



UNIVERSITAS INDONESIA

**SOLUSI ANALITIK MODEL *PARETO-BETA JUMP-DIFFUSION*
DENGAN VOLATILITAS STOKASTIK SEBAGAI DASAR
PENENTUAN *PROBABILITY DENSITY FUNCTION*
LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE**

TESIS

**SUSATYO
0806420253**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**



UNIVERSITAS INDONESIA

**SOLUSI ANALITIK MODEL *PARETO-BETA JUMP-DIFFUSION*
DENGAN VOLATILITAS STOKASTIK SEBAGAI DASAR
PENENTUAN *PROBABILITY DENSITY FUNCTION*
LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE**

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

**SUSATYO
0806420253**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

**Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.**

Nama : Susatyo

NPM : 0806420253

Tanda Tangan :

Tanggal : 13 Juli 2010



HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh

Nama : Susatyo
NPM : 0806420253
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Solusi Analitik Model *Pareto-Beta Jump-Diffusion*
dengan Volatilitas Stokastik sebagai Dasar Penentuan
Probability Density Function Log-return Saham Satu
Periode

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing 1 : Bevina D. Handari, Ph.D ()

Pembimbing 2 : DR. Dian Lestari ()

Penguji 1 : Bevina D. Handari, Ph.D ()

Penguji 2 : DR. Dian Lestari ()

Penguji 3 : Prof. DR. Djati Kerami ()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 13 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Tesis ini dibuat sebagai salah satu syarat bagi penulis untuk memperoleh gelar Magister Sains di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Indonesia (UI).

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

- (1) Ibu Bevina D. Handari, Ph.D sebagai Pembimbing I dan Ibu DR. Dian Lestari sebagai Pembimbing II yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
- (2) DR. Yudi Satria, M.T selaku ketua Departemen Matematika FMIPA-UI dan Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris Departemen Matematika FMIPA-UI;
- (3) Prof. DR. Djati Kerami selaku ketua Program Magister Matematika FMIPA-UI dan Ibu Bevina D. Handari, Ph.D selaku sekretaris sekaligus pembimbing akademis pada Program Magister Matematika FMIPA-UI yang telah banyak memberikan saran dan arahan kepada penulis selama masa perkuliahan;
- (4) para dosen Program Magister Matematika FMIPA-UI yang telah memberikan didikan, arahan, dan bimbingan kepada penulis selama masa perkuliahan;
- (5) para staf Tata Usaha (TU) Departemen Matematika FMIPA-UI (Bapak Ansori, Bapak Irwan, Ibu Juriah, Bapak Saliman, Ibu Santy N, dan Bapak Turino) yang telah membantu penulis dalam pengurusan administrasi selama perkuliahan maupun selama proses pembuatan tesis ini;
- (6) para staf perpustakaan Departemen Matematika FMIPA-UI (Bapak Salman Bustamam dan Ibu Rusmiyatiningsih) yang telah membantu penulis dalam pencarian daftar pustaka selama proses pembuatan tesis ini hingga selesai;

- (7) orang tua penulis (Martha), istri tercinta (Septina Suriatmini, S.Farm, Apt.), anak tercinta (Argadean Rama Harjuna), yang telah memberikan dukungan material dan moral;
- (8) teman-teman Program Magister Matematika FMIPA-UI angkatan 2008 (Diny Zulkarnaen, I Ketut Tri Martana, Noorbaity, Retno Indah, Sari Mulyani, Yessy Yusnita, Yusfridawati) yang telah memberikan dukungan, semangat, dan tetap kompak;
- (9) sahabatku, Suharto Anggono, yang telah banyak membantu penulis dalam berdiskusi dan bertukar pikiran sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik; dan
- (10) berbagai pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu dalam penulisan tesis ini.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 13 Juli 2010

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Susatyo
NPM : 0806420253
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Solusi Solusi Analitik Model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan Volatilitas Stokastik sebagai Dasar Penentuan *Probability Density Function Log-return* Saham Satu Periode

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 13 Juli 2010
Yang menyatakan

(Susatyo)

ABSTRAK

Nama : Susatyo
Program Studi : Matematika
Judul : Solusi Analitik Model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan Volatilitas Stokastik sebagai Dasar Penentuan *Probability Density Function Log-Return* Saham Satu Periode

Pada kondisi tertentu, harga saham dapat mengalami fluktuasi yang cukup tajam (lompatan). Jika model harga saham tidak memperhatikan kemungkinan terjadinya lompatan, prediksi harga saham kurang dapat mencerminkan kondisi yang sebenarnya. Karena itu dibutuhkan model *Jump-Diffusion* (JD) yang dapat menangkap lompatan tersebut. Salah satu model JD adalah model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (PBJD). Model yang diusulkan oleh C.A Ramezani dan Y. Zeng (1998) ini merupakan perluasan model *Merton Jump-Diffusion* (MJD) (1976). Waktu muncul lompatan ke atas dan ke bawah masing-masing direpresentasikan oleh suatu proses Poisson, sedangkan besar lompatan ke atas berdistribusi Pareto(η_u), dan besar lompatan ke bawah berdistribusi Beta($\eta_d, 1$). Model PBJD memiliki koefisien difusi σ konstan yang menyatakan volatilitas model. Pada tesis ini volatilitas konstan σ diganti menjadi volatilitas stokastik mengikuti model Heston (1993). Model PBJD dengan volatilitas stokastik selanjutnya disebut sebagai model PBJDVS, dan model PBJDVS ini berbentuk sebuah sistem Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Tesis ini membahas bagaimana menentukan solusi analitik model PBJDVS. Berdasarkan solusi analitik tersebut, ditentukan *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Selain itu, berdasarkan solusi analitik, dilakukan simulasi lintasan (*sample path*) harga saham dan simulasi bentuk pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Hasil simulasi lintasan harga saham model PBJDVS dengan parameter tertentu dapat menunjukkan adanya lompatan.

Kata kunci : PBJDVS; distribusi Pareto; distribusi Beta; proses Poisson; rumus Itô

xv + 142 halaman; 17 gambar; 11 tabel

Daftar Pustaka : 28 (1975-2009)

ABSTRACT

Name : Susatyo
Study Program : Mathematics
Title : Analytic Solution of Pareto-Beta Jump-Diffusion Model
with Stochastic Volatility as Base for Probability Density Function
for One Period Log>Returns of Stock

In certain conditions, stock price can fluctuate highly (jump). If a stock price model ignores the possibility of jump, the stock price prediction can't adequately reflect the real condition. That is why Jump-Diffusion (JD) model that can catch the jump is needed. One of the JD models is Pareto-Beta Jump-Diffusion (PBJD) model. The model, proposed by C.A Ramezani and Y. Zeng (1998), is an extension of Merton Jump-Diffusion (MJD) (1976) model. Each of the up and down jump occurrence times are represented by a Poisson process, while the up-jump magnitudes are distributed Pareto(η_u), and the down-jump magnitudes are distributed Beta($\eta_d, 1$). PBJD model has constant diffusion coefficient σ that means volatility of the model. In this thesis the constant volatility σ is replaced by a stochastic volatility following Heston model (1993). PBJD model with stochastic volatility will be called PBJDVS model, and this PBJDVS model has the form of Stochastic Differential Equation (SDE) system. This thesis discusses how to determine analytic solution of PBJDVS model. Based on this analytic solution, probability density function (pdf) for one-period stock log-returns of PBJDVS model is determined. In addition, based on analytic solution, sample path of stock price and approximate curve of pdf for one-period stock log-returns of PBJDVS model are simulated. The simulation of sample path of stock price with certain parameters can show jump.

Key words : PBJDVS; Pareto distribution; Beta distribution; Poisson process;
Itô formula
xv + 142 pages; 17 pictures; 11 tables
Bibliography : 28 (1975-2009)

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN SAMBUT.....	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS.....	vii
ABSTRAK.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
1. PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perumusan Masalah.....	3
1.3. Tujuan Penulisan.....	3
1.4. Pembatasan Masalah.....	4
1.5. Sistematika Penulisan.....	4
2. LANDASAN TEORI.....	6
2.1. Proses Wiener Standar.....	6
2.2. Integral Itô.....	7
2.3. Persamaan Diferensial Stokastik (PDS).....	8
2.4. Proses Poisson.....	9
2.5. Proses Poisson Majemuk (<i>Compound Poisson Process</i>).....	14
2.6. Model Lompatan-Difusi (<i>Jump-Diffusion Model</i>).....	16
2.7. Rumus Itô untuk Proses Lompatan-Difusi (<i>Jump-Diffusion</i>)	17
2.8. Metode Euler-Maruyama (EM).....	18
2.9. Aturan Trapezium Majemuk (<i>Composite Trapezoidal Rule</i>).....	18
2.10. <i>Probability Density Function</i> (pdf) Eksponensial dan Gamma.....	19
2.11. Jumlahan dan Konvolusi.....	19
2.12. Model-Model Pergerakan Harga Saham.....	20
2.12.1 Model Black-Scholes (BS) (1973).....	20
2.12.2 Model <i>Merton Jump-Diffusion</i> (MJD) (1976).....	20
2.12.3 Model <i>Pareto-Beta Jump-Diffusion</i> (PBJD) (1998).....	23
2.12.4 Model Heston (1993).....	25

3. SOLUSI ANALITIK DAN <i>PROBABILITY DENSITY FUNCTION</i>	
<i>LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE MODEL PBJDVS</i>.....	27
3.1. Model <i>Pareto-Beta Jump-Diffusion</i> dengan Volatilitas Stokastik (PBJDVS).....	27
3.2. Solusi Analitik Model PBJDVS.....	30
3.3. Aproksimasi $v(t)$	44
3.4. Aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$	45
3.5. Aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}dW_1(t)$	45
3.6. <i>Probability Density Function Log-return</i> (pdf) Saham Satu Periode Model PBJDVS.....	47
3.6.1. Distribusi Bersyarat untuk Suku yang Mengandung Lompatan (X_u dan X_d).....	49
3.6.2. Distribusi untuk Suku yang Tidak Mengandung Lompatan (Q)..	51
3.6.3. <i>Probability Density Function</i> (pdf) Bersyarat Model PBJDVS...	52
3.6.3.1. Kasus 1: $m = 0$ dan $n = 0$ (Tidak Terjadi Lompatan).....	52
3.6.3.2. Kasus 2: $m \geq 1$ dan $n = 0$ (Hanya Terjadi Lompatan ke Atas).....	52
3.6.3.3. Kasus 3: $m = 0$ dan $n \geq 1$ (Hanya Terjadi Lompatan ke Bawah).....	53
3.6.3.4. Kasus 4: $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ (Terjadi Lompatan ke Atas Maupun ke Bawah).....	54
4. SIMULASI SOLUSI ANALITIK DAN SIMULASI BENTUK	
PENDEKATAN KURVA <i>PROBABILITY DENSITY FUNCTION</i>	
<i>LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE MODEL PBJDVS</i>.....	59
4.1. Langkah-Langkah Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS.....	59
4.2. Penentuan Nilai Parameter dan Nilai Awal Model PBJDVS.....	65
4.3. Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS.....	67
4.4. Simulasi Bentuk Pendekatan Kurva <i>Probability Density Function</i> (pdf) <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS.....	80
5. KESIMPULAN DAN SARAN	89
5.1. Kesimpulan.....	89
5.2. Saran.....	89
DAFTAR PUSTAKA	90
LAMPIRAN	93

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1.	Skema Penelitian.....	3
Gambar 2.1.	Lintasan Proses Poisson.....	12
Gambar 2.2.	Lintasan Proses Poisson Majemuk.....	15
Gambar 2.3.	Ilustrasi $N(t)$ dan $V_{N(t)}$	21
Gambar 3.1.	Ilustrasi Lompatan ke Atas dengan 5 Lompatan.....	41
Gambar 3.2.	Ilustrasi Lompatan ke Atas dengan 4 Lompatan.....	42
Gambar 3.3.	Ilustrasi Lompatan ke Bawah dengan 2 Lompatan.....	43
Gambar 3.4.	Skema Pdf <i>Log-Return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS.....	57
Gambar 4.1.	Bagan Partisi Interval Waktu pada Langkah-Langkah Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS (Langkah v s.d viii).....	60
Gambar 4.2.	Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$	67
Gambar 4.3.	Pergerakan <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$	69
Gambar 4.4.	Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$	77
Gambar 4.5.	Pergerakan <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS Untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d Pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, dan $R = 100$	78
Gambar 4.6.	Ilustrasi Pengambilan Data <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJD untuk Histogram dari 1 Kali Simulasi dengan $T = 6$	81
Gambar 4.7.	Ilustrasi Pengambilan Data untuk Histogram <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk $T = 252$ dan $M = 2000$	83
Gambar 4.8.	Histogram dan Poligon Frekuensi <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS dengan Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$	85
Gambar 4.9.	Kurva Pendekatan Pdf <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS dengan Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$	88

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1.	Banyak Hari Kerja dalam Setahun Berdasarkan Data Harian LEHMQ.PK.....	66
Tabel 4.2.	Nilai-Nilai Parameter Model PBJDVS.....	66
Tabel 4.3.	Nilai Awal untuk $S(0)$ dan $v(0)$	67
Tabel 4.4.	Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.....	70
Tabel 4.5.	Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Bawah untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.	71
Tabel 4.6.	Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas dan ke Bawah Sekaligus dalam Satu Hari untuk Solusi Analitik Model PBJDVS dengan Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.....	72
Tabel 4.7.	Nilai-Nilai Parameter η_u	74
Tabel 4.8.	Nilai-Nilai Parameter η_d	75
Tabel 4.9.	Nilai-Nilai Parameter λ_u , λ_d , η_u , dan η_d	76
Tabel 4.10.	Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan λ_u , λ_d , η_u , dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.4.....	78
Tabel 4.11.	Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Bawah untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan λ_u , λ_d , η_u , dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.4.	79

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.	Pergerakan <i>Log-return</i> Saham Harian Lehman Brothers Holdings Inc. (LEHMQ.PK) (3 Jan 2000 - 31 Dec 2009).....	94
Lampiran 2.	Bukti Koefisien Korelasi dari Dua Buah Variabel Acak Adalah $\rho \in [-1, 1]$	95
Lampiran 3.	Bukti Persamaan (2.41): Jika $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ Berkorelasi dengan Koefisien Korelasi ρ maka Diperoleh $Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt$	98
Lampiran 4.	Bukti Jika Diketahui Persamaan (2.41) maka Persamaan (2.41) dapat Dinyatakan Seperti pada Persamaan (2.42).....	99
Lampiran 5.	Bukti Persamaan (2.42) Menjadi (2.41).....	102
Lampiran 6.	Bukti Beberapa Fakta tentang Distribusi Pareto, Beta, dan Eksponensial.....	104
Lampiran 7.	Pengolahan Kembali Hasil Taksiran Parameter yang Dilakukan pada Model PBJD di [22] dan Model Heston pada [15] untuk Memperoleh Nilai-Nilai Parameter Model PBJDVS.....	109
Lampiran 8.	Bukti Bahwa Distribusi Pareto (η_u) Sama Dengan Distribusi <i>Generalized Pareto</i> $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$	115
Lampiran 9.	Penjelasan <i>Log-Return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS Tidak Saling Bebas.....	117
Lampiran 10.	Bukti Bahwa Pdf dapat Didekati dengan Probabilitas Dibagi dengan Panjang Interval.....	119
Lampiran 11.	<i>Source Code</i> Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3.....	120
Lampiran 12.	<i>Source Code</i> Simulasi Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3..	123
Lampiran 13.	<i>Source Code</i> Simulasi <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3.....	122
Lampiran 14.	<i>Source Code</i> Simulasi Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3.....	125
Lampiran 15.	<i>Source Code</i> Simulasi Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3.....	127
Lampiran 16.	Langkah-Langkah Simulasi <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan λ_u , λ_d , η_u , dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3..	128

Lampiran 17. Langkah-Langkah Simulasi Banyak dan Besar Lompatan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3	129
Lampiran 18. Tabel L18. Hasil Simulasi Lompatan ke Atas Solusi Analitik Model PBJDVS.....	130
Lampiran 19. Tabel L19. Hasil Simulasi Lompatan ke Bawah Solusi Analitik Model PBJDVS.....	133
Lampiran 20. Tabel L20. Hasil Simulasi Lompatan ke Atas dan ke Bawah Sekaligus dalam Satu Hari Solusi Analitik Model PBJDVS.....	136
Lampiran 21. <i>Source Code</i> Histogram dan Poligon Frekuensi <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$	139
Lampiran 22. <i>Source Code</i> Pendekatan Kurva Pdf <i>Log-return</i> Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$	141



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Saham merupakan tanda kepemilikan seseorang atau badan dalam suatu perusahaan. Dalam perdagangan saham, barang yang diperjualbelikan adalah modal suatu perusahaan yang diwujudkan dalam bentuk lembaran kertas yang menerangkan siapa pemiliknya [17]. Para pelaku pasar modal akan berusaha untuk memperoleh keuntungan yang sebesar-besarnya dari aktifitas jual beli tersebut. Biasanya harga saham yang diperjualbelikan tidak selalu tetap, tetapi berfluktuasi (naik turun) [20].

Perubahan harga saham dapat dibagi menjadi dua macam, yaitu perubahan harga saham yang wajar dan perubahan harga saham yang drastis [19]. Perubahan harga saham yang drastis berarti bahwa harga saham mengalami fluktuasi yang cukup tajam, atau yang disebut sebagai lompatan.

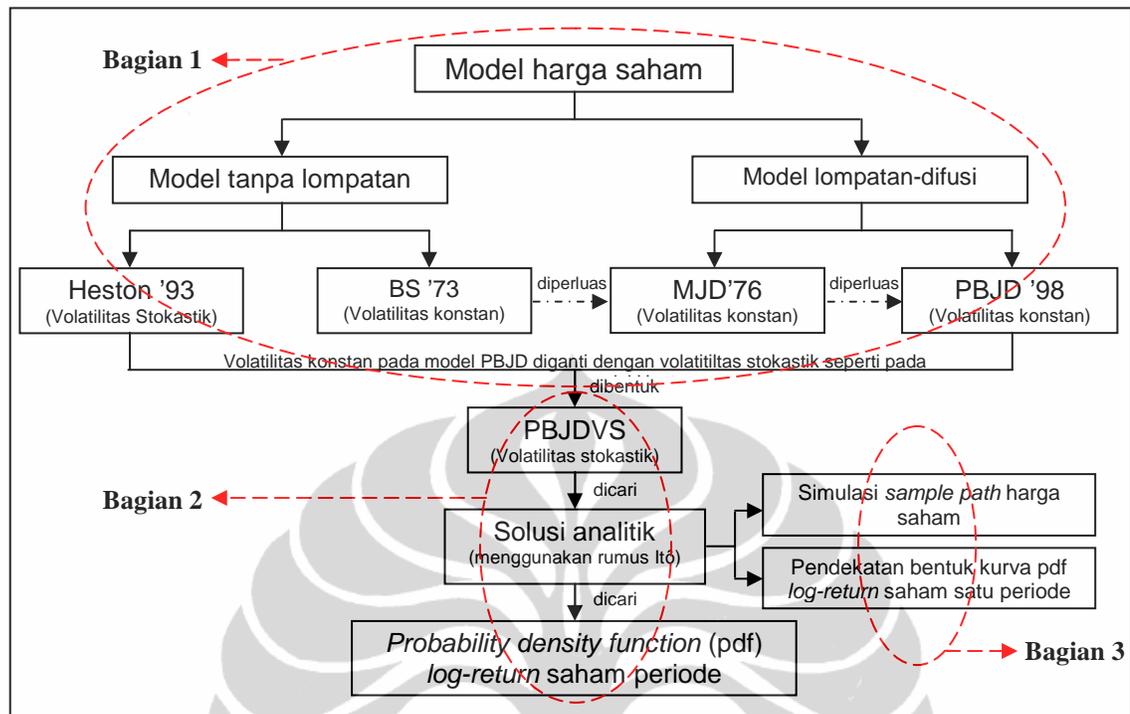
Sebagai contoh dalam dunia nyata, data harga saham harian Lehman Brothers Holdings Incorporation (LEHMQ.PK) pada tanggal 3 Januari 2000 – 31 Desember 2009 dapat dilihat pada [14]. Gambar L1 pada Lampiran 1 menunjukkan pergerakan *log-return* saham harian LEHMQ.PK mengandung lompatan yang signifikan di data ke-141, 142, 157, 201, 1585, 2261, 2424. Berdasarkan data harga saham tersebut, dapat ditunjukkan bahwa data harga saham dapat mengandung lompatan.

Model harga saham yang paling sederhana adalah model Black-Scholes (BS), tetapi model BS ini hanya cocok diterapkan pada data harga saham tanpa lompatan. Jika model harga saham tidak memperhatikan kemungkinan terjadinya lompatan, maka model tersebut kurang dapat mencerminkan kondisi yang sebenarnya. Karena itu dibutuhkan model *Jump-Diffusion* (JD) yang dapat menangkap lompatan tersebut. Model *Merton Jump-Diffusion* (MJD) diusulkan oleh R.C Merton (1976) adalah salah satu model JD yang merupakan perluasan model BS yang dapat menangkap lompatan. Pada model MJD, waktu muncul lompatan

direpresentasikan oleh sebuah proses Poisson, sedangkan besar lompatan berdistribusi Lognormal(μ, δ^2). Sedangkan C.A Ramezani dan Y. Zeng (1998) memperluas model MJD menjadi suatu model yang dikenal sebagai model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (PBJD). Bentuk model PBJD telah dibahas di [22]. Model PBJD ini membedakan lompatan menjadi lompatan ke atas dan ke bawah. Waktu muncul lompatan ke atas dan ke bawah masing-masing direpresentasikan oleh suatu proses Poisson, sedangkan besar lompatan ke atas berdistribusi Pareto(η_u), dan besar lompatan ke bawah berdistribusi Beta($\eta_d, 1$).

Model PBJD memiliki koefisien difusi σ konstan yang menyatakan volatilitas model. Berdasarkan [6], jika volatilitas konstan model JD diubah menjadi volatilitas stokastik, maka model JD tersebut mempunyai hasil empiris yang cukup baik. Terkait dengan pernyataan [6] tersebut, maka pada tesis ini dibahas model PBJD dengan koefisien difusi σ konstan diganti menjadi volatilitas stokastik. Model Heston (1993) memiliki koefisien difusi stokastik. Volatilitas stokastik pada model Heston tersebut digunakan sebagai pengganti volatilitas konstan σ pada model PBJD. Model PBJD dengan volatilitas stokastik selanjutnya disingkat sebagai PBJDVS, dan model PBJDVS ini berbentuk sebuah sistem Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Model MJD dengan volatilitas stokastik mengikuti model Heston telah dibahas pada [1, 2].

Pada tesis ini ditentukan solusi analitik model PBJDVS. Berdasarkan solusi analitik tersebut, ditentukan *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Untuk keperluan simulasi solusi analitik model PBJDVS dibutuhkan nilai parameter. Penaksiran nilai parameter dari data *real* mengalami kendala atau sulit dilakukan, karena itu nilai-nilai parameter model PBJDVS ditentukan dengan mengolah kembali hasil taksiran parameter yang dilakukan pada model PBJD pada [22] dan model Heston pada [15]. Pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang diperoleh dapat digunakan untuk menentukan taksiran parameter menggunakan data *real* pada penelitian selanjutnya. Berikut adalah skema penelitian terkait dengan model-model pergerakan harga saham yang dibahas pada bab selanjutnya.



Gambar 1.1. Skema Penelitian

1. 2. Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka perumusan masalah dalam tesis ini adalah

1. Bagaimana menentukan solusi analitik model PBJDVS.
2. Bagaimana menentukan *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

1. 3. Tujuan Penulisan

Penulisan tesis ini memiliki beberapa tujuan yaitu

1. Menentukan solusi analitik model PBJDVS.
2. Menentukan *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

1. 4. Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam tesis ini adalah

1. Periode (satuan waktu) yang digunakan adalah hari.
2. Nilai-nilai parameter model PBJDVS ditentukan dengan mengolah kembali hasil taksiran parameter yang dilakukan pada model PBJD pada [22] dan model Heston pada [15].
3. Metode numerik yang digunakan untuk mengaproksimasi kuadrat volatilitas $v(t)$ adalah metode Euler-Maruyama (EM).
4. Bentuk kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS ditentukan dengan aproksimasi menggunakan simulasi.
5. Pdf *log-return* saham model PBJDVS yang digunakan adalah pdf *log-return* saham satu periode.

1. 5. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tesis ini dilakukan menurut bab-bab sebagai berikut

BAB 1. PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang yang melandasi penulisan tesis, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

BAB 2. LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai proses Wiener standar, integral Itô, Persamaan Diferensial Stokastik (PDS), proses Poisson, proses Poisson majemuk (*compound Poisson process*), model lompatan-difusi (*jump-diffusion model*), rumus Itô untuk proses lompatan-difusi (*jump-diffusion*), metode Euler-Maruyama (EM), aturan trapesium majemuk (*composite trapezoidal rule*), *probability density function* (pdf) Eksponensial dan Gamma, jumlahan dan konvolusi. Di akhir bab ini dibahas model-model pergerakan harga saham yang tergambar di bagian 1 skema penelitian pada Gambar 1.1, yaitu model Black-

Scholes (BS) (1973), model *Merton Jump-Diffusion* (MJD) (1976), model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (PBJD) (1998), dan model Heston (1993).

BAB 3. SOLUSI ANALITIK DAN *PROBABILITY DENSITY FUNCTION* LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE MODEL PBJDVS

Bab ini membahas model model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan volatilitas stokastik PBJDVS, penentuan solusi analitik Model PBJDVS, dan penentuan *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Hal tersebut tergambar di bagian 2 skema penelitian pada Gambar 1.1.

BAB 4. SIMULASI SOLUSI ANALITIK DAN SIMULASI BENTUK PENDEKATAN KURVA *PROBABILITY DENSITY FUNCTION* LOG-RETURN SAHAM SATU PERIODE MODEL PBJDVS

Bab ini membahas simulasi solusi analitik model PBJDVS dan simulasi bentuk pendekatan kurva *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Hal tersebut tergambar di bagian 3 skema penelitian pada Gambar 1.1.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan tesis dan saran yang dapat dijadikan bahan pertimbangan untuk melanjutkan tesis ini.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas beberapa teori dasar yang diperlukan pada bab-bab selanjutnya, yaitu proses Wiener standar, integral Itô, Persamaan Diferensial Stokastik (PDS), proses Poisson, proses Poisson majemuk (*compound Poisson process*), model lompatan-difusi (*jump-diffusion model*), rumus Itô untuk proses lompatan-difusi (*jump-diffusion*), metode Euler-Maruyama (EM), aturan trapesium majemuk (*composite trapezoidal rule*), *probability density function* (pdf) Eksponensial dan Gamma, jumlahan dan konvolusi. Di akhir bab ini dibahas model-model pergerakan harga saham, yaitu model Black-Scholes (BS) (1973), model *Merton Jump-Diffusion* (MJD) (1976), model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (PBJD) (1998), dan model Heston (1993).

2.1. Proses Wiener Standar

Sebelum membahas proses Wiener standar, terlebih dahulu dijelaskan variabel acak yang memenuhi distribusi normal. Menurut [12], X adalah variabel acak yang berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 jika pdf X memiliki bentuk sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

dengan $-\infty < x < +\infty$.

Proses Wiener standar adalah suatu proses yang memiliki lintasan kontinu terhadap waktu t . Proses Wiener disebut juga sebagai Brownian motion. Berikut adalah definisi proses Wiener standar.

Definisi 2.1. Proses Wiener Standar

Berdasarkan [11], proses Wiener standar atas interval $[0, T]$ adalah himpunan variabel acak $W(t)$ yang bergantung secara kontinu pada $t \in [0, T]$ dan memenuhi ketiga kondisi berikut.

1. $W(0) = 0$ (dengan probabilitas 1).
2. Untuk $0 \leq s < t \leq T$, variabel acak yang diberikan oleh perubahan (*increment*) $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $t - s$, atau secara ekivalen $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s} N(0, 1)$, dengan $N(0, 1)$ menotasikan distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.
3. Untuk $0 \leq s < t < u < v \leq T$, perubahan $W(t) - W(s)$ dan $W(v) - W(u)$ saling bebas.

Untuk keperluan komputasi, $W(t)$ terdefinisi secara diskrit pada setiap t . $\Delta W(t_j)$ dapat dibangun menggunakan sebuah pembangkit nilai acak. Selanjutnya $\Delta t = \frac{T}{N}$ untuk nilai N bulat positif. N merupakan banyaknya titik diskritisasi pada interval $[0, T]$. Kondisi 1 menjelaskan bahwa $W(t_0) = 0$, sedangkan kondisi 2 dan 3 menjelaskan bahwa $\Delta W(t_j)$ adalah variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi $\sqrt{\Delta t} N(0, 1)$, dengan

$$W(t_j) = W(t_{j-1}) + \Delta W(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Dengan mengetahui karakteristik dari suatu proses Wiener standar, pada subbab berikut dibahas salah satu jenis integral stokastik (tepatnya integral Itô) untuk menyelesaikan suatu PDS.

2.2. Integral Itô

Jika diberikan sebuah fungsi $h(t)$, maka berdasarkan [11], integral $\int_0^T h(t) dt$

dapat diaproksimasi menggunakan jumlah Riemann sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j). \quad (2.1)$$

$t_j = j\Delta t$ merupakan titik-titik diskritisasi dengan $j = 0, 1, 2, \dots, N$, dengan Δt

konstan. Nilai $\int_0^T h(t)dt$ dapat didefinisikan sebagai limit $\Delta t \rightarrow 0$ dari jumlah

Riemann pada (2.1). Secara analog, integral $\int_0^T h(t)dW(t)$ juga dapat diaproksimasi menggunakan jumlah Riemann berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)). \quad (2.2)$$

Pada kasus ini, fungsi $h(t)$ diintegrasikan atas sebuah proses Wiener standar. Karena penjumlahan pada persamaan (2.2) mensyaratkan $h(t)$ dihitung pada $t = t_j$, maka

integral Itô $\int_0^T h(t)dW(t)$, yang juga disebut sebagai integral stokastik Brownian, diaproksimasi dengan jumlah Riemann *left-hand* [11].

Pada subbab selanjutnya dibahas persamaan diferensial stokastik (PDS).

2.3. Persamaan Diferensial Stokastik (PDS)

Berdasarkan [11], sebuah PDS memiliki bentuk sebagai berikut:

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad (2.3)$$

untuk $t \in [0, T]$, nilai awal $X(0) = X_0$. Suku $f(X(t))dt$ merupakan suku *drift*, dengan $f(X(t))$ adalah koefisien *drift*. Sedangkan $g(X(t))dW(t)$ adalah suku difusi, dengan $g(X(t))$ adalah koefisien difusi. $W(t)$ merupakan sebuah proses Wiener standar yang memiliki karakteristik tertentu yang telah dibahas pada Subbab 2.1. Berdasarkan [27], suku *drift* mengindikasikan kecenderungan arah lintasan solusi suatu PDS. Suku difusi merepresentasikan fluktuasi dari kurva, sedangkan proses Wiener standar merepresentasikan gangguan (*noise*) pada PDS. Berdasarkan [25],

persamaan (2.3) bersifat tidak dapat diturunkan dimana-mana (*nowhere differentiable*), artinya

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

tidak ada untuk setiap $t \in [0, T]$. Berdasarkan [11], persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s). \quad (2.4)$$

Solusi $X(t)$ dapat direpresentasikan sebagai lintasan (*sample path*). Bentuk integral pada suku ke-3 ruas kanan persamaan (2.4) adalah suku stokastik yang hanya dapat diselesaikan menggunakan integral Itô. Model PDS pada persamaan (2.3), biasa disebut sebagai PDS Itô. Berdasarkan [21], solusi PDS disebut sebagai proses difusi. Penjelasan lebih lanjut mengenai PDS Itô dapat dilihat pada [11].

Selanjutnya dibahas proses Poisson sebagai salah satu contoh proses stokastik dengan lintasan diskontinu dan digunakan untuk merepresentasikan proses-proses yang mengandung lompatan (*jump*).

2.4. Proses Poisson

Sebelum menjelaskan definisi dan sifat-sifat proses Poisson, berikut dibahas distribusi Poisson.

Distribusi Poisson merupakan salah satu bentuk distribusi dari variabel acak diskrit yang memiliki banyak manfaat di bidang aplikasi. Salah satu contohnya adalah banyaknya klaim asuransi dalam suatu interval waktu yang biasanya diasumsikan sebagai variabel acak yang memiliki distribusi Poisson. Contoh tersebut dapat dilihat sebagai suatu proses yang menghasilkan bilangan (banyaknya klaim) yang berubah-ubah dalam interval tetap [23]. Jika suatu proses berkaitan dengan distribusi Poisson, proses tersebut dikatakan sebagai proses Poisson [12]. Berikut adalah penjelasan mengenai variabel acak yang memenuhi distribusi Poisson.

Menurut [12], variabel acak X yang memiliki *probability mass function* (*pmf*) dengan bentuk sebagai berikut,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , \text{ untuk } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ lainnya,} \end{cases}$$

dikatakan memenuhi distribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, dan $f(x)$ disebut sebagai *pmf* Poisson dengan parameter λ . Berdasarkan [12], ekspektasi dari variabel acak X adalah parameter dari distribusi Poisson, yaitu λ .

Proses Poisson adalah salah satu contoh proses stokastik dengan lintasan diskontinu dan digunakan untuk merepresentasikan proses-proses yang mengandung lompatan (*jump*). Sifat diskontinu menunjukkan adanya lompatan-lompatan pada lintasan proses Poisson. Lompatan tersebut berada pada waktu-waktu acak yang disebut sebagai waktu lompatan (*jump times*). Berikut adalah definisi proses Poisson.

Definisi 2.2. Proses Poisson

Berdasarkan [26], suatu proses Poisson dengan intensitas $\lambda > 0$ adalah sebuah proses stokastik $\{N(t); t \geq 0\}$ bernilai bilangan bulat dimana

- a. untuk sebarang titik-titik waktu $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, perubahan proses

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

adalah variabel-variabel acak yang saling bebas;

- b. untuk $s \geq 0$ dan $t > 0$, variabel acak $N(s+t) - N(s)$ memiliki distribusi Poisson

$$\Pr(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad \text{untuk } k = 0, 1, \dots ;$$

- c. $N(0) = 0$.

