots w_j z$  maka termasuk ke dalam barisan.

Jika tidak,  $w_1 w_2 \cdots w_j < L_s \leq w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j}$  dalam hal ini  $L_s = w_1 w_2 \cdots w_j z b_{j+2} \cdots b_n$ . Maka dapat disimpulkan  $z^{n-j-i} w_1 w_2 \cdots w_j z$  adalah substring dari barisan.

Langkah ini dapat dilakukan secara terus-menerus hingga menemukan Lyndon word minimal dengan awalan  $w_1 w_2 \cdots w_j z^t$ , dalam hal ini semua rotasi sisanya dari  $z^i w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j-i}$  untuk  $i = 1 \cdots n - j - t$  akan menjadi substring dari barisan. Keberadaan  $t$  dijamin karena  $L_s \leq w_1 w_2 \cdots w_j z^{n-j}$ . ■

Pada pembahasan subbab Selanjutnya akan ditunjukkan metode konstruksi barisan de Bruijn menggunakan Teorema Fredicksen dan Maiorana dari bukti Teorema 3.2.1 dan Akibat 3.2.2.

### 3.2.2 Metode Konstruksi Barisan de Bruijn Dengan Teorema Fredicksen Dan Maiorana.

Teorema 3.2.1 memberi jaminan bahwa untuk setiap  $n$  yang diberikan, rangkaian lexicographic terurut dari Lyndon word menghasilkan barisan de Bruijn, dan sebagai konsekuensinya pada Akibat 3.2.2 untuk sebarang himpunan Lyndon word yang terurut secara Lexicographic sub-sub barisannya merupakan barisan de Bruijn parsial. Selanjutnya pada subbab ini akan diberikan hasil penelitian sebagai kontribusi terhadap langkah-langkah menentukan barisan de Bruijn yang dibangun oleh  $n$  dari suatu alfabet  $A$ .

- Langkah (1).** Menentukan himpunan  $A^*$ , yaitu himpunan yang memuat semua kemungkinan “kata” dari alfabet  $A$  dengan panjang pembagi  $n$  dan terurut secara lexicographic.
- Langkah (2).** Menentukan “kata” minimal dari himpunan  $A^*$ , yakni “kata” yang memiliki ukuran terkecil di dalam kelas konjugasi. Kelas konjugasi diperoleh dari kelas ekuivalen di  $A^*$  yang memenuhi relasi ekuivalen.
- Langkah (3).** Menentukan “kata” primitif dari himpunan  $A^*$ , yakni semua “kata” yang tidak berbentuk perpangkatan atau  $u^n$  dengan  $u \in A^*, n \geq 2$ .
- Langkah (4).** Menentukan himpunan Lyndon word, yakni “kata” yang minimal dan juga primitif.
- Langkah (5).** Tahapan merangkai Lyndon word. Teorema 3.2.1 dan Akibat 3.2.2 menjamin bahwa dari himpunan Lyndon word yang terurut secara lexicographic dapat dirangkai untuk menghasilkan barisan de Bruijn. Pada proses ini untuk setiap “kata” dengan panjang  $n$  hanya boleh hadir pada rangkaian tepat satu kali (tanpa ada pengulangan).

Kelima langkah di atas dapat digunakan untuk mengkonstruksi barisan de Bruijn  $B^n$  yang dibangun oleh  $n$  dari suatu alfabet  $A$ . Hasilnya adalah string  $B^n$  dengan panjang  $|A|^n$  dan setiap “kata” yang memiliki panjang  $n$  hadir tepat satu kali sebagai substring dari  $B^n$ .

Sebagai contoh untuk konstruksi barisan de Bruijn yang dibangun oleh  $n = 3$  dari alfabet  $A = \{0, 1\}$  akan diperoleh string dengan panjang 8 karakter yaitu  $B^n = 00010111$ , tahapannya sebagai berikut :

**Langkah (1).** Menentukan himpunan  $A^*$ , yaitu himpunan yang memuat semua kemungkinan “kata” dari alfabet  $A$  dan terurut secara lexicographic, dengan panjang pembagi  $n = 3$

$A^* = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$  “kata” dengan panjang 3

$A^* = \{0, 1\}$  “kata” dengan panjang 1

$A^* = \{\varepsilon\}$  “kata” dengan panjang 0

**Langkah (2).** Menentukan “kata” minimal dari himpunan  $A^*$ , yakni “kata” yang memiliki ukuran terkecil di dalam kelas konjugasi. Kelas konjugasi diperoleh dari kelas ekivalen di  $A^*$  yang memenuhi relasi ekivalen.

