UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN HARMONIS PADA KOMBINASI GABUNGAN GRAF CATERPILLAR DAN GRAF FIRECRACKER TERATUR

Tesis

diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Magister Sains

PAHRIN WIRNADIAN

NPM. 0906577375

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPOK

2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	PAHRIN WIRNADIAN
NPM	:	0906577375
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	28 desember 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama	:	Pahrin Wirnadian
NPM	:	0906577375
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Konstruksi Pelabelan Harmonis pada Kombinasi Gabungan Graf Caterpillar dan Graf Firecracker Teratur

Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi magister matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	**: Dr. Kiki Ariyanti S**	( )
Penguji I	**: Dr. Kiki Ariyanti S**	( )
Penguji II	**: Prof. Dr. Djati Kerami**	( )
Penguji III	**: Dr. Alhadi Bustamam, M.Kom**	( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 28 Desember 2010

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, dengan menyampaikan puji syukur kepada Allah SWT Tuhan Yang Maha Kuasa, atas segala rahmat dan karunia yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Ibu Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang sekaligus dosen pembimbing akademik dan Ibu Bevina D.Handari, Ph.D selaku sekretaris Program Studi Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan masa studi;
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
4. Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
5. Orang tua dan keluarga besar saya, yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;
6. Istriku tercinta Teti Marlena, S.Pd dan anakku tersayang Najwa Humairo, atas segala dukungan, kesabaran, semangat, dan doa;
7. Henang, mas Mul, uni Desi, dan semua teman-teman seperjuangan yang telah berjuang bersama.
8. Kepada semua teman-teman yang telah memberi semangat terutama teman-teman di Matematika UI.

9. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, saya berharap kepada Tuhan Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama	:	Pahrin Wirnadian
NPM	:	0906577375
Program Studi	:	Magister Matematika
Departeman	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, hak bebas biaya royalti noneksklusif (Non-exclusive royalti-free right) atas karya ilmiah saya berjudul :

"Konstruksi Pelabelan Harmonis pada Kombinasi Gabungan Graf Caterpillar dan Graf Firecracker Teratur"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk data (data base), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada Tanggal : 28 Desember 2010

Yang menyatakan

(Pahrin Wirnadian)

ABSTRAK

Nama	:	Pahrin Wirnadian
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Konstruksi Pelabelan Harmonis pada Kombinasi Gabungan Graf Caterpillar dan Graf Firecracker Teratur

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul $V = V(G)$ dan himpunan busur $E = E(G)$. Suatu pemetaan λ dari V ke $Z_{|E|}$ dimana $|E(G)| \geq |V(G)|$ disebut pelabelan harmonis jika λ merupakan pemetaan injektif sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label dengan $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) \pmod{|E(G)|}$ menghasilkan label yang berbeda. Pada tesis ini, diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur. Pertama dibuktikan pelabelan harmonis untuk sembarang graf caterpillar dan gabungan beberapa graf caterpillar. Selanjutnya dibuktikan pelabelan harmonis untuk graf firecracker teratur dan gabungan beberapa graf firecracker teratur. Dengan menggunakan pelabelan yang telah diberikan, ditunjukkan bahwa untuk masing-masing graf caterpillar atau firecracker teratur boleh terdapat dua simpul (sepasang simpul) dengan label yang sama. Selanjutnya ditunjukkan konstruksi pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur. Dengan menggunakan pelabelan yang telah diberikan, ditunjukkan boleh terdapat n pasang label simpul yang sama untuk kombinasi gabungan dari n graf caterpillar teratur dan graf firecracker teratur.

Kata kunci : Pelabelan Harmonis, Graf Caterpillar , Graf Firecracker teratur
x+39 halaman; 15 gambar; 0 tabel
Daftar Pustaka: 11 (1980-2010)

ABSTRACT

Name : Pahrin Wirnadian
Study Program : Magister Of Mathematics

Judul Tesis : Construction ways of a harmonious labeling to union of combination of caterpillar graph and regular firecracker graph

Let G be a graph with component of vertice V = V (G) and edge E = E (G). A mapping of λ from the V to the $Z_{|E|}$, where $|E(G)| \geq |V(G)|$, is called a harmonious labeling if λ is an injection such that, when each edge xy is assigned the label $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)(\text{mod } |E(G)|)$, the resulting edges are distinct. In this research, we study how to construct a harmonious labeling to union combination of caterpillar graph and regular firecracker graph. First, construction ways of a harmonious labelling will be presented for caterpillar graphs and combination of some caterpillar graphs. A construction of harmonious labeling will also be presented for firecracker graphs and union of some firecracker graphs. By using the labelling that is assigned, it will be shown that for each caterpillar graph or firecraker can have two edges (a paired of edge) with a same labeling. And a construction ways of harmonious labeling of union combination of caterpillar graph and regular firecrcaker graph will be presented. By using the assigned label, it will be proved that for combination of caterpillar graphs and firecracker graph there are n edges that has the same labeling..

Key words : Harmonious Labeling, Caterpillar Graph, Regular Firecracker Graph
x+39 pages; 15 pictures; 0 tables
Bibliography : 11 (1980-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

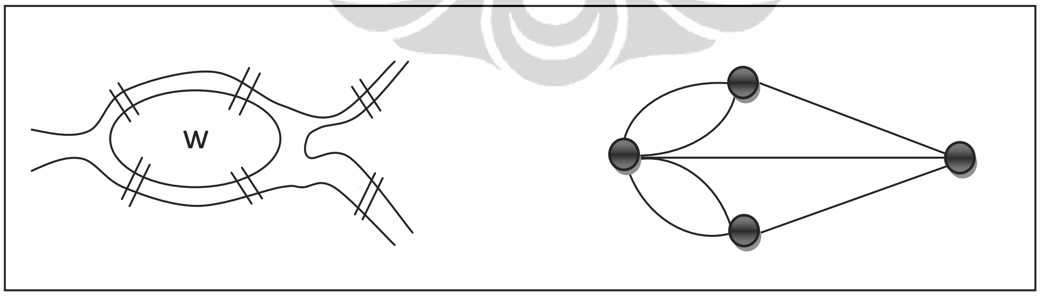
BAB 1
PENDAHULUAN

Bagian pendahuluan dari tulisan ini memuat latar belakang dilakukannya penelitian, permasalahan yang akan dikaji, tujuan penulisan, batasan masalah dan sistematika penulisan. Berikut ini adalah uraian lengkapnya.

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan dapat dijelaskan secara lebih sederhana.

Pada abad ke-18, Euler memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Pada saat itu di kota Koningsberg, terdapat suatu sungai yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan, dengan menggunakan suatu bentuk representasi tertentu, bahwa hal itu tidak mungkin. Bentuk representasi itu berkembang menjadi teori graf yang kita kenal saat ini (Douglas B.West, 2001), representasi graf untuk jembatan di Konigsberg ditunjukkan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1. Representasi jembatan Konigsberg kebentuk graf

Suatu graf G terdiri dari gabungan himpunan tak kosong simpul $V(G)$ dan himpunan busur $E(G)$ yang menghubungkan simpul-simpul pada G. Untuk selanjutnya $V(G)$ ditulis sebagai V dan $E(G)$ ditulis sebagai E. Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan sebagai $|V|$, $|V| > 0$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$, $|E| \geq 0$.

Suatu pelabelan pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan, biasanya berupa bilangan bulat positif. Suatu pemetaan λ dari V ke $Z_{|E|}$ disebut pelabelan harmonis jika λ merupakan pemetaan sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label dengan $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$ (mod $|E|$) menghasilkan label yang berbeda. Karena label-label busur merupakan elemen $Z_{|E|}$ dan berbeda maka $\{w(xy) : xy \in E\} = Z_{|E|} = \{[0], [1], [2], \dots, [|E| - 1]\}$. Untuk graf pohon, satu label boleh digunakan untuk dua simpul karena $|E| = |V| - 1$ sehingga label yang tersedia tidak mencukupi. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut **graf harmonis** (Graham dan Sloane, 1980). Untuk menyederhanakan penulisan, maka himpunan $\{[0], [1], [2], \dots, [|E| - 1]\}$ akan ditulis $\{0, 1, \dots, |E| - 1\}$.

Pada tahun 1980 Graham dan Sloane memperkenalkan pelabelan harmonis yang berawal dari masalah pada *error-correcting code*. Pelabelan harmonis memiliki beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan tersedia sebanyak $|E|$ saluran frekuensi, simpul-simpul pada graf merepsentasikan stasiun komunikasi dan busur pada graf tersebut mereprensentasikan jalur komunikasi dari satu stasiun ke stasiun yang lain. Dengan memberikan label berbeda pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan label dua stasiun yang berkomunikasi yang menghasilkan label berbeda (Graham dan Sloane, 1980).

Pada penelitian sebelumnya telah diketahui konstruksi pelabelan harmonis untuk graf hasil gabungan dari graf-graf harmonis yang memiliki jumlah busur yang sama (Gilang, dkk, 2009) dan konstruksi pelabelan harmonis untuk graf hasil gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis (Youssef, 2003). Sebagai catatan, operasi gabungan pada graf $G = \bigcup_{t=1}^{n} G_t$ menghasilkan graf G dengan $V = \bigcup_{t=1}^{n} V_t$ dan $E = \bigcup_{t=1}^{n} E_t$.

Pada tesis ini, diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada gabungan graf caterpillar dan gabungan graf firecracker teratur. Pertama ditunjukkan konstruksi pelabelan harmonis untuk gabungan beberapa graf caterpillar dan konstruksi pelabelan harmonis untuk gabungan beberapa graf firecracker teratur. Dengan menggunakan pelabelan yang telah diberikan, ditunjukkan bahwa terdapat n pasang label simpul yang sama (untuk masing-masing graf caterpillar dan graf firecracker teratur, hanya boleh ada maksimal dua simpul dengan label yang sama). Selanjutnya juga ditunjukkan konstruksi pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur. Dengan menggunakan pelabelan yang telah diberikan, ditunjukkan terdapat n pasang label simpul yang sama untuk kombinasi gabungan n graf caterpillar dan graf firecracker teratur.

1.2 Permasalahan dan Ruang Lingkup

Mengkonstruksi pelabelan harmonis untuk suatu graf bukanlah hal yang mudah, dan tidak semua graf bisa diberi label dengan pelabelan harmonis. Dalam tulisan ini difokuskan pada masalah bagaimana mengkonstruksi pelabelan harmonis untuk kombinasi gabungan beberapa graf. Penelitian dalam penulisan tesis ini akan dibatasi pada graf caterpillar dan graf firecracker teratur.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah mengkonstruksi pelabelan harmonis pada gabungan kombinasi graf caterpillar dan graf firecracker teratur, serta mencari jumlah label simpul yang sama.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan akan disusun dalam lima bab. Pada Bab I, dijelaskan latar belakang dilakukannya penelitian, permasalahan, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan. Bab II, memberikan definisi-definisi dan konsep dasar dalam teori graf dan pelabelan graf. Bab III, memberikan konstruksi pelabelan harmonis untuk gabungan beberapa graf caterpillar dan konstruksi pelabelan harmonis untuk gabungan beberapa graf firecracker teratur. Pada Bab IV, diberikan hasil yang diperoleh berupa konstruksi pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur. Pada bab V, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yang telah dilakukan serta saran yang dapat diberikan atas hasil penelitian. .

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf dan pelabelan graf yang akan digunakan pada bab berikutnya.

2.1 Teori Graf

Secara umum, graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari antara lain : struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain (Siang,J.J,2004).

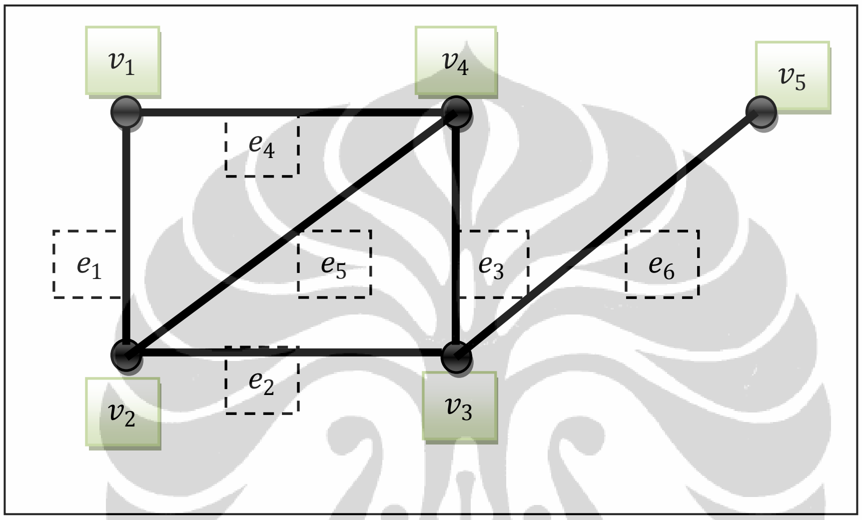
Sebagian besar istilah graf yang digunakan dalam bab ini mengacu pada buku Matematika Diskrit oleh Jong Jek Siang (2004) dan buku Introduction to Graph Theory oleh Douglas B. West (2001).

Suatu **graf $\boldsymbol{G}$** terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul-simpul *(vertices)* tidak kosong V dan himpunan busur-busur *(edge)* E yang menghubungkan simpul-simpul pada G. Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan dengan $|V|$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$. Setiap busur berhubungan dengan satu atau dua titik. Titik-titik tersebut dinamakan **titik ujung** *(endpoint).*

Dua simpul dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika terdapat satu atau lebih busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut atau dengan kata lain, dua simpul dikatakan bertetangga jika keduanya hadir pada busur yang sama. Simpul dan busur yang terhubung dengannya dikatakan **saling hadir** (*incident*). **Derajat** (*degree*) dari suatu simpul menyatakan banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut, dinotasikan sebagai $\deg(v)$. **Simpul terisolasi** (*isolated vertex*) adalah simpul yang memiliki derajat 0. **Simpul akhir** atau **daun** (*leaf*) adalah simpul yang memiliki derajat 1. Jika pada graf G semua simpul memiliki derajat yang sama maka graf G disebut **graf teratur berderajat r** (*r-regular graph*). Suatu graf G disebut **graf lengkap** (*complete graph*) dengan n simpul jika semua simpul saling bertetangga, sehingga graf lengkap juga merupakan graf teratur dengan $r = n - 1$.

Suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar. Simpulnya direpresentasikan dalam bentuk titik atau bulatan (lingkaran), sedangkan busur direpresentasikan dalam bentuk garis. Simpul lazimnya ditulis sebagai u atau v atau dapat juga ditulis dengan huruf yang lain. Sedangkan busur dapat ditulis sebagai e atau sebagai pasangan dari kedua titik ujung, uv atau (u, v).

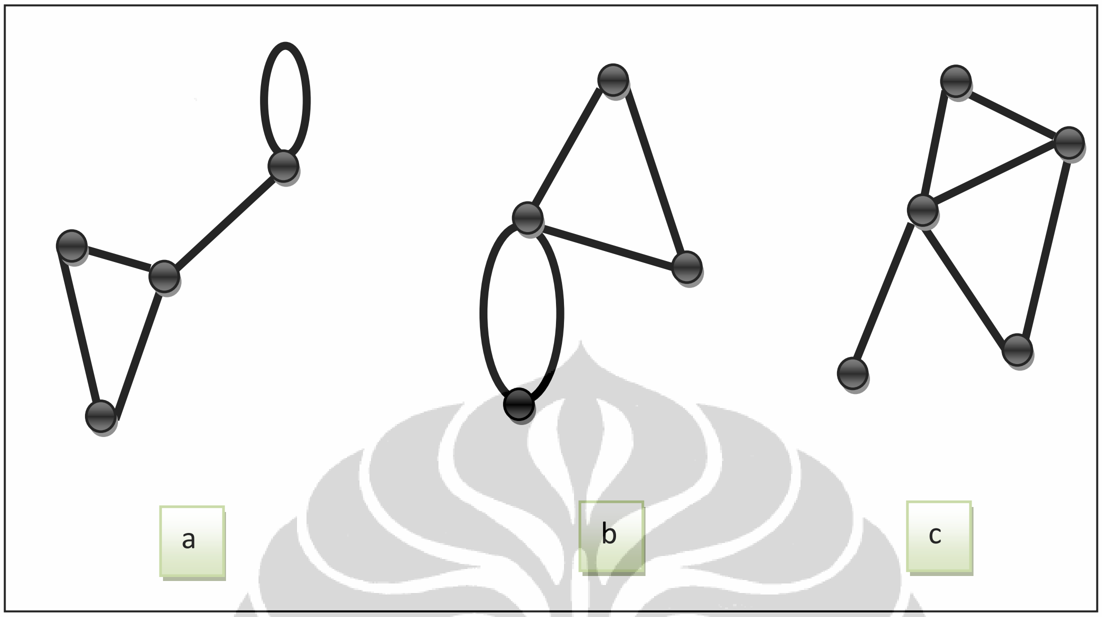
Contoh :



Gambar 2.1 Contoh graf dengan $|V| = 5$ dan $|E| = 6$

Gambar 2.1 di atas memberikan contoh graf G dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan busur $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Banyaknya simpul dan banyaknya busur masing-masing adalah $|V| = 5$ dan $|E| = 6$. Simpul v_1 dan v_4 saling bertetangga karena keduanya dihubungkan oleh busur e_2. Busur e_2 dan e_5 saling bertetangga karena keduanya hadir pada simpul yang sama, yakni v_4. Derajat simpul-simpul pada Gambar 2.1 adalah $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 3$, $deg(v_4) = 3$ dan $deg(v_5) = 1$.

Gelung (*loop*) adalah busur yang memiliki titik pangkal dan ujung yang sama. Jika dua simpul dihubungkan oleh lebih dari satu busur, maka busur-busur tersebut disebut sebagai **busur berganda** (*multiple edge*). Graf yang tidak memiliki gelung dan busur berganda disebut sebagai **graf sederhana** *(simple graph)*. Selengkapnya diberikan oleh contoh pada Gambar 2.2 di bawah ini.

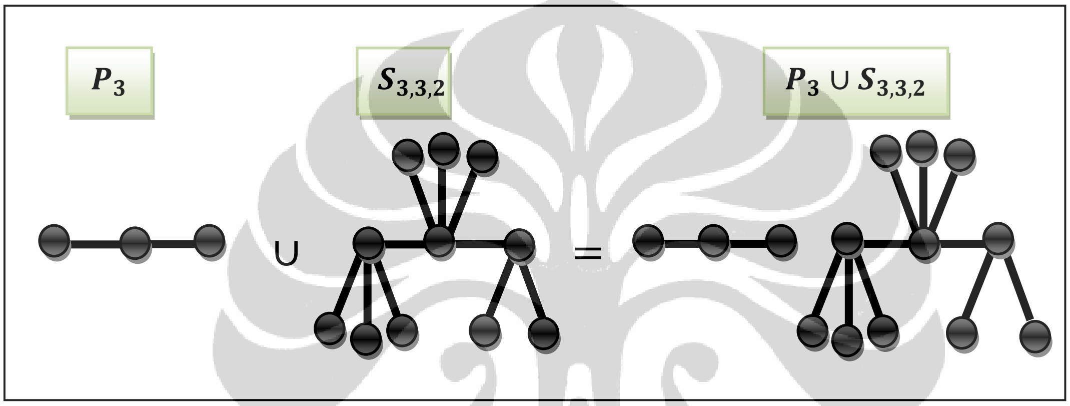


Gambar 2.2 Contoh graf dengan (a) gelung, (b) busur berganda, dan (c) graf sederhana

Suatu deretan busur-busur yang membentuk suatu deretan yang tidak putus pada G disebut **jalan** (*walk*). Apabila pada jalan memiliki deretan busur-busur yang tidak berulang, maka jalan tersebut disebut **jalur** (*trail*). Jalur dengan deretan simpul-simpul yang tidak berulang disebut **lintasan** (*path*). Suatu graf tak berarah G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) bila terdapat suatu lintasan yang menghubungkan setiap pasang simpul di G. Apabila tidak terdapat suatu lintasan yang menghubungkan satu pasang atau lebih simpul di G , maka graf G disebut **graf tak-terhubung** (*disconected graph*). Jika semua busurnya berarah maka grafnya disebut **graf berarah** *(directed graph)* atau sering disingkat dengan **digraph.** Jika semua busurnya tidak berarah, maka grafnya disebut **graf tak berarah** *(undirected graph)*, dalan tulisan ini jika hanya disebutkan graf saja, maka yang dimaksud adalah graf tak berarah. Graf G dikatakan **graf berhingga** *(finite graph)* jika banyaknya simpul berhingga.

Dengan diketahuinya graf, maka himpunan busur, simpul serta titik ujungnya adalah tunggal, tetapi hal ini tidak berlaku sebaliknya. Dengan diketahuinya himpunan busur, simpul dan titik ujungnya, maka kita dapat membentuk beberapa graf yang berbeda. Perbedaan graf-graf tersebut terletak pada panjang busur, dan posisi simpul yang berbeda antara satu graf dengan graf yang lainnya. Tetapi karena visualisasi simpul dan busur tidak berpengaruh, maka graf-graf tersebut merupakan graf yang sama meskipun secara visual tampak berbeda.

Operasi gabungan pada graf $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ menghasilkan graf G dengan $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ dan $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (Harary, 1994). Contoh graf gabungan dari dua graf yang berbeda tampak pada Gambar 2.3.



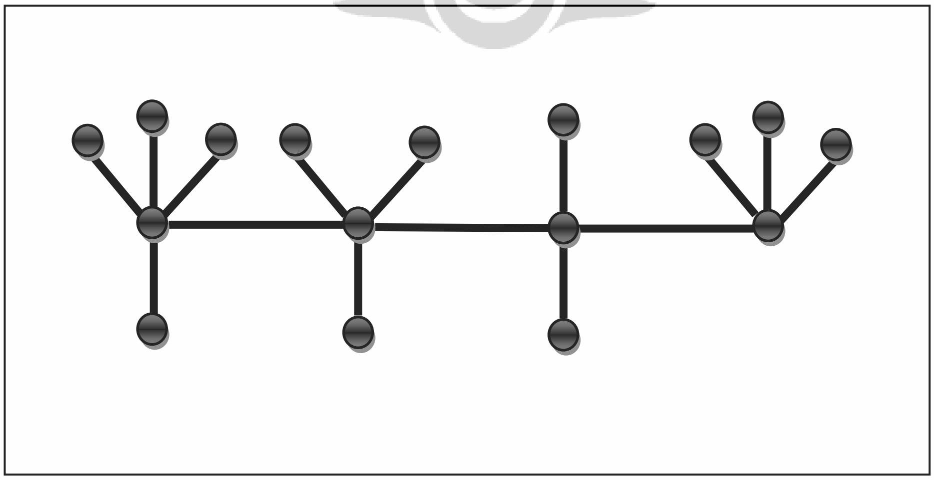
Gambar 2.3 Contoh Graf operasi gabungan dari P_3 dengan $S_{3,3,2}$.

Dalam tulisan ini digunakan graf berhingga, sederhana, dan tak-berarah. Pada tulisan ini juga menggunakan operasi gabungan beberapa graf. Pada bagian berikut diberikan jenis-jenis graf yang ada hubungannya dengan pembahasan selanjutnya.

2.2 Jenis-jenis Graf

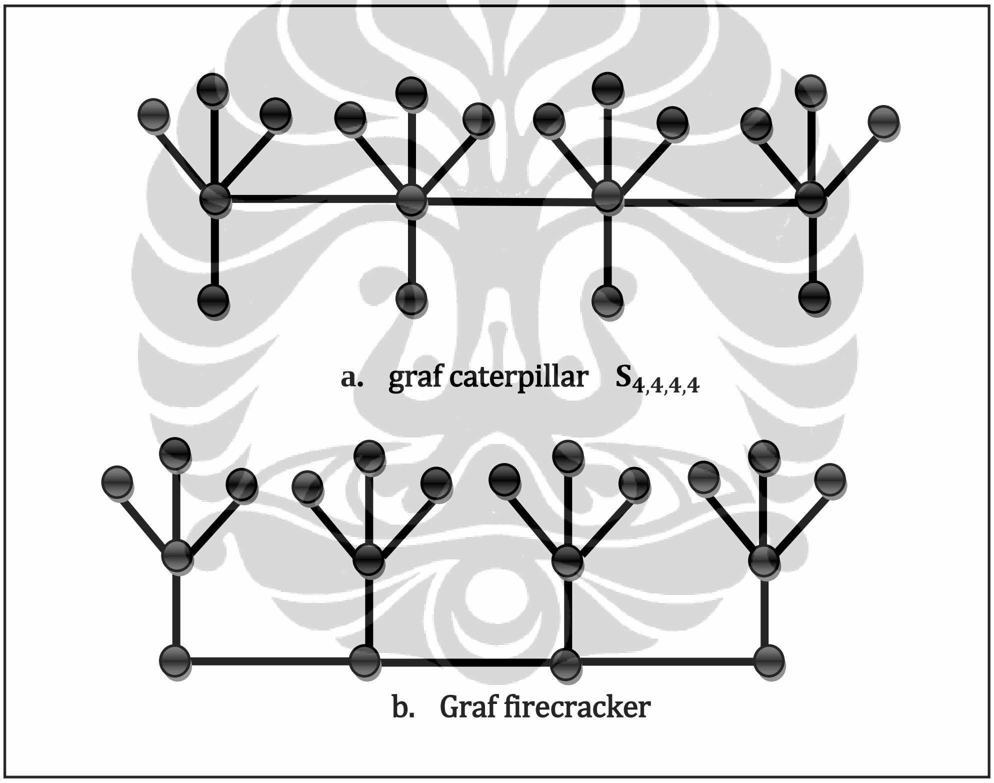
Graf lintasan (*path graph*), P_n, adalah graf dengan n simpul $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan busur $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$. Simpul v_1 disebut sebagai simpul awal dan v_n adalah simpul terakhir. Semua simpul berderajat-2 kecuali simpul awal dan simpul akhir berderajat-1. Graf **lingkaran** (*cycle graf*), C_n , adalah graf lintasan dengan *n* simpul yang diberi tambahan busur antara simpul awal dan simpul terakhir, sehingga pada graf lingkaran semua simpul memilliki derajat 2. Graf lingkaran merupakan salah satu contoh graf teratur.

Graf terhubung yang tidak memiliki subgraf lingkaran disebut **graf pohon** (*tree graph*). **Graf bintang** (*star graph*), S_r, adalah graf dengan $r+1$ simpul, memiliki satu simpul pusat c yang terhubung dengan r simpul lainnya. Derajat dari simpul c adalah r sedangkan derajat semua simpul lain adalah 1. **Graf caterpillar** adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah simpul luar berderajat satu pada simpul-simpul dari graf lintasan P_n. Namun graf caterpillar dapat didefinisikan juga sebagai barisan graf bintang $S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}$ dimana setiap S_{r_i} adalah graf bintang, dengan simpul pusat c_i dan banyaknya simpul luar r_i, yang setiap simpul pusat dari S_{r_i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, t-1$, terhubung secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul pusat dari barisan graf bintang tersebut disebut ***backbone*** pada graf caterpillar. Graf caterpillar memiliki himpunan simpul $V(S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}) = \{c_i: 0 \le i \le t-1\} \cup \{v_i^j: 0 \le i \le t-1, 1 \le j \le r_i\}$ dan himpunan busur $E(S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}) = \{c_i c_{i+1}: 0 \le i \le t-1\} \cup \{c_i v_i^j: 0 \le i \le t-1, 1 \le j \le r_i\}$, dengan c_i menyatakan simpul pusat dan v_i^j menyatakan simpul luar ke-j pada simpul pusat ke-i. Jika banyaknya simpul luar sama untuk setiap barisan graf bintang yang dihubungkan, maka graf tersebut merupakan **graf caterpillar teratur**. Dengan kata lain, graf caterpillar teratur adalah graf caterpillar yang memiliki jumlah simpul daun yang sama yang terhubung pada setiap simpul pusatnya. Contoh graf caterpillar tampak pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Contoh graf caterpillar $S_{4,3,2,3}$

Graf firecracker didapatkan dengan menghubungkan satu simpul luar dari S_{r_i} secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul luar dari barisan graf bintang tersebut disebut *backbone* dari graf firecracker. Graf firecracker juga bisa didapatkan dengan memindahkan busur-busur yang menghubungkan simpul-simpul pusat pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat dari graf caterpillar. Jika banyaknya simpul luar sama untuk setiap barisan graf bintang, maka graf tersebut merupakan **graf firecracker teratur**. Graf bintang, graf caterpillar dan graf firecracker merupakan beberapa contoh dari graf pohon.