Notasi Pr pada bagian b menyatakan probabilitas. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, sifat diskontinu pada proses Poisson menunjukkan adanya lompatan-lompatan pada lintasan Poisson dimana lompatan tersebut berada pada waktu-waktu acak yang disebut sebagai waktu lompatan atau *jump times*.

Misalkan T_i adalah waktu lompatan ke- i . Barisan $(T_i)_{i \geq 1}$ dapat diartikan sebagai waktu-waktu acak yang merepresentasikan waktu-waktu lompatan dari proses Poisson. Sehingga proses Poisson, menurut [6], adalah proses hitung, yaitu $N(t)$ menghitung banyaknya waktu-waktu acak $(T_i)_{i \geq 1}$ yang terjadi pada interval $[0, t]$. Jadi, $N(t)$ adalah banyaknya lompatan yang terjadi sampai waktu t dan dinyatakan sebagai

$$N(t) = \#\{i \geq 1, T_i \in [0, t]\}, \quad (2.5)$$

notasi $\#$ pada persamaan (2.5) menyatakan banyaknya anggota dari suatu himpunan. Hal yang sama berlaku untuk $t > s$, maka

$$N(t) - N(s) = \#\{i \geq 1, T_i \in (s, t]\},$$

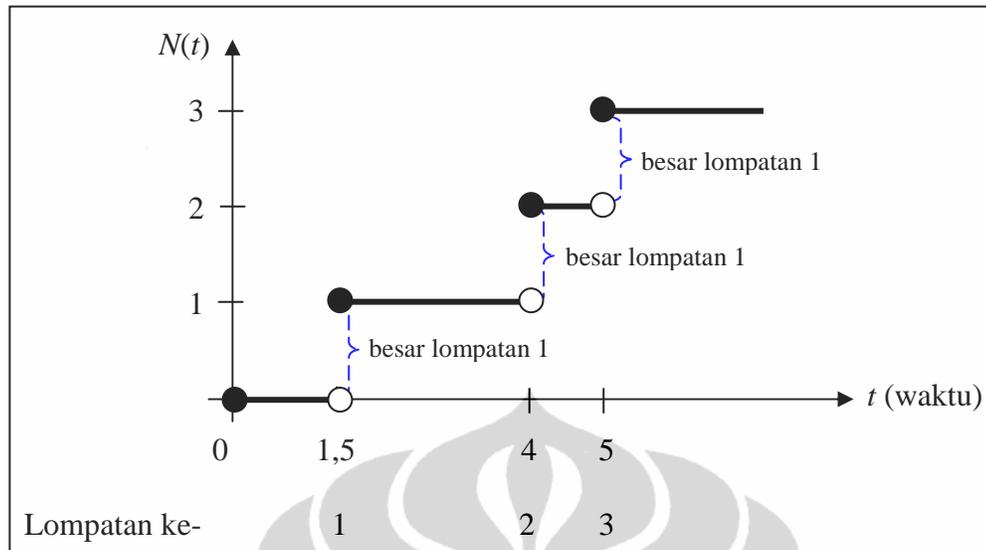
dengan perkataan lain, $N(t) - N(s)$ adalah banyaknya lompatan yang terjadi dalam interval $(s, t]$.

Menurut [10, 24], lompatan pada proses Poisson $N(t)$ selalu memiliki besar lompatan 1. Dengan perkataan lain,

$$N(T_i^+) = N(T_i^-) + 1,$$

dengan $N(T_i^+)$ menyatakan limit kanan, yaitu $\lim_{t \rightarrow T_i^+} N(t)$ dan $N(T_i^-)$ menyatakan limit kiri, yaitu $\lim_{t \rightarrow T_i^-} N(t)$. Karena limit kanan dan kiri di titik $t = T_i$ tidak sama, maka $N(t)$

bersifat diskontinu. Berdasarkan persamaan (2.5), jika pada waktu t terjadi lompatan, maka lompatan pada waktu ke t tersebut sudah dihitung. Jadi, $N(t)$ adalah kontinu kanan, yaitu $N(t) = N(t^+)$. Untuk memperjelas proses Poisson, perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 2.1. Lintasan Proses Poisson

Berdasarkan Gambar 2.1:

- Pada $t = 1,5$ terjadi lompatan ke-1. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-1 adalah $T_1 = 1,5$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sesaat sebelum $T_1 = 1,5$ adalah $N(1,5^-) = 0$. Dengan demikian

$$N(1,5) = N(1,5^+) = N(1,5^-) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

- Pada $t = 4$ terjadi lompatan ke-2. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-2 adalah $T_2 = 4$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sesaat sebelum $T_2 = 4$ adalah $N(4^-) = 1$. Dengan demikian

$$N(4) = N(4^+) = N(4^-) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- Pada $t = 5$ terjadi lompatan ke-3. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-3 adalah $T_3 = 5$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sesaat sebelum $T_3 = 5$ adalah $N(5^-) = 2$. Dengan demikian

$$N(5) = N(5^+) = N(5^-) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Berdasarkan [19], probabilitas bahwa suatu kejadian yang berdistribusi Poisson terjadi dalam suatu interval waktu h (dengan h sekecil yang diinginkan) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Pr(\text{kejadian tidak terjadi dalam interval waktu } (t, t+h)) = 1 - \lambda h + o(h), \quad (2.6)$$

$$\Pr(\text{kejadian terjadi sekali dalam interval waktu } (t, t+h)) = \lambda h + o(h), \quad (2.7)$$

$$\Pr(\text{kejadian terjadi lebih dari sekali dalam interval waktu } (t, t+h)) = o(h), \quad (2.8)$$

dengan $o(h)$ adalah simbol order asimptotik yang didefinisikan sebagai

$$\psi(h) = o(h) \text{ jika } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{h} = 0, \quad (2.9)$$

dan λ adalah rata-rata banyaknya kejadian per satuan waktu (intensitas).

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{h} = 0$ berarti bahwa jika h mendekati nol, maka $\psi(h)$ jauh lebih kecil dari h .

Dalam tesis ini yang dimaksud dengan kejadian adalah lompatan. Sehingga persamaan (2.6), (2.7) dan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\Pr(\text{lompatan tidak terjadi dalam interval waktu } (t, t+h)) = 1 - \lambda h + o(h), \quad (2.10)$$

$$\Pr(\text{lompatan terjadi sekali dalam interval waktu } (t, t+h)) = \lambda h + o(h), \quad (2.11)$$

$$\Pr(\text{lompatan terjadi lebih dari sekali dalam interval waktu } (t, t+h)) = o(h), \quad (2.12)$$

Karena banyaknya lompatan yang terjadi dalam interval $(t, t+h)$ adalah $N(t+h) - N(t)$, maka persamaan (2.10), (2.11), dan (2.12) dapat ditulis sebagai

$$\Pr(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad (2.13)$$

$$\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h), \quad (2.14)$$

$$\Pr(N(t+h) - N(t) > 1) = o(h), \quad (2.15)$$

Persamaan (2.13) menyatakan bahwa kemungkinan besar lompatan tidak terjadi dalam interval waktu $(t, t + h)$. Selanjutnya pandang persamaan (2.14) dan (2.15). Jika terjadi lompatan dalam interval waktu $(t, t + h)$, maka kemungkinan lompatan yang terjadi adalah lompatan tersebut terjadi 1 kali atau lebih dari 1 kali. Berdasarkan penjelasan pada persamaan (2.9) dan asumsi bahwa λ tidak terlalu kecil, jika persamaan (2.14) dan (2.15) dibandingkan, maka terlihat bahwa persamaan (2.15) jauh lebih kecil dari persamaan (2.14) untuk h mendekati nol. Dengan demikian probabilitas lompatan terjadi lebih dari 1 kali dalam interval waktu $(t, t + h)$ dapat diabaikan. Jadi jika terjadi lompatan dalam selang waktu yang singkat tersebut, maka banyaknya lompatan yang terjadi dapat dianggap 1.

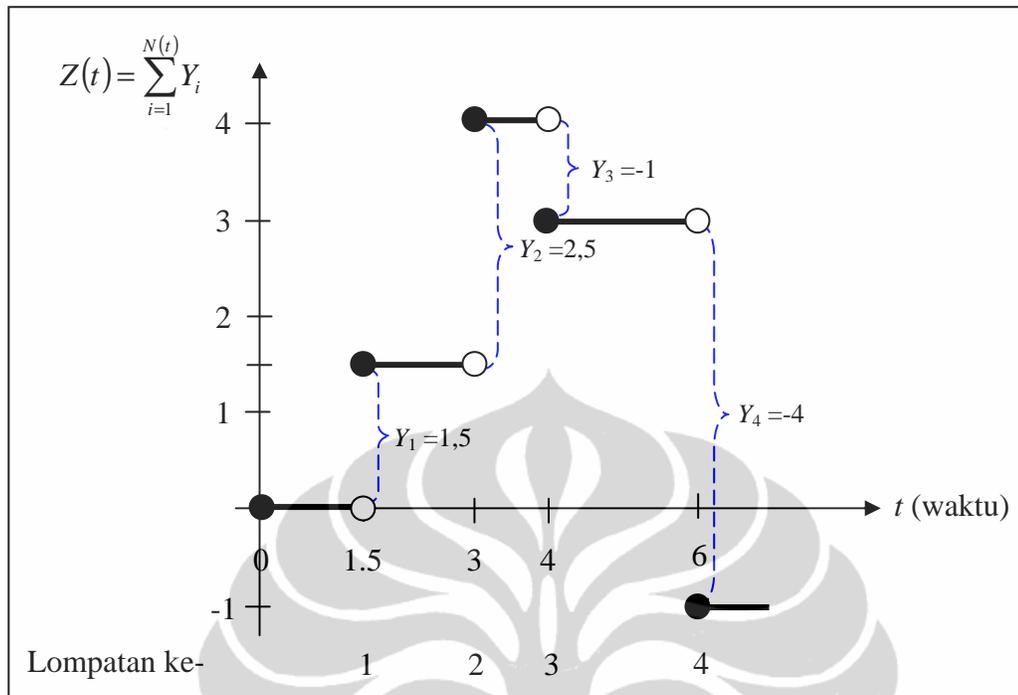
Selanjutnya dibahas proses Poisson majemuk (*compound Poisson process*) terkait dengan pembahasan suku lompatan pada model-model pergerakan harga saham.

2.5. Proses Poisson Majemuk (*Compound Poisson Process*)

Misalkan $N(t)$ adalah proses Poisson dengan intensitas $\lambda > 0$. Misalkan Y_1, Y_2, \dots adalah barisan variabel acak yang mempunyai distribusi sama. Diasumsikan variabel acak Y_1, Y_2, \dots saling bebas satu dengan yang lainnya dan juga saling bebas dengan proses Poisson $N(t)$. Berdasarkan [24], proses Poisson majemuk (*compound Poisson process*) didefinisikan sebagai

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad \text{untuk } t \geq 0.$$

Lompatan pada proses Poisson majemuk $Z(t)$ terjadi pada waktu yang sama seperti pada lompatan di proses Poisson $N(t)$, tetapi lompatan pada proses Poisson $N(t)$ selalu memiliki besar 1, sedangkan pada proses Poisson majemuk $Z(t)$ memiliki besar lompatan acak. Pada $Z(t)$, besar lompatan pertama adalah Y_1 , besar lompatan kedua adalah Y_2 , dan seterusnya. Untuk memperjelas proses Poisson majemuk, perhatikan ilustrasi berikut dengan Y_i menyatakan besar lompatan ke- i .



Gambar 2.2. Lintasan Proses Poisson Majemuk.

Berdasarkan Gambar 2.2:

- Pada $t = 1,5$ terjadi lompatan ke-1. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-1 adalah $T_1 = 1,5$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sampai $T_1 = 1,5$ adalah $N(1,5) = 1$, dengan $Y_1 = 1,5$. Jadi, besar lompatan sampai waktu $T_1 = 1,5$ adalah

$$Z(1,5) = \sum_{i=1}^{N(1,5)} Y_i = \sum_{i=1}^1 Y_i = Y_1 = 1,5.$$

- Pada $t = 3$ terjadi lompatan ke-2. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-2 adalah $T_2 = 3$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sampai $T_2 = 3$ adalah $N(3) = 2$, dengan $Y_2 = 2,5$. Jadi, besar lompatan sampai waktu $T_2 = 3$ adalah

$$Z(3) = \sum_{i=1}^{N(3)} Y_i = \sum_{i=1}^2 Y_i = Y_1 + Y_2 = 1,5 + 2,5 = 4.$$

- Pada $t = 4$ terjadi lompatan ke-3. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-3 adalah $T_3 = 4$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sampai $T_3 = 4$ adalah $N(4) = 3$, dengan $Y_3 = -1$. Jadi, besar lompatan sampai waktu $T_3 = 4$ adalah

$$Z(4) = \sum_{i=1}^{N(4)} Y_i = \sum_{i=1}^3 Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1,5 + 2,5 - 1 = 3.$$

- Pada $t = 6$ terjadi lompatan ke-4. Jadi, waktu terjadi lompatan ke-4 adalah $T_4 = 6$, dan banyaknya lompatan yang terjadi sampai $T_4 = 6$ adalah $N(6) = 4$, dengan $Y_4 = -4$. Jadi, besar lompatan sampai waktu $T_4 = 6$ adalah

$$Z(6) = \sum_{i=1}^{N(6)} Y_i = \sum_{i=1}^4 Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1,5 + 2,5 - 1 - 4 = -1.$$

Persamaan diferensial stokastik (PDS) pada (2.3) di Subbab 2.3 merupakan model difusi. Model difusi tersebut dapat diperluas dengan menambahkan suku lompatan yang dikenal sebagai model lompatan-difusi (*jump-diffusion model*) seperti yang dibahas pada subbab berikut.

2.6. Model Lompatan-Difusi (*Jump-Diffusion Model*)

Model lompatan-difusi adalah sebuah model difusi yang diganggu oleh lompatan-lompatan pada waktu-waktu acak [21]. Berdasarkan [4], sebuah model lompatan-difusi memiliki bentuk integral sebagai berikut:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s) + \sum_{i=1}^{N(t)} c(X(T_i^-), V_i), \quad (2.16)$$

untuk $t \in [0, T]$, dengan nilai awal $X(0) = X_0$. Koefisien $a(X(t))$ menyatakan koefisien *drift*, $b(X(t))$ menyatakan koefisien difusi, dan $W(t)$ proses Wiener standar. $N(t)$ adalah proses Poisson dengan intensitas λ dengan $N(t)$ menyatakan banyaknya lompatan yang sudah terjadi sampai waktu t . T_i adalah waktu terjadi lompatan ke- i , $X(T_i^-)$ adalah nilai sebelum waktu T_i yang didefinisikan sebagai limit kiri pada waktu T_i , yaitu $X(T_i^-) = \lim_{t \rightarrow T_i^-} X(t)$. V_i menyatakan besar lompatan ke- i , sedangkan $\sum_{i=1}^{N(t)} c(X(T_i^-), V_i)$ adalah proses Poisson majemuk dimana $c(X(T_i^-), V_i)$ bergantung pada $X(T_i^-)$ dan V_i .

Terkait dengan penentuan solusi analitik model PBJDVS di Subbab 3.2, selanjutnya dibahas rumus Itô untuk proses lompatan-difusi.

2.7. Rumus Itô untuk Proses Lompatan-Difusi (*Jump-Diffusion Process*)

Misalkan X adalah sebuah proses difusi dengan lompatan, didefinisikan sebagai jumlahan dari sebuah suku *drift*, integral stokastik Brownian motion, dan proses Poisson majemuk, yaitu

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) + \sum_{i=1}^{N(t)} \Delta X_i, \quad (2.17)$$

dimana $a(s)$ adalah koefisien *drift* dan $\sigma(s)$ adalah koefisien difusi. Persamaan (2.17) dapat ditulis dalam bentuk diferensial, yaitu

$$dX(t) = a(t)dt + \sigma(t)dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \Delta X_i\right). \quad (2.18)$$

Berdasarkan [6], untuk fungsi $C_{1,2}$ $f : [0, T] \times R \rightarrow R$, rumus Itô dalam notasi integral untuk proses $Y(t) = f(t, X(t))$ dapat direpresentasikan sebagai

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_0^t \left(\frac{\partial f(z, X(z))}{\partial z} + a(z) \frac{\partial f(z, X(z))}{\partial x} \right) dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(z) \frac{\partial^2 f(z, X(z))}{\partial x^2} dz + \int_0^t \sigma(z) \frac{\partial f(z, X(z))}{\partial x} dW(z) \\ &+ \sum_{\{i \geq 1, T_i \leq t\}} (f(X(T_i^-) + \Delta X(T_i)) - f(X(T_i^-))). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Misalkan T_i adalah waktu terjadi lompatan ke- i . ΔX_i pada persamaan (2.17) dan (2.18) bersesuaian dengan lompatan ke- i , yaitu $\Delta X_i = X(T_i) - X(T_i^-)$, dengan $X(T_i)$ menyatakan nilai X pada waktu T_i . Pada suku lompatan persamaan (2.19), himpunan $\{i \geq 1, T_i \leq t\}$ menyatakan himpunan waktu terjadinya lompatan ke- i , yaitu T_i , untuk lompatan-lompatan yang terjadi sampai waktu ke- t .

Pada subbab berikut dibahas metode Euler-Maruyama (EM) untuk model PDS yang tidak mencakup faktor lompatan. Pembahasan metode EM ini terkait dengan aproksimasi kuadrat volatilitas di Subbab 3.3.

2.8. Metode Euler-Maruyama (EM)

Pandang kembali PDS Itô pada persamaan (2.3) di Subbab 2.3, yaitu

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t). \quad (2.20)$$

Untuk dapat mengaproksimasi solusi $X(t)$ yang memenuhi persamaan (2.20) dibutuhkan metode numerik, misalnya metode EM yang memenuhi PDS Itô.

Untuk mengaproksimasi solusi persamaan (2.20), mula-mula diskritisasi interval waktu $[0, T]$ sebanyak bilangan bulat N positif dengan memilih besar

langkah (*stepsize*) Δt sedemikian sehingga memenuhi $\Delta t = \frac{T}{N}$. Titik diskritisasi

untuk mengaproksimasi solusi persamaan (2.20) adalah $t_j = j\Delta t$, dengan

$j = 0, 1, 2, \dots, N$. Menurut [11], metode EM untuk mengaproksimasi solusi persamaan (2.20) berbentuk

$$X(t_{j+1}) = X(t_j) + f(X(t_j))\Delta t + g(X(t_j))\Delta W(t_j), \quad (2.21)$$

dengan $\Delta W(t_j) = (W(t_{j+1}) - W(t_j))$ perubahan (*increment*) proses Wiener standar.

Selanjutnya dibahas metode numerik aturan trapesium majemuk (*composite trapezoidal rule*) terkait dengan pembahasan aproksimasi integral di Subbab 3.4.

2.9. Aturan Trapesium Majemuk (*Composite Trapezoidal Rule*)

Misalkan $h = \frac{q-p}{n}$ dan $x_j = p + jh$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$. Maka berdasarkan [5]

aturan trapesium majemuk untuk n subinterval adalah

$$\int_p^q f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f(p) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(q) \right). \quad (2.22)$$

Terkait dengan pembahasan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS di Subbab 3.6, selanjutnya dibahas *probability density function* (pdf) Eksponensial dan Gamma.

2.10. Probability Density Function (pdf) Eksponensial dan Gamma

Berdasarkan [26], suatu variabel acak nonnegatif X dikatakan mempunyai distribusi Eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ jika pdf X berbentuk

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Sedangkan berdasarkan [13], suatu variabel acak nonnegatif Y dikatakan mempunyai distribusi Gamma dengan parameter $\lambda > 0$ dan $\alpha > 0$ jika pdf Y berbentuk

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, & \text{untuk } y > 0, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Pada subbab berikut dibahas jumlahan dan konvolusi terkait dengan penentuan distribusi bersyarat untuk suku yang mengandung lompatan pada Subsubbab 3.6.1.

2.11. Jumlahan dan Konvolusi

Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak yang saling saling bebas, dimana X dan Y memiliki pdf berturut-turut f_X dan f_Y , maka berdasarkan [26] pdf f_Z dari $Z = X + Y$ adalah konvolusi dari pdf f_X dan f_Y , yaitu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-u)f_Y(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-v)f_X(v)dv. \quad (2.25)$$

Selanjutnya dibahas model-model pergerakan harga saham terkait dengan pembentukan model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan Volatilitas Stokastik (PBJDVS) di Subbab 3.1.

2.12. Model-Model Pergerakan Harga Saham

2.12.1. Model Black-Scholes (1973)

F. Black dan M. Scholes (1973) memperkenalkan sebuah model yang dikenal sebagai model Black-Scholes (BS). Model ini adalah model pergerakan harga saham yang paling sederhana [21] dibandingkan dengan model pergerakan harga saham lainnya, seperti model Heston. Berdasarkan [21], harga saham $S(t)$ adalah solusi dari PDS

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0,$$

dengan α adalah ekspektasi imbal hasil sesaat saham (*instantaneous expected return of stock*), σ adalah volatilitas imbal hasil sesaat saham (*instantaneous volatility of stock return*), dan $W(t)$ proses Wiener standar. Model BS memiliki 2 buah parameter, yaitu $\theta_{BS} = (\alpha, \sigma)$.

Pada pembahasan selanjutnya dibahas model *Merton Jump-Diffusion* sebagai perluasan model BS.

2.12.2. Model Merton Jump-Diffusion (1976)

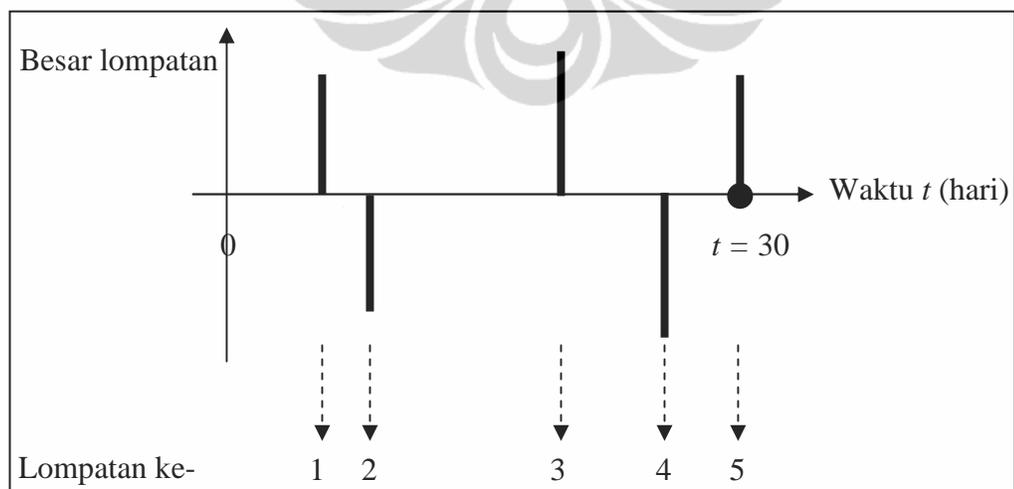
R.C. Merton (1976) memperluas model BS menjadi suatu model yang dikenal sebagai model *Merton Jump-Diffusion* (MJD) yang dapat menangkap lompatan. Berdasarkan [2], $S(t)$ adalah solusi dari PDS

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right), \quad t \geq 0. \quad (2.26)$$

Pada persamaan (2.26), α adalah ekspektasi imbal hasil sesaat saham, σ adalah volatilitas imbal hasil sesaat saham bersyarat bahwa lompatan tidak terjadi [18], V_i adalah besar lompatan ke- i . Berdasarkan [18], besar lompatan didefinisikan sebagai rasio harga saham setelah melompat dengan harga saham sebelum melompat. $W(t)$ proses Wiener standar, $N(t)$ proses Poisson dengan intensitas λ dengan $N(t)$ menyatakan banyaknya lompatan yang sudah terjadi sampai waktu t , λ intensitas

lompatan harga saham. Diasumsikan $Y_i = \log V_i \sim iid.normal(\mu, \delta^2)$ dan $k \equiv E(V_i - 1)$, serta $W(t)$, $N(t)$, dan V_i adalah saling bebas. Pada persamaan (2.26), $(\alpha - \lambda k)dt$ adalah suku *drift*, $\sigma dW(t)$ adalah suku difusi, dan $d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right)$ adalah suku lompatan dengan $\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)$ menyatakan proses Poisson majemuk seperti yang telah dibahas pada Subbab 2.5. Dengan demikian model MJD memiliki 5 buah parameter, yaitu $\theta_{MJD} = (\alpha, \sigma, \lambda, \delta, \mu)$. Pada model ini, waktu muncul lompatan dan besar lompatan bersifat acak, dimana waktu muncul lompatan dan besar lompatan tersebut saling bebas.

Karena $N(t)$ menyatakan banyaknya lompatan yang sudah terjadi sampai waktu t , berarti lompatan terakhir yang sudah terjadi sampai waktu t adalah lompatan ke- $N(t)$. Jika pada waktu t sendiri terjadi lompatan, maka lompatan tersebut adalah lompatan yang terakhir sampai waktu t . Berarti lompatan pada waktu t tersebut adalah lompatan ke- $N(t)$. Karena pada waktu t adalah lompatan ke- $N(t)$, maka besar lompatan pada waktu t adalah $V_{N(t)}$. Untuk memperjelas hal itu, perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 2.3. Ilustrasi $N(t)$ dan $V_{N(t)}$

Dari Gambar 2.3 terlihat bahwa sampai waktu $t = 30$ sudah terjadi 5 kali lompatan (3 lompatan ke atas dan 2 lompatan ke bawah), jadi $N(30) = 5$. Pada waktu $t = 30$ terjadi lompatan, jadi lompatan tersebut adalah lompatan yang terakhir sampai waktu $t = 30$. Lompatan pada waktu $t = 30$ tersebut adalah lompatan ke-5, besarnya V_5 .

Karena besar lompatan pada waktu t adalah $V_{N(t)}$, maka berdasarkan definisi besar lompatan pada Halaman 20 diperoleh

$$\frac{S(t)}{S(t^-)} = V_{N(t)},$$

dengan $S(t^-)$ adalah harga saham sesaat sebelum melompat.

Simbol d pada suku ke-3 ruas kanan persamaan (2.26) menyatakan perubahan dalam selang waktu yang singkat. Berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15), probabilitas banyaknya lompatan lebih dari satu kali dalam selang waktu tersebut dapat diabaikan. Jadi, jika terjadi lompatan dalam selang waktu tersebut, maka banyaknya lompatan yang terjadi dalam selang waktu tersebut dapat dianggap

satu kali, sehingga dapat ditulis $dN(t) = 1$. Suku $d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right)$ adalah perubahan $\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)$. Perubahan yang dimaksud adalah nilai $\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)$ pada $t + dt$ dikurangi dengan nilai $\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)$ pada t . Jadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1) - \sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1).$$

Karena $dN(t) = N(t + dt) - N(t)$,

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1) - \sum_{i=1}^{N(t+dt) - dN(t)} (V_i - 1). \quad (2.27)$$

Jika terjadi lompatan, maka $dN(t) = 1$. Jadi persamaan (2.27) menjadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1) - \sum_{i=1}^{N(t+dt)-1} (V_i - 1). \quad (2.28)$$

Suku $\sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1)$ dan $\sum_{i=1}^{N(t+dt)-1} (V_i - 1)$ pada persamaan (2.28) dijabarkan dan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1) = (V_1 - 1) + (V_2 - 1) + \dots + (V_{N(t+dt)-1} - 1) + (V_{N(t+dt)} - 1) \quad (2.29)$$

dan

$$\sum_{i=1}^{N(t+dt)-1} (V_i - 1) = (V_1 - 1) + (V_2 - 1) + \dots + (V_{N(t+dt)-1} - 1). \quad (2.30)$$

Persamaan (2.29) dikurangkan dengan persamaan (2.30) diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = V_{N(t+dt)} - 1. \quad (2.31)$$

Sementara, jika tidak terjadi lompatan, maka $dN(t) = 0$. Jadi persamaan (2.27) menjadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1) - \sum_{i=1}^{N(t+dt)} (V_i - 1),$$

diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = 0. \quad (2.32)$$

Berdasarkan persamaan (2.31) dan (2.32) diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right) = \begin{cases} V_{N(t+dt)} - 1, & \text{jika terjadi lompatan,} \\ 0 & \text{jika tidak terjadi lompatan.} \end{cases} \quad (2.33)$$

Persamaan (2.33) digunakan pada pembahasan penentuan solusi analitik model PBJDVS pada Subbab 3.2.

Selanjutnya dibahas model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* sebagai perluasan model MJD terkait dengan pembahasan pembentukan model PBJDVS di Subbab 3.1.

2.12.3. Model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (1998)

C.A. Ramezani dan Y. Zeng (1998) memperluas model MJD menjadi suatu model yang dikenal sebagai model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* (PBJD) [22]. Pada model PBJD, waktu muncul lompatan dan besar lompatan harga saham dibedakan untuk lompatan ke atas dan ke bawah. Sehingga model PBJD adalah

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \xi)dt + \sigma dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)\right), \quad t \geq 0, \quad (2.34)$$

dengan

$$\xi = \frac{\lambda_u}{\eta_u - 1} - \frac{\lambda_d}{\eta_d + 1}.$$

Pada persamaan (2.34), α adalah ekspektasi imbal hasil sesaat saham, σ adalah volatilitas imbal hasil sesaat saham bersyarat bahwa lompatan tidak terjadi, $W(t)$ adalah proses Wiener standar, V_i^u dan V_i^d berturut-turut adalah besar lompatan ke atas dan ke bawah ke- i . $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ berturut-turut adalah proses Poisson dengan intensitas λ_u dan λ_d . $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ berturut-turut menyatakan banyaknya lompatan ke atas dan ke bawah yang sudah terjadi sampai waktu t , dengan $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ saling bebas. Notasi u, d berturut-turut menyatakan lompatan ke atas dan ke bawah. Pada model ini, waktu muncul lompatan dan besar lompatan bersifat acak, dimana waktu muncul dan besar lompatan tersebut saling bebas. Pada persamaan (2.34), $(\alpha - \xi)$ adalah suku *drift*, σ adalah suku difusi, dan

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)\right)$$

adalah suku lompatan dengan $\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)$ dan $\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)$ menyatakan proses

Poisson majemuk seperti yang telah dibahas pada Subbab 2.5.

Assumsi yang digunakan dalam model PBJD adalah besar lompatan ke atas V_i^u berdistribusi Pareto (η_u) dan besar lompatan ke bawah V_i^d berdistribusi

Beta $(\eta_d, 1)$. Waktu muncul lompatan ke atas dan ke bawah diasumsikan saling bebas.

Dengan demikian model PBJD memiliki 6 buah parameter, yaitu

$$\theta_{PBJD} = (\alpha, \sigma, \lambda_u, \lambda_d, \eta_u, \eta_d).$$

Berdasarkan [22], distribusi Pareto (η_u) memiliki pdf

$$f_{V^u}(x) = \frac{\eta_u}{x^{\eta_u+1}}, \quad x \geq 1, \quad (2.35)$$

dengan ekspektasi

$$E(V^u) = \frac{\eta_u}{\eta_u - 1}. \quad (2.36)$$

Sedangkan distribusi Beta $(\eta_d, 1)$ memiliki pdf

$$f_{V^d}(x) = \eta_d x^{\eta_d-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (2.37)$$

dengan ekspektasi

$$E(V^d) = \frac{\eta_d}{\eta_d + 1}. \quad (2.38)$$

Terkait dengan pembahasan pembentukan model PBJDVS di Subbab 3.1, selanjutnya dibahas model Heston sebagai model volatilitas stokastik.

2.12.4. Model Heston (1993)

Steven L. Heston (1993) memperkenalkan sebuah model volatilitas stokastik yang dikenal sebagai model Heston [7]. Harga saham pada waktu t , yaitu $S(t)$, adalah solusi dari PDS

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t), \quad t \geq 0, \quad (2.39)$$

dengan α adalah ekspektasi imbal hasil sesaat saham. $W_1(t)$ adalah proses Wiener standar, koefisien difusi $\sqrt{v(t)}$ menyatakan volatilitas stokastik yang mengikuti persamaan

$$dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta \sqrt{v(t)} dW_2(t), \quad (2.40)$$

dimana $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ berkorelasi dengan koefisien korelasi $\rho \in [-1, 1]$.

Bukti bahwa $\rho \in [-1,1]$ dapat dilihat pada Lampiran 2.

Parameter a pada persamaan (2.40) menyatakan kecepatan pembalikan $v(t)$ ke rata-rata jangka panjang b , dan θ adalah parameter yang menyatakan gangguan variansi (*variance noise*) [7]. Parameter $a, b, \theta > 0$.

Berdasarkan [9], karena $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ berkorelasi dengan koefisien korelasi ρ , maka kovariansi $dW_1(t)$ dengan $dW_2(t)$ dapat ditulis sebagai

$$\text{Cov}(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt. \quad (2.41)$$

Bukti persamaan (2.41) dapat dilihat pada Lampiran 3.

Berdasarkan persamaan (2.41), bentuk korelasi $dW_1(t)$ dengan $dW_2(t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t), \quad (2.42)$$

dengan $W_2(t)$ dan $W_3(t)$ adalah proses Wiener standar yang saling bebas.

Bukti persamaan (2.41) ke (2.42) dapat dilihat pada Lampiran 4, dan bukti sebaliknya dapat dilihat pada Lampiran 5.

Model PBJD dan model Heston digunakan untuk membentuk model PBJDVS, sehingga model PBJDVS yang terbentuk berupa sebuah sistem PDS. Pembahasan lebih lanjut mengenai model PBJDVS dibahas di Subbab 3.1.

BAB 3
SOLUSI ANALITIK DAN *PROBABILITY DENSITY FUNCTION*
***LOG-RETURN* SAHAM SATU PERIODE MODEL PBJDVS**

Pada bab ini dibahas model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan Volatilitas Stokastik (PBJDVS) dan materi-materi terkait model PBJDVS, yaitu solusi analitik dan *probability density function* (pdf). Model PBJDVS dimaksudkan sebagai model harga saham. Oleh karena itu pdf yang dibahas adalah pdf *log-return* saham, khususnya adalah pdf *log-return* saham satu periode. Solusi analitik diperoleh dengan menggunakan rumus Itô pada model PBJDVS.

