



UNIVERSITAS INDONESIA

**IMPLEMENTASI MODEL RENDLEMAN – BARTTER
DALAM PERGERAKAN TINGKAT BUNGA**

T E S I S

**SARI MULYANI
NPM. 0806420240**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA**

**DEPOK
JULI 2010**



UNIVERSITAS INDONESIA

**IMPLEMENTASI MODEL RENDLEMAN – BARTTER
DALAM PERGERAKAN TINGKAT BUNGA**

T E S I S

Diajukan sebagai salah satu syarat menempuh gelar Magister Sains

SARI MULYANI
NPM. 0806420240

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
KEKHUSUSAN MATEMATIKA KEUANGAN
DEPOK
JULI 2010**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Sari Mulyani

NPM : 0806420240

Tanda Tangan :

Tanggal : 15 Juli 2010.

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Sari Mulyani
NPM : 0806420240
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Implementasi Model Rendleman – Bartter dalam Pergerakan Tingkat Bunga

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI,

Prof. Dr. Djati Kerami :

Drs. Gatot F. Hertono, MSc., PhD. :

Dra. Bevina Desjwiandra H, MSc, PhD. :

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 15 Juli 2010.

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah *Subhanahu Wata'ala*, karena atas Berkat dan Rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan Tesis ini. Penulisan Tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

- (1) Dr. Yudi Satria, MT., selaku Ketua Jurusan Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia yang telah memberikan perizinan bagi penulis ;
- (2). Dra. Bevina Dewsjwiandra H., MSc., PhD., dan Drs. Gatot F. Hertono, MSc., PhD. selaku dosen pembimbing 1 dan 2 yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan tesis ini;
- (3) Prof. Dr. Djati Kerami; Prof. Dr. Belawati H. Widjaja; Dra. Bevina Desjwiandra H., MSc., PhD.; Dr. Kiki Ariyanti Sugeng; Dr. Sri Mardijanti, MKom.; dan Dr. Dian Lestari, DEA., selaku Dosen di jurusan Matematika yang telah banyak membimbing saya selama belajar di program Magister Matematika, FMIPA – Universitas Indonesia ;
- (4) Keluarga H. Radjimin Akbar (Orang tua), Keluarga Ir. H. Awang Gunadi (Kakak), Keluarga Zulaechah-Mashudi (Mertua), Muhammad Muzakki (Suami), dan Nabila Zahra Muzakki, Muh.Ikhsan Fadhil, Salman Fakhri Aqila (Anak-anak tercinta), yang telah memberikan pengertian dan bantuan berupa dukungan materiil dan moril;
- (5) Noorbaity, Diny Zulkarnaen, Susatyo, Retno Indah, I Ketut Martana, Yusfridawati, dan Yessy Yusnita, selaku Rekan-rekan Mahasiswa program Magister Matematika angkatan 2008 (pertama) yang telah banyak memberikan masukan dalam penyelesaian tesis ini;

- (6) Rekan-rekan guru di SMA 108 Jakarta yang telah memberikan dukungan moril dan doa kelancaran dalam penyusunan tesis ini;
- (7) Pegawai administrasi TU (Mba Santi, Pak Saliman, Mas Irwan, Mas Ratmin) dan Petugas perpustakaan (Mba Rusmi, Uda Salman) di Jurusan Matematika FMIPA – UI yang telah banyak membantu penulis selama kuliah di program Magister Matematika, FMIPA – UI;
- (8) Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas dukungan dan doanya.

Akhir kata, saya berharap Allah *Subhanahu Wata'ala* berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 15 Juli 2010.

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sari Mulyani
NPM : 0806420240
Program Studi : Magister Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

“Implementasi Model Rendleman – Bartter dalam Pergerakan Tingkat Bunga”

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non Eksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 15 Juli 2010.

Yang menyatakan,

Sari Mulyani

ABSTRAK

Nama : Sari Mulyani
Program Studi : Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia
Judul : Implementasi Model Rendleman – Bartter dalam
Pergerakan Tingkat Bunga

Setiap aset atau investasi sangat dipengaruhi oleh tingkat bunga. Tingkat bunga yang berubah-ubah secara tidak pasti ini menyebabkan tingkat bunga sulit diprediksi. Tesis ini membahas tentang salah satu model pergerakan tingkat bunga *one factor equilibrium* yaitu model Rendleman–Bartter. Penjelasan model Rendleman–Bartter dan solusi eksplisit model ini akan dibahas. Estimasi parameter *drift* dan *diffusi* model Rendleman – Bartter dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan pendekatan numerik Newton - Raphson. Estimasi Parameter yang diperoleh akan digunakan dalam solusi eksplisit model Rendleman – Bartter, kemudian solusi eksplisit akan dibandingkan dengan data real yang dapat diunduh dari <http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>. Hasil simulasi menunjukkan bahwa model Rendleman – Bartter dapat mengaproksimasi pergerakan *short rate* untuk jangka waktu yang tidak terlalu panjang.

Kata kunci: Rendleman–Bartter, *one – factor equilibrium*, Metode *Maximum Likelihood Estimation*, Metode Newton-Raphson.

Bibliografi: 20 (1994-2007)

ABSTRACT

Name : Sari Mulyani
Study Program : Magister of Mathematics
Faculty of Mathematics and Sciences
University of Indonesia
Title : Implementation of Rendleman – Bartter Model on the
Evolution of Interest Rate

Any asset or investment is strongly influenced by interest rates. Interest rate swings are not sure this causes the interest rate is difficult to predict. This thesis presents a model of interest rate movements are one-factor equilibrium models Rendleman-Bartter. Explanatory models Rendleman-Bartter and explicit solutions of this model will be discussed. Estimated parameters of drift and diffusion models Rendleman - Bartter analysis was conducted using Maximum Likelihood Estimation (MLE) and the numerical approach the Newton - Raphson. Estimated parameters obtained will be used in the model explicit solutions Rendleman - Bartter, then explicit solutions will be compared with real data which can be downloaded from <http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>. Simulation results show that the models Rendleman - Bartter can approximates the movement of short-term rate that is not too long.

Key words: Rendleman–Bartter, one–factor equilibrium, Maximum Likelihood Estimation Method, Newton Raphson-Method.