Gambar 2.5. Contoh graf firecracker teratur dari graf caterpillar teratur

Suatu graf G adalah ***bipartite*** jika V merupakan gabungan dari dua himpunan saling bebas yang disebut ***partite sets*** dari G atau dengan kata lain, suatu graf sederhana G disebut bipartit jika himpunan simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi dua himpunan tidak kosong v_1 dan v_2 yang saling bebas, sedemikian sehingga setiap busur di graf menghubungkan suatu simpul di v_1 dan suatu simpul di v_2.

2.3 Pelabelan Harmonis

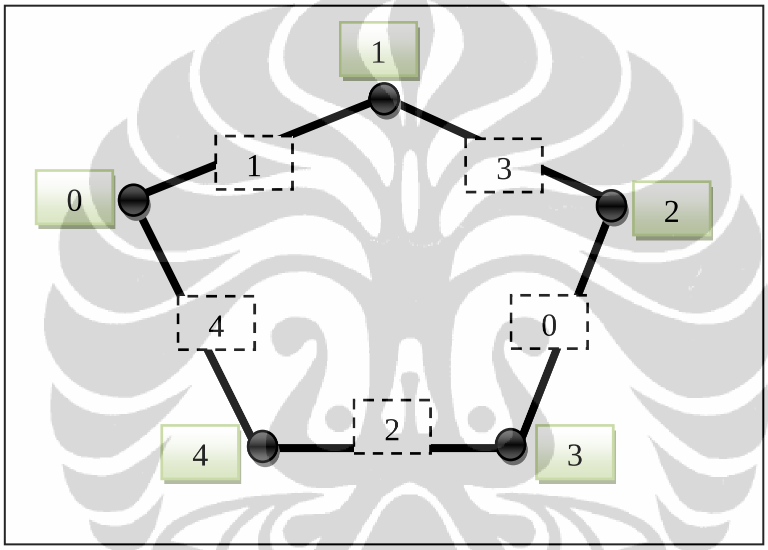
Suatu **pelabelan** (*labeling*) pada graf adalah suatu pemetaan yang memetakan suatu himpunan dari elemen-elemen pada graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Bilangan-bilangan tersebut disebut **label**. Jika domainnya merupakan himpunan simpul (busur), maka pelabelannya disebut pelabelan simpul (busur). Apabila domainnya $V \cup E$ maka pelabelannya disebut pelabelan total (Siang,J.J,2004).

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Suatu pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_{|E|}$ dimana $Z_{|E|}$ adalah bilangan bulat modulo $|E|$ disebut **pelabelan harmonis** (*harmonious labeling)* jika λ merupakan pemetaan sedemikian sehingga ketika setiap busur *xy* dilabel dengan $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$ (mod $|E|$)menghasilkan bobot busur yang berbeda, dalam hal ini $w(xy) \in \{0, 1, \dots, |E| - 1\}$. Untuk graf pohon, satu label boleh digunakan untuk dua simpul, sehingga pelabelan harmonisnya tidak injektif. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut **graf harmonis** (*harmonious graph*) (Graham & Sloane, 1980).

Ada beberapa variasi dalam pelabelan harmonis. Salah satunya adalah seperti yang didefinisikan oleh Chang, Hsu, dan Rogers. Dalam definisinya, didefinisikan pelabelan injektif λ dari suatu graf *G* dengan |*E*| busur sebagai suatu pelabelan ***s*–harmonis kuat** (*strongly s-harmonious*) jika label simpul adalah anggota $\{0, 1, \dots, |E| - 1\}$ dan bobot busur yang diinduksi $\lambda(x) + \lambda(y)$ (mod $|E|$) untuk setiap busur xy adalah $s, s + 1, \dots, s + |E| - 1$, dengan s merupakan suatu bilangan asli. Grace menyebut pelabelan *s*-harmonis kuat sebagai **pelabelan sekuensial** (*sequential labeling*)**.** Pada graf pohon, Chang, Hsu, dan Rogers membolehkan 2 simpul diberi label yang sama. Sedangkan Grace memberi label simpul dengan $\{0, 1, \dots, |E|\}$. Sehingga pada pelabelan sekuensial untuk graf pohon ini tidak diperbolehkan ada label yang berulang, meskipun $|V| = |E| + 1$. Khusus untuk graf caterpillar dan graf firecracker, pelabelan yang digunakan adalah pemetaan injektif $\lambda: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ sehingga bobot busur $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$ (mod $|E|$) menghasilkan bobot busur yang berbeda $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Meskipun dalam modulo $|E|$, 0 dan $|E|$ keduanya bernilai sama, akan tetapi dalam pelabelannya dituliskan secara berbeda (Galian, 2009).

Pelabelan harmonis yang digunakan dalam tesis ini mengikuti definisi yang digunakan oleh Graham dan Sloan. Karena label-label busur merupakan elemen $\mathbb{Z}_{|E|}$ dan berbeda maka $\{w(xy): xy \in E\} = \mathbb{Z}_{|E|} = \{0, 1, 2, \dots, |E| - 1\}$ (Graham & Sloane, 1980). Untuk $|E| < |V|$ label boleh berulang sebanyak $|V| - |E| + 1$ kali.

Pada Gambar 2.6 ditunjukkan contoh dari graf lingkaran dengan banyak simpul 5 yang merupakan graf harmonis. Perhatikan bahwa label dari tiap simpulnya berbeda dan label busurnya adalah {0,1,2,3,4}.



Gambar 2.6 Pelabelan harmonis pada C_5

Tidak mudah untuk menemukan rumus umum dari pelabelan harmonis. Oleh karena itu beberapa pendekatan dilakukan seperti mencari rumus umum pelabelan harmonis untuk kelas-kelas graf tertentu.

R.E. L. Aldred dan B. D. McKay dalam Gallian (2009) menemukan bahwa setiap graf pohon dengan jumlah simpul kurang dari 26 adalah graf harmonis. R. L. Graham and N. J. A. Sloane juga menunjukkan bahwa graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil, graf komplit K_n dengan $n \leq 4$, dan Graf n kubus $K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$ merupakan graf harmonis (Graham & Sloane, 1980). Graham dan Sloane juga membuktikan bahwa graf roda *Wn*, dan graf caterpillar adalah harmonis, sedangkan graf lingkaran *Cn* adalah harmonis jika dan hanya jika $n \equiv 1, 3 \pmod 4$. M.Z.

Youssef menunjukkan bahwa $nG = G \cup G \cup ... \cup G$ dengan n ganjil dan G harmonis juga merupakan graf harmonis (Youssef, 2003).

Pada bab selanjutnya, pelabelan caterpillar yang sudah diketahui akan diperluas menjadi pelabelan harmonis pada graf firecracker. Pada graf firecracker, simpul-simpul diberi label dengan {0, 1, …, |E|-1}, dengan bobot busur yang diinduksi adalah $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) \pmod{|E|}$. Pelabelan dibatasi untuk graf caterpillar dan firecracker yang teratur. .

BAB 3
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF CATERPILLAR DAN GRAF FIRECRACKER

Dalam bab ini diberikan konstruksi pelabelan graf harmonis untuk graf caterpillar dan graf firecracker teratur, yang diperoleh dari pemindahan atau penambahan busur-busur pada graf caterpillar, serta konstruksi pelabelan graf harmonis untuk graf dari hasil gabungan masing-masing graf. Pelabelan harmonis pada graf caterpillar dan graf firecracker teratur yang digunakan dalam bab ini adalah pemetaan injektif dari V ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga setiap busur menghasilkan label yang berbeda dengan bobot busur anggota $\mathbb{Z}_{|E|}$. Pada Subbab 3.1 pembahasan dimulai dengan pemberian konstruksi pelabelan harmonis pada graf caterpillar, pada Subbab 3.2 diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada graf dari hasil gabungan graf caterpillar kemudian pada Subbab 3.3 diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada graf firecracker teratur, pada Subbab 3.4 diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada graf dari hasil gabungan graf firecracker teratur.

3.1 Pelabelan Harmonis pada Graf Caterpillar

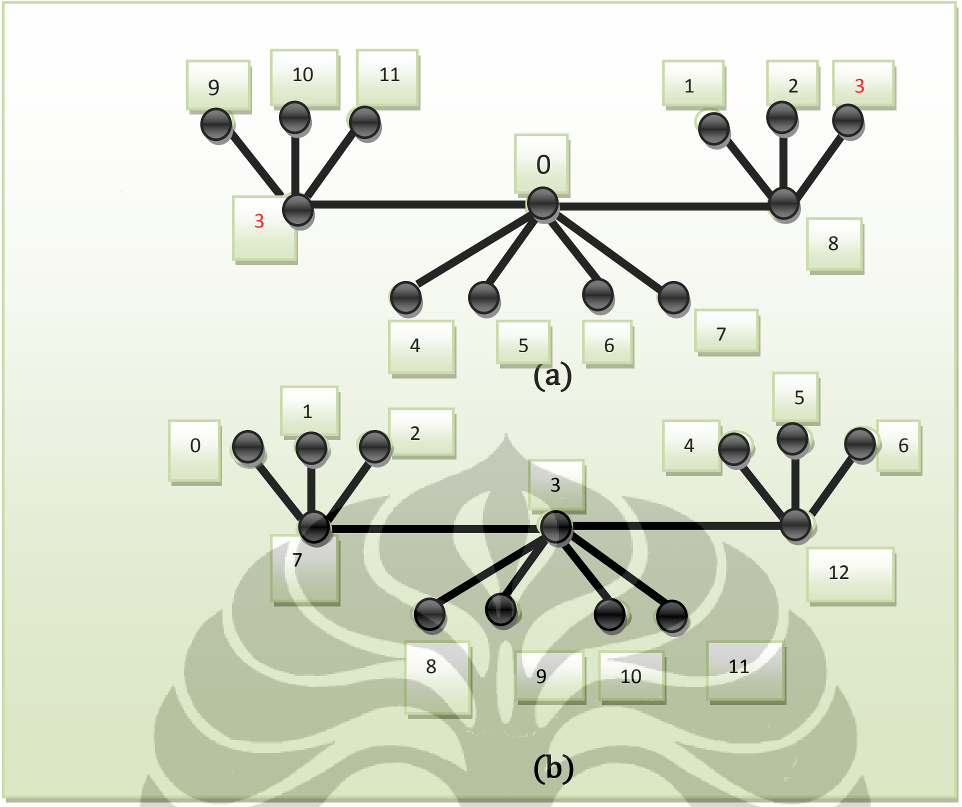
Graf caterpillar $S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}$ adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah simpul luar berderajat satu pada simpul-simpul dari graf lintasan P_n. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul pusat tersebut disebut ***backbone*** pada graf caterpillar. Graf caterpillar memiliki himpunan simpul $V\left(S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}\right) = \{c_i : 0 \leq i \leq t-1\} \cup \left\{v_i^j : 0 \leq i \leq t-1, 1 \leq j \leq r_i\right\}$ dan himpunan busur $E\left(S_{r_1,r_2,\ldots,r_t}\right) = \{c_i c_{i+1} : 0 \leq i \leq t-1\} \cup \left\{c_i v_i^j : 0 \leq i \leq t-1, 1 \leq j \leq r_i\right\}$, dengan c_i menyatakan simpul pusat dan v_i^j menyatakan simpul luar ke-j pada simpul pusat ke-i.

Konstruksi pelabelan graf caterpillar baik harmonis maupun sekuensial telah diberikan oleh Graham dan Sloane (1980) dan Asih (2009). Graham dan Sloane mengkonstruksi pelabelan harmonis dengan cara sebagai berikut :

"Misalkan G sebarang graf caterpillar, yaitu sebuah pohon dengan satu lintasan (cabang) pada busurnya, maka untuk memberi label G secara harmonis terlebih dahulu dibuat graf bipartit dari graf caterpillar tersebut. Sebut l *sebagai banyaknya simpul dibagian kiri dan* r *sebagai banyaknya simpul dibagian kanan. Secara umum jumlah busurnya adalah* $|E| = l + r - 1$. *Dari caterpillar yang ada dapat dilihat jumlah busurnya kemudian diklasifikasi dalam dua kasus. Bila* r *ganjil maka nilai* a *ditentukan dengan* $2a = r - 1$ *, dan bila* l *ganjil maka nilai* a *ditentukan dengan* $2a = 1 - l$. *Pelabelan pada simpul sebelah kiri dilabel dengan* $(a, a + 1, \ldots, a + l - 1)$, *dan pelabelan pada simpul sebelah kanan dilabel dengan* $(-a, 1 - a, \ldots, r - 1 - a)$, *dimana* $a \in Z_{|E|}$ *dan himpunan seluruh pelabelan busurnya adalah* $\{0,1,2, \ldots, |E| - 1\}$*."*

Namun Asih (2009) dalam skripsinya membuktikan konstruksi pelabelan harmonis dengan pelabelan yang sedikit berbeda dari pembuktian terdahulu. Pembuktian konstruksi yang diberikan merupakan pelabelan harmonis yang dilakukan dengan terlebih dahulu menunjukkan konstruksi tersebut memenuhi pelabelan sekuensial, karena setiap pelabelan sekuensial adalah pelabelan harmonis. Menurut Galian (2009) pada graf pohon, Chang, Hsu, dan Rogers membolehkan 2 simpul diberi label yang sama, sedangkan Grace memberi label simpul dengan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$, sehingga pada pelabelan sekuensial untuk graf pohon ini tidak diperbolehkan ada label yang berulang, meskipun $|V| = |E| + 1$. Khusus untuk graf caterpillar dan graf firecracker, pelabelan yang digunakan adalah pemetaan injektif $\lambda: V \to \{0, 1, 2, \ldots, |E|\}$ sehingga bobot busur $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) \pmod{|E|}$ menghasilkan bobot busur yang berbeda $\{0, 1, 2, \ldots, |E|\}$. Meskipun dalam modulo $|E|$, 0 dan $|E|$ keduanya bernilai sama, akan tetapi dalam pelabelannya dituliskan secara berbeda. Pada tesis ini, pelabelan yang digunakan mengikuti definisi yang dijelaskan oleh Graham dan Sloane, dengan membolehkan label simpul berulang untuk graf pohon maupun gabungan garaf pohon.