1.  $[0] = \{0\}$
2.  $[1] = \{1\}$
3.  $[000] = \{000\}$
4.  $[001] = \{001, 010, 100\}$
5.  $[011] = \{011, 101, 110\}$
6.  $[111] = \{111\}$

Dari 6 kelas diatas dapat ditentukan “kata” minimalnya, yaitu himpunan  $= \{0, 1, 000, 001, 011, 111\}$

**Langkah (3).** Menentukan “kata” primitif dari himpunan  $A^*$ , yakni semua “kata” yang tidak berbentuk perpangkatan atau  $u^n$  dengan  $u \in A^*, n \geq 2$ .

Himpunan “kata” primitif  $\{0, 1, 001, 010, 100, 011, 101, 110\}$

**Langkah (4).** Menentukan himpunan Lyndon word, yakni “kata” yang minimal dan juga primitif.

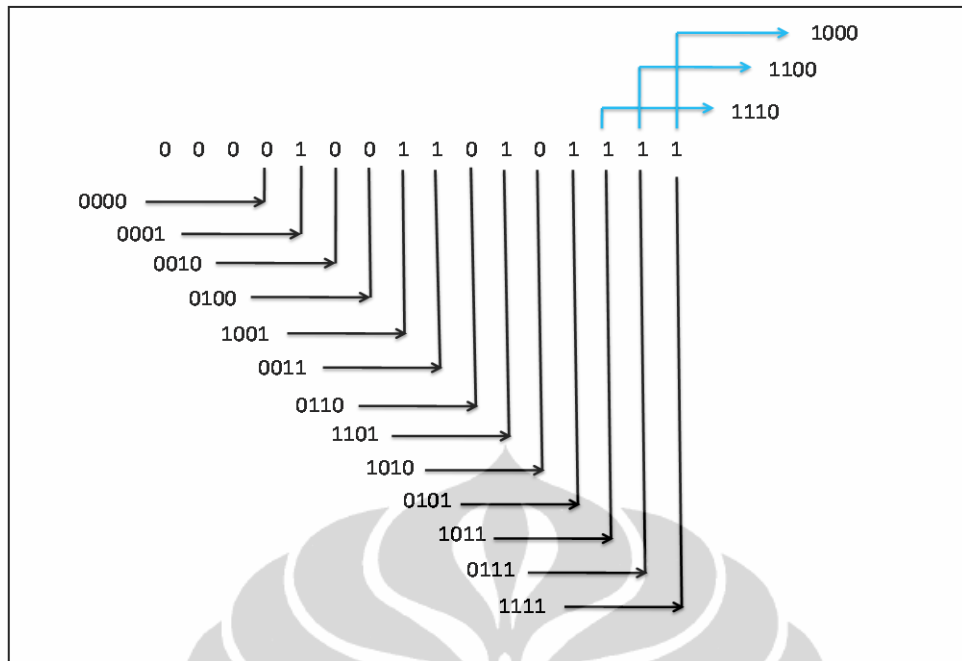
Himpunannya adalah  $= \{0, 1, 001, 011\}$  dan bila diurutkan secara Lexicographic menjadi himpunan  $= \{0, 001, 011, 1\}$

**Langkah (5).** Tahapan merangkai Lyndon word. Teorema 3.2.1 dan Akibat 3.2.2 menjamin bahwa dari himpunan Lyndon word yang terurut secara lexicographic dapat dirangkai sehingga menghasilkan barisan de Bruijn. Pada proses ini untuk setiap “kata” dengan panjang  $n$  hanya boleh hadir pada rangkaian tepat satu kali (tanpa ada pengulangan).