Bibliografi: 17(1994-2007)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
PERNYATAAN ORISINALITAS	iii
LEMBAR PENGESAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vii
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
1. PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Permasalahan	3
1.3. Tujuan Penulisan	3
1.4. Manfaat Penulisan	3
1.5. Pembatasan Masalah	4
1.6. Sistematika Penulisan	4
2. LANDASAN TEORI	6
2.1. Tingkat Bunga.....	6
2.2. Ruang Probabilitas	8
2.3. Variabel Random	8
2.4. Proses Stokastik.....	9
2.5. Proses <i>Wiener</i>	9
2.6. Persamaan Diferensial Stokastik	12
2.7. Proses Ito.....	13
2.8. Distribusi Normal dan Lognormal	14
2.9. Taksiran Maksimum Likelihood	15
2.10. Metode Numerik Newton-Raphson	17
3. MODEL <i>RENDLEMAN – BARTTER</i>	19
3.1. Penurunan Model <i>Rendleman – Bartter</i>	20
3.2. Solusi Analitik Model <i>Rendleman – Bartter</i>	22
4. IMPLEMENTASI MODEL <i>RENDLEMAN – BARTTER</i>	25
4.1. Estimasi Parameter Model <i>Rendleman – Bartter</i>	28
4.2. Implementasi Model <i>Rendleman – Bartter</i> dalam Pergerakan Tingkat Bunga	37
5. PENUTUP	41
Kesimpulan	41
DAFTAR REFERENSI	42

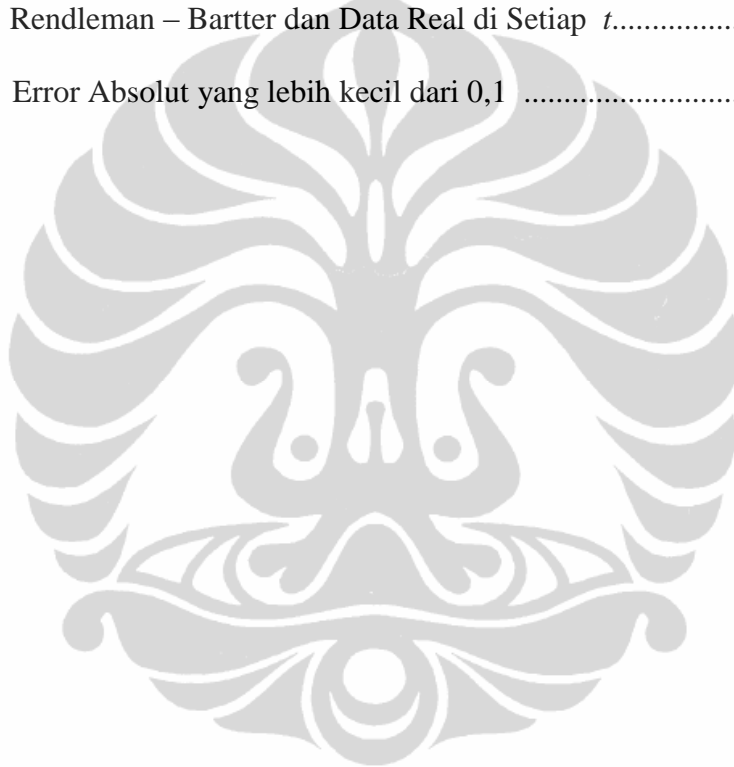
DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Hubungan Antar Tingkat Bunga	7
Gambar 2.2.	Satu Sampel Path dari Brownian Motion	10
Gambar 4.1.	Skema Implementasi Model Rendleman – Bartter	25
Gambar 4.2.	Grafik Data Spot Rate Harian	32-33
Gambar 4.3.	Grafik Solusi Eksplisit Model Rendleman – Bartte dan Data Spot Rate Harian tahun 2008	38



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1.	Pemilihan Nilai Awal dan Hasil Estimasi Menggunakan Newton Raphson	34 – 35
Tabel 4.2.	Tabel Error Maksimum Absolut yang dihasilkan antara Model Rendleman – Bartter dan Data Real	36
Tabel 4.3.	Error Relatif dan Error Absolut antara Nilai-nilai Eksplisit Rendleman – Bartter dan Data Real di Setiap t	38
Tabel 4.4.	Error Absolut yang lebih kecil dari 0,1	40



DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1 Hasil Penurunan dengan *Software* Mapel
- Lampiran 2 *Source Code* dengan Menggunakan *Software* Matlab
- Lampiran 3 Data *spot rate* Harian Bank of England tahun 2008



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Investasi berupa tabungan dan deposito sangat diminati masyarakat. Namun sejak duapuluh tahun terakhir, menurut data di PT Bursa Efek Indonesia, jenis investasi berkembang pesat dan menjadi alternatif masyarakat untuk menambah investasi. Selain logam mulia (emas), jenis investasi lain yang diminati masyarakat misalnya saham (*stock*), reksadana, properti, dan obligasi (*bond*). Saham atau obligasi biasanya dikeluarkan oleh perusahaan atau pemerintah, misalnya: PT Telekomunikasi Indonesia, PT Kimia Farma, dan PT Bank Mandiri (Persero).

Obligasi dibutuhkan agar perusahaan atau pemerintah memperoleh modal sesegera mungkin. Sedangkan investor membeli obligasi dengan harapan mendapatkan imbal hasil berupa pembayaran bunga atau kupon dan nilai obligasi pada saat jatuh tempo, baik berupa *capital gain* (kenaikan harga) ataupun *capital loss* (kerugian) [Bodie, dkk. 2007]. Contoh obligasi di Indonesia adalah Obligasi Ritel Indonesia (ORI), Surat Utang Negara (SUN), dan Obligasi Syariah Sukuk.

Imbal hasil itu berhubungan dengan tingkat bunga, sedangkan tingkat bunga berubah-ubah tidak pasti mengikuti proses stokastik. Menurut teori Matematika Keuangan pergerakan tingkat bunga mengikuti proses Wiener. Dengan memahami model tingkat bunga seseorang dapat memahami pergerakan tingkat bunga. Tingkat bunga yang dibahas dalam tesis ini adalah tingkat bunga *short rate*.

Model tingkat bunga untuk memprediksi pergerakan *short rate* dibedakan menjadi dua kategori, yaitu model *equilibrium* (ekuilibrium) dan *no-arbitrage*. Adapun contoh model ekuilibrium adalah: Model Rendleman-Bartter, Vasicek, dan Cox-Ingersoll-Ross; dan contoh model *no-arbitrage* adalah: Model Ho-Lee, dan Hull-White. [Hull, 2003]. Secara khusus model *short rate* yang akan dibahas adalah model ekuilibrium satu faktor Rendleman – Bartter. Pada

model ekuilibrium satu faktor, model *short rate* hanya melibatkan satu sumber ketidakpastian [Hull, 2003]. Sumber ketidakpastian ini adalah *short rate* r saja.