Pada Gambar 3.1 diberikan contoh hasil pelabelan harmonis pada graf caterpilar yang sama berdasarkan dua konstruksi yang sedikit berbeda, yaitu konstruksi yang diberikan oleh Graham dan Sloane (gambar 3.1.a) dan oleh Asih (gambar 3.1.b).



Gambar 3.1. Contoh dua pelabelan harmonis pada graf caterpillar yang sama

Pada Gambar 3.1 di atas, gambar 3.1.a memiliki label $\{0, 1,2,\ldots,11\}$ dan pada gambar 3.1.b memiliki label $\{0,1,2,\ldots,12\}$. Tetapi jika dilihat dengan mod $|E|$ maka bobot pelabelan akan menjadi sama.

Untuk membantu pembuktian teorema-teorema pada bab ini, pembuktian konstruksi pelabelan harmonis diberikan kembali dengan pelabelan yang sedikit berbeda dari pembuktian terdahulu. Dalam konstruksi ini sedikit dilakukan modifikasi pelabelan harmonis untuk graf caterpillar oleh Graham dan Sloan agar berlaku untuk semua kondisi, karena bentuk yang telah dibuktikan dalam makalahnya tidak menyajikan cara untuk melabel graf caterpillar untuk jumlah r genap dan ℓ genap. Sedangkan pada gabungan sejumlah genap graf caterpillar teratur yang isomorfis, pasti akan menghasilkan r total (R) genap dan ℓ total (L) genap.

Teorema 3.1. [Wirnadian dkk, 2010]

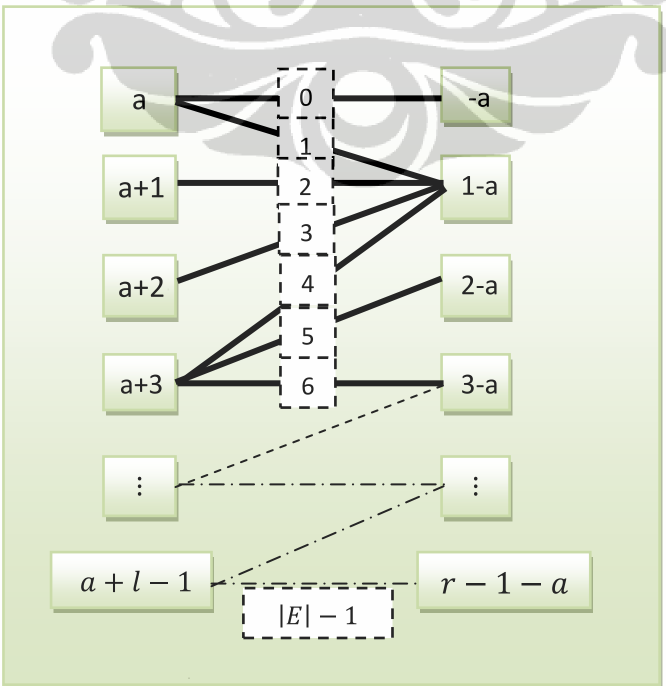
Setiap graf caterpillar adalah harmonis.

Bukti.

Gambarkan graf caterpillar menjadi graf bipartit. Sebut L adalah himpunan simpul dibagian kiri dengan $l = |L|$ dan R adalah himpunan simpul dibagian kanan dengan $r = |R|$. Secara umum jumlah busurnya adalah $|E| = l + r - 1$. Dari caterpillar yang ada dapat dilihat jumlah busurnya kemudian klasifikasi jumlah busur ($|E|$) dalam dua kasus

1. Bila $|E|$ genap maka r memiliki dua kemungkinan
   a. Bila r ganjil dan nilai l genap maka a ditentukan dengan $2a = r - 1$
   b. Bila $r$genap dan nilai l ganjil maka a ditentukan dengan $2a = r$
2. Bilai $|E|$ ganjil maka r memiliki dua kemungkinan
   a. Bila r ganjil dan l ganjil maka a ditentukan dengan $2a = r - 1$
   b. Bila r genap dan l genap maka a ditentukan dengan $2a = r$

Pelabelan pada simpul sebelah kiri dilabel dengan $(a, a+1, \dots, a+l-1)$, pelabelan pada simpul sebelah kanan dilabel dengan $(-a, 1-a, \dots, r-1-a)$, dimana $a \in Z_{|E|}$ sehingga himpunan seluruh pelabelan busurnya adalah $\{0,1,2,\dots,|E|-1\}$, dan didapatkan graf harmonis. Konstruksi pada Gambar 3.2 berlaku untuk semua kasus genap atau ganjil.



Gambar 3.2. Konstruksi pelabelan harmonis pada graf caterpillar

Untuk graf pohon, khususnya graf caterpillar satu label boleh digunakan untuk dua simpul. Karena pada graf caterpillar $|E| < |V|$ (yaitu, $|V| = |E| + 1$) , maka label boleh berulang sebanyak $|V| - |E| + 1 = |E| + 1 - |E| + 1 = 2$ kali (sepasang) .■

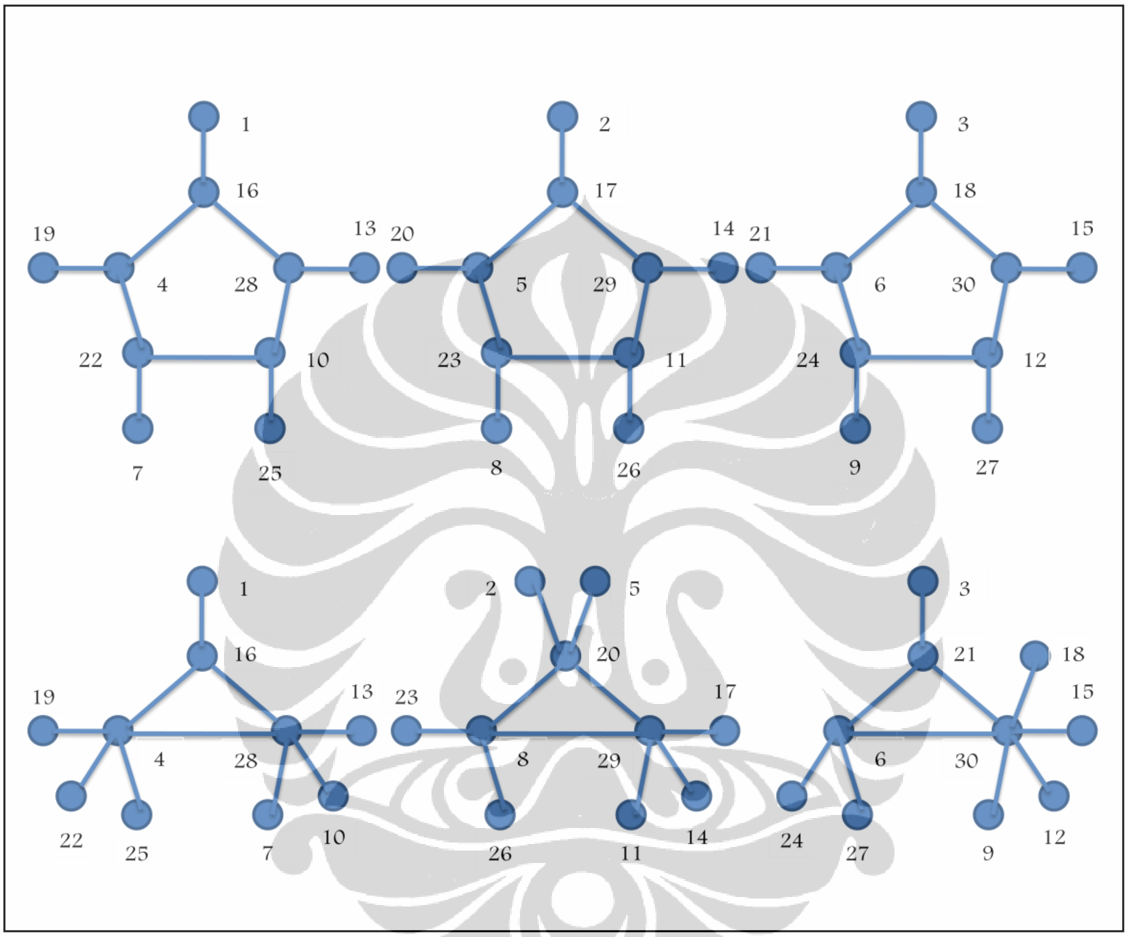
Sebagai catatan, label $-a$ dalam mod $|E|$ akan tetap dapat dipresentasikan sebagai bilangan bulat positif. Sebagai contoh, $-2 \text{ (mod 5)} = 3$.

3.2 Pelabelan Harmonis pada Gabungan Graf Caterpillar

Operasi gabungan (Harary, 1994) pada graf $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ menghasilkan graf G dengan $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ dan $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Konstruksi pelabelan harmonis pada hasil dari gabungan graf harmonis pernah dibahas oleh Yousef (2003). Yousef membuktikan bahwa graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis yang isomorfis (salinan dari sejumlah ganjil graf harmonis) adalah harmonis. Dua graf G dan G^* disebut isomorfis, apabila terdapat pemetaan bijektif f dari V(G) ke V(G^*) dengan sifat jika $xy \in E(G)$ maka $f(x)f(y) \in E(G^*)$. Untuk memperumum hasil tersebut, Gilang menunjukkan bahwa graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis dengan jumlah busur yang sama (tidak harus isomorfik) adalah graf harmonis (Gilang, 2009).

Namun pada bab ini pembuktian konstruksi pelabelan harmonis pada hasil dari gabungan graf caterpillar diberikan kembali dengan pelabelan yang berbeda dari pembuktian terdahulu. Hal ini disebabkan konstruksi pelabelan harmonis pada hasil dari gabungan graf harmonis yang diberikan Yousef (2003) dan Gilang (2009) dalam makalahnya hanya untuk graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis yang isomorfis dan sejumlah ganjil graf harmonis dengan jumlah busur yang sama, sedangkan dalam bab ini, diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada hasil gabungan dari n graf caterpillar secara umum, tidak hanya untuk graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis dan sejumlah graf-graf harmonis dengan jumlah busur yang sama.

Pada Gambar 3.3 diberikan contoh hasil pelabelan harmonis pada graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis yang isomorfis (salinan dari sejumlah ganjil graf harmonis) oleh Yousef (2003) dan hasil pelabelan harmonis pada graf gabungan dari sejumlah ganjil graf-graf harmonis dengan jumlah busur yang sama (tidak harus isomorfik) oleh Gilang (2009). Konstruksi yang pertama diberikan oleh Yousef (gambar atas) dan yang kedua oleh Gilang (gambar bawah).



Gambar 3.3 Contoh pelabelan harmonis pada gabungan dari sejumlah ganjil graf harmonis yang isomorfis dan pada gabungan dari sejumlah ganjil graf harmonis dengan jumlah busur yang sama.

Pada Teorema 3.2 diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada gabungan *n* graf caterpillar sebarang beserta dengan buktinya.