Himpunan Lyndon word =  $\{0, 001, 011, 1\}$

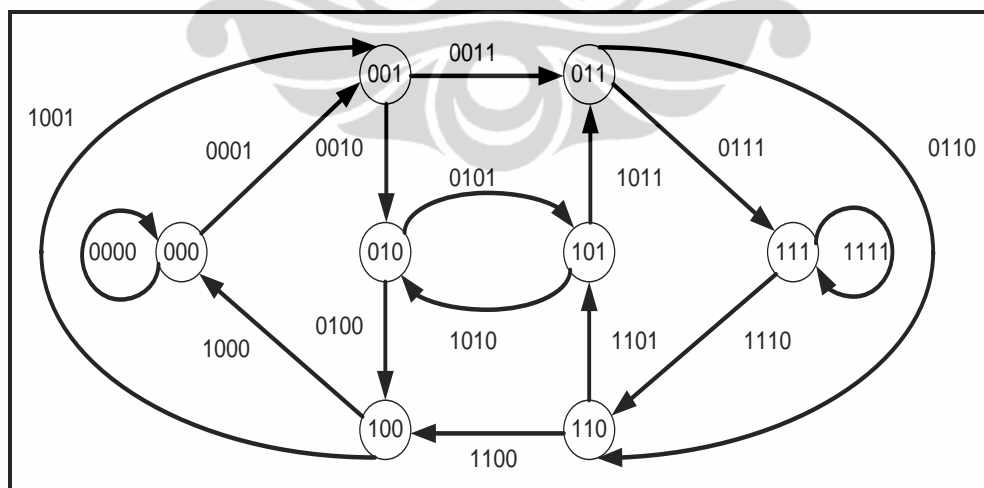
Maka rangkaian dari Lyndon wordnya adalah  $\{00010111\}$  dan disebut sebagai barisan de Bruijn  $B^n$  dengan panjang  $|A|^n$ . Untuk setiap substring dari  $B^n$  dengan panjang  $n$  bersesuaian pada satu busur berarah dari graf de Bruijn  $G_{2,3}$ . Sehingga rangkaian ini sama dengan barisan de Bruijn yang dihasilkan dari representasi sirkuit Euler pada graf de Bruijn  $G_{2,3}$  yang telah diberikan pada subbab 3.1.

Dengan cara yang sama untuk  $n = 4$  dari alfabet  $A = \{0, 1\}$  diperoleh himpunan Lyndon wordnya adalah  $\{0, 0001, 0011, 01, 0111, 1\}$ . Maka rangkaian dari Lyndon wordnya adalah  $\{0000100110101111\}$ . Rangkaian ini kemudian disebut barisan de Bruijn dengan panjang 16 yang dibangun oleh alfabet  $A = \{0,1\}$  dengan  $n = 4$ . Selanjutnya setiap substring dari barisan de Bruijn dengan panjang  $n = 4$  bersesuaian dengan busur berarah pada graf de Bruijn  $G_{2,4}$ . Berikut adalah substring dengan panjang 4 dari barisan de Bruijn  $\{0000100110101111\}$ .



Gambar 3.2. Substring dengan panjang 4 dari barisan de Bruijn  
 $\{0000100110101111\}$

16 substring dengan panjang 4 masing-masing mewakili satu busur berarah pada graf de Bruijn  $G_{2,4}$ , dan 8 substring dengan panjang 3 menyatakan label simpulnya. Berikut bentuk graf de Bruijn  $G_{2,4}$  :



Gambar 3.3. Graf de Bruijn  $G_{2,4}$

## BAB IV

### KAITAN ANTARA GRAF DE BRUIJN DAN BARISAN DE BRUIJN

Dalam Bab III telah diuraikan metode konstruksi barisan de Bruijn yang diperoleh dari representasi sirkuit Euler pada suatu graf de Bruijn selanjutnya disebut Metode 1, dan suatu metode konstruksi barisan de Bruijn yang diperoleh melalui rangkaian Lexicographic terurut dari himpunan Lyndon word selanjutnya disebut Metode 2. Pada bab ini akan dibahas tentang kaitan antara graf de Bruijn dan Barisan de Bruijn, kemudian memberikan perbandingan Metode 1 dan Metode 2, meliputi persamaan dan perbedaan dari kedua metode, serta keunggulan antara keduanya.