Model Rendleman–Bartter ditemukan oleh Richard J. Rendleman dan Brit J. Bartter. Proses *short rate* r pada model Rendleman – Bartter ini memiliki proses yang sama dengan proses harga saham S pada model Black–Scholes–Merton [Hull, 2003]. Menurut [Mursiela, 1998] model-model *short rate* dianggap relevan dalam menggambarkan pergerakan *short rate* pasar masa depan, karena memenuhi sifat martingale.

Dalam kehidupan nyata, menurut [Hull, 2003] ekspektasi *short rate* selalu menuju ke arah *mean reversion* (rata-rata pembalikan): tinggi rendahnya *short rate* akan menuju ke arah *mean-reversion*-nya. Saat *short rate* tinggi, permintaan pinjaman akan menurun, sehingga mengakibatkan nilai *short rate* turun menuju suatu level tertentu. Begitu pula saat *short rate* rendah, permintaan pinjaman akan meningkat, sehingga mengakibatkan *short rate* naik menuju suatu level tertentu. Level tertentu inilah yang disebut *mean reversion level*.

Disamping penjelasan model Rendleman – Bartter, pada Tesis ini akan ditunjukkan solusi eksplisit model rendleman – Bartter, yang dapat diperoleh dengan menggunakan Lemma Ito. Selain itu, akan dibahas pula tentang implementasi model Rendleman – Bartter dalam pergerakan *short rate*. Dalam implementasi dibutuhkan solusi eksplisit model, dimana dalam solusi eksplisit model Rendleman – Bartter ini terdapat parameter-parameter yang harus diestimasi terlebih dahulu. Untuk mengestimasi parameter persamaan model akan dilakukan dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimator* (MLE). Apabila estimasi parameter tidak dapat diselesaikan dengan MLE, maka estimasi parameter dilakukan dengan bantuan metode numerik, dalam tesis ini metode numerik yang digunakan adalah metode Newton-Raphson.

Selanjutnya, hasil estimasi parameter akan digunakan pada solusi eksplisit model Rendleman – Bartter dalam implementasi pergerakan *short rate*. Hasil implementasi akan dibandingkan dengan data real pada pasar yang dapat diunduh pada [20].

Hasil implementasi menunjukkan bahwa model Rendleman – Bartter dapat mengestimasi pergerakan *short rate*, untuk jangka waktu yang tidak terlalu panjang.

1.2. Permasalahan

Permasalahan yang dibahas pada tesis ini adalah :

1. Bagaimana menjelaskan model pergerakan *short rate* Rendleman-Bartter ?
2. Apakah model *short rate* Rendleman – Bartter mempunyai solusi eksplisit?
3. Bagaimana mengestimasi parameter model Rendleman – Bartter ?
4. Bagaimana model Rendleman – Bartter mengaproksimasi data real *short rate*?

1.3. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah :

1. Menjelaskan model *short rate* Rendleman dan Bartter.
2. Membandingkan solusi aproksimasi model *short rate* Rendleman – Bartter dengan data real.

1.4. Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan tesis ini adalah :

1. Meningkatkan wawasan investor, praktisi di bidang keuangan, dalam memahami pergerakan *short rate*.
2. Memberikan kontribusi bagi peneliti lain yang akan mengembangkan hasil penulisan tesis ini.

1.5. Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah tesis ini adalah:

1. Estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan / atau metode numerik Newton Raphson,
2. Data real yang digunakan adalah data pada website:
<http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>

1.6. Sistematika Penulisan

Tesis ini akan disajikan dengan sistematika sebagai berikut:

Bab 1: **PENDAHULUAN**

Membahas tentang Latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab 2 : **LANDASAN TEORI**

Meliputi pembahasan tingkat bunga, ruang probabilitas, proses stokastik, Proses Wiener, persamaan differensial stokastik, dan Proses Ito; Disamping itu juga dibahas tentang Distribusi Normal dan Lognormal, *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode numerik Newton Raphson.

Bab 3 : **MODEL RENDLEMAN – BARTTER**

Berisi penjelasan tentang penurunan model Rendleman–Bartter, dan solusi eksplisit model Rendleman – Bartter.

Bab 4 : **IMPLEMENTASI MODEL RENDLEMAN - BARTTER**

Berisi tentang estimasi parameter model Rendleman – Bartter dan implementasi model Rendleman–Bartter dalam pergerakan *short rate*, dengan dibantu *software* program Maple dan Matlab.

Bab 5 : **PENUTUP**

Berisi kesimpulan dari pembahasan bab 3 dan bab 4.

Pada bagian akhir disampaikan daftar referensi yang mendukung tulisan tesis ini dan lampiran tesis sebagai pelengkap. Selanjutnya, berikut ini akan dibahas bab 2 landasan teori sebagai dasar dari isi tesis bab 3 dan bab 4.



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang teori-teori yang mendukung pembahasan bab 3 dan bab 4. Adapun yang dibahas pada bab 2 ini yaitu Tingkat Bunga, Ruang Probabilitas, Variabel Random, Proses stokastik, Proses Wiener, Proses Ito, dan Persamaan Differensial Stokastik. Untuk estimasi parameter juga dibahas tentang metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Newton-Raphson. Pembahasan lengkapnya adalah sebagai berikut:

2.1. Tingkat Bunga

Untuk menggambarkan perilaku pergerakan *short rate* model Rendleman – Bartter diperlukan pembahasan tentang tingkat bunga (*interest rate*).

Tingkat bunga biasanya dinyatakan dalam persentase. Tingkat bunga inilah yang mempengaruhi pengembalian hasil (*return*) yang diberikan surat berharga atau investasi modal. Selain dari pokok pinjaman, pengembalian hasil berupa sejumlah uang harus dibayar oleh peminjam dana sebagai kompensasi (imbal hasil) kepada pihak yang meminjamkan dana [Luenberger, 1998].

Salah satu faktor yang mempengaruhi besar kecilnya tingkat bunga adalah masa jatuh tempo (*maturity date*), yaitu lamanya peminjaman dari waktu nol hingga waktu T [Luenberger, 1998]. Semakin panjang masa jatuh tempo pembayaran, maka semakin tinggi tingkat bunga yang diberikan. Sebaliknya, semakin pendek masa jatuh tempo pembayaran, maka tingkat bunga yang akan dikenakan pada peminjam akan semakin rendah pula.