3.1. Model *Pareto-Beta Jump-Diffusion* dengan Volatilitas Stokastik (PBJDVS)

Model PBJD memiliki koefisien difusi σ konstan yang menyatakan volatilitas model (lihat persamaan (2.34) di Bab 2). Sedangkan model Heston memiliki koefisien difusi stokastik $\sqrt{v(t)}$ (lihat persamaan (2.39) di Bab 2). Pada model PBJDVS, volatilitas stokastik $\sqrt{v(t)}$, yang memenuhi persamaan (2.40) di Bab 2, digunakan sebagai pengganti volatilitas konstan σ pada model PBJD. Sehingga model PBJDVS berbentuk sebuah sistem PDS berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \xi)dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)\right), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta\sqrt{v(t)}dW_2(t), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

dengan

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t). \quad (3.3)$$

Pada model PBJDVS, waktu muncul lompatan dan besar lompatan harga saham dibedakan untuk lompatan ke atas dan ke bawah. Waktu muncul lompatan dan besar lompatan bersifat acak. Dalam model ini, besar lompatan ke atas $V_1^u, V_2^u, V_3^u, \dots$ masing-masing diasumsikan berdistribusi Pareto (η_u) dan besar lompatan ke bawah

$V_1^d, V_2^d, V_3^d, \dots$ masing-masing diasumsikan berdistribusi Beta $(\eta_d, 1)$. Parameter-parameter $\eta_u, \eta_d > 0$. Berdasarkan [22], distribusi Pareto (η_u) memiliki pdf

$$f_{V^u}(x) = \frac{\eta_u}{x^{\eta_u+1}}, \quad x \geq 1 \quad (3.4)$$

dengan ekspektasi

$$E(V^u) = \frac{\eta_u}{\eta_u - 1}. \quad (3.5)$$

Sedangkan distribusi Beta $(\eta_d, 1)$ memiliki pdf

$$f_{V^d}(x) = \eta_d x^{\eta_d-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.6)$$

dengan ekspektasi

$$E(V^d) = \frac{\eta_d}{\eta_d + 1}. \quad (3.7)$$

Notasi u, d berturut-turut menyatakan lompatan ke atas dan ke bawah. Proses $W_1(t)$, $W_2(t)$, dan $W_3(t)$ adalah proses Wiener standar, dengan $W_2(t)$ dan $W_3(t)$ saling bebas, V_i^u dan V_i^d berturut-turut adalah besar lompatan ke atas dan ke bawah ke- i . Berdasarkan [18], besar lompatan didefinisikan sebagai rasio harga saham setelah melompat dengan harga saham sebelum melompat. $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ berturut-turut adalah proses Poisson dengan intensitas $\lambda_u > 0$ dan $\lambda_d > 0$, $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ berturut-turut menyatakan banyaknya lompatan ke atas dan ke bawah yang sudah terjadi sampai waktu t .

Pada model PBJDVS (persamaan (3.1) dan (3.2)) berlaku:

- Suku yang tidak mengandung lompatan dan suku yang mengandung lompatan adalah saling bebas. Suku yang tidak mengandung lompatan, yaitu

$$(\alpha - \xi)dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t)$$

pada persamaan (3.1) dan

$$dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta\sqrt{v(t)}dW_2(t)$$

pada persamaan (3.2), di dalamnya terdapat $W_1(t)$ dan $W_2(t)$. Sedangkan suku yang mengandung lompatan, yaitu

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right)$$

pada persamaan (3.1), di dalamnya terdapat $N^u(t)$, V_i^u , $N^d(t)$, V_i^d . Jadi kumpulan $W_1(t)$ dan $W_2(t)$ saling bebas dengan kumpulan $N^u(t)$, V_i^u , $N^d(t)$, V_i^d .

- b. $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ berkorelasi dengan koefisien korelasi ρ , dengan $\rho \in [-1, 1]$.
- c. $N^u(t)$, V_i^u , $N^d(t)$, V_i^d saling bebas.
 $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ adalah proses Poisson. Proses Poisson menentukan waktu lompatan. Oleh karena itu:
 - waktu muncul lompatan ke atas dan ke bawah saling bebas,
 - waktu muncul lompatan dan besar lompatan saling bebas.
- d. $V_1^u, V_2^u, V_3^u, \dots$ saling bebas.
- e. $V_1^d, V_2^d, V_3^d, \dots$ saling bebas.

Dalam persamaan (3.1), α adalah ekspektasi imbal hasil sesaat saham, dengan $\alpha \in Real$, $\xi = \frac{\lambda_u}{\eta_u - 1} - \frac{\lambda_d}{\eta_d + 1}$, dan $\sqrt{v(t)}$ adalah volatilitas imbal hasil sesaat saham bersyarat bahwa lompatan tidak terjadi.

Dalam persamaan (3.2), a adalah kecepatan pembalikan $v(t)$ ke rata-rata jangka panjang b , dengan $a, b, \theta > 0$. Dengan demikian model PBJDVS mempunyai 9 buah parameter, yaitu $\theta_{PBJDVS} = (\alpha, a, b, \theta, \rho, \lambda_u, \lambda_d, \eta_u, \eta_d)$.

Pada subbab selanjutnya dibahas penentuan solusi analitik model PBJDVS, dimana untuk mencari solusi analitik model PBJDVS digunakan penerapan rumus Itô yang telah dibahas pada Subbab 2.7 di Bab 2.

3.2. Solusi Analitik Model PBJDVS

Solusi analitik model PBJDVS ditentukan dari PDS (3.1). Solusi PDS (3.1) dapat diperoleh dengan menerapkan rumus Itô seperti yang telah dibahas pada Subbab 2.7 di Bab 2). Fungsi f yang digunakan pada rumus Itô adalah fungsi log. Pemilihan fungsi log ini terkait dengan penyederhanaan PDS (3.1) ketika rumus Itô diterapkan. PDS (3.1) ditulis kembali sebagai

$$dS(t) = (\alpha - \xi)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t) + S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) + S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right). \quad (3.8)$$

Untuk rumus Itô pada PDS (2.18) di Bab 2, suku lompatan berbentuk

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \Delta X_i\right) \text{ dengan } \Delta X_i = X(T_i) - X(T_i^-),$$

sehingga dapat ditulis kembali sebagai

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \Delta X_i\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (X(T_i) - X(T_i^-))\right). \quad (3.9)$$

Sedangkan pada persamaan (3.8), suku lompatan berbentuk

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) + S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right). \quad (3.10)$$

Misalkan T_i^u menyatakan waktu lompatan ke atas ke- i dan T_i^d menyatakan waktu lompatan ke bawah ke- i . Dengan demikian $S(T_i^u)$ menyatakan harga saham setelah melompat ke atas ke- i dan $S(T_i^{u-})$ menyatakan harga saham sesaat sebelum melompat ke atas ke- i . Demikian pula dengan $S(T_i^d)$ yang menyatakan harga saham setelah melompat ke bawah ke- i dan $S(T_i^{d-})$ menyatakan harga saham sesaat sebelum melompat ke bawah ke- i .

Agar rumus Itô dapat diterapkan ke persamaan (3.8), maka bentuk persamaan (3.10) harus dinyatakan dalam bentuk persamaan (3.9), yaitu

$$\begin{aligned}
& S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) + S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right) \\
&= d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(S(T_i^u) - S(T_i^{u^-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)}(S(T_i^d) - S(T_i^{d^-}))\right). \\
&= d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(S(T_i^u) - S(T_i^{u^-}))\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(S(T_i^d) - S(T_i^{d^-}))\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(S(T_i^u) - S(T_i^{u^-}))\right) \tag{3.12}$$

dan

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(S(T_i^d) - S(T_i^{d^-}))\right). \tag{3.13}$$

Pandang suku ruas kiri persamaan (3.1), yaitu $\frac{dS(t)}{S(t)}$. Suku $\frac{dS(t)}{S(t)}$ artinya

perubahan harga saham dibandingkan dengan harga saham semula. $S(t)$ pada $\frac{dS(t)}{S(t)}$

berarti menyatakan harga saham pada saat t , yaitu harga saham sebelum berubah.

Akan ditunjukkan terlebih dahulu persamaan (3.12) dipenuhi. Jika tidak terjadi lompatan ke atas, maka berdasarkan persamaan (2.32) di Bab 2, suku

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right)$$

pada persamaan (3.12) dapat ditulis sebagai

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) = 0. \tag{3.14}$$

Jadi

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) = 0. \tag{3.15}$$

Jika terjadi lompatan ke atas dalam selang waktu yang singkat, maka berdasarkan (2.14) dan (2.15) di Bab 2, banyaknya lompatan yang terjadi dalam selang waktu tersebut dapat dianggap satu kali. Berdasarkan persamaan (2.31) di Bab 2 dan misalkan lompatan ke atas yang terjadi adalah lompatan ke atas yang ke- i , maka suku

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right)$$

pada persamaan (3.12) dapat ditulis sebagai

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = V_i^u - 1. \quad (3.16)$$

Waktu terjadi lompatan ke atas ke- i adalah T_i^u . Sedangkan $S(t)$ pada persamaan (3.12) artinya harga saham pada saat t , yaitu harga saham sebelum berubah. Jadi jika terjadi lompatan ke atas ke- i , berarti $S(t)$ tersebut adalah harga saham sebelum T_i^u .

Jadi $S(t) = S(T_i^{u-})$. Menggunakan persamaan (3.16) dan $S(t) = S(T_i^{u-})$ diperoleh

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = S(T_i^{u-})(V_i^u - 1). \quad (3.17)$$

Berdasarkan persamaan (3.15) dan (3.17) diperoleh

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = \begin{cases} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1), & \text{jika terjadi lompatan ke atas ke } -i, \\ 0, & \text{jika tidak terjadi lompatan ke atas.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Untuk membuktikan persamaan (3.12), yaitu

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (S(T_i^u) - S(T_i^{u-}))\right),$$

terlebih dahulu ditunjukkan bahwa

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right). \quad (3.19)$$

Namun sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \begin{cases} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1), & \text{jika terjadi lompatan ke atas ke } -i, \\ 0, & \text{jika tidak terjadi lompatan ke atas.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Pandang suku ruas kiri persamaan (3.20), yaitu

$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right)$. Suku $d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right)$ adalah perubahan

$\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)$. Perubahan yang dimaksud adalah nilai $\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)$ pada

$t + dt$ dikurangi dengan nilai $\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)$ pada t . Jadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) - \sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1).$$

Karena $dN^u(t) = N^u(t+dt) - N^u(t)$, maka

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) - \sum_{i=1}^{N^u(t+dt) - dN^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1). \quad (3.21)$$

Sementara, jika tidak terjadi lompatan, maka $dN^u(t) = 0$. Jadi persamaan (3.21)

menjadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) - \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1),$$

diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = 0. \quad (3.22)$$

Jika terjadi lompatan, maka $dN^u(t) = 1$. Jadi persamaan (3.21) menjadi

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) - \sum_{i=1}^{N^u(t+dt)-1} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1). \quad (3.23)$$

Jika lompatan ke atas yang terjadi pada interval waktu $[t, t+dt]$ adalah lompatan ke atas ke- k , maka sesaat setelah interval waktu $[t, t+dt]$, banyaknya lompatan yang telah terjadi adalah k . Jadi

$$N^u(t+dt) = k.$$

Substitusi $N^u(t+dt) = k$ ke persamaan (3.23) diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \sum_{i=1}^k S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) - \sum_{i=1}^{k-1} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1). \quad (3.24)$$

Suku $\sum_{i=1}^k S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)$ dan $\sum_{i=1}^{k-1} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)$ pada persamaan (3.24) dijabarkan dan diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) &= S(T_1^{u-})(V_1^u - 1) + S(T_2^{u-})(V_2^u - 1) + \dots + S(T_{k-1}^{u-})(V_{k-1}^u - 1) \\ &\quad + S(T_k^{u-})(V_k^u - 1) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dan

$$\sum_{i=1}^{k-1} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1) = S(T_1^{u-})(V_1^u - 1) + S(T_2^{u-})(V_2^u - 1) + \dots + S(T_{k-1}^{u-})(V_{k-1}^u - 1). \quad (3.26)$$

Persamaan (3.25) dikurangkan dengan persamaan (3.26) diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = S(T_k^{u-})(V_k^u - 1). \quad (3.27)$$

Berdasarkan persamaan (3.22) dan (3.27) diperoleh

$$d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right) = \begin{cases} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1), & \text{jika terjadi lompatan ke atas ke } -i, \\ 0, & \text{jika tidak terjadi lompatan ke atas.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Jadi persamaan (3.20) terbukti.

Berdasarkan persamaan (3.18) dan (3.28) sudah dapat ditunjukkan bahwa

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} S(T_i^{u-})(V_i^u - 1)\right). \quad (3.29)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa persamaan (3.12) berlaku.

Persamaan (3.29) dapat ditulis kembali sebagai

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (S(T_i^{u-})V_i^u - S(T_i^{u-}))\right). \quad (3.30)$$

Berdasarkan definisi besar lompatan yang telah dijelaskan pada Subsubbab 2.12.2 di Halaman 20, maka besar lompatan ke atas ke- i adalah

$$V_i^u = \frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \quad (3.31)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$S(T_i^{u-})V_i^u = S(T_i^u). \quad (3.32)$$

Substitusi persamaan (3.32) ke (3.30) diperoleh

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(S(T_i^u) - S(T_i^{u-}))\right). \quad (3.33)$$

Dengan demikian persamaan (3.12) terbukti.

Cara yang analog seperti ketika membuktikan persamaan (3.12) dapat diterapkan untuk membuktikan persamaan (3.13) yaitu dengan menggantikan notasi u (lompatan ke atas) dengan notasi d (lompatan ke bawah) sehingga diperoleh

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(S(T_i^{d-})V_i^d - S(T_i^d))\right). \quad (3.34)$$

Berdasarkan definisi besar lompatan yang telah dijelaskan pada Subsubbab 2.12.2 di Halaman 20, maka besar lompatan ke bawah ke- i adalah

$$V_i^d = \frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \quad (3.35)$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$S(T_i^{d-})V_i^d = S(T_i^d). \quad (3.36)$$

Substitusi persamaan (3.36) ke (3.34) diperoleh

$$S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(S(T_i^d) - S(T_i^{d-}))\right). \quad (3.37)$$

Dengan demikian persamaan (3.13) terbukti.

Menggunakan persamaan (3.33) dan (3.37) diperoleh

$$\begin{aligned}
S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}(V_i^u - 1)\right) + S(t)d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}(V_i^d - 1)\right) &= d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}\left(S(T_i^u) - S(T_i^{u-})\right)\right) \\
&\quad + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)}\left(S(T_i^d) - S(T_i^{d-})\right)\right) \\
&= d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}\left(S(T_i^u) - S(T_i^{u-})\right) + \sum_{i=1}^{N^d(t)}\left(S(T_i^d) - S(T_i^{d-})\right)\right). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.38) disubstitusikan ke persamaan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned}
dS(t) &= (\alpha - \xi)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t) \\
&\quad + d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)}\left(S(T_i^u) - S(T_i^{u-})\right) + \sum_{i=1}^{N^d(t)}\left(S(T_i^d) - S(T_i^{d-})\right)\right) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Jika persamaan (3.39) ditulis dalam bentuk integral diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^t dS(z) &= \int_0^t (\alpha - \xi)S(z)dz + \int_0^t \sqrt{v(z)}S(z)dW_1(z) \\
&\quad + \int_0^t d\left(\sum_{i=1}^{N^u(z)}\left(S(T_i^u) - S(T_i^{u-})\right) + \sum_{i=1}^{N^d(z)}\left(S(T_i^d) - S(T_i^{d-})\right)\right). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Berdasarkan [28],

$$\int_0^t dF(x) = F(x) \Big|_0^t = F(t) - F(0). \tag{3.41}$$

Menggunakan persamaan (3.41), maka suku ruas kiri persamaan (3.40) dapat ditulis sebagai

$$\int_0^t dS(z) = S(z) \Big|_0^t = S(t) - S(0). \tag{3.42}$$

Menggunakan persamaan (3.41), maka suku terakhir ruas kanan persamaan (3.40) dapat ditulis sebagai

$$\int_0^t d\left(\sum_{i=1}^{N^u(z)}\left(S(T_i^u) - S(T_i^{u-})\right) + \sum_{i=1}^{N^d(z)}\left(S(T_i^d) - S(T_i^{d-})\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{N^u(z)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(z)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right) \Big|_0^t \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{N^u(0)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(0)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right). \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi proses Poisson pada Subbbab 2.4 bagian c, maka $N^u(0) = 0$ dan $N^d(0) = 0$. Jadi, persamaan (3.43) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
&\int_0^t d \left(\sum_{i=1}^{N^u(z)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(z)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^0 (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^0 (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right). \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Karena

$$\sum_{i=1}^0 (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) = 0$$

dan

$$\sum_{i=1}^0 (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) = 0,$$

maka persamaan (3.44) menjadi

$$\begin{aligned}
&\int_0^t d \left(\sum_{i=1}^{N^u(z)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(z)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (s(T_i^u) - s(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)} (s(T_i^d) - s(T_i^{d-})) \right). \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.42) dan (3.45) ke (3.40) diperoleh persamaan (3.39) dalam bentuk integral, yaitu

$$\begin{aligned}
S(t) = S(0) &+ \int_0^t (\alpha - \xi) S(z) dz + \int_0^t \sqrt{v(z)} S(z) dW_1(z) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (S(T_i^u) - S(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)} (S(T_i^d) - S(T_i^{d-})) \right). \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Suku $\sum_{i=1}^{N^u(t)} (S(T_i^u) - S(T_i^{u-})) + \sum_{i=1}^{N^d(t)} (S(T_i^d) - S(T_i^{d-}))$ pada persamaan (3.46) menyatakan penjumlahan untuk semua lompatan yang terjadi sampai waktu t . Sehingga rumus Itô pada persamaan (2.19) di Bab 2 dapat diterapkan ke persamaan (3.46). Fungsi f yang digunakan pada rumus Itô adalah fungsi log.

Dengan menerapkan rumus Itô ke persamaan (3.46) diperoleh

$$\begin{aligned}
\log S(t) - \log S(0) &= \int_0^t \left(\frac{\partial \log S(z)}{\partial z} + (\alpha - \xi) S(z) \frac{\partial \log S(z)}{\partial S(z)} \right) dz \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t (\sqrt{v(z)})^2 (S(z))^2 \frac{\partial^2 \log S(z)}{\partial (S(z))^2} dz + \int_0^t \sqrt{v(z)} S(z) \frac{\partial \log S(z)}{\partial S(z)} dW_1(z) \\
&+ \sum_{\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) + \sum_{\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right),
\end{aligned}$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned}
\log \frac{S(t)}{S(0)} &= \int_0^t \left(0 + (\alpha - \xi) S(z) \frac{1}{S(z)} \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^t v(z) (S(z))^2 \left(-\frac{1}{(S(z))^2} \right) dz \\
&+ \int_0^t \sqrt{v(z)} S(z) \frac{1}{S(z)} dW_1(z) + \sum_{\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) + \sum_{\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right).
\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}
\log \frac{S(t)}{S(0)} &= (\alpha - \xi)t - \frac{1}{2} \int_0^t v(z) dz + \int_0^t \sqrt{v(z)} dW_1(z) \\
&+ \sum_{\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) + \sum_{\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Pada suku ke-4 ruas kanan persamaan (3.47) (suku lompatan ke atas), himpunan $\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}$ menyatakan himpunan waktu terjadinya lompatan ke atas ke- i , yaitu T_i^u , untuk lompatan-lompatan ke atas yang terjadi sampai waktu ke- t .

Sedangkan himpunan $\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}$ pada suku ke-5 ruas kanan persamaan (3.47) (suku lompatan ke bawah), menyatakan himpunan waktu terjadinya lompatan ke ke bawah ke- i , yaitu T_i^d , untuk lompatan-lompatan ke bawah yang terjadi sampai waktu ke- t . Jadi, sesuai dengan definisi $N^u(t)$ dan $N^d(t)$ pada Subbab 3.1, suku lompatan ke atas dan ke bawah pada persamaan (3.47) berturut-turut dapat ditulis sebagai

$$\sum_{\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^u(t)} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) \quad (3.48)$$

dan

$$\sum_{\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^d(t)} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right). \quad (3.49)$$

Untuk lompatan ke atas, substitusi persamaan (3.31) ke (3.48) diperoleh

$$\sum_{\{i \geq 1, T_i^u \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^u(t)} \log \left(\frac{S(T_i^u)}{S(T_i^{u-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^u(t)} \log V_i^u. \quad (3.50)$$

Sedangkan untuk lompatan ke bawah, substitusi persamaan (3.35) ke (3.49) diperoleh

$$\sum_{\{i \geq 1, T_i^d \leq t\}} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^d(t)} \log \left(\frac{S(T_i^d)}{S(T_i^{d-})} \right) = \sum_{i=1}^{N^d(t)} \log V_i^d. \quad (3.51)$$

Substitusi persamaan (3.50) dan (3.51) ke (3.47) diperoleh

$$\log \frac{S(t)}{S(0)} = (\alpha - \xi)t - \frac{1}{2} \int_0^t v(z) dz + \int_0^t \sqrt{v(z)} dW_1(z) + \sum_{i=1}^{N^u(t)} \log V_i^u + \sum_{i=1}^{N^d(t)} \log V_i^d, \quad (3.52)$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$S(t) = S(0) \exp \left((\alpha - \xi)t - \frac{1}{2} \int_0^t v(z) dz + \int_0^t \sqrt{v(z)} dW_1(z) + \sum_{i=1}^{N^u(t)} \log V_i^u + \sum_{i=1}^{N^d(t)} \log V_i^d \right). \quad (3.53)$$

Persamaan (3.53) adalah solusi analitik model PBJDVS dimana di dalamnya masih mengandung kuadrat volatilitas $v(t)$.

$v(t)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (3.2), tetapi menyelesaikan persamaan (3.2) sulit atau mengalami kendala. Sehingga dalam tesis ini solusi eksak untuk $v(t)$ tidak dicari. Untuk keperluan simulasi, kendala ini diatasi dengan mengaproksimasi $v(t)$ menggunakan metode numerik.

Selanjutnya untuk keperluan simulasi akan dibahas solusi analitik model PBJDVS dari persamaan (3.53) pada interval waktu $[t_i, t_{i+1}]$.

Misalkan akan dilihat pada interval waktu $[t_i, t_{i+1}]$. Pandang persamaan (3.52).

Untuk $t = t_{i+1}$, maka persamaan (3.52) dapat ditulis sebagai

$$\log \frac{S(t_{i+1})}{S(0)} = (\alpha - \xi)t_{i+1} - \frac{1}{2} \int_0^{t_{i+1}} v(z) dz + \int_0^{t_{i+1}} \sqrt{v(z)} dW_1(z) + \sum_{j=1}^{N^u(t_{i+1})} \log V_j^u + \sum_{j=1}^{N^d(t_{i+1})} \log V_j^d. \quad (3.54)$$

Untuk $t = t_i$, maka persamaan (3.52) dapat ditulis sebagai

$$\log \frac{S(t_i)}{S(0)} = (\alpha - \xi)t_i - \frac{1}{2} \int_0^{t_i} v(z) dz + \int_0^{t_i} \sqrt{v(z)} dW_1(z) + \sum_{j=1}^{N^u(t_i)} \log V_j^u + \sum_{j=1}^{N^d(t_i)} \log V_j^d. \quad (3.55)$$

Kurangkan persamaan (3.54) dengan persamaan (3.55) diperoleh

$$\begin{aligned} \log \frac{S(t_{i+1})}{S(0)} - \log \frac{S(t_i)}{S(0)} &= (\alpha - \xi)(t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t) \\ &+ \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_{i+1})} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_{i+1})} \log V_j^d, \end{aligned}$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$\log \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right) = (\alpha - \xi)(t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t) + \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_{i+1})} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_{i+1})} \log V_j^d. \quad (3.56)$$

Untuk mempermudah tujuan simulasi, persamaan (3.56) perlu dilakukan perubahan dimana hasil perubahan ini selanjutnya akan diimplementasikan di Bab 4.

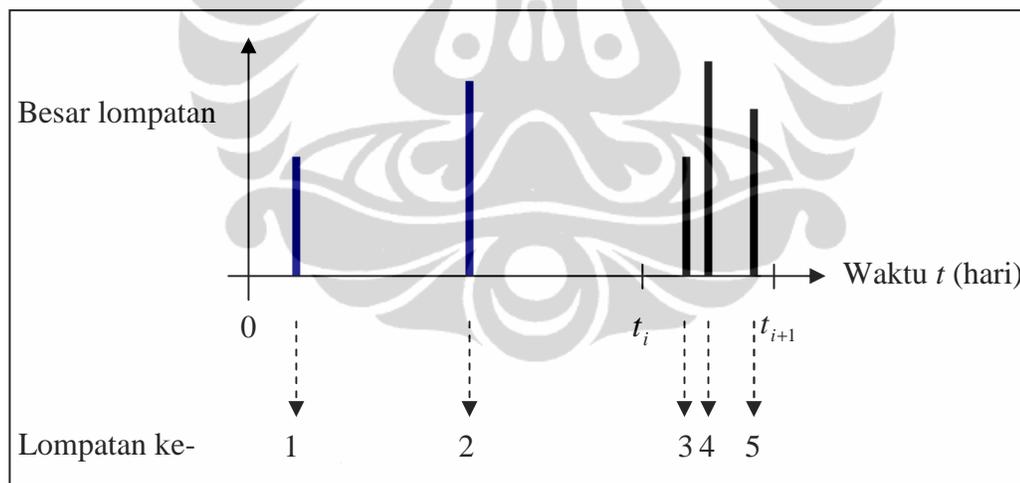
Misalkan M_i dan D_i berturut-turut menyatakan banyaknya lompatan ke atas dan ke bawah selama interval waktu $[t_i, t_{i+1}]$. Lompatan itu dapat terjadi di mana saja

dalam interval tersebut. $N^u(t_{i+1})$ dan $N^u(t_i)$ berturut-turut menyatakan banyaknya lompatan ke atas sampai waktu t_{i+1} dan t_i . Dengan demikian, $M_i = N^u(t_{i+1}) - N^u(t_i)$, dan lompatan ke atas yang terjadi di interval $[t_i, t_{i+1}]$ yaitu lompatan ke atas ke $N^u(t_i) + 1$ sampai ke $N^u(t_i) + M_i$. Demikian juga $N^d(t_{i+1})$ dan $N^d(t_i)$ berturut-turut menyatakan banyaknya lompatan ke bawah sampai waktu t_{i+1} dan t_i . Dengan demikian, $D_i = N^d(t_{i+1}) - N^d(t_i)$, dan lompatan ke bawah yang terjadi di interval $[t_i, t_{i+1}]$ yaitu lompatan ke bawah ke $N^d(t_i) + 1$ sampai ke $N^d(t_i) + D_i$. Untuk memperjelas hal itu, perhatikan beberapa ilustrasi berikut.

Kasus 1. Lompatan ke atas

Ilustrasi 1

Misalkan $M_i = 3$ dan $N^u(t_i) = 2$ seperti yang diilustrasikan seperti Gambar 3.1.



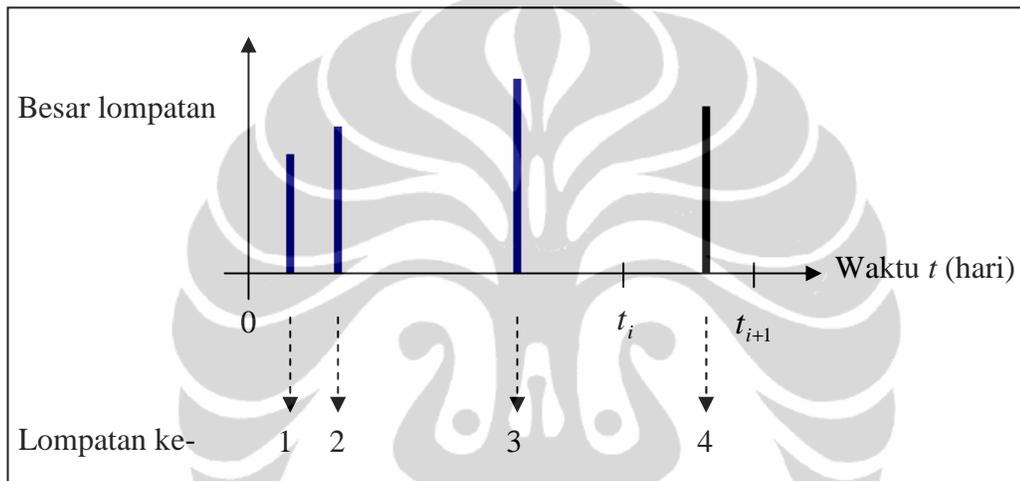
Gambar 3.1. Ilustrasi Lompatan ke Atas dengan 5 Lompatan.

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa sampai waktu t_i sudah terjadi 2 kali lompatan ke atas ($N^u(t_i) = 2$). Ditambah 3 kali lompatan ke atas ($M_i = 3$) dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$, maka sampai waktu t_{i+1} sudah terjadi 5 kali lompatan ke atas ($N^u(t_i) + M_i = 2 + 3 = 5$). Lompatan ke atas yang terjadi dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$

adalah lompatan ke atas setelah ke-2 ($N^u(t_i) = 2$) sampai dengan lompatan ke atas ke-5 ($N^u(t_i) + M_i = 5$), yaitu mulai lompatan ke atas ke-3 ($N^u(t_i) + 1 = 2 + 1 = 3$) sampai ke-5.

Ilustrasi 2

Misalkan $M_i = 1$ dan $N^u(t_i) = 3$ seperti yang diilustrasikan seperti Gambar 3.2.

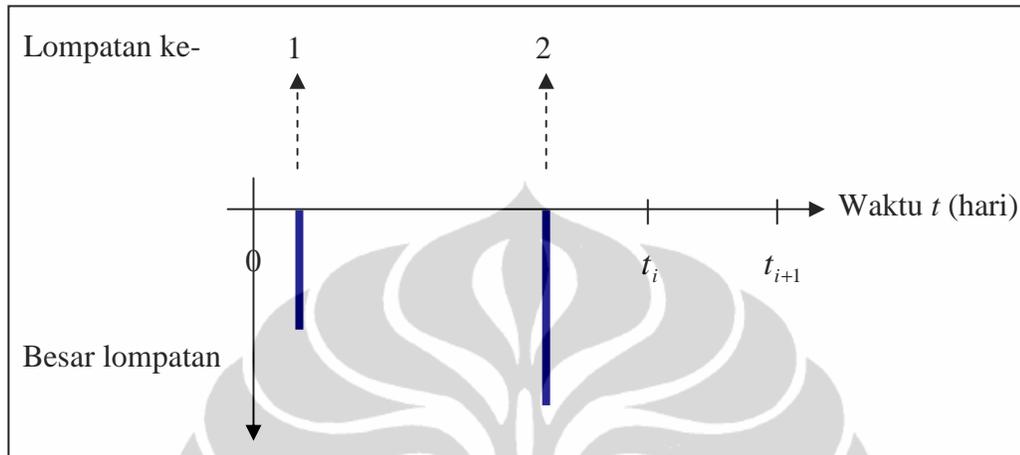


Gambar 3.2. Ilustrasi Lompatan ke Atas dengan 4 Lompatan.

Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa sampai waktu t_i sudah terjadi 3 kali lompatan ke atas ($N^u(t_i) = 3$). Ditambah 1 kali lompatan ke atas ($M_i = 1$) dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$, maka sampai waktu t_{i+1} sudah terjadi 4 kali lompatan ke atas ($N^u(t_i) + M_i = 3 + 1 = 4$). Lompatan ke atas yang terjadi dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$ adalah lompatan ke atas setelah ke-3 ($N^u(t_i) = 3$) sampai dengan lompatan ke atas ke-4 ($N^u(t_i) + M_i = 4$), yaitu lompatan ke atas ke-4 saja ($N^u(t_i) + 1 = 3 + 1 = 4$).

Kasus 2. Lompatan ke bawah

Misalkan $D_i = 0$ dan $N^d(t_i) = 2$ seperti yang diilustrasikan seperti Gambar 3.3



Gambar 3.3. Ilustrasi Lompatan ke Bawah dengan 2 Lompatan.

Dari Gambar 3.3 terlihat bahwa sampai waktu t_i sudah terjadi 2 kali lompatan ke bawah ($N^d(t_i) = 2$). Tanpa lompatan ke bawah ($D_i = 0$) dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$, maka sampai waktu t_{i+1} sudah terjadi 2 kali lompatan ke bawah ($N^d(t_i) + D_i = 2 + 0 = 2$). Lompatan ke bawah yang terjadi dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$ adalah lompatan ke bawah setelah ke-2 sampai dengan lompatan ke bawah ke-2 ($N^d(t_i) + D_i = 2$), yaitu tidak ada.

Dengan demikian, karena $N^u(t_{i+1}) = N^u(t_i) + M_i$ dan $N^d(t_{i+1}) = N^d(t_i) + D_i$, maka persamaan (3.56) dapat ditulis sebagai

$$\log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = (\alpha - \xi)(t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t) + \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D_i} \log V_j^d \quad (3.57)$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left((\alpha - \xi)(t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t) + \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D_i} \log V_j^d \right) \quad (3.58)$$

Selanjutnya dibahas empat subbab terkait dengan pembahasan solusi model PBJDVS. Subbab 3.3 membahas aproksimasi $v(t)$, sedangkan subbab 3.4 dan 3.5 berturut-turut membahas aproksimasi integral $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$ dan aproksimasi integral stokastik $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}dW_1(t)$ yang terdapat pada persamaan (3.58). Di akhir bab ini juga dibahas penentuan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

3.3. Aproksimasi $v(t)$

Untuk keperluan simulasi, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$ dan $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}dW_1(t)$ pada persamaan

(3.58) perlu ditentukan. Sedangkan untuk menentukan $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$ dan $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}dW_1(t)$

diperlukan $v(t)$ yang merupakan solusi dari persamaan (3.2). Metode numerik yang digunakan untuk mengaproksimasi $v(t)$ adalah metode EM. Dengan menerapkan metode EM pada persamaan (2.21) di Bab 2, ke PDS (3.2), maka skema EM untuk PDS (3.2) adalah

$$v(t_{j+1}) = v(t_j) + (-a(v(t_j)) - b)\Delta t + \theta \sqrt{v(t_j)}\Delta W_2(t_j), \quad (3.59)$$

dengan $v(t_0) = v_0$ adalah nilai awal, $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ konstan,

$\Delta W_2(t_j) = (W_2(t_{j+1}) - W_2(t_j))$ adalah perubahan (*increment*) proses Wiener standar, nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ dibangun dari distribusi normal, dan $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ untuk suatu N bulat positif.