Teorema 3.2. [Wirnadian dkk, 2010]

Gabungan graf caterpillar adalah harmonis

Bukti :

Gambarkan gabungan n graf caterpillar sebagai sebuah graf bipartit, seperti graf caterpillar awal yang telah dibuat menjadi bipartit. Dengan menyatakan $|L| = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ sebagai jumlah total simpul pada bagian kiri graf caterpillar yang akan dilabel. Definisikan $|R| = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ sebagai jumlah total dari simpul pada bagian kanan graf caterpillar yang akan dilabel, dan $|E| = |E|_1 + |E|_2 + \cdots + |E|_n$ adalah jumlah total busur pada graf caterpillar yang akan dilabel. Untuk menentukan nilai a pada graf gabungannya nilai R diklasifikasi dalam dua kasus

a. Bila $|R|$ ganjil maka nilai a ditentukan dengan $2a = |R| - 1$
b. Bila $|R|$ genap maka nilai a ditentukan dengan $2a = |R|$

Pelabelan pada himpunan simpul sebelah kiri (L) dilabel dengan :

$(a, a+1, \ldots, (\boldsymbol{a + l_1 - 1}))$ untuk l_1

$((\boldsymbol{a} + l_1 - \boldsymbol{1}), (a + l_1 - 1) + 1, \ldots, (a + l_1 + l_2 - 2)$ untuk l_2

$\vdots$

$\Big(((a + l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1}) - (n-1)), \Big(((a + l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1}) - (n-1)) - 1\Big), \ldots, ((a + l_1 + l_2 + \cdots + l_n) - n)\Big)$ untuk l_n

Pelabelan pada himpunan simpul sebelah kanan (R) dilabel dengan :

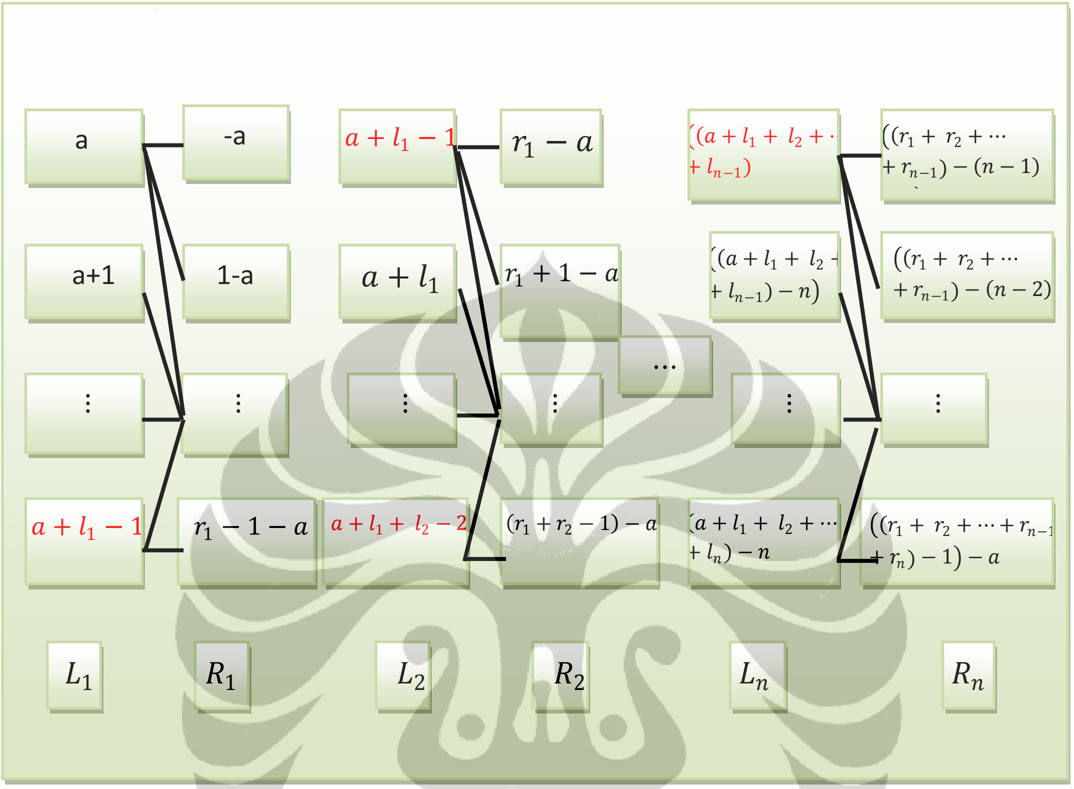
$(-a, 1-a, \ldots, ((r_1 - 1) - a))$ untuk r_1

$((r_1 - a), \left(((r_1 + 1) - a)\right), \ldots, (((r_1 + r_2 - 1) - a))$ untuk r_2

$\vdots$

$\Big(((r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}) - (n-1) - a), \Big(((r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}) - (n-1) - a) + 1\Big), \ldots, \Big(((r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n) - 1) - a\Big)\Big)$ untuk r_n

dimana $a \in Z_{|E|}$ sehingga himpunan seluruh pelabelan busurnya adalah $\{0, 1, 2, \ldots, |E| - 1\}$



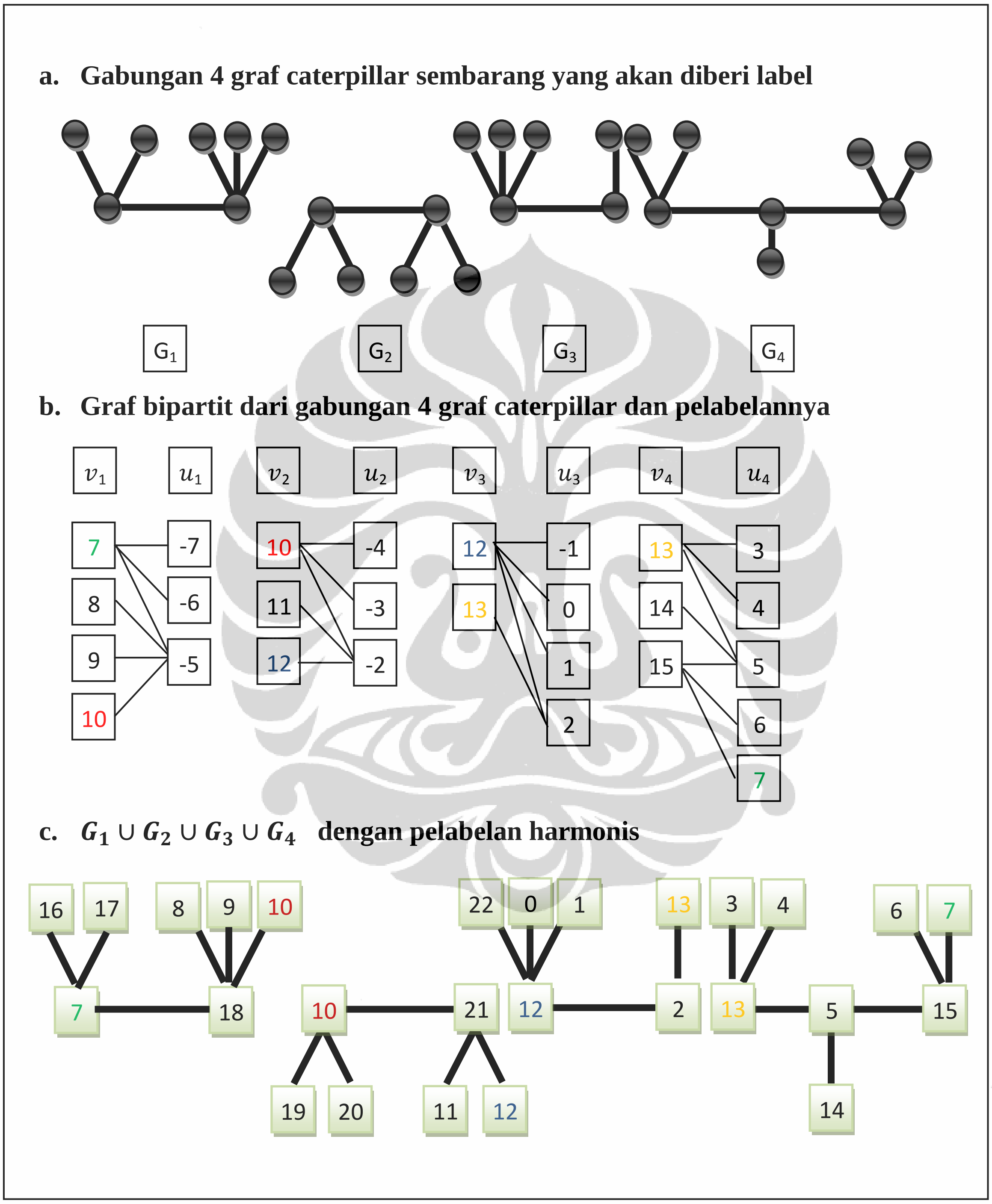
Gambar 3.4 Konstruksi pelabelan harmonis pada graf hasil gabungan graf caterpillar sebarang

Karena pada setiap graf caterpillar $|E| < |V|$ (yaitu, $|V| = |E| + 1$) , dan karena $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, maka untuk gabungan n graf caterpillar menghasilkan jumlah simpul sebagai berikut :

$$\begin{aligned} |V| &= |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| \\ &= (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) + \cdots + (|E_n| + 1) \\ &= (|E_1| + |E_1| + \cdots + |E_1|) + n \\ &= |E| + n \end{aligned}$$

Karena pelabelan harmonis pada penulisan ini menggunakan pemetaan injektif dari V ke $Z_{|E|}$ dan $|V| = |E| + n$, dan satu label hanya boleh digunakan pada dua simpul, maka akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang). Jadi, untuk gabungan n graf caterpillar label boleh berulang sebanyak $|V| - |E| + n = |E| + n - |E| + n = 2n$ kali (n pasang) .■

Untuk memperjelas konstruksi pelabelan harmonis pada graf gabungan n graf caterpillar sembarang, maka berikut ini diberikan gambar yang merupakan contoh penggunaan konstruksi pelabelan tersebut.



Gambar 3.5. Pelabelan harmonis pada graf hasil gabungan n graf caterpillar sebarang

3.3 Pelabelan Harmonis pada Graf Firecracker Teratur

Konstruksi pelabelan graf firecracker teratur harmonis telah diberikan oleh Asih (2009). Graf firecracker didapatkan dengan menghubungkan satu simpul luar dari suatu barisan graf bintang S_{r_i} secara berurutan. Misalkan c_i adalah simpul pusat dari S_{r_i}, v_i^j adalah simpul luar ke j, dari S_{r_i} dan v_i^* adalah simpul pada lintasan *backbone* dari firecracker dengan $j = 1, 2, 3, \dots, r$ dan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Perlu diingat, firecracker teratur menandakan bahwa jumlah setiap simpul luarnya sama, sehingga $r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = r$.

Asih (2009), memberikan label simpul-simpul pada graf firecracker teratur, dengan banyak simpul luar pada setiap simpul pusat adalah r, sebagai berikut.

Label simpul-simpul pusat dengan

$$f(c_i) = \begin{cases} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{i}{2}\right)(r+1) + r\,, & \text{Untuk } i \text{ genap} \\ \left(\frac{i+1}{2}\right) r + \frac{i-1}{2}\,, & \text{Untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Label simpul-simpul luar dengan

$$f(v_i^j) = \begin{cases} \frac{i}{2}(r+1) + j - 1\,, & \text{Untuk } i \text{ genap} \\ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{i+1}{2}\right)(r+1) + j - 1\,, & \text{Untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Selanjutnya graf caterpillar teratur harmonis ini dapat ditransformasikan menjadi graf firecracker teratur harmonis. Asih mebuktikan graf caterpillar teratur harmonis dengan menggunakan Algoritma 1 sebagai berikut.

Algoritma 1

1. Pindahkan busur $v_i^* v_{i+1}^*$ ke $c_i c_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ untuk mendapatkan graf caterpillar.
2. Beri label pada caterpillar dengan pelabelan harmonis yang diberikan pada (3.1) sedemikian sehingga untuk semua simpul luar dari c_i, jika v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i maka v_{i+1}^* memiliki label terbesar dari label pada simpul-simpul luar dari simpul-simpul dalam ke-i.
3. Pindahkan kembali busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Untuk menjamin bahwa pemindahan busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$ pada langkah ke-3 tetap menghasilkan pelabelan harmonis pada graf firecracker, maka harus terpenuhi sifat,

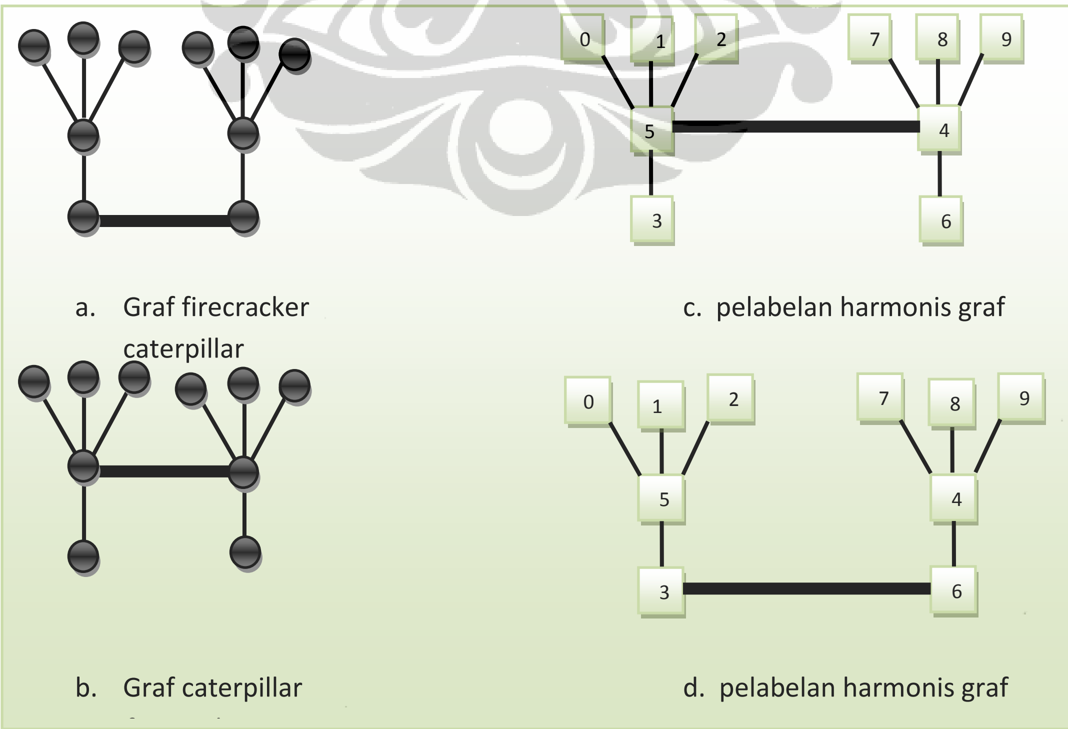
$$f(c_i) + f(c_{i+1}) = f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*).$$

Tanpa menghilangkan keumuman, anggap i genap, maka $i+1$ ganjil dan v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i . Maka pada simpul ke-i, j bernilai 1 dan pada simpul dalam ke-$(i+1), j$ bernilai r. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) &= \frac{i}{2}(r+1) + \left(\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)\right)(r+1) + r - 1\right) \\ &= \frac{i}{2}r + \frac{i}{2} + \left[\frac{n}{2}\right]r + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)r + \left[\frac{n}{2}\right] + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right) + r - 1 \\ &= \frac{i}{2}r + \left[\frac{n}{2}\right]r + \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{i}{2} + r + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)r + \frac{(i+1)+1-2}{2} \\ &= \left(\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left(\frac{i}{2}\right)\right)(r+1) + r\right) + \left(\left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)r + \frac{(i+1)-1}{2}\right). \end{aligned}$$

didapat $f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) = f(c_i) + f(c_{i+1})$

Jadi graf firecracker teratur adalah graf harmonis. ■



a. Graf firecracker caterpillar

c. pelabelan harmonis graf

b. Graf caterpillar

d. pelabelan harmonis graf

Gambar 3.6. Contoh pelabelan harmonis pada graf firecracker teratur yang diperoleh dari transformasi graf caterpillar teratur (oleh Asih)

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa konstruksi pelabelan harmonis graf caterpillar teratur pada Teorema 3.1 dapat digunakan untuk membangun konstruksi pelabelan harmonis pada graf firecracker teratur sehingga pelabelannya sedikit berbeda, tetapi langkah-langkah yang digunakan sama pada setiap tahapan. Pada graf firecracker, konstruksi pelabelan diperoleh dengan memindahkan busur-busur *backbone* pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar tertentu pada graf firecracker sedemikian sehingga bobot busur-busur sebelum dan setelah dipindahkan bernilai sama. Namun pada bab ini hanya diberikan konstruksi pelabelan harmonis untuk graf firecracker teratur yang diperoleh dari transformasi graf caterpillar teratur. Selanjutnya graf caterpillar teratur harmonis ini dapat ditransformasikan menjadi graf firecracker teratur harmonis.