Berdasarkan teori *term structure of interest rate*, tingkat bunga dapat dibedakan menjadi: [Luenberger, 1998]

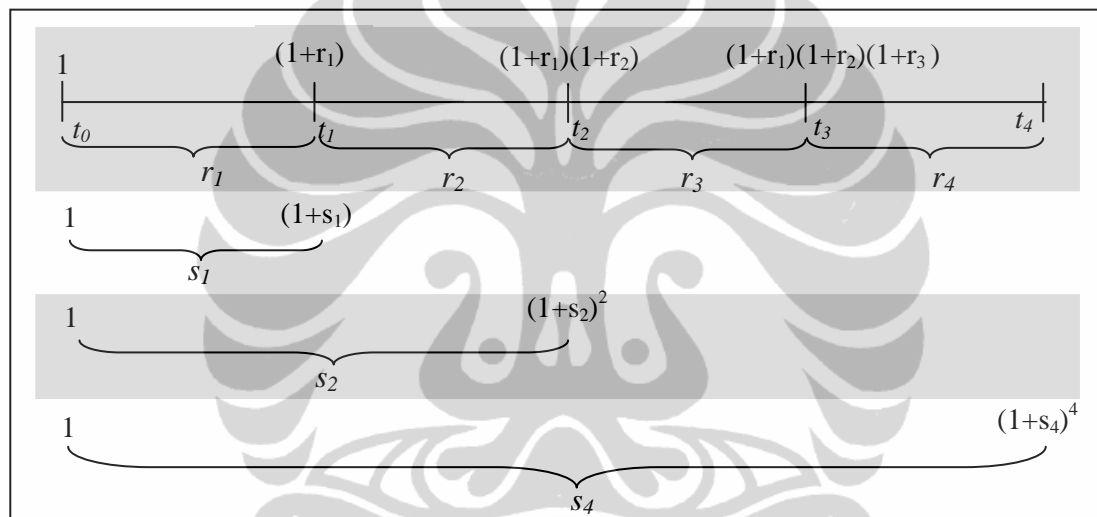
1. Spot rate

Spot rate s_i adalah tingkat bunga yang dikenakan mulai saat ini t_0 , hingga saat jatuh tempo t , misalkan *spot rate* jangka setahun s_1 , lima tahun s_5 .

2. Short rate

Short rate r_t adalah tingkat bunga yang berlaku pada suatu interval waktu t yang tertentu.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi gambar berikut:



Gambar 2.1. Hubungan antar tingkat bunga

Secara matematis, hubungan antara *spot rate* dan *short rate* adalah [Luenberger, 1998]:

$$(1 + s_i)^i = (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \dots (1 + r_i), \text{ dengan } i=1, 2, \dots, t. \quad (2.1)$$

Short rate yang dibahas pada implementasi bab 4 adalah *spot rate* harian terkait dengan obligasi yang dapat diunduh pada [20]. Pembahasan *short rate* diasumsikan sebagai variabel random dalam suatu ruang probabilitas. Oleh karena itu, berikut akan dibahas tentang hal yang berkaitan dengan ruang probabilitas.

2.2. Ruang Probabilitas

Pembahasan *short rate* yang merupakan variabel random akan berkaitan dengan ruang probabilitas. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dibahas beberapa hal yang berkaitan dengan variabel random dan ruang probabilitas.

Menurut [Shreve, 2004] misalkan Ω himpunan tak kosong, dan \mathcal{F} sebuah σ -aljabar yang merupakan subset dari Ω . Sebuah *measure* probabilitas \mathbb{P} yang memetakan setiap himpunan $A \in \mathcal{F}$ pada sebuah bilangan dalam $[0,1]$, disebut probabilitas A dan ditulis sebagai $\mathbb{P}(A)$, serta memenuhi

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, dan
- (ii) (penambahan terhitung) bilamana A_1, A_2, \dots adalah barisan yang saling bebas dalam \mathcal{F} , maka

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (2.2)$$

Maka *triple* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ disebut ruang probabilitas. Pembahasan lebih dalam mengenai ruang probabilitas dapat dilihat di [Shreve, 2004].

2.3. Variabel Random

Menurut [Ross, 1996] dengan memandang percobaan random yang memiliki sampel Ω , dimisalkan $\{\omega_i; i = 1, 2, \dots\} \in \Omega$. Sebuah variabel random adalah sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen $\omega_i \in \Omega$ dengan tepat satu elemen bilangan real $X(\omega_i) = x$, atau

$$X: \omega_i \rightarrow x. \quad (2.3)$$

Range dari X adalah himpunan bilangan real $\mathcal{R} = \{x \mid x = X(\omega_i); \omega_i \in \Omega\}$.

Berkaitan dengan kumpulan variabel random yang memiliki indeks berikut pembahasan tentang proses stokastik.

2.4. Proses Stokastik:

Menurut [Ross, 1996] sebuah proses stokastik $\underline{X} = \{ X(t); t \in T \}$ adalah kumpulan variabel random $X(t)$ dengan indeks t , dalam hal ini t sebagai indeks waktu, dan $X(t)$ adalah variabel random pada waktu t .

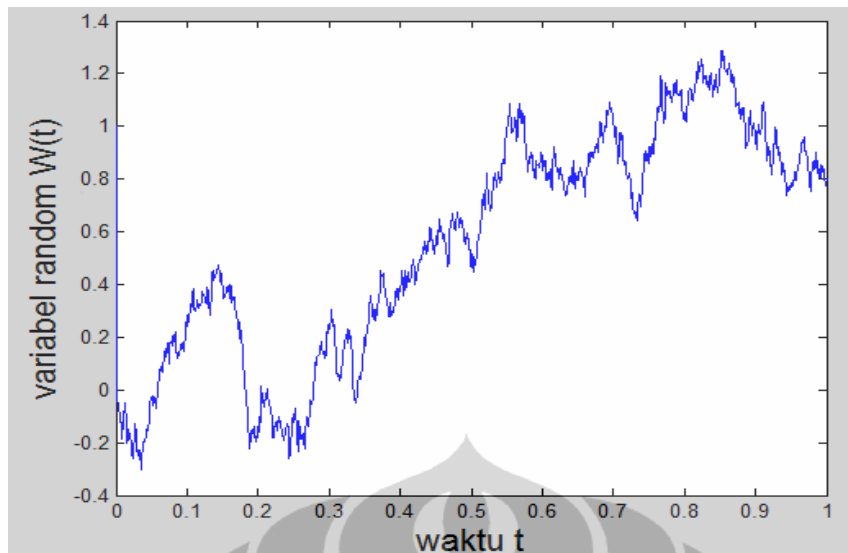
Dipandang dari ‘waktu’, proses stokastik dapat dibedakan atas dua jenis, yaitu proses stokastik waktu kontinu dan waktu diskrit. Untuk proses stokastik waktu diskrit, indeks $t \in T$ adalah himpunan terhitung (*countable*), $t \in [0, T]$; sedangkan proses stokastik waktu kontinu, indeks $t \in T$ bersifat kontinu, $t \in [0, \infty)$.