#### 4.1 Kaitan Antara Graf de Bruijn dan Barisan de Bruijn

Dari pembahasan pada Bab III dapat terlihat bahwa barisan de Bruijn memiliki kaitan erat dengan graf de Bruijn. Graf de Bruijn  $G_{a,n}$  yang dibangun oleh  $n$  dari suatu alfabet biner  $A = \{0,1\}$  merupakan graf berarah Euler dengan himpunan simpul

$$V(G_{a,n}) = \{u \in A ; u \text{ adalah awalan atau akhiran pada } A^* \}$$

dan himpunan busur berarahnya adalah

$$E(G_{a,n}) = \{(\alpha v, v\beta); \alpha, \beta \in A \text{ dan } \alpha v\beta \in A^*\}.$$

Label busur berarahnya menggunakan fungsi  $l$  jika  $e = (\alpha v, v\beta)$  maka  $l(e) = \alpha v\beta$ , dengan demikian secara umum dapat dilihat hubungan bijektif antara setiap busur berarah dan masing-masing simpul pada graf  $G_{a,n}$  sebagai berikut :

*Teorema 4.1.1. (Martin & Moreno, 2003). Suatu barisan de Bruijn  $B^n$  ada, jika dan hanya jika  $G_{a,n}$  merupakan graf Euler, selanjutnya label dari sirkuit Euler pada  $G_{a,n}$  merupakan barisan de Bruijn.*



Bukti :

Misalkan  $C$  adalah suatu sirkuit Euler pada  $G_{a,n}$ , selanjutnya pandang  $D : \{w \in A^* ; \text{ dan } w \text{ adalah "kata" yang bersesuaian dengan busur berarah pada } G_{a,n}\}$ . Oleh karena itu sebarang "kata" di  $D$  merupakan faktor dari  $l(C)$ , dan panjang dari  $C$  merupakan banyaknya "kata" di  $D$ . Dengan demikian  $l(C)$  adalah barisan de Bruijn.

Sebaliknya, misalkan  $B^n$  suatu barisan de Bruijn untuk  $D$ . Sebarang faktor yang memiliki panjang  $n$  adalah "kata" yang ada di  $D$  dan bersesuaian dengan busur berarah pada  $G_{a,n}$ . Selanjutnya dua buah faktor  $\alpha v$  dan  $v\beta$  memiliki dua hubungan dengan busur berarah, sedemikian sehingga ujung dari yang pertama menjadi pangkal bagi yang kedua. Oleh karena itu  $B^n$  adalah lintasan tertutup pada  $G_{a,n}$  dengan label  $B^n$ . Karena setiap faktornya berbeda dan setiap busur berarah pada lintasan tertutup juga berbeda, maka setiap "kata" di  $D$  sebagai faktor dari  $B^n$ . Selanjutnya setiap busur berarah di  $G_{a,n}$  ada pada lintasan, maka dapat disimpulkan lintasan tertutup pada  $G_{a,n}$  adalah sirkuit Euler dengan label  $B^n$ .

#### 4.2 Persamaan dan Perbedaan Metode 1 dan Metode 2

Dari uraian Bab III diperoleh persamaan Metode 1 dan Metode 2, yaitu

:

- a. Konstruksi barisan de Bruijn diperoleh dari suatu alfabet  $A$  yang diberikan dengan ukuran  $n$ .
- b. Himpunan busur berarah dengan  $n$  sebagai panjang masing-masing busurnya merupakan pembangun dari barisan de Bruijn.
- c. Hasil dari konstruksi barisan de Bruijn merupakan string  $B^n$  dengan panjang  $|A|^n$ .
- d. String  $B^n$  dengan panjang  $|A|^n$  merupakan bentuk lingkaran lengkap.

Setelah melihat persamaan Metode 1 dan Metode 2, berikut ini akan diuraikan perbedaan antara Metode 1 dan Metode 2 mulai dari cara mengkonstruksi hingga hasil konstruksi. Uraian lengkap tentang perbedaan tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.2.1.