Pada subbab 3.4 berikut dibahas aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$ yang terdapat pada persamaan (3.58).

3.4. Aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$

Karena solusi $v(t)$ diaproksimasi menggunakan persamaan (3.59), maka

$\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$ dihitung menggunakan integral numerik. Integral numerik yang digunakan

adalah aturan trapesium majemuk (*composite trapezoidal rule*) seperti yang telah dibahas pada persamaan (2.22) di Subbab 2.9. Selanjutnya aturan trapesium majemuk

diterapkan pada $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$. Untuk mempermudah penulisan, $\int_{t_i}^{t_{i+1}}$ dinotasikan dengan

\int_p^q . Jadi,

$$\int_p^q v(t) dt \approx \frac{h}{2} \left(v(p) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} v(t_j) + v(q) \right), \quad (3.60)$$

dengan $h = \frac{q-p}{n}$ dan $t_j = p + jh$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$ untuk n suatu bilangan bulat positif. $t_j = p + jh$ merupakan titik-titik diskritisasi, dengan h konstan.

Setelah diperoleh aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$, pada subbab selanjutnya dibahas

aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ yang terdapat pada persamaan (3.58).

3.5. Aproksimasi $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$

Integral $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ adalah integral stokastik (tepatnya adalah integral

Itô), dimana fungsi $\sqrt{v(t)}$ diintegalkan terhadap sebuah proses Wiener standar. Oleh

sebab itu untuk menghitung $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ tidaklah mudah. Untuk mengatasi kendala ini, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ diaproksimasi dengan jumlah Riemann *left-hand* seperti yang telah dibahas pada persamaan (2.2) di Subbab 2.2. Untuk mempermudah penulisan,

$\int_{t_i}^{t_{i+1}}$ dinotasikan dengan \int_p^q . Jadi

$$\int_p^q \sqrt{v(t)} dW_1(t) \approx \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{v(t_j)} \Delta W_1(t_j), \quad (3.61)$$

dengan $h = \frac{q-p}{n}$ dan $t_j = p + jh$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$ untuk n suatu bilangan bulat positif. $t_j = p + jh$ merupakan titik-titik diskritisasi, dengan h konstan. Berdasarkan persamaan (3.3), nilai-nilai $\Delta W_1(t_j)$ dibangun berdasarkan hubungan

$$\Delta W_1(t_j) = \rho \Delta W_2(t_j) + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_3(t_j), \quad (3.62)$$

dengan $\Delta W_3(t_j) = (W_3(t_{j+1}) - W_3(t_j))$ perubahan (*increment*) proses Wiener standar. Nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ yang digunakan untuk membangun $\Delta W_1(t_j)$ adalah nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ pada persamaan (3.59). Sedangkan nilai-nilai $\Delta W_3(t_j)$ dibangun dari distribusi normal yang saling bebas dari nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$.

Nilai-nilai $v(t)$ di setiap titik diskritisasi sudah diperoleh dari persamaan (3.59). Nilai-nilai $v(t)$ yang telah diperoleh ini selanjutnya digunakan untuk

menghitung $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$ dan $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ sehingga diperoleh aproksimasi dari $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt$

dan $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ yang digunakan untuk menghitung solusi analitik model PBJDVS

pada persamaan (3.58).

Pada subbab selanjutnya dibahas pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Berdasarkan persamaan (3.57) dapat ditentukan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

3.6. Probability Density Function Log-return Saham Satu Periode Model PBJDVS.

Misalkan $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1$. Angka 1 pada $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1$ menyatakan satu periode. Variabel $R_i = \log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right)$ adalah variabel acak *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Dalam penulisan ini, periode (satuan waktu) yang digunakan adalah hari. Persamaan (3.57) dapat ditulis kembali sebagai

$$R_i = Q_i + X_i, \quad (3.63)$$

dengan

$$Q_i = (\alpha - \xi) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t),$$

dan

$$X_i = \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D_i} \log V_j^d. \quad (3.64)$$

Dari persamaan (3.63) terlihat bahwa R_i adalah penjumlahan dua variabel acak, yaitu variabel acak Q_i (suku yang tidak mengandung lompatan) dan variabel acak X_i (suku yang mengandung lompatan).

Misalkan $t > s \geq 0$. Perubahan (*increment*) $N(t) - N(s)$ dari proses Poisson dengan intensitas λ , berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda(t-s)$, atau dapat ditulis

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s)).$$

Jika $t-s=1$, maka $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Untuk mempermudah penulisan, indeks i pada variabel-variabel acak dan nilai-nilai variabel acak dihilangkan, dengan tetap mengingat bahwa dalam penentuan

pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS sebenarnya adalah dalam interval $[t_i, t_{i+1}]$.

Secara keseluruhan, persamaan (3.57) mengandung M dan D , tepatnya pada suku lompatan. Karena M dan D masing-masing adalah perubahan (*increment*) proses Poisson, maka M dan D masing-masing berdistribusi Poisson dengan parameter berturut-turut λ_u dan λ_d . Maka pdf M dan D berturut-turut pada $M = m$ dan $D = n$ adalah

$$h_u(m) = \frac{\lambda_u^m e^{-\lambda_u}}{m!} \quad (3.65)$$

dan

$$h_d(n) = \frac{\lambda_d^n e^{-\lambda_d}}{n!}. \quad (3.66)$$

Karena proses Poisson untuk lompatan ke atas dan ke bawah saling bebas, maka M dan D saling bebas. Jadi pdf bersama M dan D adalah

$$h_u(m)h_d(n). \quad (3.67)$$

Misalkan $f(r|m, n)$ adalah pdf R bersyarat bahwa dalam interval waktu $[t_i, t_{i+1}]$ telah terjadi m kali lompatan ke atas dan n kali lompatan ke bawah, yaitu $M = m$ dan $D = n$, dengan r adalah nilai R . Maka pdf bersama M , D , dan R adalah

$$h_u(m)h_d(n)f(r|m, n). \quad (3.68)$$

Karena variabel acak selain R , yaitu M dan D , adalah variabel acak diskrit, maka pdf marginal dari R dapat diperoleh dengan menjumlahkan (3.68) terhadap seluruh nilai M dan D yang mungkin, yaitu

$$f(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_u(m)h_d(n)f(r|m, n). \quad (3.69)$$

Bentuk $f(r|m, n)$ pada persamaan (3.69) dapat dibagi dalam 4 kasus, yaitu $m = 0$ dan $n = 0$ (tidak terjadi lompatan), $m \geq 1$ dan $n = 0$ (hanya terjadi lompatan ke atas), $m = 0$ dan $n \geq 1$ (hanya terjadi lompatan ke bawah), $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ (terjadi lompatan ke atas maupun ke bawah). Jadi persamaan (3.69) dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari 4 pdf bersyarat yang diboboti oleh pdf Poisson, yaitu

$$f(r) = e^{-(\lambda_u + \lambda_d)} f(r|0,0) + e^{-\lambda_d} \sum_{m=1}^{\infty} h_u(m) f(r|m,0) + e^{-\lambda_u} \sum_{n=1}^{\infty} h_d(n) f(r|0,n) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_u(m) h_d(n) f(r|m,n). \quad (3.70)$$

Persamaan (3.70) adalah pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Selanjutnya dibahas penentuan pdf R bersyarat M dan D dalam 4 kasus, yaitu $f(r|0,0)$, $f(r|m,0)$, $f(r|0,n)$, dan $f(r|m,n)$.

Pada persamaan (3.63), R adalah penjumlahan dua variabel acak yaitu variabel acak Q (suku yang tidak mengandung lompatan) dan variabel acak X (suku yang mengandung lompatan).

Berdasarkan bagian a dan c pada Subbab 3.1, jika diberikan $M = m$ dan $D = n$ maka Q dan X saling bebas. Mengikuti [22], penentuan pdf R bersyarat M dan D menggunakan konvolusi.

Variabel acak X pada persamaan (3.64) adalah penjumlahan dua variabel acak, yaitu

$$X_u = \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M} \log V_j^u \quad (3.71)$$

dan

$$X_d = \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D} \log V_j^d. \quad (3.72)$$

Berdasarkan bagian a pada Subbab 3.1, jika diberikan $M = m$ dan $D = n$ maka X_u dan X_d saling bebas.

3.6.1. Distribusi Bersyarat untuk Suku yang Mengandung Lompatan

(X_u dan X_d)

Berdasarkan [22], distribusi bersyarat untuk suku yang mengandung lompatan, yaitu pdf bersyarat dari X_u dengan syarat $M = m$ dengan $m \geq 1$ dan pdf

bersyarat dari X_d dengan syarat $D = n$ dengan $n \geq 1$ dapat ditentukan menggunakan fakta berikut

- Jika $V^u \sim \text{Pareto}(\eta_u)$, maka $Y^u = \log V^u \sim \exp(\eta_u) = \Gamma(1, \eta_u)$.
- Jika $V^d \sim \text{Beta}(\eta_d, 1)$, maka $-Y^d = -\log V^d \sim \exp(\eta_d) = \Gamma(1, \eta_d)$.
- Jika $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, dimana $Y_i \sim \exp(\varpi)$ dan Y_i saling bebas, maka $X \sim \Gamma(k, \varpi)$.

Bukti a, b, c dapat dilihat pada Lampiran 6.

Pandang variabel acak X_u . Diketahui bahwa $V_j^u \sim \text{Pareto}(\eta_u)$, maka berdasarkan fakta bagian a di Halaman 50, diperoleh

$$Y_j^u = \log V_j^u \sim \exp(\eta_u) = \Gamma(1, \eta_u).$$

Misalkan diberikan $M = m$ dengan $m \geq 1$. Jadi

$$\begin{aligned} X_u &= \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M} \log V_j^u \\ &= \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+m} Y_j^u \\ &= Y_{N^u(t_i)+1}^u + Y_{N^u(t_i)+2}^u + \dots + Y_{N^u(t_i)+m}^u. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sementara itu, diketahui $Y_j^u \sim \exp(\eta_u)$ dan Y_j^u saling bebas, maka berdasarkan fakta bagian c di Halaman 50, diperoleh

$$X_u | M = m \sim \Gamma(m, \eta_u). \quad (3.74)$$

Selanjutnya pandang variabel acak X_d . Diketahui bahwa $V_j^d \sim \text{Beta}(\eta_d, 1)$, maka berdasarkan fakta bagian b di Halaman 50, diperoleh

$$-Y_j^d = -\log V_j^d \sim \exp(\eta_d) = \Gamma(1, \eta_d).$$

Misalkan diberikan $D = n$ dengan $n \geq 1$. Jadi

$$-X_d = -\sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D} \log V_j^d$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+n} Y_j^d \\
&= \left(-Y_{N^u(t_i)+1}^d\right) + \left(-Y_{N^u(t_i)+2}^d\right) + \dots + \left(-Y_{N^u(t_i)+n}^d\right).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Sementara itu diketahui $-Y_j^d \sim \exp(\eta_d)$ dan $-Y_j^d$ saling bebas, maka berdasarkan fakta bagian c di Halaman 50, diperoleh

$$-X_d \mid D = n \sim \Gamma(n, \eta_d),$$

dan dapat ditulis kembali sebagai

$$X_d \mid D = n \sim -\Gamma(n, \eta_d). \tag{3.76}$$

3.6.2. Distribusi untuk Suku yang Tidak Mengandung Lompatan (Q)

Jika suku lompatan pada persamaan (3.57) tidak ada, maka sama saja dengan mencari solusi model Heston yang berbentuk

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \xi)dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t) \\ dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta\sqrt{v(t)}dW_2(t), \end{array} \right\} \tag{3.77}$$

dengan

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t).$$

Jika suku lompatan tidak ada, maka berdasarkan persamaan (3.63), $R = Q$.

Jadi pdf dari Q adalah pdf *log-return* satu periode dari model Heston.

Berdasarkan [7], untuk model Heston pada sistem persamaan (3.77), dengan R adalah *log-return* Δt periode, pdf dari $Z = R - (\alpha - \xi)\Delta t$ adalah

$$P_{\Delta t}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iP_z z + F_{\Delta t}(P_z)) dP_z \tag{3.78}$$

dengan

$$F_{\Delta t}(P_z) = \frac{ab\Psi\Delta t}{\theta^2} - \frac{2ab}{\theta^2} \log \left(\cosh \left(\frac{\Omega\Delta t}{2} \right) + \Omega^2 - \Psi^2 + 2\pi\Psi \sinh \left(\frac{\Omega\Delta t}{2} \right) \right),$$

$$\Psi = a + i\rho\theta P_z,$$

$$\Omega = \sqrt{z^2 + \theta^2 (P_z^2 - iP_z)}.$$

Pdf dari R adalah

$$g(r) = P_{\Delta t} (r - (\alpha - \xi)\Delta t). \quad (3.79)$$

Persamaan (3.79) adalah pdf *log-return* Δt periode dari model Heston. Untuk pdf *log-return* satu periode, maka $\Delta t = 1$. Jadi

$$g(r) = P_1 (r - (\alpha - \xi)). \quad (3.80)$$

3.6.3. Probability Density Function Bersyarat Model PBJDVS

Selanjutnya dibahas empat kasus yang terkait dengan pdf R bersyarat M dan D yaitu kasus tidak terjadi lompatan, hanya terjadi lompatan ke atas, hanya terjadi lompatan ke bawah, dan terjadi lompatan ke atas maupun ke bawah. Untuk keempat kasus, pandang persamaan (3.63).

3.6.3.1. Kasus 1: $m = 0$ dan $n = 0$ (Tidak Terjadi Lompatan)

Karena tidak terjadi lompatan, maka $X = 0$. Jadi $R = Q$. Dengan demikian $f(r | 0, 0)$ adalah pdf *log-return* saham satu periode model Heston, yaitu $f(r | 0, 0) = g(r)$ seperti pada persamaan (3.80).

3.6.3.2. Kasus 2: $m \geq 1$ dan $n = 0$ (Hanya Terjadi Lompatan ke Atas)

Karena hanya terjadi lompatan ke atas, maka $X_d = 0$. Jadi $R = Q + X_u$.

Dengan demikian $f(r | m, 0)$ adalah konvolusi dari pdf *log-return* saham satu periode model Heston dan pdf $\Gamma(m, \eta_u)$. Pdf $\Gamma(m, \eta_u)$ adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\eta_u x}, & 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.81)$$

Untuk $r - x$, maka $f(r - x)$, mempunyai batas nilai

$$0 < r - x < \infty \Leftrightarrow \infty < x - r < 0 \Leftrightarrow -\infty < x < r.$$

Jadi

$$f(r-x) = \begin{cases} \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} (r-x)^{m-1} e^{-\eta_u(r-x)}, & -\infty < x < r, \\ 0 & , \text{lainnya,} \end{cases} \quad (3.82)$$

diperoleh

$$\begin{aligned} f(r|m,0) &= \int_{-\infty}^r f(r-x)g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^r \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} (r-x)^{m-1} e^{-\eta_u(r-x)} g(x)dx, \end{aligned} \quad (3.83)$$

dengan $g(x)$ adalah pdf *log-return* saham satu periode model Heston yaitu pada persamaan (3.80).

3.6.3.3. Kasus 3: $m = 0$ dan $n \geq 1$ (Hanya Terjadi Lompatan ke Bawah)

Karena hanya terjadi lompatan ke bawah, maka $X_u = 0$. Jadi $R = Q + X_d$.

Dengan demikian $f(r|0,n)$ adalah konvolusi dari pdf *log-return* saham satu periode model Heston dan pdf $-\Gamma(n, \eta_d)$.

Karena $\Gamma(m, \eta_d)$ mempunyai nilai $0 < x < \infty$, maka $-\Gamma(n, \eta_d)$ mempunyai nilai $-\infty < x < 0$. Sebagai catatan, pdf $-\Gamma(n, \eta_d)$ untuk $-\infty < x < 0$ bernilai nol. Pdf $-\Gamma(n, \eta_d)$ adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (-x)^{n-1} e^{\eta_d x}, & -\infty < x < 0, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.84)$$

Untuk $r-x$, maka $f(r-x)$, mempunyai batas nilai

$$-\infty < r-x < 0 \Leftrightarrow 0 < x-r < \infty \Leftrightarrow r < x < \infty.$$

Jadi

$$f(r-x) = \begin{cases} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (-(r-x))^{n-1} e^{\eta_d(r-x)}, & r < x < \infty, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.85)$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
f(r|0,n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(r-x)g(x)dx \\
&= \int_r^{\infty} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (-(r-x))^{n-1} e^{\eta_d(r-x)} g(x)dx \\
f(r|0,n) &= \int_r^{\infty} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (x-r)^{n-1} e^{\eta_d(r-x)} g(x)dx, \tag{3.86}
\end{aligned}$$

dengan $g(x)$ adalah pdf *log-return* saham satu periode model Heston yaitu pada persamaan (3.80)

3.6.3.4. Kasus 4: $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ (Terjadi Lompatan ke Atas maupun ke Bawah)

Karena terjadi lompatan, baik lompatan ke atas maupun ke bawah, sedangkan $R = Q + X$, maka $f(r|m,n)$ adalah konvolusi dari pdf *log-return* saham satu periode model Heston dan pdf bersyarat dari X . Karena $X = X_u + X_d$, maka pdf bersyarat dari X itu adalah konvolusi dari pdf $\Gamma(m, \eta_u)$ dan $-\Gamma(n, \eta_d)$. Jadi

$$\begin{aligned}
f(r|m,n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(r-x)g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h((r-x)-y)w(y)dy \right) g(x)dx. \tag{3.87}
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.87) terlebih dahulu ditentukan

$$\int_{-\infty}^{\infty} h((r-x)-y)w(y)dy. \tag{3.88}$$

Sedangkan untuk menyelesaikan persamaan (3.88), terlebih dahulu dicari bentuk $h((r-x)-y)$ dan $w(y)$.

Berikut dibahas bentuk $h((r-x)-y)$. Bentuk $h(r-x)$ menggunakan persamaan (3.82) dengan batas $0 < r-x < \infty$ yaitu

$$h(r-x) = \begin{cases} \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} (r-x)^{m-1} e^{-\eta_u(r-x)}, & 0 < r-x < \infty, \\ 0 & , \text{lainnya,} \end{cases} \quad (3.89)$$

Untuk $(r-x)-y$, maka $h((r-x)-y)$ mempunyai batas nilai

$$0 < r-x-y < \infty \Leftrightarrow -\infty < y+x-r < 0 \Leftrightarrow -\infty < y < r-x.$$

Jadi

$$h((r-x)-y) = \begin{cases} \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} ((r-x)-y)^{m-1} e^{-\eta_u((r-x)-y)}, & -\infty < y < r-x, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.90)$$

Sedangkan $w(y)$ menggunakan persamaan (3.84) dengan batas $-\infty < y < 0$ yaitu

$$w(y) = \begin{cases} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (-y)^{n-1} e^{\eta_d y}, & -\infty < y < 0, \\ 0 & , \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.91)$$

Dari persamaan (3.90), $h((r-x)-y) \neq 0$ untuk $-\infty < y < r-x$. Sedangkan dari persamaan (3.91), $w(y) \neq 0$ untuk $-\infty < y < 0$. Jadi $h((r-x)-y)w(y) \neq 0$ untuk $-\infty < y < \min(0, r-x)$. Selanjutnya substitusi persamaan (3.90) dan (3.91) ke (3.88), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h((r-x)-y)w(y)dy &= \int_{-\infty}^{\min(0, r-x)} h((r-x)-y)w(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\min(0, r-x)} \left(\frac{\eta_u^m}{(m-1)!} ((r-x)-y)^{m-1} e^{-\eta_u((r-x)-y)} \right) \left(\frac{\eta_d^n}{(n-1)!} (-y)^{n-1} e^{\eta_d y} \right) dy \\ &= \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\min(0, r-x)} ((r-x)-y)^{m-1} (-y)^{n-1} e^{-\eta_u((r-x)-y)+\eta_d y} dy. \end{aligned} \quad (3.92)$$

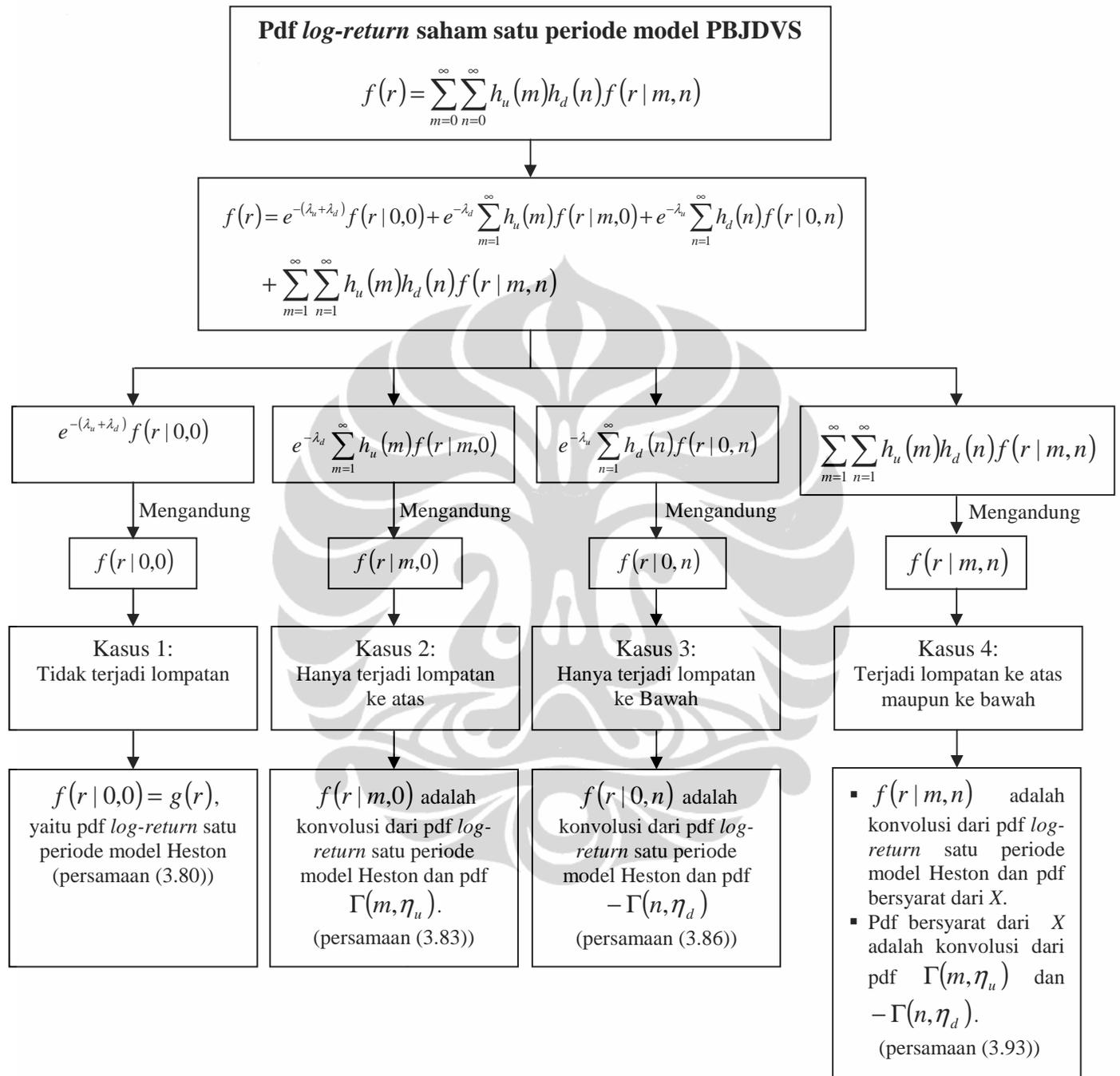
Substitusi persamaan (3.92) ke (3.87), diperoleh

$$f(r | m, n) = \frac{\eta_u^m}{(m-1)!} \frac{\eta_d^n}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\min(0, r-x)} ((r-x)-y)^{m-1} (-y)^{n-1} e^{-\eta_u((r-x)-y)+\eta_d y} dy \right) g(x) dx, \quad (3.93)$$

dengan $g(x)$ adalah pdf *log-return* saham satu periode model Heston yaitu pada persamaan (3.80).

Dengan demikian, pdf R adalah persamaan (3.69), dengan $f(r|0,0)$, $f(r|m,0)$, $f(r|0,n)$, dan $f(r|m,n)$ berturut-turut adalah pada persamaan (3.80), (3.83), (3.86), dan (3.93). Untuk memperjelas penentuan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS, dapat melihat skema pada Gambar 3.4 berikut.





Gambar 3.4. Skema Pdf Log-return Saham Satu Periode Model PBJDVS.

Pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS, yaitu persamaan (3.70), dapat digunakan untuk menentukan taksiran parameter menggunakan data *real* pada penelitian selanjutnya.

Pada bab selanjutnya dibahas simulasi solusi analitik dan simulasi pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS.



BAB 4
SIMULASI SOLUSI ANALITIK DAN SIMULASI BENTUK PENDEKATAN
KURVA *PROBABILITY DENSITY FUNCTION LOG-RETURN* SAHAM
SATU PERIODE MODEL PBJDVS

Pada Bab 3 telah dibahas solusi analitik (persamaan (3.58)) dan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS (persamaan (3.69)). Selanjutnya pada bab ini dibahas simulasi solusi analitik dan simulasi pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS sebagai pelengkap teori di Bab 3.

Bab 4 ini terdiri dari dua subbab pembahasan, yaitu Subbab 4.1 membahas simulasi solusi analitik model PBJDVS dan Subbab 4.2 membahas simulasi pendekatan kurva *probability density function log-return* (pdf) saham satu periode model PBJDVS.

4.1. Langkah-Langkah Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS

Pada Bab 3 juga telah dibahas aproksimasi solusi analitik model PBJDVS (lihat persamaan (3.59), (3.60), dan (3.61)). Untuk keperluan simulasi, semua bilangan acak menggunakan bilangan acak yang dapat dibentuk di Matlab dengan menggunakan pernyataan '*randn*' untuk distribusi normal standar, dan '*random*' untuk distribusi Poisson, *Generalized Pareto*, dan Beta. Berikut ditampilkan langkah-langkah simulasi solusi analitik model PBJDVS.

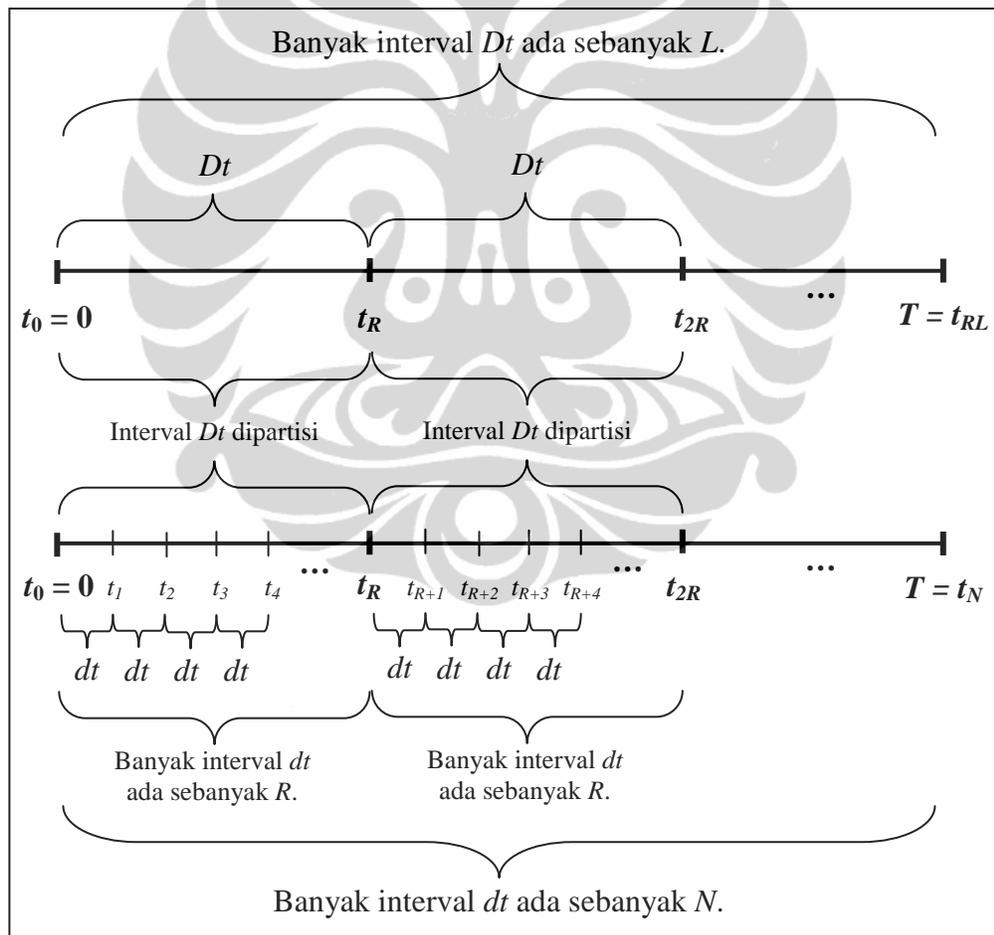
- i. Menentukan nilai parameter $\theta_{PBJDVS} = (\alpha, a, b, \theta, \rho, \lambda_u, \lambda_d, \eta_u, \eta_d)$.

Nilai-nilai parameter model PBJDVS ditentukan dengan mengolah kembali hasil taksiran parameter yang dilakukan pada model PBJD pada [22] dan model Heston pada [15]. Cara pengolahan hasil taksiran parameter tersebut dapat dilihat pada Lampiran 7.

- ii. Menghitung $\xi = \frac{\lambda_u}{\eta_u - 1} - \frac{\lambda_d}{\eta_d + 1}$.

- iii. Menentukan nilai awal $S(t_0) = S_0$ dan $v(t_0) = v_0$.

- iv. Menentukan banyaknya simulasi M .
 - v. Menentukan interval waktu $[0, T]$, dengan T adalah banyaknya hari.
 - vi. Interval waktu $[0, T]$ dipartisi menjadi L bagian dengan panjang Dt dengan $L = \text{floor}(T/Dt)$. Dalam tesis ini periode waktu yang digunakan adalah 1 hari, sehingga $Dt = 1$.
 - vii. Interval Dt dipartisi menjadi R bagian dengan panjang dt , dengan $dt = Dt/R$.
 - viii. Menentukan N , yaitu banyaknya interval dt pada $[0, T]$, dimana $N = RL$.
- Untuk membantu menjelaskan partisi interval waktu pada langkah v s.d viii, perhatikan Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1. Bagan Partisi Interval Waktu pada Langkah-Langkah Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS (Langkah v s.d viii)

- ix. Menentukan nilai-nilai perubahan (*increment*) poses Wiener standar $\Delta W_2(t_j)$ dan $\Delta W_3(t_j)$ di setiap simulasi. Penentuan nilai-nilai

$$\Delta W_2(t_j) = (W_2(t_{j+1}) - W_2(t_j))$$

dan

$$\Delta W_3(t_j) = (W_3(t_{j+1}) - W_3(t_j))$$

menggunakan bilangan acak distribusi normal, untuk $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

- x. Menghitung $\Delta W_1(t_j)$ di setiap simulasi.

- Berdasarkan persamaan (3.62) di Bab 3, nilai-nilai $\Delta W_1(t_j)$ dihitung dengan rumus

$$\Delta W_1(t_j) = \rho \Delta W_2(t_j) + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_3(t_j),$$

dimana nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ dan $\Delta W_3(t_j)$ yang digunakan adalah nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ dan $\Delta W_3(t_j)$ pada langkah ix.

- Nilai ρ yang digunakan adalah nilai ρ pada langkah i.

- xi. Menentukan nilai-nilai banyaknya lompatan ke atas di interval $[t_j, t_{j+1}]$, yaitu $\Delta N^u(t_j)$ dan banyaknya lompatan ke bawah di interval $[t_j, t_{j+1}]$, yaitu $\Delta N^d(t_j)$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

- $\Delta N^u(t_j)$ dan $\Delta N^d(t_j)$ adalah perubahan (*increment*) proses Poisson dengan intensitas berturut-turut λ_u dan λ_d , yaitu

$$\Delta N^u(t_j) = N^u(t_{j+1}) - N^u(t_j)$$

dan

$$\Delta N^d(t_j) = N^d(t_{j+1}) - N^d(t_j).$$

- Penentuan nilai-nilai $\Delta N^u(t_j)$ menggunakan bilangan acak distribusi Poisson($\lambda_u dt$).