Teorema 3.3.

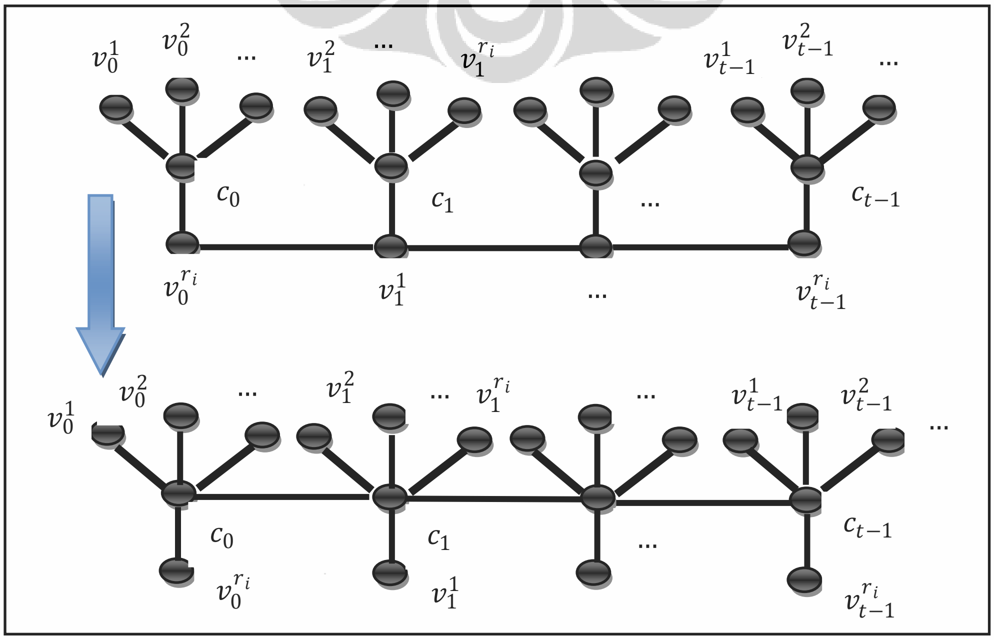
Graf firecracker teratur adalah harmonis.

Bukti.

Label simpul-simpul pada graf firecracker teratur dengan menggunakan algoritma 2.

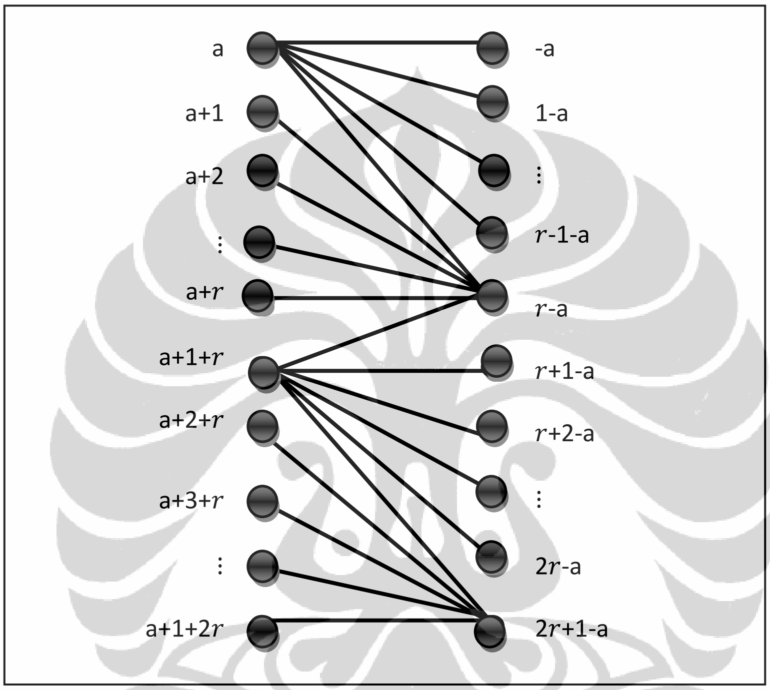
Algoritma 2

1. Pindahkan busur $v_i^* v_{i+1}^*$ ke $c_i c_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ untuk mendapatkan graf caterpillar.



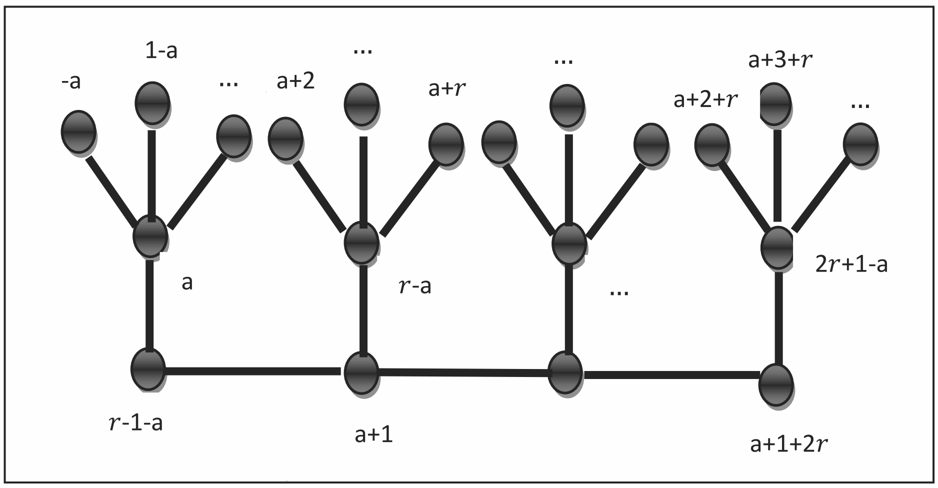
Gambar 3.7. Contoh graf caterpillar teratur dari graf firecracker teratur dengan himpunan simpulnya.

2. Beri label pada caterpillar dengan pelabelan harmonis yang diberikan pada (3.1) sedemikian sehingga untuk semua simpul luar dari c_i, jika v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i maka v_{i+1}^* memiliki label terbesar dari label pada simpul-simpul luar dari simpul-simpul dalam ke-i. Jumlah simpul luar pada setiap simpul pusat adalah r.



Gambar 3.8. Konstruksi pelabelan harmonis pada graf caterpillar teratur

3. Pindahkan kembali busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.



Gambar 3.9. Graf firecracker dengan pelabelan harmonis secara umum

Untuk menjamin bahwa pemindahan busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$ pada langkah ke-3 tetap menghasilkan pelabelan harmonis pada graf firecracker, maka harus terpenuhi sifat,

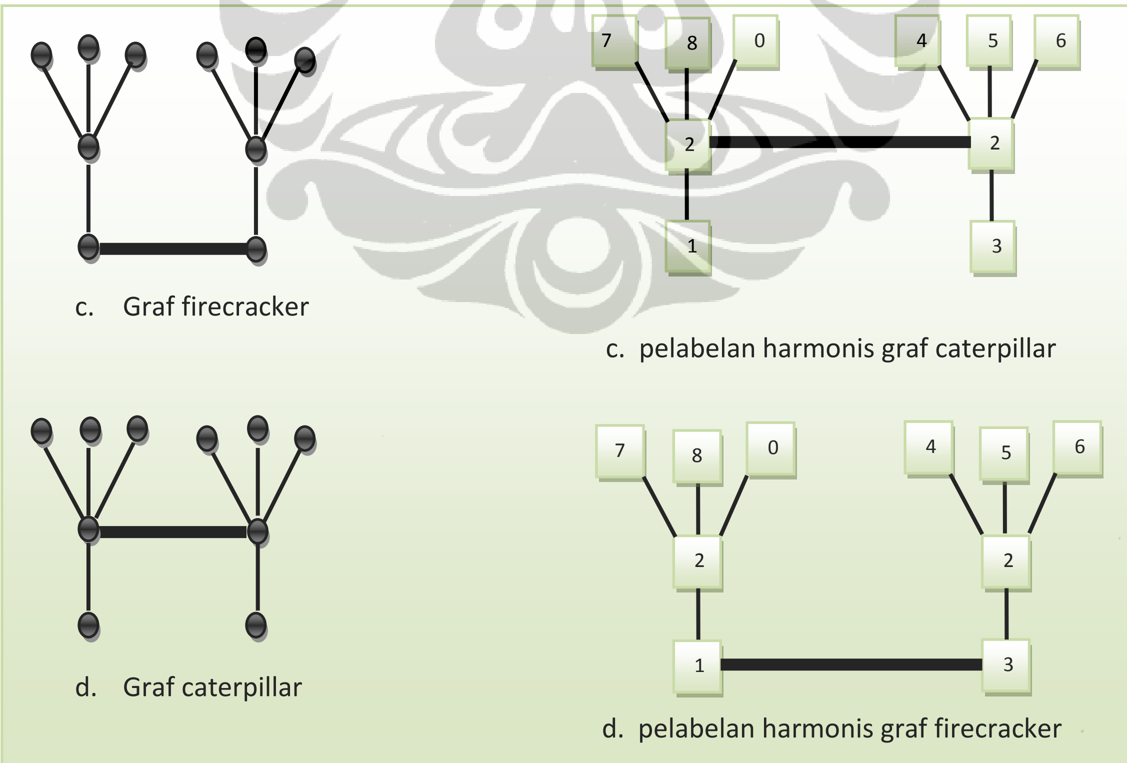
$$f(c_i) + f(c_{i+1}) = f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*).$$

Tanpa menghilangkan keumuman, anggap i genap, maka $i+1$ ganjil dan v_i^* memiliki label terbesar dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i . Maka pada simpul ke-i, j bernilai r dan pada simpul dalam ke-$(i+1), j$ bernilai 1. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) &= \left(\left(\frac{i}{2}r + r\right) + \left(\frac{i}{2} - 1\right) - a\right) + \left(a + \frac{1}{2}r + \left(\frac{i}{2} + 1\right)\right) \\ &= \frac{i}{2}r + r + \frac{i}{2} - 1 - a + a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2} + 1 \\ &= \frac{i}{2}r + r + \frac{i}{2} - a + a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2}\right) + \left(\left(\frac{i}{2}r + r\right) + \frac{i}{2} - a\right). \end{aligned}$$

didapat $\quad f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) = f(c_i) + f(c_{i+1})$

Jadi graf firecracker teratur adalah graf harmonis. ■



Gambar 3.10. Contoh pelabelan harmonis pada graf firecracker yang diperoleh dari transformasi graf caterpillar

Pada Gambar 3.10 diberikan contoh pelabelan harmonis pada graf firecracker yang diperoleh dari transformasi graf caterpillar dengan $|E| = 9$ dan $|V| = 10$. Pada Gambar 3. 5a diberikan graf firecracker, pada Gambar 3.5b diberikan graf caterpillar yang diperoleh dengan memindahkan backbone pada graf firecracker ke simpul-simpul pusat, pada Gambar 3.5c diberikan graf caterpillar yang diberi pelabelan harmonis (3.1), dan pada Gambar 3.5d diberikan graf firecracker yang diperoleh dengan memindahkan *backbone* pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat. Busur-busur yang bercetak tebal menandakan busur-busur yang dipindahkan dari simpul pada graf firecracker ke simpul pada graf caterpillar dan sebaliknya.

3.4 Pelabelan Harmonis pada Gabungan Graf Firecracker Teratur

Konstruksi pelabelan harmonis pada gabungan graf firecracker teratur dapat dibangun dari gabungan graf caterpillar teratur. Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa konstruksi pelabelan harmonis pada gabungan graf caterpillar teratur pada Teorema 3.2 dapat digunakan untuk membangun konstruksi pelabelan harmonis pada gabungan graf firecracker teratur. Pada gabungan graf firecracker, konstruksi pelabelan diperoleh dengan memindahkan busur-busur *backbone* pada masing-masing graf caterpillar ke salah satu simpul luar tertentu pada masing-masing graf firecracker sedemikian sehingga bobot busur-busur sebelum dan setelah dipindahkan bernilai sama. Namun pada tesis ini hanya diberikan konstruksi pelabelan harmonis untuk gabungan graf firecracker teratur yang diperoleh dari transformasi gabungan graf caterpillar teratur. Selanjutnya graf caterpillar teratur harmonis ini dapat ditransformasikan menjadi graf firecracker teratur harmonis.