Secara umum dapat dinyatakan bahwa setiap variabel yang nilainya berubah-ubah secara tidak pasti terkait dengan waktu dikatakan mengikuti proses stokastik. Salah satu contoh proses stokastik adalah *Brownian motion* yang lintasan randomnya terkait waktu kontinu.

Setelah membahas proses stokastik berikut akan dibahas tentang Proses Wiener, dan *Generalisasi* Proses Wiener. Kedua hal ini akan berkaitan dengan model *short rate* Rendleman – Bartter yang akan dibahas di bab 3.

2.5. Proses Wiener

Proses *Wiener* dalam bidang fisika dikenal dengan *Brownian Motion* atau Gerak *Brownian*. Norbert Wiener (1923) pertama kali mengemukakan gerakan partikel tak beraturan (*Brownian motion*) pada basis matematika. Pada tesis ini istilah yang digunakan selanjutnya adalah Proses Wiener.



Gambar 2.2. Satu *Sampel path* dari proses Wiener

Gambar 2.2 menunjukkan contoh sebuah simulasi satu trajektori (*sampel path*) proses Wiener pada interval waktu $[0,1]$. Selanjutnya, setiap simulasi pada bab 4 akan berkaitan dengan proses Wiener tersebut.

Berikut ini pembahasan tentang proses Wiener *Standard*.

2.5.1. Proses Wiener *Standard*

Proses Wiener berguna dalam menggambarkan perubahan suatu proses stokastik [Mikosch, 2000].

Berdasarkan [Higham, 2001] proses Wiener pada selang waktu $[0,T]$ adalah proses stokastik W_t yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- 1) $W_0 = 0$ (dengan probabilitas 1),
- 2) Untuk $0 \leq s < t \leq T$, variabel random $W_t - W_s$ berdistribusi Normal dengan mean nol, dan variansi $t - s$; ekuivalen ditulis sebagai $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$,
- 3) Untuk $0 \leq s < t < u < v \leq T$ pertambahan $W_t - W_s$ dan $W_v - W_u$ adalah bebas.

Menurut [Hull, 2003] variabel random W_t , $t \geq 0$ mengikuti proses Wiener jika W_t , $t \geq 0$ mengikuti dua sifat berikut:

Sifat 1.

Perubahan δW_t selama periode waktu yang kecil δt adalah

$$\delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t = \varepsilon \sqrt{\delta t}, \quad (2.4)$$

dengan ε bilangan random berdistribusi normal standar, yaitu $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Sifat 2.

Nilai dari δW_t untuk dua interval-interval pendek pada waktu δt adalah bebas (*independent*).

Setelah membahas proses Wiener standar, selanjutnya, akan dibahas perluasan proses Wiener, yang dikenal sebagai *generalized Wiener process*.

2.5.2. *Generalized Wiener Process* (Proses Wiener yang diperluas)

Proses Wiener dasar, dW_t , yaitu pada sifat 1, dibangun oleh *drift rate* nol dan *variance rate* 1. *Drift rate* nol artinya bahwa nilai ekspektasi W_t pada waktu yang akan datang sama dengan nilai sekarang. *Variance rate* 1 artinya bahwa perubahan dalam W_t pada interval waktu sepanjang T adalah sama dengan T itu sendiri.

Sebuah proses Wiener yang diperluas (*generalized Wiener process*) untuk suatu variabel X dapat dinyatakan dalam dW_t sebagai berikut [Hull, 2003]:

$$dX = a dt + b dW_t \quad (2.5)$$

dengan a dan b adalah konstanta.

Dari sifat 1 persamaan (2.5) menunjukkan bahwa perubahan nilai X yang kecil δX pada interval waktu δt dengan persamaan

$$\delta X = a \delta t + b \delta W_t$$

mempunyai distribusi Normal dengan mean $a \delta t$ dan variansi $b^2 \delta t$. [Hull, 2003].

Dari sifat ke dua berimplikasi bahwa W_t mengikuti proses Markov, untuk $0 \leq s < t < u \leq T$ berlaku $P(W_u | W_0, \dots, W_s, \dots, W_t) = P(W_u | W_t)$.

Setelah membahas proses *Wiener*, akan dibahas mengenai persamaan diferensial stokastik, karena model Rendleman – Barter merupakan sebuah Persamaan Diferensial Stokastik.

2.6. Persamaan Diferensial Stokastik:

Jika $X(t)$ didefinisikan sebagai fungsi yang dapat diturunkan untuk $t \geq 0$; $\alpha(x,t)$ adalah fungsi x yang bergantung waktu t , dimana $t \in [0, T]$, dan mengikuti relasi

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x(t), t) \text{ dan } x(0) = x_0,$$

maka

$$dx(t) = \alpha(x(t), t)dt. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) kita kenal dengan persamaan diferensial biasa (PDB), atau deterministik. Solusi persamaan diferensial (2.6) adalah

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(x(t), t)dt \quad (2.7)$$

dengan kondisi awal x_0 .

Persamaan diferensial stokastik muncul manakala terdapat gangguan (*noise*) pada persamaan (2.8), sebut saja gangguan itu adalah $\sigma(X(t), t)$. Gangguan ini sifatnya stokastik, yaitu berubah-ubah mengikuti waktu. Jika $W_t, t \geq 0$, adalah proses *Wiener*, maka persamaan deterministik (2.6) mendapatkan gangguan sebesar $\sigma(X(t), t)$ dikali *increment* proses Wiener, menjadi

$$dX(t) = \alpha(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW_t, \quad (2.8)$$

dimana fungsi $\alpha(X(t), t)$, $\sigma(X(t), t)$ diketahui dan X_t adalah variabel random yang bergantung waktu. Persamaan (2.8) ini disebut persamaan diferensial stokastik. [Kloeden, 2004].