- Penentuan nilai-nilai $\Delta N^d(t_j)$ menggunakan bilangan acak distribusi Poisson($\lambda_d dt$).
- xii. Menghitung nilai-nilai banyaknya lompatan ke atas sampai waktu t_j , yaitu $N^u(t_j)$ dan banyak lompatan ke bawah sampai waktu t_j , yaitu $N^d(t_j)$.
- Berdasarkan langkah xi, penentuan nilai-nilai $N^u(t_j)$ dihitung menggunakan

$$N^u(t_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta N^u(t_k).$$
 - Berdasarkan langkah xi, penentuan nilai-nilai $N^d(t_j)$ dihitung menggunakan

$$N^d(t_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta N^d(t_k).$$
- xiii. Menentukan nilai-nilai besar lompatan ke atas V_j^u untuk $j = 1, 2, \dots, N^u(T)$ dan besar lompatan ke bawah V_j^d untuk $j = 1, 2, \dots, N^d(T)$.
- Penentuan nilai-nilai V_j^u menggunakan bilangan acak distribusi Pareto(η_u). Pada Matlab, distribusi Pareto tidak tersedia, yang tersedia adalah distribusi *Generalized Pareto*. Distribusi Pareto(η_u) dapat diperoleh dengan *Generalized Pareto* $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$. Bukti bahwa distribusi Pareto(η_u) sama dengan distribusi *Generalized Pareto* $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$ dapat dilihat pada Lampiran 8.
 - Penentuan nilai-nilai V_j^d menggunakan bilangan acak distribusi Beta($\eta_d, 1$). Distribusi Beta tersedia di Matlab.
- xiv. Menghitung kuadrat volatilitas, yaitu $v(t_j)$.
- Berdasarkan persamaan (3.59), dan karena

$$v(t_{j+1}) = v(t_j) + (-a(v(t_j) - b)dt) + \theta\sqrt{v(t_j)}\Delta W_2(t_j)$$

dapat bernilai negatif, maka $v(t_j)$ dihitung menggunakan

$$v(t_{j+1}) = \max(0, v(t_j) + (-a(v(t_j) - b)dt) + \theta\sqrt{v(t_j)}\Delta W_2(t_j)).$$

- Nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ yang digunakan adalah nilai-nilai $\Delta W_2(t_j)$ pada langkah ix.
- Nilai-nilai a , b , dan θ yang digunakan adalah nilai-nilai a , b , dan θ pada langkah i.
- Nilai dt yang digunakan adalah nilai adalah nilai dt pada langkah vii.
- Nilai awal $v(t_0) = v_0$ menggunakan nilai awal pada langkah ii.

xv. Menghitung $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt$.

Untuk mempermudah penulisan, $\int_{t_i}^{t_{i+1}}$ dinotasikan dengan \int_p^q .

- Berdasarkan persamaan (3.60) di Bab 3 dan $h = dt$, $\int_p^q v(t)dt$ dihitung menggunakan

$$\frac{dt}{2} \left(v(p) + 2 \sum_{j=s+1}^{s+R-1} v(t_j) + v(q) \right),$$

dengan $p = t_s$ dan $q = t_{s+R}$, $s = iR$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, L-1$. Notasi i menyatakan interval Dt yang ke- i .

- Nilai-nilai $v(t_j)$ yang digunakan adalah nilai-nilai $v(t_j)$ pada langkah xiv.
- Nilai dt yang digunakan adalah nilai adalah nilai dt pada langkah vii.

xvi. Menghitung $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}dW_1(t)$.

Untuk mempermudah penulisan, $\int_{t_i}^{t_{i+1}}$ dinotasikan dengan \int_p^q .

- Berdasarkan persamaan (3.61) di Bab 3, $\int_p^q \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ dihitung

menggunakan

$$\sum_{j=s}^{s+R-1} \sqrt{v(t_j)} \Delta W_1(t_j),$$

dengan $p = t_s$ dan $q = t_{s+R}$, $s = iR$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, L-1$. Notasi i menyatakan interval Dt yang ke- i .

- Nilai-nilai $v(t_j)$ yang digunakan adalah nilai-nilai $v(t_j)$ pada langkah xiv.
- Nilai-nilai $\Delta W_1(t_j)$ yang digunakan adalah nilai-nilai $\Delta W_1(t_j)$ pada langkah x.

xvii. Menghitung banyaknya lompatan ke atas pada interval $[t_i, t_{i+1}] = [p, q]$, yaitu $M_i = N^u(q) - N^u(p)$ dan banyaknya lompatan ke bawah pada interval $[p, q]$, yaitu $D_i = N^d(q) - N^d(p)$ pada solusi analitik model PBJDVS di persamaan (3.58) pada Bab 3. Berdasarkan langkah xi, nilai-nilai M_i dihitung menggunakan

$$M_i = \sum_{k=s}^{s+R-1} \Delta N^u(t_k)$$

dan berdasarkan langkah xi, nilai-nilai D_i dihitung menggunakan

$$D_i = \sum_{k=s}^{s+R-1} \Delta N^d(t_k),$$

dengan $p = t_s$ dan $q = t_{s+R}$, $s = iR$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, L-1$. Notasi i menyatakan interval Dt yang ke- i .

xviii. Berdasarkan persamaan (3.58) di Bab 3, dengan $[t_i, t_{i+1}] = [p, q]$, solusi analitik model PBJDVS dihitung menggunakan

$$S(q) = S(p) \exp \left((\alpha - \xi)Dt - \frac{1}{2} \int_p^q v(t) dt + \int_p^q \sqrt{v(t)} dW_1(t) \right)$$

$$+ \left. \sum_{j=N^u(p)+1}^{N^u(p)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(p)+1}^{N^d(p)+D_i} \log V_j^d \right). \quad (4.1)$$

- Nilai α yang digunakan adalah nilai α pada langkah i.
- Nilai ξ yang digunakan adalah nilai ξ pada langkah ii.
- Nilai Dt yang digunakan adalah nilai Dt pada langkah vi.
- Nilai $\int_p^q v(t)dt$ yang digunakan adalah nilai $\int_p^q v(t)dt$ pada langkah xv.
- Nilai $\int_p^q \sqrt{v(t)}dW_1(t)$ yang digunakan adalah nilai $\int_p^q \sqrt{v(t)}dW_1(t)$ pada langkah xvi.
- Nilai $N^u(p)$ dan $N^d(p)$ yang digunakan adalah nilai $N^u(p)$ dan $N^d(p)$ pada langkah xii.
- Nilai M_i dan D_i yang digunakan adalah nilai M_i dan D_i pada langkah xvii.
- Nilai V_j^u dan V_j^d yang digunakan adalah nilai V_j^u dan V_j^d pada langkah xiii.
- Nilai awal $S(t_0) = S_0$ yang digunakan adalah nilai $S(t_0) = S_0$ pada langkah iii.

4.2. Penentuan Nilai Parameter dan Nilai Awal Model PBJDVS

Solusi analitik persamaan (3.58) di Bab 3 dapat direpresentasikan sebagai lintasan (*sample path*) untuk $S(t)$. Untuk keperluan simulasi, banyaknya hari yang digunakan adalah selama satu tahun. Berdasarkan data harga saham harian LEHMQ.PK dari tahun 2000 sampai dengan tahun 2009 [14], banyaknya hari kerja dalam setahun ditampilkan pada Tabel 4.1. Banyaknya hari kerja 248 ada 2 tahun, 251 ada 3 tahun, 252 ada 4 tahun, 253 ada 1 tahun. Pada tesis ini diambil 252 hari.

Tabel 4.1. Banyak Hari Kerja dalam Setahun Berdasarkan Data Harian LEHMQ.PK.

Tahun	Jumlah hari
2000	248
2001	248
2002	251
2003	252
2004	252
2005	252
2006	251
2007	251
2008	253
2009	252

Sumber: [14] (telah diolah kembali)

Tabel 4.2. Nilai-Nilai Parameter Model PBJDVS.

Parameter	Nilai
λ_u	0,425080
λ_d	0,272460
η_u	35,995000
η_d	31,438000
α	0,000487
a	0,030842
b	0,000540
θ	0,001498
ρ	-0,316200

Sumber: [15, 22] (telah diolah kembali)

Nilai-nilai parameter model PBJDVS pada Tabel 4.2 ditentukan dengan mengolah kembali hasil taksiran parameter yang dilakukan pada model PBJD pada [22] dan model Heston pada [15]. Cara pengolahan hasil taksiran parameter pada Tabel 4.2 dapat dilihat pada Lampiran 7.

Tabel 4.3. Nilai Awal untuk $S(0)$ dan $v(0)$.

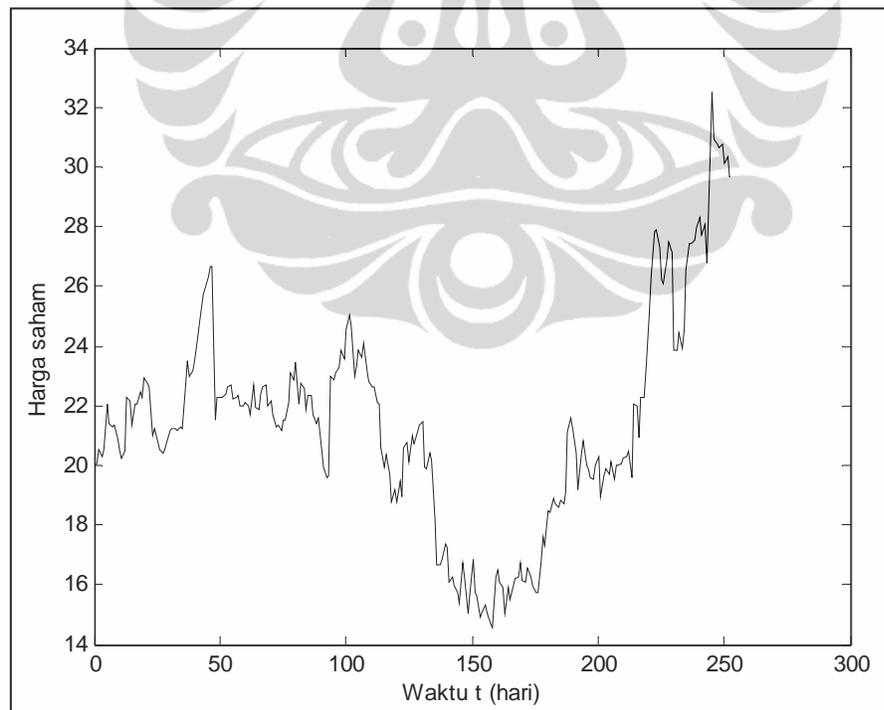
Nilai awal	Nilai
$S(0)$	20
$v(0)$	0,0003

Nilai awal harga saham yang ditampilkan pada Tabel 4.3 adalah nilai awal harga saham per lembar dengan satuan mata uang USD.

Berikut disimulasikan lintasan solusi analitik berdasarkan parameter pada Tabel 4.2, nilai awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$ dan $R = 100$.

4.3. Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS

Gambar 4.2 berikut adalah hasil simulasi lintasan solusi analitik model PBJDVS untuk nilai parameter pada Tabel 4.2, nilai awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$. *Source code* untuk mendapatkan Gambar 4.2 dapat dilihat pada Lampiran 12.



Gambar 4.2. Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$.

Berdasarkan Gambar 4.2, pergerakan harga saham terlihat wajar, lompatan harga saham tidak terlihat secara signifikan. Terkait dengan Gambar 4.2, perhatikan penjelasan berikut.

Parameter λ_u menyatakan intensitas lompatan ke atas, dimana intensitas adalah ekspektasi banyaknya lompatan persatuan waktu. Karena satuan waktu pada tesis ini adalah hari, maka λ_u adalah ekspektasi banyaknya lompatan ke atas dalam 1 hari. Untuk $\lambda_u = 0,425080$ lompatan/hari, berarti dalam sekitar 2,5 hari terjadi 1 lompatan ke atas. Jadi, lompatan ke atas cukup sering. Demikian juga dengan $\lambda_d = 0,272460$ lompatan/hari, berarti dalam sekitar 4 hari terjadi 1 lompatan ke bawah. Jadi, lompatan ke bawah juga dapat dikatakan cukup sering.

Karena digunakan interval waktu $[0, T] = [0, 252]$ dengan $\lambda_u = 0,425080$ lompatan/hari, maka ekspektasi banyaknya lompatan ke atas dalam 252 hari adalah

$$\lambda_u T = (0,425080)(252) = 107,1202 .$$

Untuk kasus lompatan ke bawah dengan $\lambda_d = 0,272460$ lompatan/hari, ekspektasi banyaknya lompatan ke bawah dalam 252 hari adalah

$$\lambda_d T = (0,272460)(252) = 68,6599 .$$

Jadi, ekspektasi banyaknya lompatan yang terjadi dalam 252 hari ada sebanyak: ekspektasi banyaknya lompatan ke atas ditambah ekspektasi banyaknya lompatan ke bawah, yaitu

$$107,1202 + 68,6599 = 175,7801 .$$

Dengan demikian lompatan yang terjadi cukup sering selama 252 hari.

Selanjutnya dibahas parameter η_u dan η_d terkait ekspektasi besar lompatan. Parameter η_u adalah parameter distribusi Pareto(η_u) dan η_d adalah parameter distribusi Beta($\eta_d, 1$). Selanjutnya dihitung ekspektasi besar lompatan ke atas dan ke bawah berturut-turut menggunakan persamaan (3.5) dan (3.7) di Bab 3. Untuk $\eta_u = 35,995000$ dan $\eta_d = 31,438000$, ekspektasi besar lompatan ke atas dan ke bawah berturut-turut adalah

$$E(V^u) = \frac{\eta_u}{\eta_u - 1} = \frac{35,995000}{35,995000 - 1} = 1,029 \quad (4.2)$$

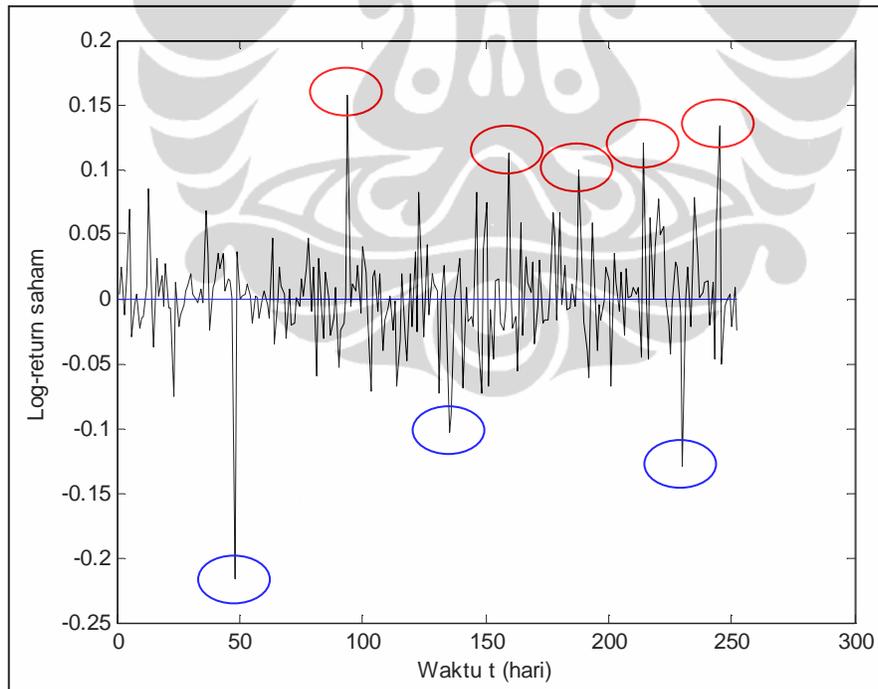
dan

$$E(V^d) = \frac{\eta_d}{\eta_d + 1} = \frac{31,438000}{31,438000 + 1} = 0,969. \quad (4.3)$$

Nilai $E(V^u) = 1,029$ dan $E(V^d) = 0,969$ mempunyai selisih dengan 1 cukup dekat, artinya harga saham setelah melompat dekat dengan harga saham sebelumnya.

Berdasarkan analisa keempat parameter λ_u , λ_d , η_u , dan η_d , maka harga-harga saham yang tergambar pada Gambar 4.2 dengan selisih waktu satu hari, yang terlihat justru lompatan yang sering terjadi sehingga terlihat wajar.

Untuk mendukung analisa di atas, pergerakan *log-return* saham satu periode model PBJDVS digambar dan ditampilkan pada Gambar 4.3 berikut. *Source code* untuk mendapatkan Gambar 4.3 dapat dilihat pada Lampiran 13.



Gambar 4.3. Pergerakan *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$.

Dari Gambar 4.3 terlihat beberapa pergerakan *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang tidak wajar. Pergerakan *log-return* saham satu periode model PBJDVS diduga mengandung lompatan di beberapa lokasi, seperti di hari ke-48 (ke bawah), 94 (ke atas), 135 (ke bawah), 159 (ke atas), 188 (ke atas), 214 (ke atas), 230 (ke bawah), dan 245 (ke atas).

Selanjutnya dianalisa lompatan sesuai dengan Gambar 4.2. Analisa lompatan ini dibedakan atas dua bagian, yaitu lompatan ke atas dan ke bawah. Selain itu dianalisa juga lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam satu hari.

Analisa lompatan dimaksudkan untuk melihat apakah pergerakan harga saham yang disajikan di Gambar 4.2 sebenarnya adalah pergerakan yang mengandung lompatan atau tidak. Oleh sebab itu ingin diketahui lebih dalam mengenai besar lompatan ke atas, ke bawah, serta lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam satu hari. Dalam analisa lompatan ini, akan lebih ditekankan pada suku lompatan, yaitu suku ke-3 dan ke-4 ruas kanan persamaan (3.1) dan tidak memperhitungkan suku difusi, yaitu suku ke-1 dan ke-2 ruas kanan persamaan (3.1).

Tabel L18 di Lampiran 18, Tabel L19 di Lampiran 19, dan Tabel L20 di Lampiran 20 berturut-turut menyajikan informasi yang berkaitan dengan lompatan ke atas, ke bawah, serta lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam satu hari sesuai dengan Gambar 4.2. *Source code* untuk mendapatkan nilai-nilai yang disajikan Tabel L18, L19, L20 dapat dilihat pada Lampiran 14.

Tabel 4.4 menyajikan rangkuman Tabel L18 yang terkait dengan lompatan ke atas sesuai dengan Gambar 4.2.

Tabel 4.4. Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.

Deskripsi	Keterangan
Banyak hari terjadi lompatan ke atas dalam 252 hari	87 hari
Banyak lompatan ke atas dalam 252 hari	114 kali
Besar lompatan ke atas maksimum	1,1110 (11,10%)
Besar lompatan ke atas minimum	1,0003 (0,03%)
Lokasi besar lompatan ke atas maksimum	hari ke-188
Lokasi besar lompatan ke atas minimum	hari ke-150

Dari Tabel 4.4 terlihat bahwa banyak hari terjadi lompatan ke atas dalam 252 hari ada sebanyak 87 dengan 114 kali lompatan. Terlihat pula bahwa besar lompatan ke atas tidak terlalu besar atau mempunyai selisih dengan 1 cukup kecil, artinya adalah harga saham setelah melompat dekat dengan sebelumnya.

Dari Tabel 4.4, besar lompatan ke atas maksimum adalah 1,1110 pada hari ke-188 dengan nilai $\log(1,1110) = 0,1053$. Sedangkan pada Gambar 4.3 terlihat *log-return* saham satu periode model PBJDVS positif maksimum terjadi di hari ke-94 (bukan di hari ke-188), yaitu dengan nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS 0,1574. Hal ini dapat terjadi karena alasan berikut.

Dari Tabel L18 di Lampiran 18, pada hari ke-94 terjadi 2 kali lompatan ke atas dengan besar lompatan ke atas masing-masing adalah 1,0116 dan 1,0938. Nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS seharusnya bernilai

$$\log(1,0116) + \log(1,0938) = 0,1012,$$

sedangkan nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS pada hari ke-94 di Gambar 4.3 adalah 0.1574. Perbedaan ini terjadi karena nilai-nilai besar lompatan ke atas pada Tabel L18 tidak memperhitungkan suku difusi, yaitu suku ke-1 dan ke-2 ruas kanan persamaan (3.1) pada model PBJDVS.

Pada Gambar 4.3, nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS pada hari ke-188 adalah 0,09956 sedangkan nilai $\log(1,1110) = 0,1053$ dengan selisih yang tidak besar.

Tabel 4.5 menyajikan rangkuman Tabel L19 terkait dengan lompatan ke bawah sesuai dengan Gambar 4.2.

Tabel 4.5. Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Bawah untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.

Deskripsi	Keterangan
Banyak hari terjadi lompatan ke bawah dalam 252 hari	54 hari
Banyak lompatan ke bawah dalam 252 hari	61 kali
Besar lompatan ke bawah terbesar	0,8212 (-17,89%)
Besar lompatan ke bawah terkecil	0,9991 (-0,09%)
Lokasi besar lompatan ke bawah terbesar	hari ke-48
Lokasi besar lompatan ke bawah terkecil	hari ke-1

Dari Tabel 4.5 terlihat bahwa banyak hari terjadi lompatan ke bawah dalam 252 hari ada sebanyak 54 hari dengan 61 kali lompatan ke bawah. Terlihat pula bahwa besar lompatan tidak terlalu besar atau mempunyai selisih dengan 1 cukup kecil, artinya adalah harga saham setelah melompat dekat dengan sebelumnya.

Besar lompatan ke bawah maksimum adalah 0,8212 pada hari ke-48. Nilai $\log(0,8212) = -0,1970$. Sedangkan pada Gambar 4.3 terlihat *log-return* saham satu periode model PBJDVS negatif terbesar terjadi di hari ke-48, yaitu dengan nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS -0,2163. Jadi, kedua hal ini sesuai.

Selanjutnya, Tabel 4.6 menyajikan rangkuman Tabel L20 terkait dengan lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam satu hari selama 252 hari sesuai dengan Gambar 4.2.

Tabel 4.6. Rangkuman Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas dan ke Bawah Sekaligus dalam Satu Hari untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.2.

Deskripsi	Keterangan
Banyak hari terjadi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam 252 hari	20 hari
Total lompatan dalam 252 hari	47 kali
Besar lompatan terbesar dari 47 lompatan	1,0923 (9,23%) (lompatan ke atas)
Besar lompatan terkecil dari 47 lompatan	1,0008 (0,08%) (lompatan ke atas)
Lokasi lompatan terbesar dari 47 lompatan	hari ke-145
Lokasi lompatan terkecil dari 47 lompatan	hari ke-111

Dari Tabel 4.6 terlihat bahwa banyak hari terjadi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam 252 hari ada sebanyak 20 dengan total lompatan 47 kali. Terlihat pula bahwa besar lompatan ke atas dan ke bawah tidak terlalu besar atau dekat dengan 1.

Berdasarkan informasi dari Tabel 4.4, 4.5, dan 4.6, terlihat bahwa banyaknya hari terjadi lompatan dalam 252 hari ada sebanyak $87 + 54 - 20 = 121$. Banyaknya lompatan yang terjadi dalam 252 hari adalah $114 + 61 = 175$ kali. Terlihat pula, besar lompatan ke atas dan ke bawah dalam 252 hari cukup kecil atau

mempunyai selisih dengan 1 cukup kecil. Besar lompatan ke atas maksimum sebesar 1,1110 (naik 11,10%) di hari ke-188 dan besar lompatan ke bawah maksimum sebesar 0,8212 (turun 17,89%) di hari ke-48.

Jadi, pergerakan harga saham yang disajikan di Gambar 4.2 sebenarnya adalah pergerakan yang tidak wajar (mengandung lompatan).

Di dunia nyata, kadang kejadian harga saham dapat mengandung lompatan. Kejadian nyatanya ada di data harga saham harian LEHMQ.PK dan dapat dilihat pada Gambar L1 di Lampiran 1. Selanjutnya disimulasikan sebuah contoh yang dapat merepresentasikan kondisi seperti data harga saham harian LEHMQ.PK.

Lompatan harga saham dapat dibuat terlihat secara signifikan yaitu dengan cara memperkecil λ_u , λ_d , η_u , dan η_d . Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

Sebelumnya telah dijelaskan (lihat penjelasan di Halaman 68 s.d 69) bahwa parameter λ menyatakan intensitas lompatan, dimana intensitas adalah ekspektasi banyaknya lompatan per satuan waktu. Karena satuan waktu yang digunakan adalah hari, maka λ adalah ekspektasi banyaknya lompatan/hari. Jadi semakin kecil λ , semakin kecil intensitas lompatan. Untuk memperjelas hal ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan $\lambda = 0,5$ lompatan/hari, berarti dalam 2 hari terjadi 1 lompatan. Agar dalam 1 hari tidak terlalu banyak lompatan, pilih λ yang lebih kecil dari $\lambda = 0,5$ lompatan/hari. Misalkan $\lambda = 0,01$ lompatan/hari, berarti dalam 100 hari terjadi 1 lompatan. Jadi, lompatan yang terjadi sangat jarang.

Karena digunakan interval waktu $[0, T] = [0, 252]$, maka untuk $\lambda = 0,5$ lompatan/hari, dan $\lambda = 0,01$ lompatan/hari, ekspektasi banyaknya lompatan dalam 252 hari berturut-turut adalah

$$\lambda T = (0,5)(252) = 126$$

dan

$$\lambda T = (0,01)(252) = 2,52.$$

Jadi, lompatan yang terjadi dalam 252 hari lebih banyak terjadi untuk $\lambda = 0,5$ lompatan/hari dibandingkan dengan $\lambda = 0,01$ lompatan/hari.

Oleh karena itu, agar lompatan (ke atas dan ke bawah) jarang terjadi dalam satu hari, pada pembahasan selanjutnya diambil $\lambda_u = 0,009$ dan $\lambda_d = 0,01$.

Selanjutnya dibahas bagaimana parameter η_u dan η_d ditentukan sehingga besar lompatan ke atas dan bawah menjadi cukup besar (selisih dengan 1 cukup besar).

Tabel 4.7. Nilai-Nilai Parameter η_u .

<i>Ticker</i>	η_u	$E(V^u) = \frac{\eta_u}{\eta_u - 1}$	$E(V^u - 1)$ dalam (%)
CYPB	17,08	1,0622	6,22%
XICO	18,60	1,0568	5,68%
HYBD	19,41	1,0543	5,43%
LCBM	24,22	1,0431	4,31%
MFRI	33,07	1,0312	3,12%
TIF	39,95	1,0257	2,57%
INTC	47,22	1,0216	2,16%
T	47,35	1,0216	2,16%
TBL	51,70	1,0197	1,97%
MON	61,35	1,0166	1,66%

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Ticker pada Tabel 4.7 adalah kode perusahaan pada listing Bursa Efek. Pada Tabel 4.7,

- V^u adalah besar lompatan ke atas,
- $E(V^u)$ adalah ekspektasi besar lompatan ke atas,
- $V^u - 1$ adalah persentase perubahan harga saham saat terjadi lompatan ke atas,
- $E(V^u - 1)$ adalah ekspektasi persentase perubahan harga saham saat terjadi lompatan ke atas.

Baris pertama pada Tabel 4.7 menyatakan saham CYPB dengan parameter $\eta_u = 17,08$ memiliki ekspektasi besar lompatan ke atas 1,0622 yaitu, saat terjadi lompatan ke atas, ekspektasi kenaikannya 6,22%.

Berdasarkan Tabel 4.7, semakin besar nilai η_u , semakin kecil ekspektasi besar lompatan ke atas.

Tabel 4.8. Nilai-Nilai Parameter η_d .

Ticker	η_d	$E(V^d) = \frac{\eta_d}{\eta_d + 1}$	$E(V^d - 1)$ dalam (%)
XICO	8,37	0,8933	-10,67%
LCBM	20,57	0,9536	-4,64%
INTC	24,49	0,9608	-3,92%
TIF	24,61	0,9610	-3,90%
CYPB	25,75	0,9626	-3,74%
T	28,97	0,9666	-3,34%
HYBD	33,25	0,9708	-2,92%
MFRI	35,67	0,9727	-2,73%
MON	56,18	0,9825	-1,75%
TBL	56,52	0,9826	-1,74%

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Tanda negatif pada kolom 3 di Tabel 4.8 menyatakan bahwa harga saham turun.

Pada Tabel 4.8,

- V^d adalah besar lompatan ke bawah,
- $E(V^d)$ adalah ekspektasi besar lompatan ke bawah,
- $V^d - 1$ adalah persentase perubahan harga saham saat terjadi lompatan ke bawah,
- $E(V^d - 1)$ adalah ekspektasi persentase perubahan harga saham saat terjadi lompatan ke bawah.

Baris pertama pada Tabel 4.8 menyatakan saham XICO dengan parameter $\eta_d = 8,37$ memiliki ekspektasi besar lompatan ke bawah 0,8933 yaitu, saat terjadi lompatan ke bawah, ekspektasi penurunannya 10,67%.

Berdasarkan Tabel 4.8, semakin besar nilai η_d , semakin kecil ekspektasi besar lompatan ke bawah.

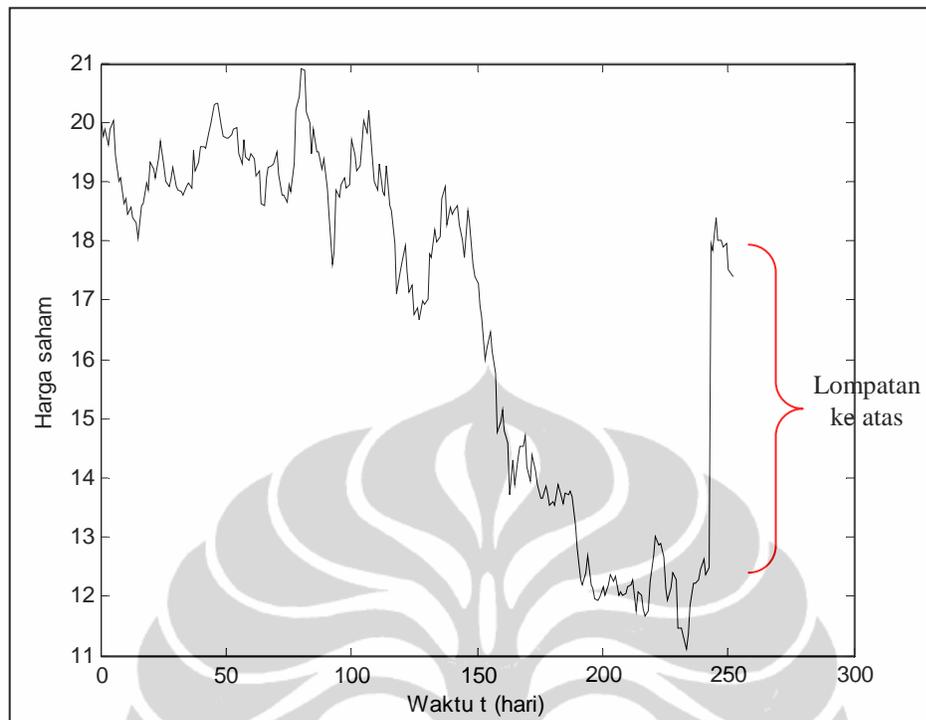
Dengan demikian, agar lompatan terlihat signifikan, dapat dibuat η_u dan η_d yang kecil sedemikian sehingga ekspektasi besar lompatan mempunyai selisih dengan 1 yang cukup besar. Oleh karena itu, ambil $\eta_u = 4$ dan $\eta_d = 5$. Untuk $\eta_u = 4$, ekspektasi besar lompatan ke atas $E(V^u) = 1,3333$, harga saham naik 33,33%. Sedangkan untuk $\eta_d = 5$, $E(V^d) = 0,8333$, harga saham turun 16,67%.

Berdasarkan penjelasan λ_u , λ_d , η_u , dan η_d di atas, parameter yang digunakan pada simulasi selanjutnya adalah parameter yang terdapat pada Tabel 4.2 hanya saja yang diubah adalah parameter λ_u , λ_d , η_u , dan η_d seperti pada Tabel 4.9. Nilai awal $S(0)$ dan $v(0)$, banyaknya hari T , dan R yang digunakan tetap, yaitu nilai awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, dan $R = 100$.

Tabel 4.9. Nilai-Nilai Parameter λ_u , λ_d , η_u , dan η_d .

Parameter	Nilai
λ_u	0,009
λ_d	0,01
η_u	4
η_d	5

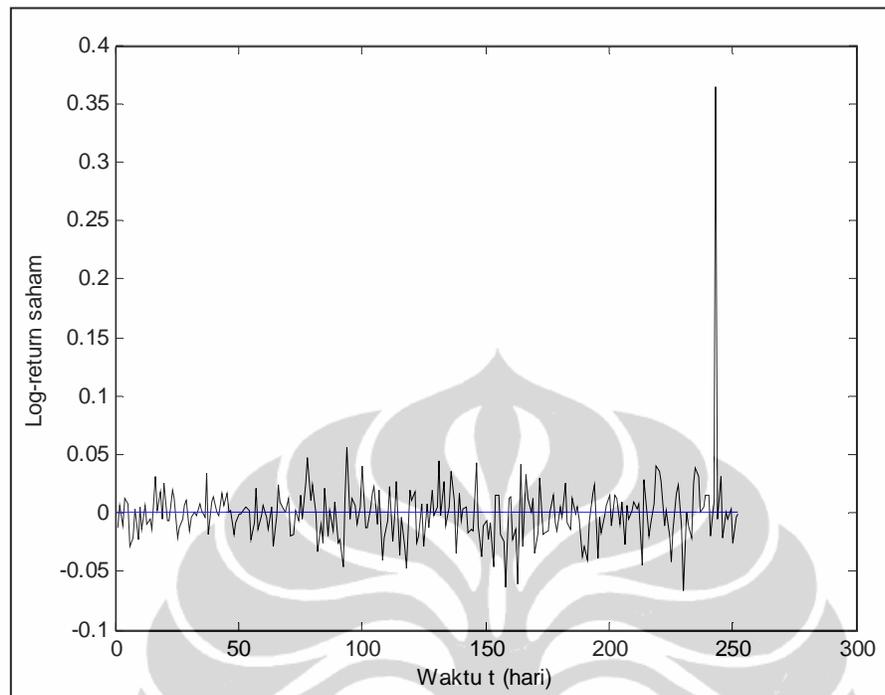
Gambar 4.4 adalah hasil simulasi lintasan solusi analitik model PBJDVS untuk parameter pada Tabel 4.2 dengan parameter λ_u , λ_d , η_u , dan η_d seperti pada Tabel 4.9, nilai awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, dan $R = 100$. Langkah-langkah simulasi untuk mendapatkan Gambar 4.4 dapat dilihat pada Lampiran 15.



Gambar 4.4. Lintasan Solusi Analitik model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u,$ dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$.

Berdasarkan Gambar 4.4, terlihat bahwa lompatan yang signifikan terjadi pada lompatan ke atas pada hari ke-243.

Untuk mendukung analisa di atas, pergerakan *log-return* saham satu periode model PBJDVS ditampilkan pada Gambar 4.5 berikut. Langkah-langkah simulasi untuk mendapatkan Gambar 4.5 dapat dilihat pada Lampiran 16.



Gambar 4.5. Pergerakan *Log-return* Saham Satu Periode model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u,$ dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252, M = 1,$ dan $R = 100.$

Berdasarkan Gambar 4.5, nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS pada hari ke-243 terlihat menjulang ke atas (terlihat positif sangat besar).