Tabel 4.2.1. Perbedaan Antara Metode 1 dan Metode 2

No	Metode 1	Metode 2
1.	Dikonstruksi dari sirkuit Euler pada graf de Bruijn	Dikonstruksi menggunakan Himpunan Lyndon word
2.	Konstruksi graf de Bruijn $G_{a,n}$ (harus digambar)	Urutkan himpunan Lyndon word secara lexicographic.
3.	Menentukan sirkuit Euler yang berawal dari setiap simpul pada graf de Bruijn $G_{a,n}$ . Kemudian dipilih sirkuit dengan label minimal, dan merupakan barisan de Bruijn $a^n$ .	Proses merangkai Lyndon word dan diperoleh barisan de Bruijn, yaitu string $B^n$ yang dibangun oleh $n$ dari suatu alfabet $A$
4.	Setiap label busur berarah dengan panjang $n$ merupakan pembangun dari barisan de Bruijn $a^n$ .	Setiap "kata" dengan panjang $n$ merupakan pembangun dari barisan de Bruijn $B^n$ .
5.	Terdapat sebanyak $a^n$ busur berarah dan masing-masing busur berarah dengan panjang $n$ hadir tepat sekali pada barisan de Bruijn $a^n$ .	Terdapat sebanyak $ A ^n$ "kata" dengan panjang $n$ , dan hadir pada string $B^n$ tepat satu kali.
6.	Untuk ukuran $n$ yang besar, terjadi kesulitan memposisikan simpul pada graf de Bruijn $G_{a,n}$ agar setiap simpulnya memiliki derajat sama dan menghubungkan semua busur berarah yang ada.	Untuk ukuran $n$ yang besar himpunan Lyndon word yang dihasilkan dapat dengan lebih mudah dirangkai, sehingga menghasilkan barisan de Bruijn.

Kekuatan dan kelemahan masing-masing metode akan diberikan dalam rangkuman pada Bab Penutup.

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan Metode 1: barisan de Bruijn yang diperoleh dari representasi sirkuit Euler pada graf de Bruijn dan Metode 2: barisan de Bruijn yang diperoleh dari rangkaian Lyndon word yang terurut secara lexicographic pada bab-bab sebelumnya.

### 5.1 Kesimpulan

Dari uraian tentang keterkaitan graf de Bruijn dan barisan de Bruijn, serta Metode 1 dan Metode 2 pada bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

- 1) Konstruksi barisan de Bruijn menggunakan Metode 1 memiliki kesulitan saat menentukan sirkuit Euler dengan label minimal pada suatu graf de Bruijn dengan ukuran  $n$  yang besar. Sedangkan konstruksi barisan de Bruijn menggunakan Metode 2 memiliki kelebihan untuk suatu ukuran  $n$  yang lebih besar.
- 2) Konstruksi barisan de Bruijn menggunakan Metode 2 menggunakan rangkaian Lyndon word yang terurut secara lexicographic menghasilkan string  $B^n$  dan setiap “kata” dengan panjang  $n$  hadir tepat sekali pada string  $B^n$ .
- 3) Suatu barisan de Bruijn  $B^n$  ada, jika dan hanya jika  $G_{a,n}$  merupakan graf Euler, selanjutnya label dari sirkuit Euler pada  $G_{a,n}$  merupakan barisan de Bruijn

### 5.2 Saran

Setelah melihat kajian Metode 1 dan Metode 2, maka dapat dilakukan pengkajian lebih lanjut agar kajian teoritis Metode 1 dan Metode 2 ini dapat diterapkan langsung dalam bidang bioinformatika, kriptografi dan lain sebagainya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Chung, F., Diaconis, P dan Graham R. (1992). Universal cycle for combinatorial structure. *Discrete Mathematics* 110 : 43-59
- Edgar, G dan Michael, M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. United State of America. Prentice Hall.
- Drew, A. *De Bruijn Sequence*. Mei 5, 2010. pk. 14.05.  
<http://www.math.umn.edu/~armstron/5707/DeBruijn.pdf>
- Gross, J dan Yellen, J. (2006). *Graph Theory and its Applications*. United State of America. Chapman & Hall/CRC.
- Martin, M dan Moreno, E.(2004). Minimal Eulerian Trail in a Labeled Digraph. *Elsevier Science*.
- Moreno, E. (2003). On the Theorem of Fredicksen and Maiorana about de Bruijn Sequence. *Advance in Applied Mathematics*.vol. 33: 413-415
- Rosen, K. (1995). *Discrete Mathematics and its Applications*. Singapore. Mac-Graw Hill.
- Rosenfeld, V.R . (2003). *Enumerating de Bruijn Sequence*. Mei 19, 2010. pk. 09.45. <http://www.stefangeens.com/br13.pdf>.
- Trappe, W dan Washington, L. (2006). *Introduction to Cryptography with Coding Theory*. London. Prentice Hall.