Selanjutnya akan dibahas tentang proses Ito.

2.7. Proses Ito

Proses Ito perlu dibahas karena berkaitan persamaan diferensial stokastik dan pencarian solusi eksplisit model *short rate* Rendleman – Bartter.

Untuk memperoleh solusi eksplisit diperlukan Lemma Ito. Sebelum membahas Lemma Ito perlu diketahui proses Ito. Oleh karena itu, maka pada sub bab ini akan dibahas segala hal yang berkaitan dengan Lemma Ito, yaitu: definisi Proses Ito dan Lemma Ito.

Definisi Proses Ito

Menurut [Hull, 2003] Proses Ito pertama kali ditemukan oleh Kiyosi Ito (1951) dan merupakan *generalized Wiener process* dengan parameter *drift* α dan *diffusi* σ dalam bentuk fungsi variabel x dan t yang berbentuk:

$$dX = \alpha(X, t) dt + \sigma(X, t) dW_t. \quad (2.9)$$

Menurut [Kloeden, 1999], sebuah proses Ito $X = \{X_t, t \geq 0\}$ mempunyai bentuk

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (2.10)$$

untuk $t \geq 0$. Pada persamaan (2.10) terdapat *initial value* $X_0 = x_0$, yang bersifat random, suku kedua ruas kanan terdapat komponen kontinu $\alpha(X_s)$ yang disebut *drift* dan suku ketiga ruas kanan terdapat komponen random kontinu $\sigma(X_s)$ yang bersifat stokastik, disebut difusi (*diffusion*).

Setelah dibahas tentang proses Ito, berikut ini akan dibahas Lemma Ito, yang akan digunakan pada bab 3 dalam pembahasan mencari solusi eksplisit model *Rendleman – Bartter*.

Definisi Lemma Ito:

Misalkan variabel x mengikuti proses Ito

$$dx = \alpha(x, t) dt + \sigma(x, t) dW_t, \quad (2.11)$$

dan misalkan G merupakan fungsi dari x dan t yang kontinu hingga turunan kedua. Lemma Ito menunjukkan bahwa sebuah fungsi G dari x dan t mengikuti proses [Hull, 2003]:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial G}{\partial x} dW_t, \quad (2.12)$$

dimana dW_t adalah proses Wiener yang sama dengan persamaan (2.11).

Sehingga G juga memenuhi Proses Ito, dengan *drift rate*

$\left(\alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right)$ dan *variance rate* $\left(\sigma \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2$. Penurunan Lemma Ito selengkapnya terdapat pada [Hull, 2003] halaman 232.

Berkaitan dengan distribusi model *Rendleman – Bartter*, maka akan terkait distribusi lognormal. Sedangkan distribusi lognormal terkait dengan distribusi normal. Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas distribusi normal dan lognormal serta sifat-sifatnya.

2.8. Distribusi Normal dan Lognormal

Menurut [Walpole, 1998] variabel random kontinu X mempunyai distribusi lognormal jika variabel random $Y = \ln(X)$ mempunyai distribusi normal dengan mean α dan variansi σ^2 .

Fungsi *pdf* (*Probability Distribution Function*) distribusi lognormal adalah

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln X - \alpha)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Distribusi lognormal ini mempunyai mean e^α dan variansi $(e^{\sigma^2} - 1)e^\alpha$ [Matsuda, 2004], selanjutnya akan digunakan pada bab 4 sewaktu menentukan persamaan fungsi Likelihood.

Sedangkan fungsi *pdf* (*Probability Distribution Function*) distribusi normal adalah

$$f(Y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(Y-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Setelah membahas distribusi normal dan lognormal, berikut akan dibahas *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter model Rendleman – Bartter pada bab 3.

2.9. Taksiran Maksimum Likelihood (*Maximum Likelihood Estimation = MLE*)

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak berukuran n dari suatu distribusi dengan pdf $f(X; \theta)$, yang bergantung pada $\theta \in \Omega$, dimana Ω adalah ruang parameter. Karena X_1, X_2, \dots, X_n saling bebas dan memiliki distribusi yang sama, maka *pdf* bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n dapat dinyatakan sebagai

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1; \theta) \cdot f(X_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(X_n; \theta). \quad (2.15)$$

Pdf bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n mengandung parameter θ , sehingga dapat dituliskan sebagai fungsi dari θ , misalkan $L(\theta)$, maka

$$L(\theta) = f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= f(X_1; \theta) \cdot f(X_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(X_n; \theta) \\
&= \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta).
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

$L(\theta)$ disebut fungsi Likelihood.

Selanjutnya, akan dicari θ yang memaksimumkan $L(\theta)$. Untuk mempermudah perhitungan dalam menentukan θ , bentuk $L(\theta)$ dimodifikasi menjadi bentuk \ln , yaitu $\ln L(\theta)$. Nilai θ yang memaksimumkan $\ln L(\theta)$ juga akan memaksimumkan $L(\theta)$. Bentuk persamaan (2.16) menjadi

$$\begin{aligned}
\ln L(\theta) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n f(X_i; \theta) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; \theta).
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

Maksimum dari (2.17) akan menghasilkan nilai θ yang akan memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta)$. Dengan demikian, maksimum di $\ln L(\theta)$ juga merupakan maksimum di $L(\theta)$. Jika turunan itu disebut fungsi *score* $S(\theta)$, maka maksimum dari $\ln L(\theta)$ adalah:

$$S(\theta) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0.
\tag{2.18}$$

Nilai $\theta = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yang diperoleh merupakan solusi dari $S(\theta) = 0$. Nilai ini akan memaksimumkan $\ln L(\theta)$ dan disebut sebagai taksiran maksimum *Likelihood* (*Maximum Likelihood Estimator*) dari θ , dinotasikan dengan $\hat{\theta}$.

Idealnya, taksiran maksimum *Likelihood* diperoleh dalam bentuk solusi eksplisit dari $S(\theta) = 0$. Namun seringkali solusi tersebut sulit untuk tercapai, sehingga alternatif penyelesaian solusi ini memerlukan pendekatan numerik. Pada subbab berikut akan dijelaskan pendekatan numerik dengan menggunakan metode *Newton-Raphson*.

2.10. Metode Newton-Raphson

Menurut [Burden, 2001], metode Newton-Raphson adalah salah satu alternatif pendekatan numerik untuk menyelesaikan masalah pencarian akar. Sehingga sub bab ini dibahas metode iteratif Newton - Raphson.