Tabel 4.10 dan Tabel 4.11 berikut berturut-turut menyajikan informasi terkait lompatan ke atas dan ke bawah sesuai dengan Gambar 4.4. Langkah-langkah simulasi untuk mendapatkan nilai-nilai pada Tabel 4.10 dan Tabel 4.11 dapat dilihat pada Lampiran 17.

Tabel 4.10. Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Atas untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u,$ dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252, M = 1,$ dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.4.

No	Hari terjadi lompatan ke atas	Banyak lompatan ke atas	V_i^u	$V_i^u - 1$ (dalam %)
1	243	1	1,4279	42,79%

Dari Tabel 4.10 terlihat bahwa banyak hari terjadi lompatan ke atas dalam 252 hari ada sebanyak 1 hari. Terjadinya lompatan ke atas pada hari ke-243 sebanyak 1 lompatan. Besar lompatan ke atas cukup besar, yaitu 1,4279, selisih dengan 1 cukup besar, artinya harga saham setelah melompat cukup jauh dengan harga saham sebelumnya. Dalam hal ini 42,79% artinya harga saham naik 42,79%. Jadi, terlihat bahwa dalam 252 hari, lompatan ke atas yang terjadi hanya 1 kali dengan besar lompatan ke atas cukup besar.

Selanjutnya, Tabel 4.11 berikut menyajikan informasi terkait lompatan ke bawah sesuai dengan Gambar 4.4.

Tabel 4.11. Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan ke Bawah untuk Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 1$, dan $R = 100$ Sesuai dengan Gambar 4.4.

No	Hari terjadi lompatan ke bawah	Banyak lompatan ke bawah	V_i^d	$V_i^d - 1$ (dalam %)
1	92	1	0,9721	- 2,79%

Dari Tabel 4.11 terlihat bahwa banyak hari terjadi lompatan ke bawah dalam 252 hari ada sebanyak 1 hari. Terjadinya lompatan ke bawah pada hari ke-92 sebanyak 1 lompatan. Besar lompatan ke bawah cukup kecil yaitu 0.9721, selisih dengan 1 cukup kecil, artinya harga saham setelah melompat cukup dekat dengan harga saham sebelumnya. Dalam hal ini -2,79% artinya harga saham turun 2,79%. Jadi terlihat bahwa dalam 252 hari, lompatan ke bawah yang terjadi hanya 1 kali dengan besar lompatan ke bawah cukup kecil. Pada Gambar 4.4, lompatan ke bawah pada hari ke-92 tidak terlihat secara signifikan.

Sedangkan untuk lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam satu hari selama 252 hari tidak ada.

Dari simulasi dan analisa di subbab ini, dapat ditarik kesimpulan bahwa simulasi solusi analitik model PBJDVS dengan parameter tertentu dapat

menunjukkan adanya pergerakan harga saham yang sangat tidak wajar (mengandung lompatan).

Pada pembahasan selanjutnya dibahas simulasi untuk pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

4.4. Simulasi Bentuk Pendekatan Kurva *Probability Density Function*

Log-return Saham Satu Periode Model PBJDVS

Pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS, yaitu pdf

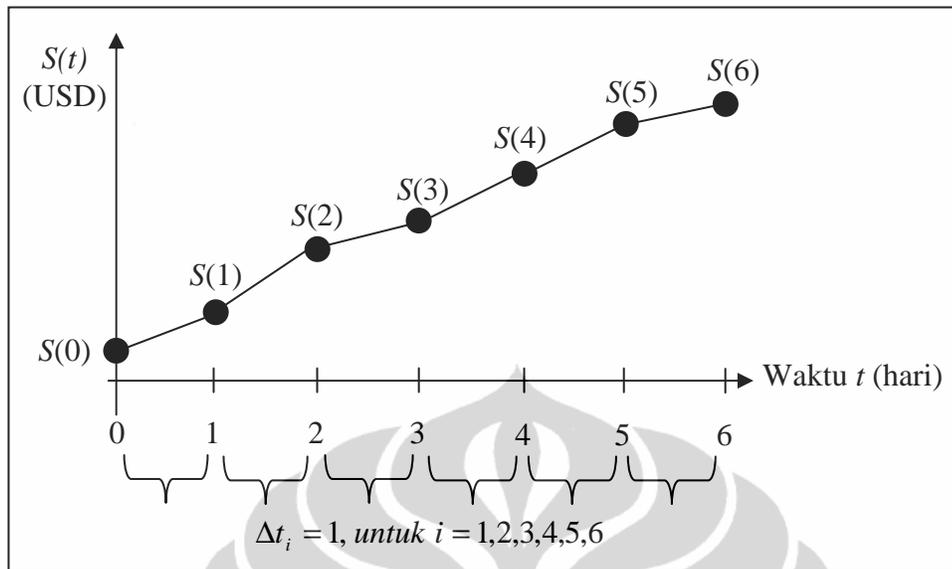
$$R_i = \log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right),$$

sulit dihitung. Oleh sebab itu, kurva pdf tidak dapat

direpresentasikan dalam bentuk gambar. Jadi, kurva pdf R_i digambar berdasarkan simulasi dari nilai-nilai R_i yang diperoleh dari solusi analitik model PBJDVS dalam bentuk *log-return*, yaitu dari persamaan (3.57) di Bab 3.

Log-return saham satu periode model PBJDVS, yaitu R_i , dengan i adalah *fixed*. Jadi, interval waktu $[t_i, t_{i+1}]$ juga *fixed*. Tetapi pada model PBJD yang telah dibahas di Bab 2, antar R_i adalah *Independent and Identically Distributed* (IID) [22]. Jadi untuk sebarang i , distribusi R_i sama. Dengan demikian, untuk memperoleh nilai-nilai R_i dapat dilakukan hanya sekali simulasi. Misalkan interval waktu yang digunakan untuk simulasi adalah $[0, T]$. Jadi, banyaknya nilai R_i , yaitu r_i , yang digunakan untuk membentuk pendekatan kurva pdf R_i ada sebanyak T . Untuk memperjelas hal ini perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan $T = 6$. Ilustrasi pengambilan data *log-return* saham satu periode model PBJD ditampilkan seperti Gambar 4.6.



Gambar 4.6. Ilustrasi Pengambilan Data *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJD untuk Histogram dari 1 Kali Simulasi dengan $T = 6$.

Berdasarkan Gambar 4.6, nilai-nilai *log-return* saham satu periode model

$$\text{PBJDVS diperoleh dari } r_1 = \log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right), r_2 = \log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right), r_3 = \log\left(\frac{S(3)}{S(2)}\right),$$

$$r_4 = \log\left(\frac{S(4)}{S(3)}\right), r_5 = \log\left(\frac{S(5)}{S(4)}\right), r_6 = \log\left(\frac{S(6)}{S(5)}\right). \text{ Jadi, banyaknya nilai } \textit{log-return}$$

saham satu periode model PBJDVS, yaitu r_i , ada sebanyak 6.

Sedangkan di model PBJDVS, berdasarkan penjelasan di Lampiran 9, antar R_i tidak saling bebas. Oleh karena itu nilai-nilai R_i tidak dapat diperoleh dari hanya sekali simulasi. Yang bisa adalah simulasi berkali-kali dengan waktu yang *fixed*.

Nilai-nilai R_i dipengaruhi oleh nilai awal $v(0)$. Berdasarkan [7], yang dimaksud pdf R_i adalah pdf yang tidak bergantung pada nilai awal $v(0)$. Agar pengaruh nilai awal $v(0)$ tidak terasa, maka waktu yang diambil adalah waktu yang jauh dari waktu awal.

Langkah-langkah simulasi pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS menggunakan langkah-langkah simulasi solusi analitik

model PBJDVS yang sudah dijelaskan pada langkah i s.d xviii pada Subbab 4.1 dilanjutkan dengan langkah-langkah berikut.

1. Dari setiap simulasi, nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS (nilai-nilai R_i) yang diambil adalah nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang berada di ujung interval, yaitu

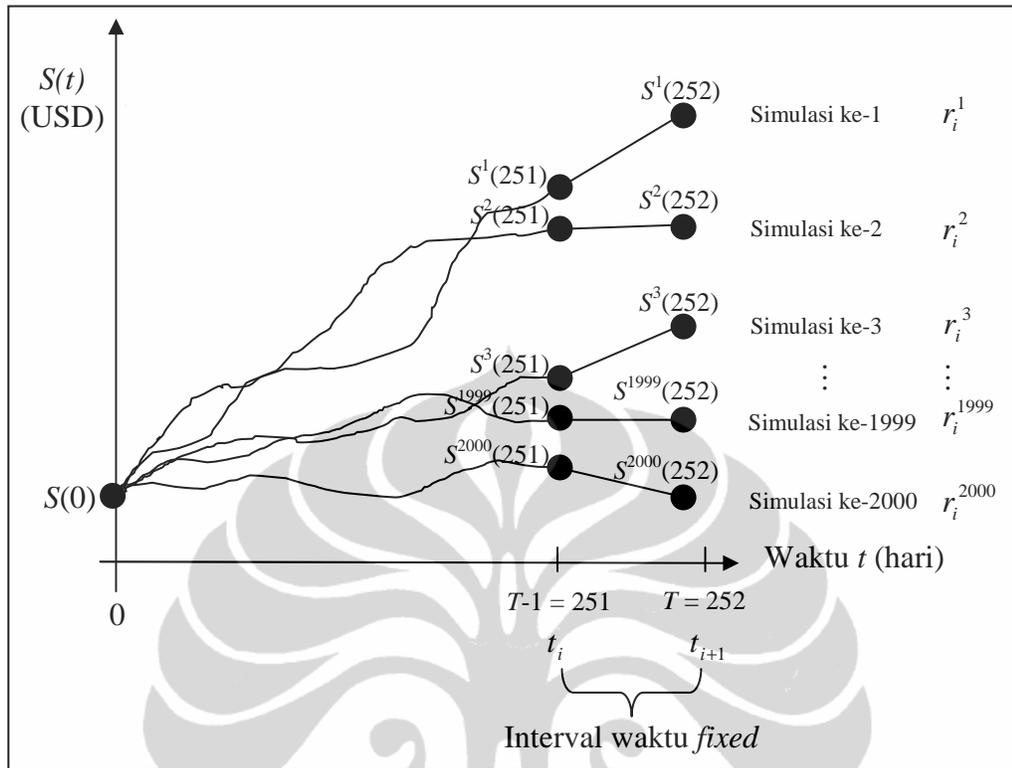
$$R_i = \log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right), \text{ dengan } t_{i+1} = T \text{ untuk } i \text{ yang } fixed. \quad (4.4)$$

Berdasarkan persamaan (4.4), dari setiap simulasi dibutuhkan dua buah nilai harga saham dimana nilai harga yang diambil dari setiap simulasi adalah nilai saham di titik ujung T dan nilai saham di titik $T - 1$. Nilai-nilai harga saham dari setiap simulasi di titik T dan di titik $T - 1$ dihitung menggunakan persamaan (4.1) pada langkah xviii di Halaman 64 pada Bab ini. Jadi, nilai-nilai *log-return* saham satu periode dari setiap simulasi dihitung menggunakan

$$\log\left(\frac{S(T)}{S(T-1)}\right). \quad (4.5)$$

Sehingga banyaknya nilai nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS, yaitu r_i , ada sebanyak M . Untuk memperjelas langkah ini, dapat melihat ilustrasi berikut.

Seperti yang telah dijelaskan, agar pengaruh nilai awal $v(0)$ tidak terasa, maka waktu yang diambil adalah waktu yang jauh dari waktu awal. Misalkan diambil $T = 252$ dan $M = 2000$. Ilustrasi pengambilan data *log-return* saham satu periode model PBJDS ditampilkan seperti Gambar 4.7.



Gambar 4.7. Ilustrasi Pengambilan Data untuk Histogram *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk $T = 252$ dan $M = 2000$.

Nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS pada simulasi ke-1, 2, ..., 1999, 2000 berturut-turut dinotasikan oleh $r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{1999}, r_i^{2000}$, dimana nilai-nilai $r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{1999}, r_i^{2000}$ dihitung menggunakan persamaan (4.5), yaitu

$$\log\left(\frac{S(T)}{S(T-1)}\right)$$

- Menentukan jangkauan J dari nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS menggunakan

$$J = \max\{r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{M-1}, r_i^M\} - \min\{r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{M-1}, r_i^M\}.$$

Misalkan $M = 2000$, maka

$$J = \max\{r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{1999}, r_i^{2000}\} - \min\{r_i^1, r_i^2, r_i^3, \dots, r_i^{1999}, r_i^{2000}\}$$

3. Menentukan panjang interval kelas d (dengan d sekecil yang diinginkan). Jadi, banyaknya kelas ada sebanyak $\frac{J}{d}$. Kelas ke- k adalah interval dari $\min\{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{M-1}, r_i^M\} + (k-1)d$ sampai dengan $\min\{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{M-1}, r_i^M\} + kd$ untuk $k = 1, 2, \dots, \frac{J}{d}$.

Misalkan diambil $d = 0.02$. Dengan demikian banyaknya kelas ada sebanyak

$$\frac{J}{0,02}.$$

4. Menentukan frekuensi dari nilai-nilai *log-return* saham satu periode yang masuk di interval kelas ke- k , yaitu f_k untuk $k = 1, 2, \dots, \frac{J}{d}$.

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan penjelasan berikut ini. Misalkan diambil $M = 2000$.

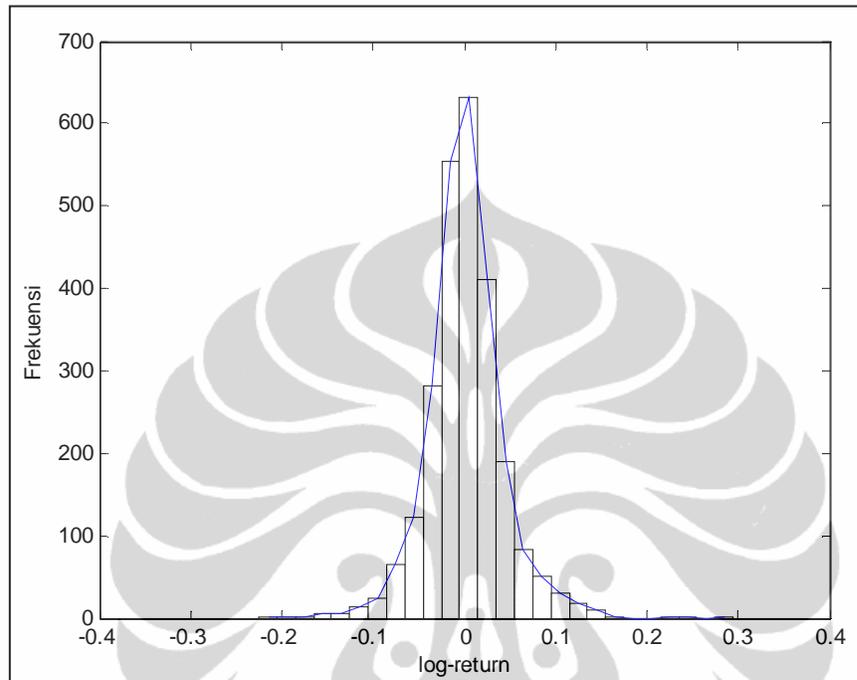
- Misalkan nilai-nilai *log-return* saham satu periode yang masuk di interval kelas ke-1 adalah $r_i^6, r_i^{54}, r_i^{100}$. Jadi, frekuensi untuk interval kelas ke-1 adalah $f_1 = 3$.
 - Misalkan nilai-nilai *log-return* yang masuk di interval kelas ke-2 adalah $r_i^3, r_i^8, r_i^{17}, r_i^{500}, r_i^{801}, r_i^{906}, r_i^{1992}$. Jadi, frekuensi untuk interval kelas ke-2 adalah $f_2 = 7$.
5. Menggambar histogram. Sumbu y menyatakan frekuensi dan sumbu x menyatakan nilai-nilai *log-return* saham satu periode.
6. Menggambar poligon frekuensi, yaitu dengan cara titik tengah dari persegi panjang di setiap interval kelas ditentukan kemudian dihubungkan dengan garis lurus, yang disebut sebagai poligon frekuensi.

Gambar 4.11 adalah histogram dan poligon frekuensi dari data

$$\log\left(\frac{S(T)}{S(T-1)}\right)$$

untuk parameter pada Tabel 4.2, nilai awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, M

= 2500, dan $R = 100$. Pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS dengan parameter pada Tabel 4.2 kira-kira berbentuk seperti histogram pada Gambar 4.8. *Source code* untuk mendapatkan Gambar 4.8 dapat dilihat pada Lampiran 21.



Gambar 4.8. Histogram dan Poligon Frekuensi *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$.

Berdasarkan histogram, dapat dibentuk kurva pendekatan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS. Sumbu y pada histogram menyatakan frekuensi. Untuk membuat kurva pdf *log-return* saham satu periode, sumbu y haruslah suatu *probability density*. Oleh karena itu, skala pada histogram perlu disesuaikan sedangkan sumbu x tetap dibuat sama.

Hal ini dapat dijelaskan oleh langkah-langkah berikut.

- 1) Menentukan frekuensi relatif pada interval kelas ke- k , yaitu fr_k untuk

$$k = 1, 2, \dots, \frac{J}{d}.$$

Frekuensi relatif fr_k diperoleh dari frekuensi f_k dibagi dengan banyaknya nilai *log-return* saham satu periode (banyaknya simulasi M), yaitu

$$fr_k = \frac{f_k}{M}. \quad (4.6)$$

Frekuensi relatif pada persamaan (4.6) adalah taksiran untuk probabilitas bahwa nilai-nilai *log-return* saham satu periode masuk di interval ke- k , dengan

$$\sum_{k=1}^{\frac{J}{d}} fr_k = \sum_{k=1}^{\frac{J}{d}} \frac{f_k}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\frac{J}{d}} f_k = \frac{M}{M} = 1$$

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Pada langkah 4 dalam pembuatan histogram dan poligon frekuensi, telah diperoleh frekuensi pada interval kelas ke-1 dan ke-2, yaitu berturut-turut ada sebanyak $f_1 = 3$ dan $f_2 = 7$. Frekuensi relatif fr_1 dan fr_2 dihitung menggunakan persamaan (4.6). Frekuensi relatif fr_1 dan fr_2 berturut-turut adalah

$$fr_1 = \frac{f_1}{M} = \frac{3}{2000}, \quad (4.7)$$

dan

$$fr_2 = \frac{f_2}{M} = \frac{7}{2000}. \quad (4.8)$$

Nilai fr_1 pada persamaan (4.7) adalah taksiran untuk probabilitas bahwa nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS, yaitu r_i , masuk di interval ke-1. Sedangkan nilai fr_2 pada persamaan (4.8) adalah taksiran untuk probabilitas bahwa nilai-nilai *log-return* saham satu periode, yaitu r_i , masuk di interval ke-2.

- 2) Menentukan *probability density* pada interval kelas ke- k , yang dinotasikan oleh prd_k untuk $k = 1, 2, \dots, \frac{J}{d}$.

Probability density pada interval kelas ke- k , prd_k , dapat didekati dengan cara membagi taksiran untuk probabilitas fr_k dengan panjang intervalnya, d (penjelasan dapat dilihat di Lampiran 10), yaitu

$$prd_k = \frac{fr_k}{d}. \quad (4.9)$$

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Pada langkah sebelumnya telah diperoleh nilai-nilai frekuensi relatif di interval kelas ke-1 dan ke-2, yaitu berturut-turut

$$fr_1 = \frac{3}{2000}, \quad (4.10)$$

dan

$$fr_2 = \frac{7}{2000}. \quad (4.11)$$

Misalkan diambil $d = 0.02$. Menggunakan persamaan (4.9), nilai pendekatan *probability density* di interval kelas ke-1 dan ke-2 berturut-turut adalah

$$prd_1 = \frac{fr_1}{d} = \frac{\left(\frac{3}{2000}\right)}{0,02} = \frac{3}{40}. \quad (4.12)$$

dan

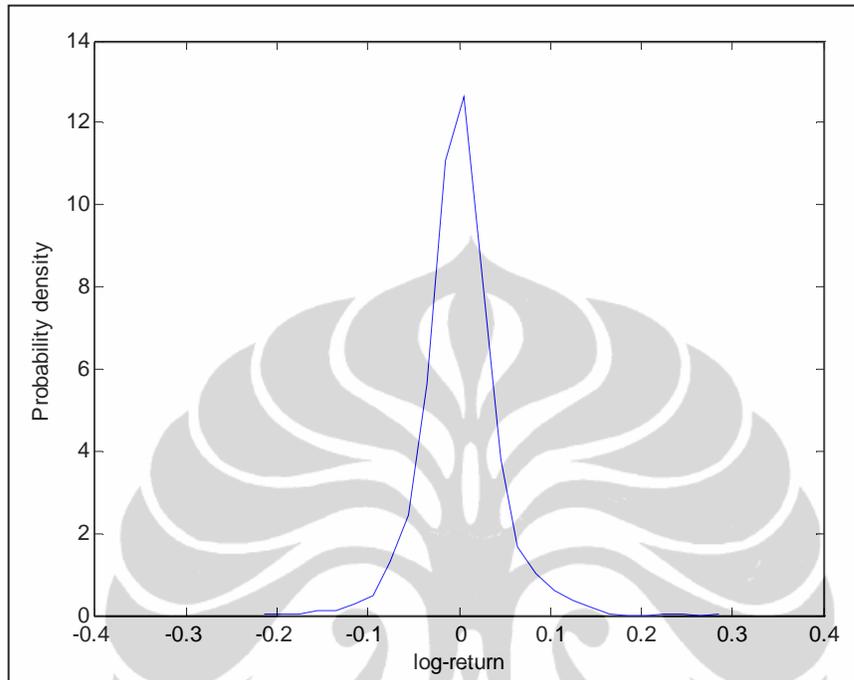
$$prd_2 = \frac{fr_2}{d} = \frac{\left(\frac{7}{2000}\right)}{0,02} = \frac{7}{40}. \quad (4.13)$$

Langkah 1) dan 2) yang baru saja dijelaskan adalah langkah-langkah untuk menyesuaikan skala sumbu y pada histogram, sehingga setelah sumbu y disesuaikan, maka sumbu y menyatakan *probability density*.

- 3) Dilakukan langkah seperti pembuatan poligon frekuensi (lihat langkah 6 pada pembuatan poligon frekuensi), yang berbeda hanya pada sumbu y . Dengan perkataan lain kurva pendekatan *log-return* saham satu periode ini adalah kurva poligon frekuensi, tetapi sumbu y disesuaikan sesuai dengan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS.

Dengan demikian, dengan penyesuaian skala pada sumbu y , Gambar 4.8 dapat ditampilkan seperti pada Gambar 4.9. Jadi, kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang tergambar seperti pada Gambar 4.9 adalah berupa

pendekatan. *Source code* untuk mendapatkan Gambar 4.9 dapat dilihat pada Lampiran 22.



Gambar 4.9. Kurva Pendekatan Pdf *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$.

Gambar 4.9 menyatakan pendekatan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS dengan parameter pada Tabel 4.2. Terlihat pula bahwa dengan parameter tersebut, kurva pendekatan pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS hampir simetris. Dengan demikian probabilitas *log-return* saham satu periode model PBJDVS di sebelah kiri nol hampir sama dengan probabilitas probabilitas *log-return* saham satu periode model PBJDVS di sebelah kanan nol atau dapat ditulis sebagai

$$\Pr(R_i \leq 0) \approx \Pr(R_i \geq 0).$$

Jadi, pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS dengan parameter pada Tabel 4.2 kira-kira seperti pada Gambar 4.9.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Model PBJDVS merupakan model harga saham yang berbentuk sistem PDS yang mencakup faktor lompatan. Dengan menerapkan rumus Itô, sudah diperoleh solusi analitik model PBJDVS yang mengandung kuadrat volatilitas stokastik $v(t)$.

Berdasarkan solusi analitik model PBJDVS, *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS juga sudah diperoleh.

Berdasarkan simulasi solusi analitik model PBJDVS, dapat disimpulkan bahwa simulasi solusi analitik model PBJDVS dengan parameter tertentu dapat menunjukkan adanya pergerakan harga saham yang sangat tidak wajar (lompatan).

Pendekatan kurva pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS dapat digambar berdasarkan simulasi dari nilai-nilai *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang diperoleh dari solusi analitik model PBJDVS.

5.2. Saran

Dalam tesis ini *probability density function* (pdf) *log-return* saham satu periode model PBJDVS sudah diperoleh, selanjutnya pdf ini dapat digunakan untuk menentukan taksiran parameter menggunakan data *real* pada penelitian selanjutnya.

Karena keterbatasan waktu, tidak dilakukan pemeriksaan apakah pdf *log-return* saham satu periode model PBJDVS yang sudah diperoleh memenuhi sifat-sifat pdf. Oleh sebab itu disarankan untuk penulisan selanjutnya hal ini dapat diperiksa.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Andersen, Leif. (2006). *Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*. Banc of America Securities.
- [2] Broadie, Mark, & Ashish Jain. (2008). *The Effect of Jumps and Discrete Sampling on Volatility and Variance Swaps*.
- [3] Bruti-Liberati, N., & E. Platen (2007). *Approximation of Jump Diffusion in Finance and Economics*. Comput. Econ. 29:283-312. Springer.
- [4] Bruti-Liberati, N., & E. Platen. (2005). *On the Strong Approximation Jump-Diffusion Processes*. University of Technology Sydney.
- [5] Burden, Richard L, & J. Douglas Faires. (2001). *Numerical Analysis*. (7th ed).
- [6] Cont, Rama, & Peter Tankov. (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press.
- [7] Dragulescu, Adrian A., & Victor M Yakovenko. (2002). *Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility*.
- [8] Dupoyet, Brice. (2004). *Asymmetric Jump Processes: Option Pricing Implications*.
- [9] Gatheral, Jim, & Merrill Lynch. (2002). *Lecture 1: Stochastic Volatility and Local Volatility*. Case Studies in Financial Modelling Course Notes, Courant Institute of Mathematical Sciences.
- [10] Hanson, Floyd B. (2007). *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [11] Higham, Desmond J. (2001). *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*. SIAM Review, Vol.43. No.3 pp. 525-546.
- [12] Hogg, R. V., J. W. McKean, & A. T. Craig. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics* (6th ed). Pearson Prentice Hall, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458.

- [13] Hogg, R. V, & Stuart A Klugman. (1984). *Loss Distributions*.
- [14] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=LEHMQ.PK&a=00&b=1&c=1998&d=05&e=11&f=2009&g=d>
- [15] Kleppe, Tore Selland, Jun Yu, & Hans J. Skaug (2009). *Simulated Maximum Likelihood Estimation of Continuous Time Stochastic Volatility Models*.
- [16] Kou, S.G. (2008). *Jump-Diffusion Models for Asset Pricing in Financial Engineering*.
- [17] Lisnawati. (2005). *Metode Peramalan Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) Menggunakan Model Fungsi Transfer*. Skripsi. Departemen Matematika UI.
- [18] Matsuda, Kazuhisa. (2004). *Introduction to Merton Jump-Diffusion Model*. Department of Economics. The Graduate Center, The City University of New York, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016-4309.
- [19] Merton, Robert C. (1975). *Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous*.
- [20] Olivia, Cippy. (1999). *Analisis Time Series Indeks Harga Saham Gabungan (Data Harian: 1 Juli 1996 – 30 Juni 1998)*. Skripsi. Departemen Matematika UI.
- [21] Pszczola, Agnieszka, & Grzegorz Walachowski. (2009). *Testing for Jumps in Face of the Financial Crisis. Application of Barndoff-Nielsen – Shephard Test and the Kou Model*. School of Information Science, Computer and Electrical Engineering. Halmstad University.
- [22] Ramezani, Cyrus A., & Yong Zeng. (2006). *Maximum Likelihood Estimation of the Double Exponential Jump-Diffusion Process*. Springer-Verlag.
- [23] Setiawan, Aris. (2009). *Aproksimasi Model Persamaan Diferensial Stokastik Jump-Diffusion dengan Menggunakan Metode Taylor Order 1.0*. Skripsi. Departemen Matematika UI.
- [24] Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models*. Springer.
- [25] Taygeta. (2008). *An Introduction to Stochastic Differential Equation.2 hlm*. <http://www.taygeta.com/sde/lecture1/stokos1/stokos1.html>.

- [26] Taylor, Howard M and Samuel Karlin. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*. (3th ed). Academic Press Limited.
- [27] Tian, T. (2001). *Implicit Numerical Methods for Stiff Stochastic Differential Equations and Numerical Simulations of Stochastic Models*. Thesis. University of Queensland.
- [28] Varberg, Dale, Edwin J Purcel, & Steven E Rigdon. (2003). *Calculus*. (8th ed). Prentice-Hall. Inc.

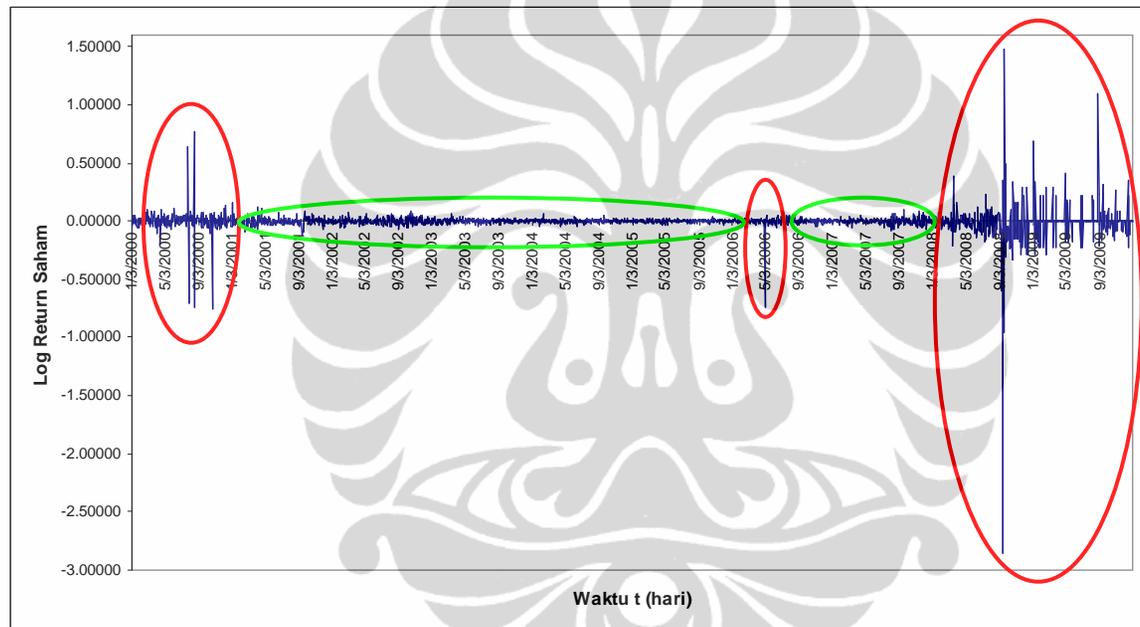




LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Pergerakan *Log-return* Saham Harian Lehman Brothers Holdings Inc. (LEHMQ.PK) (3 Jan 2000 - 31 Dec 2009)



Gambar L1. Pergerakan *Log-return* Saham Harian Lehman Brothers Holdings Inc. (LEHMQ.PK)
(3 Jan 2000 - 31 Dec 2009)

Sumber: [14] (telah diolah kembali)

Keterangan:  : Pergerakan *log-return* saham yang wajar.
 : Pergerakan *log-return* saham dengan lompatan.

LAMPIRAN 2

Bukti Koefisien Korelasi dari Dua Buah Variabel Acak Adalah $\rho \in [-1, 1]$

Akan dibuktikan koefisien korelasi

$$\rho \in [-1, 1].$$

Bukti:

Misalkan X dan Y adalah variabel acak.

Berdasarkan definisi korelasi X dan Y pada [12], korelasi dari X dan Y adalah

$$\rho = \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \quad (\text{L2.1})$$

Agar persamaan (L2.1) terdefinisi, maka $\text{Var}(X) > 0$ dan $\text{Var}(Y) > 0$.

Pandang

$$\text{Var}(Y - aX) \geq 0 \quad (\text{L2.2})$$

berlaku untuk sembarang $a \in \text{Real}$.

Dengan menguraikan $\text{Var}(Y - aX)$, diperoleh

$$\text{Var}(Y - aX) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(-aX) + 2\text{Cov}(Y, -aX)$$

Berdasarkan sifat variansi diperoleh

$$\text{Var}(Y - aX) = \text{Var}(Y) + a^2\text{Var}(X) + 2\text{Cov}(Y, -aX) \quad (\text{L2.3})$$

Substitusi persamaan (L2.4) ke (L2.2) diperoleh

$$\text{Var}(Y) + a^2\text{Var}(X) + 2\text{Cov}(Y, -aX) \geq 0.$$

Selanjutnya cari $\text{Cov}(Y, -aX)$.

Berdasarkan definisi kovariansi diperoleh

$$\text{Cov}(Y, -aX) = E((Y - E(Y)) \cdot (-aX - E(-aX))).$$

Berdasarkan sifat ekspektasi diperoleh

$$\text{Cov}(Y, -aX) = E((Y - E(Y)) \cdot (-aX + aE(X)))$$

$$\text{Cov}(Y, -aX) = E(-a(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))).$$

Berdasarkan sifat ekspektasi diperoleh

$$\text{Cov}(Y, -aX) = -aE((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))). \quad (\text{L2.5})$$

Berdasarkan definisi kovariansi

$$E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = \text{Cov}(X, Y). \quad (\text{L2.6})$$

Substitusi persamaan (L2.6) ke (L2.5) diperoleh

$$\text{Cov}(Y, -aX) = -a\text{Cov}(X, Y). \quad (\text{L2.7})$$

Substitusi persamaan (L2.7) ke (L2.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) + a^2\text{Var}(X) - 2a\text{Cov}(X, Y) &\geq 0. \\ \text{Var}(X)a^2 - 2\text{Cov}(X, Y)a + \text{Var}(Y) &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L2.8})$$

berlaku untuk sembarang $a \in \text{Real}$. Karena $\text{Var}(X) > 0$ maka (L2.8) adalah pertidaksamaan kuadrat dalam a . Karena pertidaksamaan (L2.8) berlaku untuk sembarang $a \in \text{Real}$, maka persamaan

$$\text{Var}(X)a^2 - 2\text{Cov}(X, Y)a + \text{Var}(Y) = 0 \quad (\text{L2.9})$$

pasti memiliki akar kembar atau tidak memiliki akar *real*. Berarti diskriminan persamaan (L2.9) adalah nol atau negatif. Misalkan D adalah diskriminan, jadi

$$D = 0 \text{ atau } D < 0,$$

dengan perkataan lain $D \leq 0$.