Teorema 3.4.

Gabungan graf firecracker teratur adalah harmonis.

Bukti.

Perlu diingat, firecracker teratur menandakan bahwa jumlah setiap simpul luarnya sama, sehingga $r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = r$. Label simpul-simpul pada gabungan graf firecracker dengan menggunakan Algoritma 3.

Algoritma 3.

1. Pindahkan setiap busur $v_i^* v_{i+1}^*$ ke $c_i c_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ untuk mendapatkan graf caterpillar.
2. Beri label pada gabungan graf caterpillar dengan pelabelan harmonis yang diberikan pada (3.2) sedemikian sehingga untuk semua simpul luar dari c_i, jika v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i maka v_{i+1}^* memiliki label terbesar dari label pada simpul-simpul luar dari simpul-simpul dalam ke-i.
3. Pindahkan kembali setiap busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Untuk menjamin bahwa pemindahan busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$ pada langkah ke-3 tetap menghasilkan pelabelan harmonis pada graf firecracker, maka harus terpenuhi sifat,

$$f(c_i) + f(c_{i+1}) = f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*).$$

Tanpa menghilangkan keumuman, anggap i genap, maka $i+1$ ganjil dan v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i . Maka pada simpul ke-i, j bernilai 1 dan pada simpul dalam ke-$(i+1), j$ bernilai r. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) &= \left(\left(\frac{i}{2}r + r\right) + \left(\frac{i}{2} - 1\right) - a\right) + \left(a + \frac{1}{2}r + \left(\frac{i}{2} + 1\right)\right) \\ &= \tfrac{i}{2}r + r + \tfrac{i}{2} - 1 - a + a + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{i}{2} + 1 \\ &= \tfrac{i}{2}r + r + \tfrac{i}{2} - a + a + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{i}{2} \\ &= \left(a + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{i}{2}\right) + \left(\left(\tfrac{i}{2}r + r\right) + \tfrac{i}{2} - a\right). \end{aligned}$$

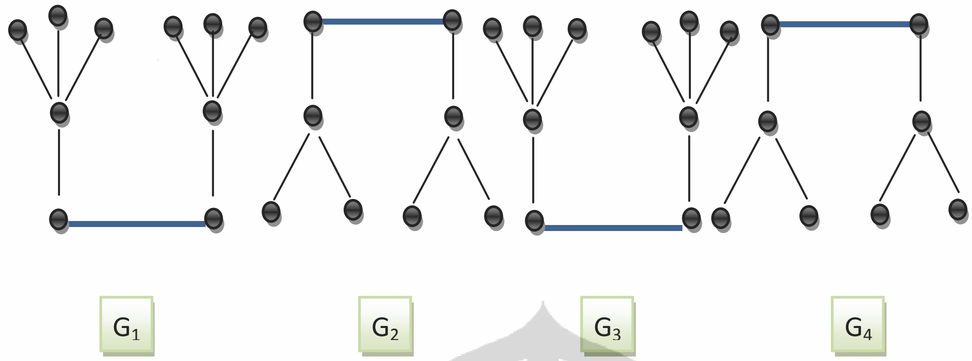
didapat

$$f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

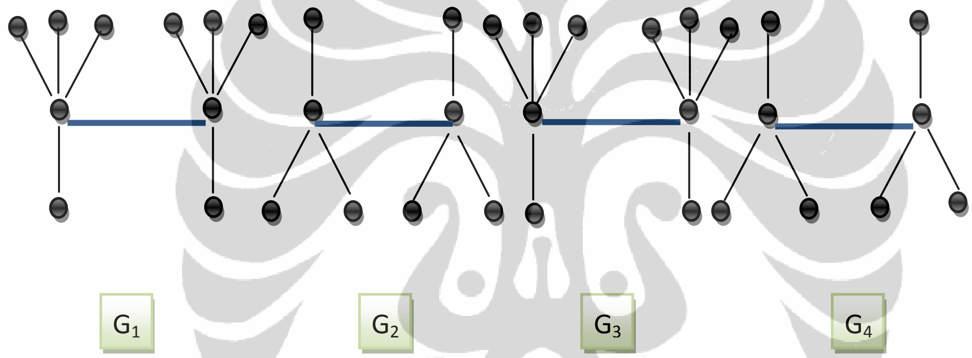
Jadi, gabungan graf firecracker teratur adalah graf harmonis. ■

Untuk memperjelas konstruksi pelabelan harmonis pada graf gabungan n graf firecracker teratur, maka berikut ini diberikan gambar yang merupakan contoh penggunaan konstruksi pelabelan tersebut.

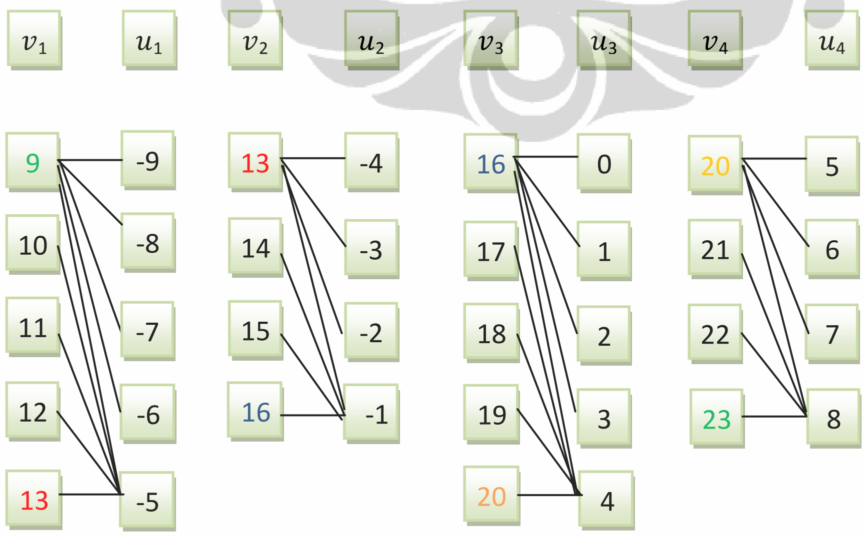
a. Gabungan 4 graf firecracker teratur yang akan diberi label



b. Gabungan 4 graf caterpillar teratur yang akan diberi label

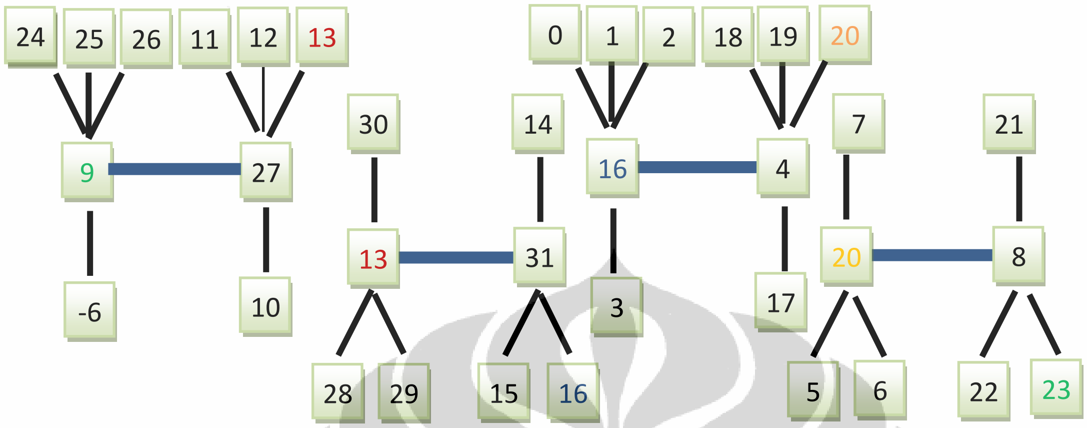


c. Graf bipartit dari gabungan 4 graf caterpillar dan pelabelannya

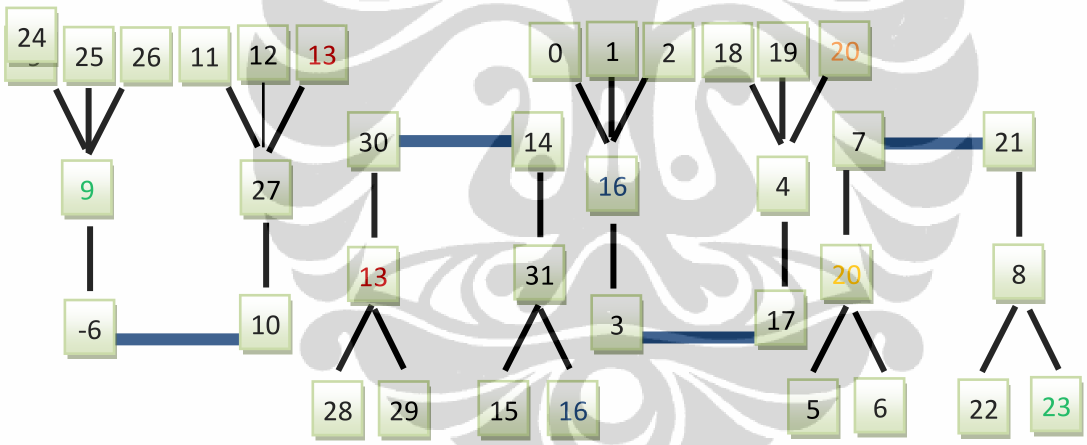


(Lanjutan)

d. Gabungan graf caterpillar dengan pelabelan harmonis



e. Gabungan graf firecracker dengan pelabelan harmonis



Gambar 3.11. Contoh pelabelan harmonis pada gabungan 4 graf firecracker teratur yang diperoleh dari transformasi graf caterpillar teratur

Pada Gambar 3.11.a diberikan gabungan 4 graf firecracker, pada Gambar 3.11.b diberikan gabungan 4 graf caterpillar yang diperoleh dengan memindahkan backbone pada graf firecracker ke simpul-simpul pusat, pada Gambar 3.11.c diberikan graf bipartit dari gabungan 4 graf caterpillar, 3.11.d diberikan graf caterpillar yang diberi pelabelan harmonis (3.1), dan pada Gambar 3.11.e diberikan graf firecracker yang diperoleh dengan memindahkan *backbone* pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat. Busur-busur yang biru dan bercetak tebal menandakan busur-busur yang dipindahkan dari simpul pada graf firecracker ke simpul pada graf caterpillar dan sebaliknya.

Karena pada setiap graf firecracker $|E| < |V|$ (yaitu, $|V| = |E| + 1$) , dan karena $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, maka untuk gabungan n graf firecracker menghasilkan jumlah simpul sebagai berikut :

$$\begin{aligned}|V| &= |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| \\ &= (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) + \cdots + (|E_n| + 1) \\ &= (|E_1| + |E_1| + \cdots + |E_1|) + n \\ &= |E| + n\end{aligned}$$

Karena pelabelan harmonis pada penulisan ini menggunakan pemetaan injektif dari V ke $Z_{|E|}$ dan $|V| = |E| + n,$ maka akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang). Jadi, untuk gabungan n graf firecracker label boleh berulang sebanyak $|V| - |E| + n = |E| + n - |E| + n = 2n$ kali (n pasang) .

Pada bab selanjutnya, pelabelan harmonis pada gabungan graf caterpillar dan pelabelan harmonis pada gabungan graf firecracker diperluas menjadi pelabelan harmonis pada graf hasil kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur. Simpul-simpulnya diberi label dengan $\{0,1,2, \ldots, |E| - 1\}$, dengan bobot busur yang diinduksi adalah $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) \ (mod\ |E|)$. .

BAB 4
PELABELAN HARMONIS PADA KOMBINASI GABUNGAN GRAF CATERPILLAR DAN GRAF FIRECRACKER TERATUR

Dalam bab ini diberikan konstruksi pelabelan graf harmonis untuk graf yang didapatkan dari hasil kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur yang diperoleh dari pemindahan atau penambahan busur-busur pada graf caterpillar teratur, dan ditunjukkan juga bahwa konstruksi pelabelan harmonis gabungan graf caterpillar pada Teorema 3.2 serta konstruksi pelabelan harmonis gabungan graf firecracker teratur pada Teorema 3.4 dapat digunakan untuk membangun konstruksi pelabelan harmonis pada graf hasil kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur yang diperoleh dari pemindahan atau penambahan busur-busur pada graf caterpillar teratur.

Perlu diingat kembali bahwa operasi gabungan pada graf $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ menghasilkan graf G dengan $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ dan $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ dan operasi gabungan beberapa graf dapat juga dikombinasikan dari beberapa jenis graf.

Pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan firecracker teratur yang digunakan dalam bab ini adalah pemetaan injektif dari V ke $\mathbb{Z}_{|\mathrm{E}|}$ sedemikian sehingga setiap busur menghasilkan label yang berbeda dengan bobot busur anggota $\mathbb{Z}_{|\mathrm{E}|}$, dan akan ditunjukkan untuk kombinasi gabungan n graf caterpillar dan graf firecracker teratur yang diperoleh dari pemindahan atau penambahan busur-busur pada graf caterpillar teratur boleh terdapat n pasang label simpul yang sama.

Teorema 4.
Kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur adalah harmonis.

Bukti :
Simpul-simpul pada graf hasil kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur akan diberi label dengan menggunakan Algoritma 4.

Algoritma 4.

1. Pindahkan setiap busur $v_i^* v_{i+1}^*$ ke $c_i c_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ pada setiap graf fiecracker untuk mendapatkan graf caterpillar , sedemikian sehingga semua graf menjadi graf caterpillar.
2. Beri label pada gabungan graf caterpillar dengan pelabelan harmonis yang diberikan pada (3.2) sedemikian sehingga untuk semua simpul luar dari c_i, jika v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-I maka v_{i+1}^* memiliki label terbesar dari label pada simpul-simpul luar dari simpul-simpul dalam ke-i.
3. Pindahkan kembali setiap busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, sehingga kembali kebentuk kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur.