Misalkan $x=p$ adalah solusi dari $f(x) = 0$. Misalkan pula \hat{x} adalah solusi aproksimasi dari p sedemikian sehingga $f(\hat{x}) \neq 0$ dan nilai dari $|p - \hat{x}|$ cukup kecil. Dengan memperhatikan ekspansi deret Taylor:

$$f(x) = f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\hat{x}) + \frac{(x - \hat{x})^2}{2} f''(\xi(x)), \quad (2.19)$$

dengan $\xi(x)$ berada diantara x dan \hat{x} , karena $f(p) = 0$, maka $x = p$ dan persamaan (2.19) menjadi

$$0 = f(\hat{x}) + (p - \hat{x})f'(\hat{x}) + \frac{(p - \hat{x})^2}{2} f''(\xi(x)). \quad (2.20)$$

Metode Newton Raphson mengasumsikan nilai $|p - \hat{x}|$ cukup kecil, sehingga nilai $(p - \hat{x})^2$ akan menjadi lebih kecil dan dapat diabaikan. Dengan asumsi tersebut, persamaan (2.20) menjadi

$$0 = f(\hat{x}) + (p - \hat{x})f'(\hat{x}). \quad (2.21)$$

Sehingga dari persamaan (2.21) diperoleh

$$p \approx \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}. \quad (2.22)$$

Metode Newton Raphson persamaan (2.22) dimulai dengan nilai awal p_0 dan membentuk barisan $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, dengan persamaan

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad \text{untuk } n \geq 0, \quad (2.23)$$

Solusi p_{n+1} dari persamaan (2.23) diperoleh bila nilai $|p_{n+1} - p_n|$ lebih kecil dari toleransi eror yang diinginkan.

Selanjutnya, telah diketahui dari pembahasan subbab sebelumnya hubungan taksiran maksimum likelihood $\hat{\theta}$ dengan fungsi *score* $S(\hat{\theta})$ adalah pada $S(\hat{\theta}) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}$ dan $S'(\hat{\theta}) = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}$. Dengan diberikan nilai awal $\hat{\theta}_0$, maka solusi aproksimasi $\hat{\theta}_1$ diperoleh

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \cdot S(\hat{\theta}_0). \quad (2.24)$$

Kemudian, apabila prosedur ini diulang, maka solusi aproksimasi dari $S(\hat{\theta})=0$ dengan diberikan nilai awal $\hat{\theta}_1$ adalah sebagai berikut

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \cdot S(\hat{\theta}_1). \quad (2.25)$$

Untuk pengulangan ke-k, solusi aproksimasinya adalah

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \cdot S(\hat{\theta}_k), \text{ dengan } k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Prosedur di atas terus dilakukan berulang-ulang hingga batas toleransi, $|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k| < TOL$. Dimana TOL adalah batas toleransi yang dikehendaki. Setelah $|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k|$ memenuhi toleransi yang dikehendaki, maka dipilih $\hat{\theta}_{k+1}$ sebagai solusi aproksimasi dari $S(\hat{\theta})=0$ dan juga sebagai taksiran maksimum likelihood dari θ .

Metode iteratif Newton-Raphson yang dijabarkan di atas akan digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter dalam model Rendleman – Bartter pada bab 3.

Berikut ini akan dilanjutkan dengan bab 3 yang membahas tentang penurunan model Rendleman – Bartter dan solusi eksplisit model Rendleman Bartter.

BAB 3

MODEL RENDLEMAN - BARTTER

Salah satu model pergerakan short rate yang pertama adalah model Rendleman – Bartter yang diperkenalkan pada tahun 1979. Model ini adalah salah satu model *one factor equilibrium*. [Hull, 2003]. Model satu faktor mendeskripsikan pergerakan *short rate* menurut satu sumber resiko, yaitu r_t . [Neftci, 2000]. Jadi, sumber resiko yang dimaksud pada model Rendleman – Bartter hanya bergantung pada satu variabel ketidakpastian, yaitu r_t .

Ketidakpastian dalam ekonomi dinyatakan oleh ruang probabilitas lengkap $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t^W)_t, \mathbb{Q})$ dengan natural filtrasi $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ dari *Brownian Motion* W , serta \mathbb{Q} *risk neutral* probabilitas measure. Pembahasan lebih dalam mengenai hal ini dapat dilihat pada [Yolcu, 2005]. Model Rendleman – Bartter memenuhi *risk-neutral world*, dimana dalam setiap periode waktu singkat antara t dan $t + \delta t$, investor memperoleh keuntungan rata-rata sebesar $r_t \delta t$. [Hull, 2003].

Sebagai model *equilibrium*, biasanya dimulai dengan asumsi-asumsi tentang variabel-variabel ekonomi. Dari variabel-variabel ekonomi dapat diturunkan sebuah proses *short rate* r_t . [Hull, 2003]. Asumsi-asumsi tersebut misalnya terkait dengan perilaku permintaan (*supply*), penawaran (*demand*), dan harga barang di beberapa pasar. Kemudian *short rate* r_t ini dieksplorasi pada harga saham, bond atau harga opsi.

Dibedakan dari bentuk *drift* dan *diffusi*-nya terdapat macam-macam model *equilibrium*, antara lain yaitu: Vasicek (1977), Dothan (1978), Rendleman – Bartter (1980), Courtadon (1982), Mars–Rosenfeld (1983), Cox Ingersoll Ross (1985). Untuk lebih lengkapnya lihat [Yolcu, 2005].

Proses untuk *short rate* r_t pada model Rendleman – Bartter ini menggunakan proses yang sama dengan proses harga saham S_t pada model Black–Scholes–Merton [Hull, 2003]. Model Black-Scholes-Merton berbentuk:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.1)$$

sedangkan model Rendleman – Bartter dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial stokastik

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t, \quad (3.2)$$

dimana r_t adalah *short rate* pada waktu t , α adalah konstanta ekspektasi laju return (*expected rate of return*), σ adalah parameter standar deviasi yang menunjukkan volatilitas *short rate*, dan W_t adalah sebuah proses Wiener.

Pada subbab berikut ini akan ditunjukkan penurunan persamaan model Rendleman – Bartter.