Berdasarkan persamaan (L2.9) diperoleh

$$D = (-2\text{Cov}(X, Y))^2 - 4\text{Var}(X)\text{Var}(Y) \leq 0,$$

atau ekuivalen dengan

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y). \quad (\text{L2.10})$$

Karena $\text{Var}(X) > 0$ dan $\text{Var}(Y) > 0$, maka $\text{Var}(X)\text{Var}(Y) > 0$. Dengan membagi persamaan (L2.10) dengan $\text{Var}(X)\text{Var}(Y)$ diperoleh

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \leq 1. \quad (\text{L2.11})$$

Berdasarkan (L2.1), maka persamaan (L2.11) menjadi

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} = \rho^2 \leq 1.$$

Jadi

$$\rho^2 \leq 1,$$

atau ekuivalen dengan

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Jadi terbukti bahwa

$$\rho \in [-1, 1].$$



LAMPIRAN 3

Bukti Persamaan (2.41): Jika $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ Berkorelasi dengan Koefisien Korelasi ρ maka Diperoleh $Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt$

Akan dibuktikan jika $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ berkorelasi dengan koefisien korelasi ρ , maka diperoleh $Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt$.

Bukti:

Berdasarkan [12], korelasi variabel acak X dengan Y dinyatakan oleh

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}. \quad (L3.1)$$

Menggunakan persamaan (L3.1), korelasi $dW_1(t)$ dengan $dW_2(t)$ adalah

$$Cor(dW_1(t), dW_2(t)) = \frac{Cov(dW_1(t), dW_2(t))}{\sqrt{Var(dW_1(t)) \cdot Var(dW_2(t))}}. \quad (L3.2)$$

Diketahui koefisien korelasi antara $dW_1(t)$ dengan $dW_2(t)$ adalah ρ , dan $Var(dW_1(t))$ dan $Var(dW_2(t))$ masing-masing adalah dt . Jadi

$$\rho = \frac{Cov(dW_1(t), dW_2(t))}{\sqrt{dt \cdot dt}}.$$

Diperoleh

$$Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt.$$

(terbukti)

LAMPIRAN 4

Bukti Jika Diketahui Persamaan (2.41) maka Persamaan (2.41) dapat Dinyatakan Seperti pada Persamaan (2.42)

Akan dibuktikan jika diketahui persamaan (2.41), maka persamaan (2.41) dapat dinyatakan seperti pada persamaan (2.42). Dengan perkataan lain akan dibuktikan

$$\text{Cov}(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt \quad \Rightarrow \quad dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t).$$

Bukti

Persamaan (2.42) ditulis ulang sebagai

$$dW_1(t) - \rho dW_2(t) = \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t). \tag{L4.1}$$

Diasumsikan bahwa distribusi bersama dari $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ adalah Bivariat Normal. Berdasarkan [12], *moment generating function* (mgf) bersama dari $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ adalah

$$\begin{aligned} E(\exp(u_1 dW_1(t) + u_2 dW_2(t))) &= \exp(E(dW_1(t))u_1 + E(dW_2(t))u_2 \\ &+ \frac{1}{2}(\text{Var}(dW_1(t))u_1^2 + 2\rho\sqrt{\text{Var}(dW_1(t))}\sqrt{\text{Var}(dW_2(t))}u_1u_2 + \text{Var}(dW_2(t))u_2^2)) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(dt u_1^2 + 2\rho\sqrt{dt}\sqrt{dt} u_1u_2 + dt u_2^2)\right). \end{aligned}$$

Jadi

$$E(\exp(u_1 dW_1(t) + u_2 dW_2(t))) = \exp\left(\left(u_1^2 + 2\rho u_1u_2 + u_2^2\right)\frac{dt}{2}\right). \tag{L4.2}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $dW_1(t)$ adalah $\rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t)$, dengan membuktikan dua pernyataan berikut.

- a. $dW_2(t)$ dan $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ saling bebas.
- b. $dW_1(t) - \rho dW_2(t) \sim N(0, (1 - \rho^2)dt)$.

1. Bukti bagian a

Pandang persamaan (L4.1). Berdasarkan persamaan (L4.2), mgf bersama dari $dW_2(t)$ dan $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ adalah

$$\begin{aligned}
 E(\exp(u_1(dW_1(t) - \rho dW_2(t)) + u_2 dW_2(t))) &= E(\exp(u_1 dW_1(t) + (u_2 - \rho u_1) dW_2(t))) \\
 &= E(\exp(u_1 dW_1(t) + (u_2 - \rho u_1) dW_2(t))) \\
 &= \exp\left(\left(u_1^2 + 2\rho u_1(u_2 - \rho u_1) + (u_2 - \rho u_1)^2\right) \frac{dt}{2}\right) \\
 &= \exp\left(\left(u_1^2 + 2\rho u_1 u_2 - 2\rho^2 u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2 + \rho^2 u_1^2\right) \frac{dt}{2}\right) \\
 &= \exp\left(\left(u_1^2 - \rho^2 u_1^2 + u_2^2\right) \frac{dt}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Diperoleh

$$E(\exp(u_1(dW_1(t) - \rho dW_2(t)) + u_2 dW_2(t))) = \exp\left(\left(1 - \rho^2\right) u_1^2 \frac{dt}{2}\right) \exp\left(u_2^2 \frac{dt}{2}\right). \quad (\text{L4.3})$$

Berdasarkan persamaan (L4.3), mgf bersama dari $dW_2(t)$ dan $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian fungsi dari u_1 dan u_2 , maka $dW_2(t)$ dan $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ saling bebas. (terbukti)

2. Bukti bagian b

Mgf dari $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ adalah

$$\begin{aligned} E(\exp(u(dW_1(t) - \rho dW_2(t)))) &= E(\exp(u dW_1(t) - u \rho dW_2(t))) \\ &= \exp\left(\left(u^2 + 2\rho u(-\rho u) + (-\rho u)^2\right)\frac{dt}{2}\right) \\ &= \exp\left(\left(u^2 - \rho^2 u^2\right)\frac{dt}{2}\right). \end{aligned}$$

Diperoleh

$$E(\exp(u(dW_1(t) - \rho dW_2(t)))) = \exp\left(\left(1 - \rho^2\right)dt \frac{u^2}{2}\right). \quad (\text{L4.4})$$

Sementara itu, berdasarkan [12], mgf dari variabel acak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ adalah

$$E(\exp(tX)) = \exp\left(\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right). \quad (\text{L4.5})$$

Dengan menyamakan persamaan (L4.4) dan (L4.5), maka persamaan (L4.4) adalah mgf dari distribusi normal dengan mean nol dan variansi $(1 - \rho^2)dt$. Jadi

$$dW_1(t) - \rho dW_2(t) \sim N(0, (1 - \rho^2)dt).$$

(terbukti)

Sementara itu, diketahui $dW_3(t) \sim N(0, dt)$, jadi

$$\sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t) \sim N(0, (1 - \rho^2)dt).$$

Dengan demikian, $dW_1(t) - \rho dW_2(t)$ dapat dinyatakan sebagai $\sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t)$ seperti pada persamaan (L4.1).

(terbukti)

Berdasarkan bukti bagian a dan b, maka terbukti bahwa

$$\text{Cov}(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt \quad \Rightarrow \quad dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t).$$

(terbukti)

LAMPIRAN 5

Bukti Persamaan (2.42) Menjadi (2.41)

Akan dibuktikan

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t) \Rightarrow Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt .$$

Bukti:

Diketahui

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t) \quad (L5.1)$$

dengan $W_2(t)$ dan $W_3(t)$ adalah proses Wiener standar yang saling bebas.

Menggunakan definisi kovariansi dari $dW_1(t)$ dan $dW_2(t)$ diperoleh

$$\begin{aligned} Cov(dW_1(t), dW_2(t)) &= E((dW_1(t) - E(dW_1(t))) \cdot (dW_2(t) - E(dW_2(t)))) \\ Cov(dW_1(t), dW_2(t)) &= E(dW_1(t) \cdot dW_2(t)). \end{aligned} \quad (L5.2)$$

Substitusi persamaan (L5.1) ke (L5.2) diperoleh

$$\begin{aligned} Cov(dW_1(t), dW_2(t)) &= E((\rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t)) dW_2(t)) \\ &= \rho E((dW_2(t))^2) + \sqrt{1 - \rho^2} E(dW_2(t) dW_3(t)). \end{aligned}$$

Karena $dW_2(t)$ dan $dW_3(t)$ saling bebas, maka

$$Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho E((dW_2(t))^2) + \sqrt{1 - \rho^2} E(dW_2(t)) E(dW_3(t)). \quad (L5.3)$$

Karena $E(dW_2(t)) = 0$ dan $E(dW_3(t)) = 0$, maka suku kedua ruas kanan persamaan

(L5.3) adalah nol. Jadi

$$Cov(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho E((dW_2(t))^2). \quad (L5.4)$$

Karena

$$Var(dW_2(t)) = E((dW_2(t))^2) - (E(dW_2(t)))^2 \quad (L5.5)$$

dan karena $E(dW_2(t)) = 0$, $Var(dW_2(t)) = dt$, maka persamaan (L5.5) menjadi

$$E((dW_2(t))^2) = dt. \quad (L5.6)$$

Substitusi persamaan (L5.6) ke (L5.4), diperoleh

$$\text{Cov}(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho dt .$$

(terbukti)



LAMPIRAN 6

Bukti Beberapa Fakta tentang Distribusi Pareto, Beta, dan Eksponensial

1. Bagian a

Diketahui $V^u \sim \text{Pareto}(\eta_u)$, akan ditunjukkan $Y^u = \log V^u \sim \exp(\eta_u) = \Gamma(1, \eta_u)$.

Bukti:

Pdf V^u adalah seperti pada persamaan (2.35) pada Bab 2, maka *cumulative distribution function* (cdf) V^u adalah

$$\begin{aligned} F_{V^u}(x) &= \Pr(V^u \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{V^u}(y) dy = \int_1^x \frac{\eta_u}{y^{\eta_u+1}} dy = \eta_u \int_1^x y^{-(\eta_u+1)} dy \\ &= -y^{-\eta_u} \Big|_1^x = -(x^{-\eta_u} - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{x^{\eta_u}}, \text{ untuk } x \geq 1. \end{aligned} \tag{L6.1}$$

Kemudian akan ditentukan cdf $Y^u = \log V^u$. Menggunakan (L6.1) diperoleh

$$F_{Y^u}(x) = \Pr(Y^u \leq x) = \Pr(\log V^u \leq x) = \Pr(V^u \leq e^x) = 1 - \frac{1}{e^{\eta_u x}}.$$

Karena nilai V^u yang mungkin adalah $V^u \geq 1$, maka $\log V^u \geq 0$. Jadi

$$F_{Y^u}(x) = \Pr(Y^u \leq x) = 1 - \frac{1}{e^{\eta_u x}}, \text{ untuk } x \geq 0. \tag{L6.2}$$

Selanjutnya pdf Y^u ditentukan menggunakan turunan pertama dari cdf Y^u , yaitu

$$f_{Y^u}(x) = \frac{dF_{Y^u}(x)}{dx} = \eta_u e^{-\eta_u x}, \text{ untuk } x \geq 0. \tag{L6.3}$$

Persamaan (L6.3) adalah pdf distribusi Eksponensial dengan parameter η_u .

Sedangkan, berdasarkan persamaan (2.24) di Bab 2, pdf distribusi Gamma adalah

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \text{ untuk } x > 0. \tag{L6.4}$$

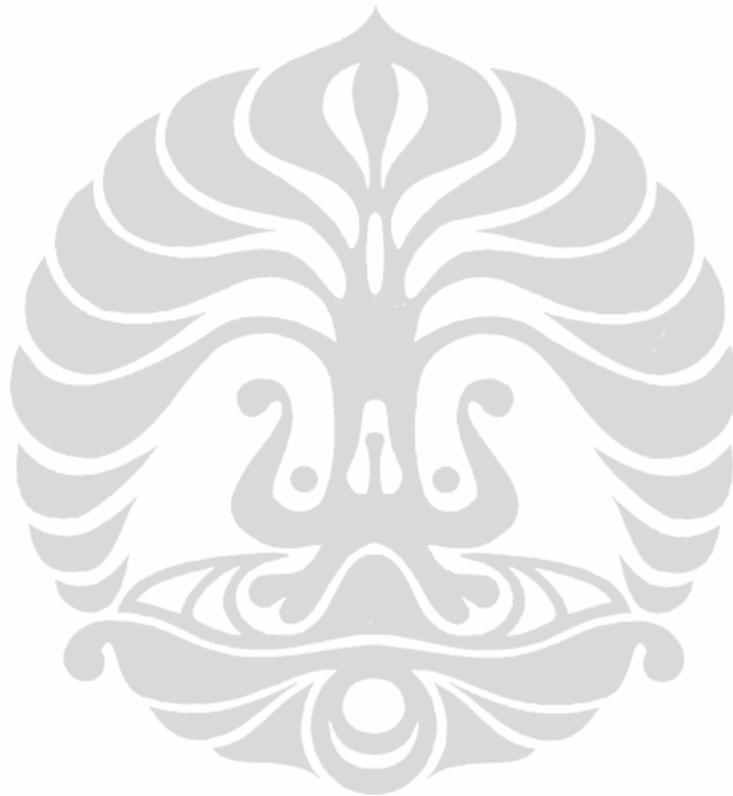
Dengan mengambil $\alpha = 1$ dan $\lambda = \eta_u$ diperoleh

$$f_x(x) = \eta_u e^{-\eta_u x}, \text{ untuk } x \geq 0. \quad (\text{L6.5})$$

Bentuk (L6.3) ternyata sama dengan (L6.5), sehingga dapat disimpulkan

$$Y^u = \log V^u \sim \exp(\eta_u) = \Gamma(1, \eta_u).$$

(terbukti)



2. Bagian b

Diketahui $V^d \sim \text{Beta}(\eta_d, 1)$, akan ditunjukkan $-Y^d = -\log V^d \sim \exp(\eta_d) = \Gamma(1, \eta_d)$.

Bukti:

Pdf V^d adalah seperti pada (2.37) pada Bab 2, maka cdf V^d adalah

$$\begin{aligned}
 F_{V^d}(x) &= \Pr(V^d \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{V^d}(y) dy \\
 &= \int_0^x \eta_d y^{\eta_d-1} dy \\
 &= y^{\eta_d} \Big|_0^x \\
 &= x^{\eta_d}, \text{ untuk } 0 < x < 1.
 \end{aligned} \tag{L6.6}$$

Kemudian akan ditentukan cdf $-Y^d = -\log V^d$. Menggunakan (L6.6) diperoleh

$$F_{-Y^d}(x) = \Pr(-Y^d \leq x) = \Pr(-\log V^d \leq x) = \Pr(V^d \geq e^{-x}) = 1 - \Pr(V^d \leq e^{-x}) = 1 - e^{-\eta_d x}.$$

Karena nilai V^d yang mungkin adalah $0 < V^d < 1$, maka $Y^d = \log V^d < 0$ atau ekuivalen dengan $-Y^d > 0$. Jadi

$$F_{-Y^d}(x) = \Pr(-Y^d \leq x) = 1 - e^{-\eta_d x}, \text{ untuk } x \geq 0. \tag{L6.7}$$

Selanjutnya pdf $-Y^u$ ditentukan menggunakan turunan pertama dari cdf $-Y^u$, yaitu

$$f_{-Y^u}(x) = \frac{dF_{-Y^u}(x)}{dx} = \eta_d e^{-\eta_d x}, \text{ untuk } x \geq 0. \tag{L6.8}$$

Persamaan (L6.8) adalah pdf distribusi Eksponensial dengan parameter η_d .

Sedangkan pdf distribusi Gamma adalah seperti pada (L6.4). Dengan mengambil $\alpha = 1$ dan $\lambda = \eta_d$ pada (L6.8), diperoleh

$$f_X(x) = \eta_d e^{-\eta_d x}, \text{ untuk } x \geq 0. \tag{L6.9}$$

Bentuk (L6.8) ternyata sama dengan (L6.9), sehingga dapat disimpulkan

$$-Y^d = -\log V^d \sim \exp(\eta_d) = \Gamma(1, \eta_d).$$

(terbukti)

3. Bagian c

Diketahui $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, dimana $Y_i \sim \exp(\varpi)$ dan Y_i saling bebas, akan ditunjukkan $X \sim \Gamma(k, \varpi)$.

Bukti

Berdasarkan [13], *moment generating function* (mgf) distribusi Gamma dengan parameter α dan λ adalah

$$M(u) = \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha}, \text{ untuk } u < \lambda. \quad (\text{L6.10})$$

Dengan mengambil $\alpha = 1$ dan $\lambda = \varpi$ dan disubstitusikan ke (L6.10) diperoleh

$$M(u) = \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)}, \text{ untuk } u < \varpi. \quad (\text{L6.11})$$

Berdasarkan bagian a dan b sebelumnya, diketahui $Y_i \sim \exp(\varpi) = \Gamma(1, \varpi)$. Jadi mgf Y_i , $i = 1, 2, \dots, k$ masing-masing memiliki mgf seperti pada (L6.11).

Selanjutnya, mgf $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$ adalah

$$\begin{aligned} E(\exp(uX)) &= E(\exp(u(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k))) \\ &= E(\exp(uY_1)\exp(uY_2)\dots\exp(uY_k)). \end{aligned}$$

Karena Y_i , $i = 1, 2, \dots, k$ saling bebas, maka

$$E(\exp(uX)) = E(\exp(uY_1))E(\exp(uY_2))\dots E(\exp(uY_k)). \quad (\text{L6.12})$$

Karena Y_i , $i = 1, 2, \dots, k$ memiliki distribusi yang sama, yaitu $Y_i \sim \Gamma(1, \varpi)$, maka mgf Y_i juga akan sama, yaitu seperti pada (L6.11), sehingga diperoleh

$$E(\exp(uX)) = \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)} \dots \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)}. \quad (\text{L6.13})$$

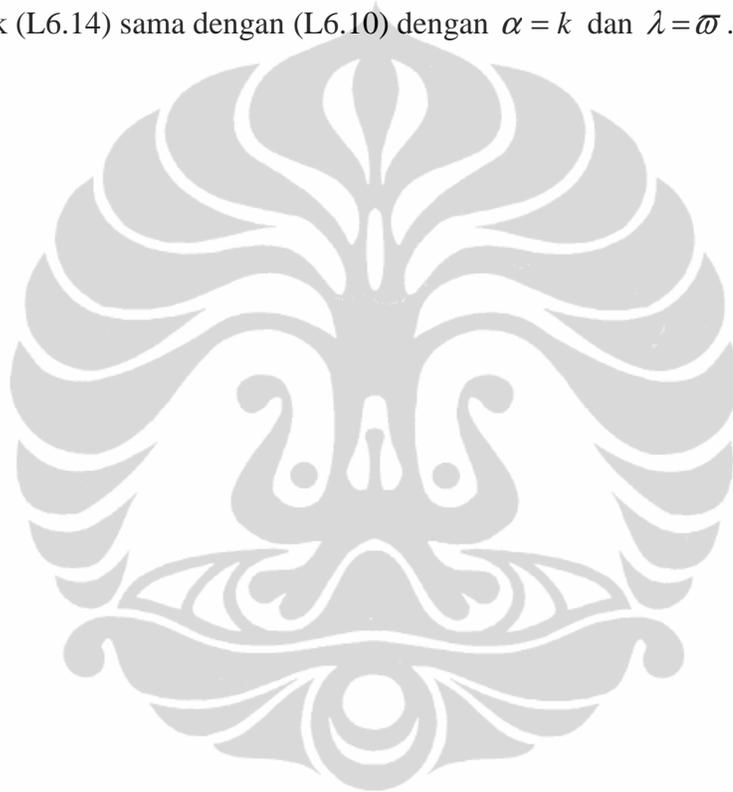
Karena bentuk $\frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)^k}$ pada ruas kanan (L6.13) yang dikalikan ada sebanyak k kali,

maka

$$E(\exp(uX)) = \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\varpi}\right)^k}, \text{ untuk } u < \varpi. \quad (\text{L6.14})$$

Ternyata bentuk (L6.14) sama dengan (L6.10) dengan $\alpha = k$ dan $\lambda = \varpi$. Jadi $X \sim \Gamma(k, \varpi)$.

(terbukti)



LAMPIRAN 7

Pengolahan Kembali Hasil Taksiran Parameter yang Dilakukan pada Model PBJD di [22] dan Model Heston di [15] untuk Memperoleh Nilai-Nilai Parameter Model PBJDVS

Parameter-parameter model PBJDV adalah $\alpha, \sigma, \lambda_u, \lambda_d, \eta_u, \eta_d$, sedangkan parameter model Heston adalah a, b, θ, ρ .

Parameter model PBJDVS yang berasal dari parameter model PBJD diambil dari parameter model PBJD, yaitu $\alpha, \lambda_u, \lambda_d, \eta_u, \eta_d$. Sedangkan b adalah rata-rata jangka panjang kuadrat volatilitas, diambil dari model PBJD yaitu kuadrat σ . Sementara a, θ, ρ diambil dari model Heston. Pada [22], satuan waktu hari, jadi sudah sesuai. Tetapi pada [15], satuan waktu adalah tahun. Jadi perlu disesuaikan ke satuan waktu hari dengan 1 tahun dianggap 252 hari.

Pada [22], taksiran dilakukan dari berbagai macam data, sehingga hasil taksiran parameter bermacam-macam. Jadi untuk nilai parameter yang digunakan adalah rata-ratanya.

1. Penentuan Nilai Parameter η_u

Tabel L7.1. Nilai Parameter η_u .

<i>Ticker</i>	η_u	$E(V^u) = \frac{\eta_u}{\eta_u - 1}$	$E(V^u - 1)$ dalam (%)
CYPB	17,08	1,0622	6,22%
XICO	18,60	1,0568	5,68%
HYBD	19,41	1,0543	5,43%
LCBM	24,22	1,0431	4,31%
MFRI	33,07	1,0312	3,12%
TIF	39,95	1,0257	2,57%
INTC	47,22	1,0216	2,16%
T	47,35	1,0216	2,16%
TBL	51,70	1,0197	1,97%
MON	61,35	1,0166	1,66%
Rata-rata	35,995000		

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Jadi nilai η_u yang digunakan adalah 35,995000.

2. Penentuan Nilai Parameter η_d

Tabel L7.2. Nilai-Nilai Parameter η_d .

<i>Ticker</i>	η_d	$E(V^d) = \frac{\eta_d}{\eta_d + 1}$	$E(V^d - 1)$ dalam (%)
XICO	8,37	0,8933	-10,67%
LCBM	20,57	0,9536	-4,64%
INTC	24,49	0,9608	-3,92%
TIF	24,61	0,9610	-3,90%
CYPB	25,75	0,9626	-3,74%
T	28,97	0,9666	-3,34%
HYBD	33,25	0,9708	-2,92%
MFRI	35,67	0,9727	-2,73%
MON	56,18	0,9825	-1,75%
TBL	56,52	0,9826	-1,74%
Rata-rata	31,438000		

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Jadi nilai η_d yang digunakan adalah 31,438000.

3. Penentuan Nilai Parameter λ_u dan λ_d

Tabel L7.3. Nilai-Nilai Parameter λ_u dan λ_d .

<i>Ticker</i>	λ_u	λ_d
T	0,3475	0,0494
CYPB	0,4338	0,3535
HYBD	0,4660	0,7224
INTC	0,3390	0,0610
LCBM	0,3015	0,1261
MFRI	0,7179	0,7517
MON	0,5369	0,2925
TBL	0,5031	0,3218
TIF	0,2986	0,0330
XICO	0,3065	0,0132
Rata-rata	0,425080	0,272460

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Jadi nilai λ_u dan λ_d yang digunakan berturut-turut adalah 0,425080 dan 0,272460.

4. Penentuan Nilai Parameter α

Koefisien *drift* di model PBJDVS adalah $\alpha - \xi$, sedangkan koefisien *drift* di model PBJD pada [22] adalah μ . Jadi perlu disesuaikan dengan rumus $\alpha - \xi = \mu$. Jadi $\alpha = \mu + \xi$. Sedangkan ξ dihitung dengan

$$\xi = \frac{\lambda_u}{\eta_u - 1} - \frac{\lambda_d}{\eta_d + 1} \quad (\text{L7.1})$$

Tabel L7.4. Nilai-Nilai Parameter μ pada Model PBJD.

<i>Ticker</i>	μ
T	-0,0059
CYPB	-0,0092
HYBD	0,0013
INTC	-0,0036
LCBM	-0,0051
MFRI	0,0002
MON	-0,0027
TBL	-0,0023
TIF	-0,0043
XICO	-0,0010
Rata-rata	-0,003260

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Jadi nilai μ yang digunakan adalah -0,003260.

Sedangkan ξ dihitung dengan menggunakan (L7.1) dimana nilai η_u dan η_d yang digunakan adalah nilai η_u dan η_d telah diperoleh pada 1 dan 2. Sedangkan nilai λ_u , dan λ_d yang digunakan adalah nilai λ_u , dan λ_d telah diperoleh pada 3. Jadi $\xi = 0,003747$.

Jadi yang digunakan adalah $\alpha = \mu + \xi = -0,003260 + 0,003747 = 0,000487$.

5. Penentuan Nilai Parameter b

Pada model PBJDVS, parameter b adalah rata-rata jangka panjang dari kuadrat volatilitas $v(t)$. Volatilitas pada model PBJDVS adalah $\sqrt{v(t)}$, sedangkan σ adalah volatilitas pada model PBJD. Jadi nilai b diambil dari kuadrat σ . Perhatikan Tabel L7.5 berikut.

Tabel L7.5. Nilai-Nilai Parameter σ pada Model PBJD.

<i>Ticker</i>	σ
T	0,0210
CYPB	0,0309
HYBD	0,0230
INTC	0,0281
LCBM	0,0234
MFRI	0,0038
MON	0,0155
TBL	0,0172
TIF	0,0238
XICO	0,0456
Rata-rata	0,023230

Sumber: [22] (telah diolah kembali)

Jadi nilai b yang diambil adalah $b = (0,023230)^2 = 0,000540$.

6. Penentuan Nilai Parameter a

$dv(t)$ pada [15] berbentuk

$$dv(t) = (\bar{\alpha} + \beta v(t))dt + \sigma v(t)^\gamma dW_2(t). \quad (L7.2)$$

Sedangkan pada model PBJDVS, $dv(t)$ berbentuk

$$dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta \sqrt{v(t)} dW_2(t). \quad (L7.3)$$

Agar persamaan (L7.2) dan (L7.3) sesuai, maka diambil $\gamma = \frac{1}{2}$. Selanjutnya modifikasi (L7.2) agar sesuai dengan (L7.3).

$$dv(t) = \beta \left(v(t) + \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right) dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_2(t). \quad (L7.4)$$

Dari persamaan (L7.3) dan (L7.4) diperoleh hubungan

$$a = -\beta.$$

Pada [15], $\beta = -7,7721$ dengan satuan waktu tahun. Karena 1 tahun diasumsikan 252 hari, maka untuk satuan waktu hari, $\beta = -7,7721$ dibagi dengan 252 hari, yaitu

$$\beta = \frac{-7,7721}{252} = -0,0308417 \text{ dengan satuan waktu hari.}$$

Jadi nilai a yang digunakan adalah $a = -\beta = -(-0,0308417) = 0,0308417$.

7. Penentuan Nilai Parameter θ

Pandang persamaan (L7.3) dan (L7.4). Parameter θ pada model PBJDVS adalah parameter σ pada [15]. Pada [15], $\sigma = 0,3774$ dengan satuan waktu tahun. Karena 1 tahun diasumsikan 252 hari, maka untuk satuan waktu hari, $\sigma = 0,3774$ dibagi dengan 252 hari, yaitu

$$\sigma = \frac{0,3774}{252} = 0,001498 \text{ dengan satuan waktu hari.}$$

Jadi, nilai θ yang digunakan adalah $\theta = \sigma = 0,001498$ dengan satuan waktu hari.

8. Penentuan Nilai Parameter ρ

Pada [15], nilai $\rho = -0.316200$.

Jadi, nilai ρ yang diambil adalah $\rho = -0.316200$.

Dengan demikian, nilai-nilai parameter yang digunakan untuk model PBJDVS dirangkum dalam tabel berikut.

Tabel L7.6. Nilai-Nilai Parameter Model PBJDVS.

Parameter	Nilai
λ_u	0,425080
λ_d	0,272460
η_u	35,995000
η_d	31,438000
α	0,000487
a	0,030842
b	0,000540
θ	0,001498
ρ	-0,316200

LAMPIRAN 8

Bukti Bahwa Distribusi Pareto (η_u) Sama Dengan

Distribusi *Generalized Pareto* $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$

Berdasarkan persamaan (2.35) di Bab 2, distribusi Pareto (η_u) memiliki pdf

$$f_{V^u}(x) = \frac{\eta_u}{x^{\eta_u+1}}, \quad x \geq 1. \quad (\text{L8.1})$$

Pada Matlab, distribusi *Generalized Pareto* (k, σ, θ) memiliki bentuk *probability density function* (pdf)

$$f(x | k, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + k \frac{(x - \theta)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}}$$

dengan $\theta < x$ ketika $k > 0$ atau $\theta < x < -\frac{\sigma}{k}$ ketika $k < 0$.

Akan ditunjukkan distribusi Pareto (η_u) sama dengan distribusi *Generalized Pareto* $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$.

Bukti

- Pada pdf distribusi Pareto berlaku $x \geq 1$. Sedangkan pada pdf distribusi *Generalized Pareto* berlaku $\theta < x$. Jadi diambil $\theta = 1$.
- Pada pdf distribusi Pareto, terdapat pangkat $\eta_u + 1$ (di penyebut), sedangkan pada pdf distribusi *Generalized Pareto* terdapat pangkat $-1 - \frac{1}{k}$ (di pembilang). Jadi diambil $\frac{1}{k} = \eta_u$.
- Pada pdf distribusi Pareto, terdapat pengali η_u , sedangkan pada pdf distribusi *Generalized Pareto* terdapat pengali $\frac{1}{\sigma}$. Jadi diambil $\frac{1}{\sigma} = \eta_u$.

Pdf distribusi *Generalized Pareto* $\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right)$ adalah

$$\begin{aligned} f\left(x \mid \frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right) &= \eta_u \left(1 + \frac{1}{\eta_u}(x-1)\eta_u\right)^{-1-\eta_u} \\ &= \frac{\eta_u}{(1+(x-1))^{1+\eta_u}} \\ &= \frac{\eta_u}{x^{\eta_u+1}} \end{aligned}$$

dengan $\theta < x$ ketika $k > 0$ atau $\theta < x < -\frac{\sigma}{k}$ ketika $k < 0$.

Karena $k = \frac{1}{\eta_u} > 0$ berarti digunakan $\theta < x$. Karena $\theta = 1$, maka $1 < x$.

Jadi

$$f\left(x \mid \frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right) = \frac{\eta_u}{x^{\eta_u+1}} \quad (\text{L8.2})$$

dengan $x > 1$.

Dengan menyamakan persamaan (L8.2) dan (L8.1), maka dapat disimpulkan bahwa distribusi Pareto (η_u) sama dengan distribusi *Generalized*

$$\text{Pareto}\left(\frac{1}{\eta_u}, \frac{1}{\eta_u}, 1\right).$$

(terbukti)

LAMPIRAN 9

Penjelasan *Log-Return* Saham Satu Periode Model PBJDVS Tidak Saling Bebas

Pandang kembali model PBJD pada persamaan (2.34) di Bab 2, yaitu

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \xi)dt + \sigma dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)\right). \quad (\text{L9.1})$$

Model PBJD memiliki koefisien difusi σ konstan yang menyatakan volatilitas model. Dengan menerapkan rumus Itô, yaitu persamaan (2.18) di Bab 2, ke persamaan (L9.1) diperoleh solusi eksak model PBJD dalam bentuk *log-return* saham satu periode adalah

$$R_i = \log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \left((\alpha - \xi) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_i + \sigma\Delta W(t_i) + \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D_i} \log V_j^d \quad (\text{L9.2})$$

dengan $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = 1$ dan $\Delta W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Pada persamaan (L9.2), variabel acak R_i bergantung pada $\Delta W(t_i)$, M_i , D_i , V_j^u , dan V_j^d . Pada interval yang tidak tumpang tindih, yaitu

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_i, t_{i+1}], \dots, [t_{n-1}, t_n],$$

untuk n bilangan bulat positif, variabel acak $\Delta W(t_i)$, M_i , D_i , V_j^u , dan V_j^d pada interval yang satu dengan yang lainnya adalah saling bebas. Jadi, R_i saling bebas.

Sedangkan pada model PBJDVS, (persamaan (3.1) dan (3.2) di Bab 3), yaitu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \xi)dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N^u(t)} (V_i^u - 1)\right) + d\left(\sum_{i=1}^{N^d(t)} (V_i^d - 1)\right), \end{array} \right. \quad (\text{L9.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dv(t) = -a(v(t) - b)dt + \theta\sqrt{v(t)}dW_2(t), \end{array} \right. \quad (\text{L9.4})$$

dengan

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(t).$$

Berdasarkan persamaan (3.57) di Bab 3, solusi analitik model PBJDVS adalah

$$R_i = \log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = (\alpha - \xi)(t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} dW_1(t) \\ + \sum_{j=N^u(t_i)+1}^{N^u(t_i)+M_i} \log V_j^u + \sum_{j=N^d(t_i)+1}^{N^d(t_i)+D_i} \log V_j^d. \quad (\text{L9.5})$$

Pada persamaan (L9.5), variabel acak R_i selain bergantung pada $\Delta W(t_i)$, M_i , D_i , V_j^u , dan V_j^d , juga bergantung pada kuadrat volatilitas $v(t)$. Pada interval yang tidak tumpang tindih, yaitu

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_i, t_{i+1}], \dots, [t_{n-1}, t_n],$$

untuk n bilangan bulat positif, variabel acak $\Delta W(t_i)$, M_i , D_i , V_j^u , dan V_j^d pada interval yang satu dengan yang lainnya adalah saling bebas. Sedangkan antar $v(t)$ pada interval yang satu dengan yang lainnya adalah tidak saling bebas.