Untuk menjamin bahwa pemindahan busur $c_i c_{i+1}$ ke $v_i^* v_{i+1}^*$ pada langkah ke-3 tetap menghasilkan pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur , maka harus terpenuhi sifat,

$$f(c_i) + f(c_{i+1}) = f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*).$$

Tanpa menghilangkan keumuman, anggap i genap, maka $i+1$ ganjil dan v_i^* memiliki label terkecil dari label pada simpul-simpul luar dari simpul dalam ke-i . Maka pada simpul ke-i, j bernilai 1 dan pada simpul dalam ke-$(i+1), j$ bernilai r. Sehingga diperoleh

$$f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) = \left(\left(\frac{i}{2}r + r\right) + \left(\frac{i}{2} - 1\right) - a\right) + \left(a + \frac{1}{2}r + \left(\frac{i}{2} + 1\right)\right)$$

$$= \frac{i}{2}r + r + \frac{i}{2} - 1 - a + a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2} + 1$$

$$= \frac{i}{2}r + r + \frac{i}{2} - a + a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2}$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}r + \frac{i}{2}\right) + \left(\left(\frac{i}{2}r + r\right) + \frac{i}{2} - a\right).$$

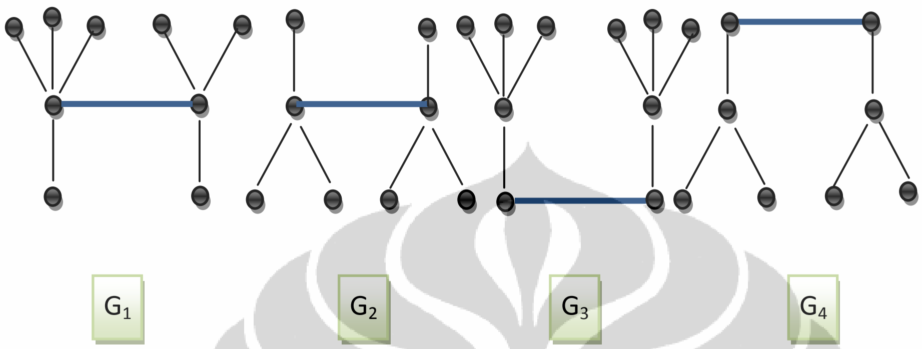
didapat

$$f(v_i^*) + f(v_{i+1}^*) = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

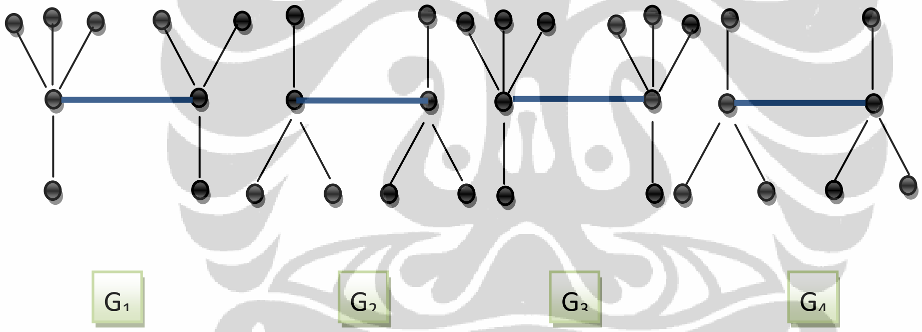
Jadi, kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur adalah graf harmonis. □

Untuk memperjelas konstruksi pelabelan harmonis pada graf hasil kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur, maka berikut ini diberikan gambar yang merupakan contoh penggunaan konstruksi pelabelan tersebut.

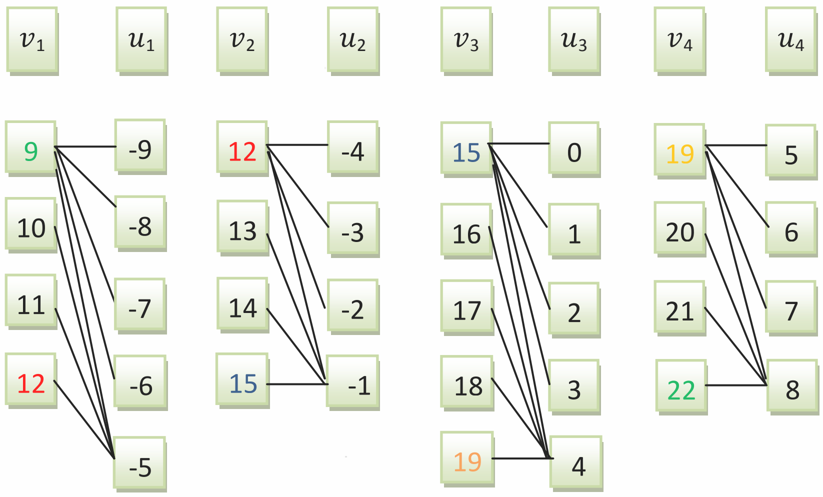
a. Kombinasi Gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur



b. Gabungan graf caterpillar

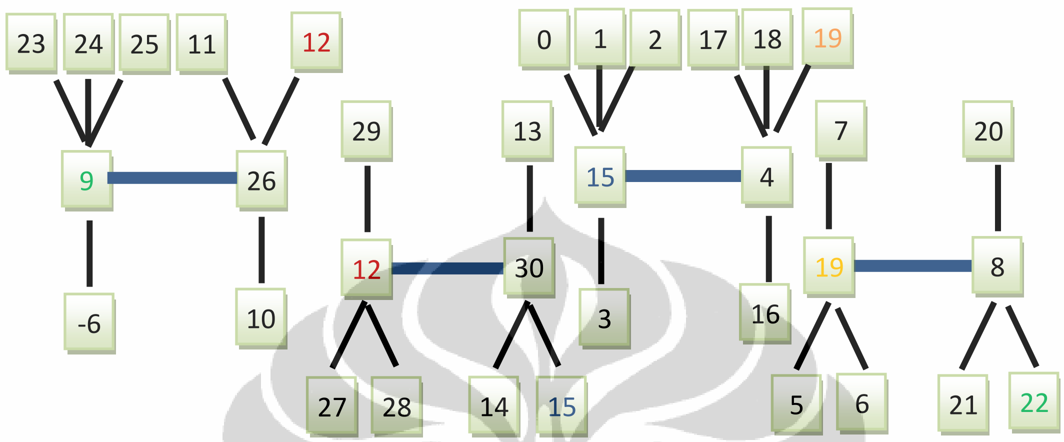


c. Graf bipartit dari gabungan 4 graf caterpillar dan pelabelannya

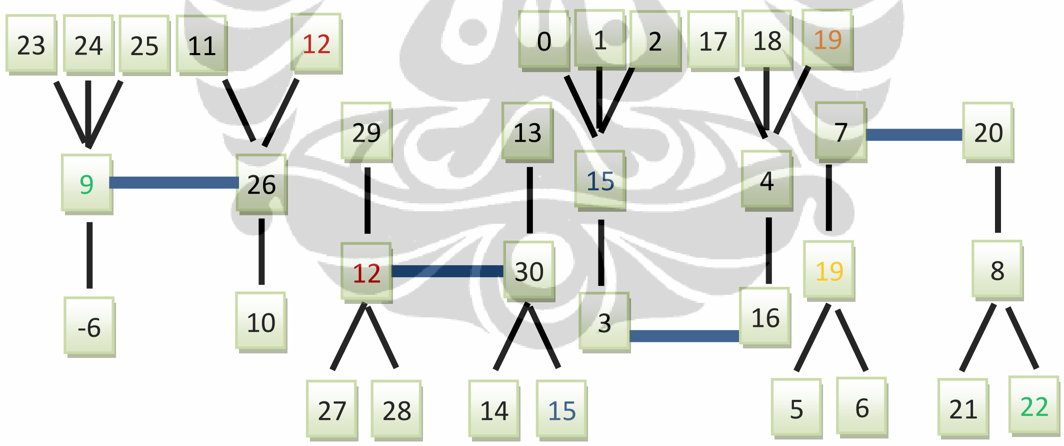


(Lanjutan)

d. Gabungan graf caterpillar dengan pelabelan harmonis



e. Kombinasi Gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur dengan pelabelan harmonis



Gambar 4.1. Contoh konstruksi pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur

Pada Gambar 4.a diberikan kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur, pada Gambar 4.b diberikan gabungan graf caterpillar yang diperoleh dengan memindahkan backbone pada graf firecracker teratur ke simpul-simpul pusat, pada Gambar 4.c diberikan graf bipartit dari gabungan graf caterpillar, 4.d diberikan gabungan graf caterpillar yang diberi pelabelan harmonis (3.2), dan pada Gambar 4.e diberikan kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur yang diperoleh dengan memindahkan *backbone* pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat, yang diberi pelabelan harmonis. Busur-busur yang biru dan bercetak tebal menandakan busur-busur yang dipindahkan dari simpul pada graf firecracker ke simpul pada graf caterpillar dan sebaliknya.

Karena pada setiap graf caterpillar dan graf firecracker teratur $|E| < |V|$ (yaitu, $|V| = |E| + 1$) , dan karena $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, maka untuk kombinasi gabungan n graf caterpillar dan graf firecracker teratur menghasilkan jumlah simpul sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
|V| &= |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| \\
&= (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) + \cdots + (|E_n| + 1) \\
&= (|E_1| + |E_1| + \cdots + |E_1|) + n \\
&= |E| + n
\end{aligned}
$$

Karena pelabelan harmonis pada penulisan ini menggunakan pemetaan injektif dari V ke $Z_{|E|}$ dan $|V| = |E| + n,$ maka akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang). Jadi, untuk kombinasi gabungan n graf caterpillar dan graf firecracker teratur, label boleh berulang sebanyak $|V| - |E| + n = |E| + n - |E| + n = 2n$ kali (n pasang) .

Pada bab selanjutnya, diberikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan konstruksi pelabelan harmonis pada graf caterpillar, graf firecracker, gabungan graf caterpillar, gabungan graf firecracker teratur, dan kombinasi gabungan graf caterpillar dengan graf firecracker teratur. .

BAB 5
PENUTUP

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan konstruksi pelabelan harmonis pada graf caterpilar, graf firecracker, gabungan graf caterpilar, gabungan graf firecracker teratur, dan kombinasi gabungan graf caterpilar dengan graf firecracker teratur pada bab-bab sebelumnya.

5.1 KESIMPULAN

Dari hasil penelitian pada bab-bab sebelumnya, telah dibuktikan bahwa setiap graf caterpillar adalah harmonis dan setiap Graf firecracker teratur adalah harmonis, dengan label simpul boleh berulang sebanyak 2 kali (satu label boleh digunakan untuk dua simpul) .Dengan melihat gabungan graf caterpillar, gabungan graf firecracker, serta gabungan kombinasi dari graf caterpillar dan graf firecracker teratur diperoleh hasil berikut :

1. Graf hasil gabungan graf caterpillar adalah harmonis, karena pelabelan harmonis pada penulisan ini menggunakan pemetaan dari V ke $Z_{|E|}$ dan $|V| = |E| + n$, maka untuk gabungan n graf caterpillar akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang).
2. Graf hasil gabungan graf firecracker teratur adalah harmonis. Untuk gabungan n graf firecracker jumlah simpulnya adalah $|V| = |E| + n$, maka akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang).
3. Graf dari hasil gabungan kombinasi graf caterpillar dan graf firecracker teratur adalah graf harmonis, karena pelabelan harmonis pada penulisan ini menggunakan pemetaan injektif dari V ke $Z_{|E|}$ dan $|V| = |E| + n$, maka untuk kombinasi gabungan n graf caterpillar dan graf firecracker teratur akan ada n kali pengulangan penggunaan label (n pasang).

5.2 SARAN

Berdasarkan pengkajian yang telah dilakukan, penulis menyarankan untuk dilakukan pengkajian lebih lanjut, karena konstruksi graf harmonis baru dari kelas-kelas graf harmonis yang telah diketahui sebelumnya masih mungkin untuk dikembangkan lebih lanjut lagi, terutama untuk beberapa graf yang bisa diperoleh dari transformasi graf pohon, khususnya graf caterpillar. .

DAFTAR PUSTAKA

Asih A.J. (2009). *Pelabelan Harmonious pada Graf Firecracker, Hairy Cycle, dan Graf Korona*. Skripsi, Departemen Matematika FMIPA UI, 2009.

Douglas B. West. (2001). *Introduction to graph theory*. Prentice Hall.

Gallian.J. (2009). A Dynamic Survey of Graph Labeling, DS#6, *www.combinatorics.org/**Survey**s/ds6.pdf.*

Gilang R.A, Silaban D.R, & Sugeng K.A (2009). Pelabelan harmonious pada graf gabungan graf harmonious. *Proseding Konperensi Nasional Matematika UNPAR.* MS 8-13.

Gilang R.A. (2009). *Pelabelan harmonious pada graf hasil operasi graf harmonious.* Skripsi, Departemen Matematika FMIPA UI, 2009.

Graham, R.L., & Sloan, N.J. (1980). On Additive Bases and Harmonius Graphs. *SIAM J. Alg. Discrete Math.*vol 1, no 3, 382-404

Harary, F. (1994). *Graph Theory.* Addison-Wesley.

Harjuni, T (2009). *Pelabelan Total a-SBBA pada Kombinasi Gabungan Dua Graf Caterpillar dan Graf Firecracker*. Skripsi, Departemen Matematika FMIPA UI, 2009.

Siang, J.J. (2004). *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Penerbit Andi Yogyakarta.

Wirnadian, P., Priyanto, H., Artianto, Y., & Sugeng, K.A (2010). Pelabelan Harmonis Pada Gabungan Graf Caterpillar. *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNPAR.* MT 48-53

Youssef, M. Z. (2003). Two General Results on Harmonious Labelings. *Ars Combin.*, 68(2003) 225-230.