Antar $v(t)$ tidak saling bebas dapat dijelaskan sebagai berikut. Pandang kembali PDS (L9.4). Karena nilai $v(t)$ sekarang bergantung pada nilai $v(t)$ sebelumnya, maka nilai $v(t)$ selalu berubah. Dalam waktu yang singkat, nilai $v(t)$ sekarang cenderung dekat dengan nilai $v(t)$ sebelumnya. Oleh sebab itu $v(t)$ tidak saling bebas. Dengan demikian R_i tidak saling bebas.

LAMPIRAN 10

Bukti Bahwa Pdf dapat Didekati dengan Probabilitas Dibagi dengan Panjang Interval

Berdasarkan [12], *probability density function* (pdf) adalah turunan dari *cumulative density function* (cdf). Misalkan $F(x)$ adalah fungsi distribusi dari variabel acak X dan $f(x)$ adalah pdf dari variabel acak X . Jadi

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (\text{L10.1})$$

Berdasarkan [28], diperoleh

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}. \quad (\text{L10.2})$$

Sedangkan berdasarkan [12], diperoleh

$$F(x) = \Pr(X \leq x).$$

Jadi,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \Pr(X \leq x+h) - \Pr(X \leq x) \\ &= \Pr(x < X < x+h) \end{aligned} \quad (\text{L10.3})$$

Substitusi persamaan (L10.3) ke (L10.2), diperoleh

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr(x < X < x+h)}{h}. \quad (\text{L10.4})$$

Dari persamaan (L10.1) dan (L10.4), diperoleh

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr(x < X < x+h)}{h}. \quad (\text{L10.5})$$

Dari persamaan (L10.5) diperoleh bahwa pdf dapat didekati dengan

$$\frac{\Pr(x < X < x+h)}{h}$$

untuk h yang cukup kecil.

LAMPIRAN 11

Source Code Simulasi Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Nama file: pbsdvs.m

Ketik di Command Window: pbsdvs

```
-----  
randn('state',100) % Menetapkan state randn  
rand('state',100) % Menetapkan state rand  
  
% Parameter-parameter pada model PBJDVS  
% Parameter PDS (3.1)  
lambda_u = 0.425080;  
lambda_d = 0.272460;  
eta_u = 35.995000;  
eta_d = 31.438000;  
  
xi = lambda_u/(eta_u-1)-lambda_d/(eta_d+1);  
alpha = -0.003260 + xi;  
  
% Parameter PDS (3.2)  
a = 0.030842;  
b = 0.000540;  
theta = 0.001498;  
  
% Parameter penghubung PDS (3.1) dan PDS (3.2)  
rho = -0.3162;  
  
% Nilai awal  
Szero = 20; % Nilai awal S(t) yaitu S(0)  
vzero = 0.0003; % Nilai awal v(t) yaitu v(0)  
  
M = 1; % Banyaknya simulasi/ banyaknya sample path  
T = 252; % Simulasi ingin dilihat berapa lama (hari)  
R = 100; % Banyaknya pembagian interval di interval Dt  
% R berguna ketika menghitung integral di solusi analitik  
  
% Interval besar  
Dt = 1; % Panjang interval besar di [0,T]  
% Dt nantinya dipartisi lagi sebanyak R dengan panjang dt.  
% Angka 1 adalah 1 hari.  
  
L = floor(T/Dt); % Banyaknya interval Dt di [0,T].  
% Fungsi floor digunakan untuk menjaga agar L bulat
```

```

% Interval kecil
dt = Dt/R; % Panjang interval kecil di [0,T].
           % Kegunaan dt sebagai stepsize ketika menghitung
           % aproksimasi EM untuk v(t) di solusi analitik.
N = R*L; % Banyaknya interval dt di [0,T]

% Menyiapkan tempat
S = zeros(M,L);
v = zeros(M,L);

% Setiap kali simulasi, berikut ini yang dilakukan
for s = 1:M,
    dW2 = sqrt(dt)*randn(1,N); % Membangkitkan nilai-nilai dW2
                                % secara random dari distribusi normal
                                % Angka 1 adalah baris dan N adalah
                                % kolom

    dW3 = sqrt(dt)*randn(1,N); % Membangkitkan nilai-nilai dW3
                                % secara random dari distribusi normal
                                % Angka 1 adalah baris dan N adalah kolom

    dW1 = rho*dW2 + sqrt(1-rho^2)*dW3; % Pembentukan nilai-nilai dW1

    dNu = random('poiss',lambda_u*dt,1,N); % Membangkitkan nilai-
        % nilai dNu (increment proses Poisson)secara acak dari
        % distribusi Poisson
        % Angka 1 adalah baris dan N kolom

    dNd = random('poiss',lambda_d*dt,1,N); % Membangkitkan nilai-
        % nilai dNd (increment proses Poisson)secara acak dari
        % distribusi Poisson
        % Angka 1 adalah baris dan N kolom

    Nu = cumsum(dNu); % Menjumlahkan banyaknya lompatan ke atas
    Nd = cumsum(dNd); % Menjumlahkan banyaknya lompatan ke bawah
    Vu = random('gp',1/eta_u, 1/eta_u, 1,1,Nu(end)); % Membangkitkan
        % nilai-nilai besar lompatan ke atas Vu
        % secara acak dari distribusi Pareto

        % Ukuran (1,Nu yang terakhir) 1 baris dan Nu
        % (end) kolom

        % 1/eta_u, 1/eta_u, 1 adalah parameter
        % distribusi generalized pareto

    Vd = random('beta',eta_d,1,1,Nd(end)); % Membangkitkan nilai-
        % nilai besar lompatan ke atas Vd
        % secara acak dari distribusi beta.

        % Ukuran (1,Nd yang terakhir) berarti
        % 1 baris dan Nd (end) kolom.

    Stemp = Szero; vtemp = vzero; % Nilai awal untuk solusi analitik
    vtempEM = vzero; % Nilai awal untuk skema EM

```

```

% Perhitungan di setiap interval besar Dt (sebanyak L kali)
for j = 1:L
    Nu_inc = sum(dNu(R*(j-1)+1:R*j)); % Mi
    Nd_inc = sum(dNd(R*(j-1)+1:R*j)); % Di

    % Perhitungan aproksimasi v(t) menggunakan EM
    vtempEX = zeros(1,R);
    vtempAwal = vtemp;

    % Perhitungan di setiap interval kecil dt (sebanyak R kali)
    for k = 1:R
        vtemp = max(0,vtemp+ (-a*(vtemp-b))*dt + ...
            theta*sqrt(vtemp)*dW2(R*(j-1)+k));
        vtempEX(k) = vtemp;
    end

    v(s,j) = vtemp;

    % Perhitungan integral v(t)dt menggunakan aturan trapesium
    % majemuk
    int_v = dt/2*(vtempAwal + 2*sum(vtempEX(1:end-1))+ vtemp);

    % Perhitungan integral Itô
    int_akar_v = sum(sqrt([vtempAwal,vtempEX(1:end-1)])...
        .*dW1(R*(j-1)+1:R*j));

    % Perhitungan solusi analitik
    Stemp = Stemp*exp((alpha-xi)*Dt - 1/2*int_v + int_akar_v...
        + sum(log(Vu(Nu(R*j)-Nu_inc+1 : Nu(R*j))))... % Suku
        ... % lompatan ke atas.
        + sum(log(Vd(Nd(R*j)-Nd_inc+1 : Nd(R*j))))... % Suku
        ... % lompatan ke bawah.
    );

    S(s,j)= Stemp; % Penyimpanan hasil perhitungan
    % solusi analitik.
end
end
end

```

LAMPIRAN 12

Source Code Simulasi Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Nama file : solusianalitik.m

Jalankan *source code* 'pbdvvs' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbdvvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* 'solusianalitik' dengan mengetik di Command Window:

```
solusianalitik
```

```
% Sebuah sample path solusi analitik
```

```
plot(0:Dt:T,[repmat(Szero,1,1),S(1:1,:)],'k')
```

```
xlabel('Waktu t (hari)','FontSize',10)
```

```
ylabel('Log-return saham satu periode','FontSize',10)
```

LAMPIRAN 13

Source Code Simulasi Log-return Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Nama file : logreturn.m

Jalankan *source code* 'pbdvs' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* 'logreturn' dengan mengetik di Command Window:

```
logreturn
```

```
plot(Dt:Dt:T, log(S(1:1, :)./[ repmat(Szero, 1, 1), S(1:1, 1:end-1) ]), 'k')  
hold on  
plot([0, T], [0, 0])  
hold off  
  
xlabel('Waktu t (hari)', 'FontSize', 10)  
ylabel('Log-return saham', 'FontSize', 10)
```

LAMPIRAN 14

Source Code Simulasi Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Nama file : haribanyakbesarlompatan.m

Jalankan *source code* 'pbjdvs' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbjdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* 'haribanyakbesarlompatan' dengan mengetik di Command Window:

```
haribanyakbesarlompatan
```

```
-----  
% Banyaknya lompatan ke atas dan ke bawah  
Nu_inc = diff([0 Nu(R:R:end)]); % Menentukan banyaknya lompatan ke  
% atas  
Nd_inc = diff([0 Nd(R:R:end)]); % Menentukan banyaknya lompatan ke  
% bawah  
  
[Nu_inc; Nd_inc]  
  
%-----  
% Lompatan ke atas  
disp('Lokasi lompatan ke atas (hari ke-)  
lokasi_jump_u = find(diff([0 Nu(R:R:end)]))  
  
disp('Banyaknya lompatan ke atas')  
Nu_inc(Nu_inc > 0)  
  
disp('Besar lompatan ke atas')  
besarjump_u = arrayfun(@(ind) num2str(Vu(Nu(R*ind)...  
-Nu_inc(ind)+1:Nu(R*ind))), find(Nu_inc), ...  
'UniformOutput', false)  
  
disp('Banyaknya hari terjadi lompatan ke atas dalam T hari ada ...')  
sum(diff([0 Nu(R:R:end)]) > 0)  
  
disp('Banyaknya lompatan ke atas dalam T hari ada... kali')  
Nu(end)  
  
%-----
```

```

% Lompatan ke bawah
disp('Lokasi lompatan ke bawah (hari ke)')
lokasi_jump_d = find(diff([0 Nd(R:R:end)]))

disp('Banyaknya lompatan ke bawah')
Nd_inc(Nd_inc > 0)

disp('Besarnya lompatan ke bawah')
besar_jump_d = arrayfun(@(ind) num2str(Vd(Nd(R*ind) ...
    -Nd_inc(ind)+1:Nd(R*ind))), find(Nd_inc), ...
    'UniformOutput', false)

disp('Banyaknya hari terjadi lompatan ke bawah dalam T hari ada...')
sum(diff([0 Nd(R:R:end)]) > 0)

disp('Banyaknya lompatan ke bawah dalam T hari ada... kali')
Nd(end)

%-----

% Banyaknya lompatan ke atas dan bawah sekaligus
disp('Lokasi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus(hari ke-)')
find(Nu_inc > 0 & Nd_inc > 0)

disp('Banyaknya lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus')
banyak_jump_ud = [Nu_inc(Nu_inc > 0 & Nd_inc > 0); ...
    Nd_inc(Nu_inc > 0 & Nd_inc > 0)]

disp('Besarnya lompatan ke atas')
besar_jump_u = ...
arrayfun(@(ind) num2str(Vu(Nu(R*ind)-Nu_inc(ind)+1:Nu(R*ind))), ...
    find(Nu_inc > 0 & Nd_inc > 0), 'UniformOutput', false)

disp('Besarnya lompatan ke bawah')
besar_jump_d = ...
arrayfun(@(ind) num2str(Vd(Nd(R*ind)-Nd_inc(ind)+1:Nd(R*ind))), ...
    find(Nu_inc > 0 & Nd_inc > 0), 'UniformOutput', false)

disp(['Banyaknya hari terjadi lompatan ke atas dan ke bawah'...
    ' dalam T hari sekaligus ada...'])
sum(diff([0 Nu(R:R:end)]) > 0 & diff([0 Nd(R:R:end)]) > 0)

```

LAMPIRAN 15

Langkah-Langkah Simulasi Lintasan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Pada file *pbjdvs* di Lampiran 11, baris $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d diganti dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9.

Semula

```
lambda_u = 0.425080;  
lambda_d = 0.272460;  
eta_u = 35.995000;  
eta_d = 31.438000;
```

Setelah diganti

```
lambda_u = 0.009;  
lambda_d = 0.01;  
eta_u = 4;  
eta_d = 5;
```

Jalankan *source code* 'pbjdvs' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbjdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* 'solusianalitik' yang terdapat pada Lampiran 12 dengan mengetik di Command Window:

```
solusianalitik
```

LAMPIRAN 16

Langkah-Langkah Simulasi *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Pada file *pbjdvs* di Lampiran 11, baris $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d diganti dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9.

Semula

```
lambda_u = 0.425080;  
lambda_d = 0.272460;  
eta_u = 35.995000;  
eta_d = 31.438000;
```

Setelah diganti

```
lambda_u = 0.009;  
lambda_d = 0.01;  
eta_u = 4;  
eta_d = 5;
```

Jalankan *source code* ‘*pbjdvs*’ yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbjdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* ‘*logreturn*’ yang terdapat pada Lampiran 13 dengan mengetik di Command Window:

```
logreturn
```

LAMPIRAN 17

Langkah-Langkah Simulasi Hari Terjadi, Banyak, dan Besar Lompatan Solusi Analitik Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2 dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9 dan Nilai Awal pada Tabel 4.3

Pada file `pbjdvs` di Lampiran 11, baris $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d diganti dengan $\lambda_u, \lambda_d, \eta_u$, dan η_d pada Tabel 4.9.

Semula

```
lambda_u = 0.425080;  
lambda_d = 0.272460;  
eta_u = 35.995000;  
eta_d = 31.438000;
```

Setelah diganti

```
lambda_u = 0.009;  
lambda_d = 0.01;  
eta_u = 4;  
eta_d = 5;
```

Jalankan *source code* ‘`pbjdvs`’ yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbjdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* ‘`haribanyakbesarlompatan`’ yang terdapat pada Lampiran 14 dengan mengetik di Command Window:

```
haribanyakbesarlompatan
```

LAMPIRAN 18

Tabel L18. Hasil Simulasi Lompatan ke Atas Solusi Analitik Model PBJDVS

No	Hari terjadi lompatan ke atas	Banyak lompatan ke atas	V_i^u				$V_i^u - 1$ (dalam %)			
1	1	1	1,0167				1,67%			
2	2	2	1,0119	1,0058			1,19%	0,58%		
3	5	4	1,0069	1,0186	1,0066	1,0307	0,69%	1,86%	0,66%	3,07%
4	7	1	1,0182				1,82%			
5	12	1	1,0035				0,35%			
6	13	1	1,0994				9,94%			
7	20	1	1,0020				0,20%			
8	22	1	1,0006				0,06%			
9	30	1	1,0483				4,83%			
10	31	1	1,0073				0,73%			
11	35	1	1,0074				0,74%			
12	36	2	1,0158	1,0580			1,58%	5,80%		
13	38	1	1,0129				1,29%			
14	41	2	1,0041	1,0310			0,41%	3,10%		
15	42	2	1,0053	1,0198			0,53%	1,98%		
16	43	2	1,0159	1,0033			1,59%	0,33%		
17	46	1	1,0132				1,32%			
18	49	1	1,0453				4,53%			
19	51	2	1,0018	1,0013			0,18%	0,13%		
20	53	1	1,0069				0,69%			
21	55	1	1,0033				0,33%			
22	56	1	1,0114				1,14%			
23	59	1	1,0028				0,28%			
24	63	1	1,0432				4,32%			
25	64	1	1,0074				0,74%			
26	76	1	1,0077				0,77%			
27	82	1	1,0762				7,62%			
28	86	2	1,0180	1,0026			1,80%	0,26%		
29	88	2	1,0395	1,0178			3,95%	1,78%		
30	94	2	1,0116	1,0938			1,16%	9,38%		

(Sambungan)

No	Hari terjadi lompatan ke atas	Banyak lompatan ke atas	V_i^u			$V_i^u - 1$ (dalam %)			
31	98	1	1,0368				3,68%		
32	101	1	1,0345				3,45%		
33	109	1	1,0060				0,60%		
34	111	1	1,0008				0,08%		
35	115	1	1,0041				0,41%		
36	116	1	1,0236				2,36%		
37	121	1	1,0191				1,91%		
38	123	1	1,1073				10,73%		
39	126	1	1,0341				3,41%		
40	129	1	1,0144				1,44%		
41	130	1	1,0003				0,03%		
42	138	1	1,0445				4,45%		
43	139	1	1,0144				1,44%		
44	142	2	1,0054	1,0154			0,54%	1,54%	
45	145	1	1,0923				9,23%		
46	146	1	1,0393				3,93%		
47	149	1	1,0526				5,26%		
48	150	2	1,0003	1,0842			0,03%	8,42%	
49	158	2	1,0537	1,0023			5,37%	0,23%	
50	159	2	1,0401	1,0636			4,01%	6,36%	
51	162	1	1,0009				0,09%		
52	163	1	1,0051				0,51%		
53	164	1	1,0175				1,75%		
54	168	1	1,0061				0,61%		
55	169	1	1,0173				1,73%		
56	171	1	1,0109				1,09%		
57	177	3	1,0177	1,0275	1,0066		1,77%	2,75%	0,66%
58	178	1	1,0573				5,73%		
59	180	2	1,0524	1,0172			5,24%	1,72%	
60	184	2	1,0546	1,0123			5,46%	1,23%	
61	187	1	1,0181				1,81%		
62	188	1	1,1110				11,10%		
63	189	2	1,0577	1,0044			5,77%	0,44%	
64	190	1	1,0120				1,20%		
65	193	1	1,0426				4,26%		
66	199	1	1,0190				1,90%		
67	202	1	1,0201				2,01%		
68	205	2	1,0432	1,0201			4,32%	2,01%	
69	207	1	1,0201				2,01%		
70	208	1	1,0064				0,64%		

(Sambungan)

No	Hari terjadi lompatan ke atas	Banyak lompatan ke atas	V_i^u			$V_i^u - 1$ (dalam %)			
71	214	2	1,0381	1,0663			3,81%	6,63%	
72	216	1	1,0049				0,49%		
73	217	1	1,0730				7,30%		
74	220	1	1,0535				5,35%		
75	221	1	1,0227				2,27%		
76	222	1	1,0693				6,93%		
77	226	1	1,0116				1,16%		
78	227	2	1,0095	1,0029			0,95%	0,29%	
79	232	1	1,0429				4,29%		
80	235	3	1,0255	1,0131	1,0021		2,55%	1,31%	0,21%
81	242	1	1,0032				0,32%		
82	243	1	1,0126				1,26%		
83	244	1	1,0689				6,89%		
84	245	2	1,0694	1,0359			6,94%	3,59%	
85	248	1	1,0040				0,40%		
86	250	1	1,0047				0,47%		
87	251	1	1,0123				1,23%		

Banyak hari terjadi lompatan ke atas dalam 252 hari	87	hari
Banyak lompatan ke atas dalam 252 hari	114	kali
Besar lompatan ke atas maksimum	1,1110	11,10%
Besar lompatan ke atas minimum	1,0003	0,03%
Lokasi besar lompatan ke atas maksimum (hari ke-)	188	
Lokasi besar lompatan ke atas minimum (hari ke-)	150	

V_i^u adalah besar lompatan ke atas ke- i . Nilai-nilai yang terdapat pada kelompok V_i^u dan $V_i^u - 1$ (dalam %) besesuaian dengan kolom ke-3, yaitu kolom banyak lompatan ke atas.

Pandang baris No.1 dan 2.

- Baris No.1 dapat dibaca bahwa pada hari ke-1 terjadi lompatan ke atas sebanyak 1 kali dengan besar 1,0167 yaitu naik 1,67%.
- Baris No.2 dapat dibaca bahwa pada hari ke-2 terjadi lompatan ke atas sebanyak 2 kali dengan besar masing-masing 1,0119 dan 1,0058 yaitu berturut-turut naik 1,19% dan 0,58%.

LAMPIRAN 19

Tabel L19. Hasil Simulasi Lompatan ke Bawah Solusi Analitik Model PBJDVS

No	Hari terjadi lompatan ke bawah	Banyak lompatan ke bawah	V_i^d		$V_i^d - 1$ (dalam %)	
1	1	1	0,9991		0,09%	
2	10	1	0,9806		1,94%	
3	15	1	0,9769		2,31%	
4	23	1	0,9096		9,05%	
5	30	1	0,9883		1,17%	
6	35	1	0,9874		1,26%	
7	38	1	0,9822		1,78%	
8	48	1	0,8212		17,89%	
9	57	1	0,9804		1,96%	
10	64	1	0,9864		1,36%	
11	69	2	0,9953	0,9741	0,47%	2,59%
12	70	1	0,9947		0,53%	
13	79	1	0,9796		2,05%	
14	81	1	0,9432		5,69%	
15	82	1	0,9918		0,82%	
16	84	1	0,9951		0,49%	
17	87	2	0,9790	0,9919	2,10%	0,81%
18	88	1	0,9451		5,49%	
19	90	2	0,9830	0,9899	1,70%	1,01%
20	93	1	0,9896		1,04%	
21	99	1	0,9845		1,55%	
22	103	1	0,9257		7,43%	
23	111	1	0,9783		2,17%	
24	114	1	0,9103		8,97%	
25	120	1	0,9693		3,07%	
26	131	1	0,8894		11,06%	
27	135	1	0,8972		10,28%	
28	136	1	0,8838		11,62%	
29	137	1	0,9921		0,79%	
30	141	2	0,9800	0,9490	2,00%	5,10%

(Sambungan)

No	Hari terjadi lompatan ke bawah	Banyak lompatan ke bawah	V_i^d		$V_i^d - 1$ (dalam %)	
31	142	1	0,9840		1,60%	
32	145	2	0,9172	0,9924	8,28%	0,76%
33	147	1	0,9801		1,99%	
34	148	2	0,9898	0,9759	1,02%	2,41%
35	151	1	0,9557		4,43%	
36	168	1	0,9977		0,23%	
37	180	1	0,9928		0,72%	
38	184	1	0,9427		5,73%	
39	186	1	0,9957		0,43%	
40	192	1	0,9482		5,19%	
41	201	1	0,9446		5,55%	
42	205	1	0,9506		4,94%	
43	207	1	0,9971		0,29%	
44	214	1	0,9907		0,93%	
45	216	1	0,9697		3,03%	
46	218	1	0,9916		0,84%	
47	220	1	0,9902		0,98%	
48	230	2	0,9560	0,9837	4,41%	1,63%
49	232	1	0,9940		0,61%	
50	239	1	0,9989		0,11%	
51	243	1	0,9352		6,48%	
52	246	1	0,9716		2,84%	
53	247	1	0,9937		0,63%	
54	252	1	0,9773		2,27%	
Banyak hari terjadi lompatan ke bawah dalam 252 Hari					54	hari
Banyak lompatan kebawah dalam 252 hari					61	kali
Besarnya lompatan ke bawah terbesar					0,8212	17,89%
Besarnya lompatan ke bawah terkecil					0,9991	0,09%
Lokasi besarnya lompatan ke bawah terbesar (hari ke-)					48	
Lokasi besarnya lompatan ke bawah terkecil (hari ke-)					1	

V_i^d adalah besar lompatan ke atas ke- i . Nilai-nilai yang terdapat pada kelompok V_i^d dan $V_i^d - 1$ (dalam %) disesuaikan dengan kolom ke-3, yaitu kolom banyak lompatan ke bawah.

Pandang baris No.1 dan 11.

- Baris No.1 dapat dibaca bahwa pada hari ke-1 terjadi lompatan ke bawah sebanyak 1 kali dengan besar 0,9991, yaitu turun 0,09%.
- Baris No.11 dapat dibaca bahwa pada hari ke-69 terjadi lompatan ke bawah sebanyak 2 kali dengan besar masing-masing 0,9953 dan 0,9741 yaitu berturut-turut turun 0,47% dan 2,59%.



LAMPIRAN 20

Tabel L20. Hasil Simulasi Lompatan ke Atas dan ke Bawah Sekaligus dalam Satu Hari Solusi Analitik Model PBJDVS

No	Hari terjadi lompatan ke atas & ke bawah sekaligus	Banyak lompatan ke atas & ke bawah sekaligus dalam satu hari	Banyak lompatan ke atas	Banyak lompatan ke bawah	V_i^u	V_i^d	$V_i^u - 1$ (dalam %)	$V_i^d - 1$ (dalam %)		
1	1	2	1	1	1,0167	0,9991	1,67%	0,09%		
2	30	2	1	1	1,0483	0,9883	4,83%	1,17%		
3	35	2	1	1	1,0074	0,9874	0,74%	1,26%		
4	38	2	1	1	1,0129	0,9822	1,29%	1,78%		
5	64	2	1	1	1,0074	0,9864	0,74%	1,36%		
6	82	2	1	1	1,0762	0,9918	7,62%	0,82%		
7	88	3	2	1	1,0395	1,0178	0,9451	3,95%	1,78%	5,49%
8	111	2	1	1	1,0008	0,9783	0,08%	2,17%		
9	142	3	2	1	1,0054	1,0154	0,9840	0,54%	1,54%	1,60%
10	145	3	1	2	1,0923	0,9172	0,9924	9,23%	8,28%	0,76%
11	168	2	1	1	1,0061	0,9977	0,61%	0,23%		
12	180	3	2	1	1,0524	1,0172	0,9928	5,24%	1,72%	0,72%
13	184	3	2	1	1,0546	1,0123	0,9427	5,46%	1,23%	5,73%
14	205	3	2	1	1,0432	1,0201	0,9506	4,32%	2,01%	4,94%
15	207	2	1	1	1,0201	0,9971	2,01%	0,29%		

(Sambungan)

No	Hari terjadi lompatan ke atas & ke bawah sekaligus	Banyak lompatan ke atas & ke bawah sekaligus dalam satu hari	Banyak lompatan ke atas	Banyak lompatan ke bawah	V_i^u	V_i^d	$V_i^u - 1$ (dalam %)	$V_i^d - 1$ (dalam %)
16	214	3	2	1	1,0381	1,0663	0,9907	3,81%
17	216	2	1	1	1,0049		0,9697	0,49%
18	220	2	1	1	1,0535		0,9902	5,35%
19	232	2	1	1	1,0429		0,9940	4,29%
20	243	2	1	1	1,0126		0,9352	1,26%
Banyak hari terjadi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus dalam 252 hari							20	hari
Total lompatan dalam 252 hari							47	kali
Besar lompatan terbesar dari 47 lompatan							1,0923	9,23% (lompatan ke atas)
Besar lompatan terkecil dari 47 lompatan							1,0008	0,08% (lompatan ke atas)
Lokasi lompatan terbesar dari 47 lompatan (hari ke-)							145	
Lokasi lompatan terkecil dari 47 lompatan (hari ke-)							111	

V_i^u dan V_i^d berturut-turut adalah besar lompatan ke atas dan ke bawah ke- i . Nilai-nilai yang terdapat pada kelompok V_i^u dan $V_i^u - 1$ (dalam %) disesuaikan dengan kolom ke-4, yaitu kolom banyak lompatan ke atas. Sedangkan Nilai-nilai yang terdapat pada kelompok V_i^d dan $V_i^d - 1$ (dalam %) disesuaikan dengan kolom ke-5, yaitu kolom banyak lompatan ke bawah.

Pandang baris No.1 dan 7.

- Baris No.1 dapat dibaca bahwa pada hari ke-2 terjadi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus. Pada hari ke-2, secara total terjadi 2 kali lompatan, yaitu 1 kali lompatan ke atas dan 1 kali lompatan ke bawah. Besar lompatan ke atas yang terjadi adalah 1,0167 yaitu naik 1,67%. Besar lompatan ke bawah yang terjadi adalah 0,9991 yaitu turun 0,09%.
- Baris No.7 dapat dibaca bahwa pada hari ke-88 terjadi lompatan ke atas dan ke bawah sekaligus. Pada hari ke-88, secara total terjadi 3 kali lompatan, yaitu 2 kali lompatan ke atas dan 1 kali lompatan ke bawah. Besar lompatan ke atas yang terjadi berturut-turut adalah 1,0395 dan 1,0178 yaitu berturut-turut naik 3,95% dan 1,78% . Besar lompatan ke bawah yang terjadi adalah 0,9451 yaitu turun 5,49%.

LAMPIRAN 21

Source Code Histogram dan Poligon Frekuensi Log-return Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, Nilai Awal pada Tabel 4.3, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$

Pada file pbjdvs di Lampiran 11, baris $M = 1$ diganti dengan $M = 2500$.

Semula

```
M = 1;
```

Setelah diganti

```
M = 2500;
```

Nama file: histogrampoligon.m

Jalankan *source code* 'pbjdvs' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pbjdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* 'histogrampoligon' dengan mengetik di Command Window:

```
histogrampoligon
```

%Histogram & Poligon frekuensi

```
S_ti_1 = S(:,end);          % Menentukan S(T)
S_ti = S(:,end-1);        % Menentukan S(T-1)
return_S = S_ti_1./S_ti;  % Menentukan S(T)/S(T-1)
y = log(return_S);        % Menentukan log ((S(T)/S(T-1)))

jangkauan = max(y)-min(y);
d = 0.02;
banyaknya_kelas = ceil(jangkauan/d);

batas_kelas = min(y)+ d*(0:banyaknya_kelas);
```

```

f = histc(y,batas_kelas);      % Menentukan frekuensi
f(end-1) = f(end-1) + f(end); % Memasukan frekuensi terakhir ke
                               % kelas sebelumnya

f = f(1:end-1);
titik_tengah = (batas_kelas(1:end-1) + batas_kelas(2:end))/2;
bar(titik_tengah,f,1)         % Menggambar histogram

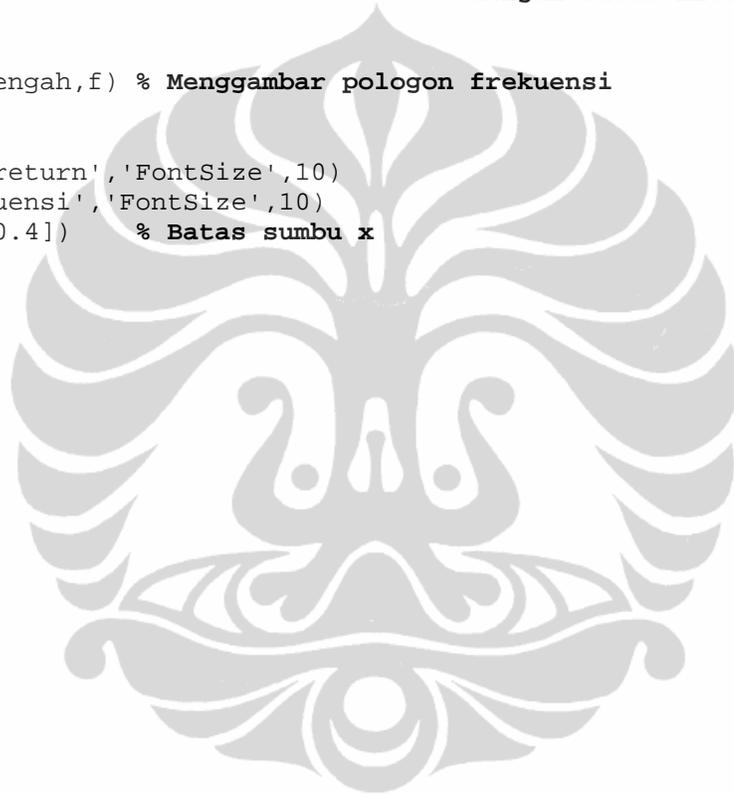
h = findobj(gca,'Type','patch'); % Menentukan objek yang akan
                               % diganti warnanya

set(h,'FaceColor','w','EdgeColor','k'); % Isi histogram putih,
                                         % dengan batas hitam

hold on
plot(titik_tengah,f) % Menggambar poligon frekuensi
hold off

xlabel('log-return','FontSize',10)
ylabel('Frekuensi','FontSize',10)
xlim([-0.4, 0.4]) % Batas sumbu x

```



LAMPIRAN 22

Source Code Pendekatan Kurva Pdf *Log-return* Saham Satu Periode Model PBJDVS untuk Parameter pada Tabel 4.2, $T = 252$, $M = 2500$, dan $R = 100$

Pada file *pjbdvs* di Lampiran 11, baris $M = 1$ diganti dengan $M = 2500$.

Semula

```
M = 1;
```

Setelah diganti

```
M = 2500;
```

Nama file: *kurvapdf.m*

Jalankan *source code* '*pjbdvs*' yang terdapat pada Lampiran 11 dengan mengetik di Command Window:

```
pjbdvs
```

Dilanjutkan dengan menjalankan *source code* '*kurvapdf*' dengan mengetik di Command Window:

```
kurvapdf
```

% Pendekatan kurva pdf

```
S_ti_1 = S(:,end);          % Menentukan S(T)
S_ti = S(:,end-1);        % Menentukan S(T-1)
return_S = S_ti_1./S_ti;  % Menentukan S(T)/S(T-1)
y = log(return_S);        % Menentukan log ((S(T)/S(T-1)))

jangkauan = max(y)-min(y);
d = 0.02;
banyaknya_kelas = ceil(jangkauan/d);

batas_kelas=min(y)+ d*(0:banyaknya_kelas);
```

```
f = histc(y,batas_kelas);      % Menentukan frekuensi
f(end-1) = f(end-1) + f(end); % Memasukan frekuensi terakhir ke
                               % kelas sebelumnya

f = f(1:end-1);

titik_tengah = (batas_kelas(1:end-1) + batas_kelas(2:end))/2;
plot(titik_tengah,f/M/d)
xlabel('log-return','FontSize',10)
ylabel('Probability density','FontSize',10)

xlim([-0.4, 0.4]) % Batas sumbu x
```