3.1. Penurunan model Rendleman dan Bartter

Jika r_t adalah *short rate* pada saat t , maka ekspektasi laju drift (*expected drift rate*) *short rate* r_t per satuan waktu diasumsikan sama dengan αr_t , artinya dalam interval waktu yang singkat δt diharapkan perubahan *short rate* r_t , sebesar $\alpha r_t \delta t$ [Hull, 2003], dengan α merupakan ekspektasi laju return (*expected rate of return*), sehingga dapat diperoleh persamaan berikut:

$$\delta r_t = \alpha r_t \delta t. \quad (3.3)$$

Dalam keadaan sebenarnya, pergerakan *short rate* r_t memiliki volatilitas yang dinyatakan sebagai gangguan (*noise*). Gangguan tersebut dinotasikan sebagai standar deviasi σ , yang menggambarkan ketidakpastian pergerakan *short rate* r_t .

Menurut [Hull, 2003] standar deviasi dari perubahan r_t dalam waktu singkat δt harus sebanding dengan *short rate*, sehingga persamaan (3.3) dengan tambahan *noise* dinyatakan sebagai:

$$\delta r_t = \alpha r_t \delta t + \sigma r_t \varepsilon \sqrt{\delta t}. \quad (3.4)$$

Dengan menggunakan sifat Wiener pertama (lihat pada subbab 2.4.1), yaitu

$$\delta W_t = \varepsilon \sqrt{\delta t}, \quad (3.5)$$

persamaan (3.4) dapat ditulis menjadi:

$$\delta r_t = \alpha r_t \delta t + \sigma r_t \delta W_t. \quad (3.6)$$

Untuk $\delta t \rightarrow 0$, maka persamaan (3.6) mempunyai bentuk

$$d r_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t, \quad (3.7)$$

dengan α merupakan ekspektasi laju return (*expected rate of return*) per unit waktu, σ *volatilitas short rate*, r_t adalah *short rate* pada saat t , dan W_t adalah proses Wiener.

Dengan demikian persamaan (3.7) adalah persamaan Model *short rate* Rendleman – Bartter.

Berikut akan dijelaskan bahwa model Rendleman – Bartter memenuhi proses Ito. Penjelasan ini dibutuhkan karena pada subbab 3.2. akan dibahas solusi eksplisit dari model Rendleman – Bartter dengan menggunakan Lemma Ito.

Sesuai dengan persamaan (3.7), model Rendleman–bartter yaitu

$$d r_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t. \quad (3.8)$$

Sementara itu, proses Ito memiliki bentuk

$$dr = m(r) dt + s(r) dW_t, \quad (3.9)$$

dimana $m(r)$ sebagai *instantaneous drift* dan $s(r)$ sebagai *instantaneous standard deviation*, dimana m dan s diasumsikan adalah fungsi yang bergantung waktu. Model Rendleman – Bartter seperti pada persamaan (3.8) dapat dinyatakan sebagai proses Ito pada persamaan (3.9) dengan *instantaneous drift* dan *instantaneous standard deviation* berturut-turut adalah αr_t dan σr_t . Dengan demikian model Rendleman – Bartter merupakan Proses Ito.

Karena telah memenuhi proses Ito, selanjutnya akan dicari solusi eksplisit dari model Rendleman – Bartter dengan menggunakan formula Ito.

3.2. Solusi eksplisit Model Rendleman – Bartter

Pada subbab 3.1 sudah ditunjukkan bahwa model Rendleman – Bartter

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t \quad (3.10)$$

memenuhi proses Ito berikut

$$dr = a(r_t, t) dt + b(r_t, t) dW_t. \quad (3.11)$$

Selanjutnya, mengacu pada subbab 2.6 tentang Lemma Ito, dengan memisalkan $G = \ln r_t$, perubahan G oleh formula Ito memenuhi:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial r} dr + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} dt. \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.11) pada persamaan (3.12) diperoleh

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial r} (adt + bdW_t) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} dt, \quad (3.13)$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} a + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \right) dt + b \frac{\partial G}{\partial r} dW_t. \quad (3.14)$$

Dengan menggunakan $G = \ln r$, maka akan diperoleh turunan-turunan dari G terhadap r dan t sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2 \ln r}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial t} = 0. \quad (3.15)$$

Substitusi $G = \ln r$ pada persamaan (3.14) diperoleh

$$d \ln r = \left(\frac{\partial \ln r}{\partial t} + a \frac{\partial \ln r}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial r^2} \right) dt + \left(b \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) dW_t. \quad (3.16)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan-persamaan (3.15) ke persamaan (3.16) dengan menggunakan (3.10), yaitu substitusikan αr pada a dan σr pada b diperoleh

$$d \ln r = \left(0 + \alpha r \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{1}{r^2}\right) dt + \left(\sigma r \frac{1}{r}\right) dW_t. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) disederhanakan menjadi

$$d \ln r = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma dW_t. \quad (3.18)$$

$\ln r$ pada persamaan (3.18) memenuhi *generalized process Wiener* yang telah dibahas pada subbab 2.4.2, dengan $\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right)$ dan σ adalah konstanta.

Selanjutnya akan dicari solusi eksplisit r_t yang ditentukan dengan cara mengintegrasikan persamaan (3.18) sehingga menjadi:

$$\int_0^t d \ln r = \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \int_0^t \sigma dW_t, \quad (3.19)$$

$$\ln r_t - \ln r_0 = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) (t - 0) + \sigma(W_t - W_0), \quad (3.20)$$

$$\ln r_t - \ln r_0 = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t + \sigma W_t. \quad (3.21)$$

Persamaan (3.21) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\ln \frac{r_t}{r_0} = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t + \sigma W_t, \quad (3.22)$$

$$\frac{r_t}{r_0} = \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t + \sigma W_t \right], \quad (3.23)$$

$$r_t = r_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t + \sigma W_t \right]. \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) ini adalah solusi eksplisit model Rendleman – Bartter.

Menurut pembahasan subbab 2.5.2 perubahan $\ln r$ pada persamaan (3.18) antara waktu nol sampai t mengikuti *generalized wiener process* sehingga persamaan (3.18) berdistribusi normal dengan

mean dan variansi berturut-turut $\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ dan $\sigma^2 t$. Dengan kata lain, perubahan logaritma natural *short rate* r_t persamaan (3.18) ini mempunyai distribusi normal dengan mean $\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ dan variansi $\sigma^2 t$ dan dapat ditulis dalam bentuk distribusi sebagai berikut

$$\ln r_t - \ln r_0 \sim N \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right], \quad (3.25)$$

atau

$$\ln r_t \sim N \left[\ln r_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right], \quad (3.26)$$

atau

$$r_t \sim \log N \left[\ln r_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right] \quad (3.27)$$

dengan r_0 adalah tingkat bunga pada saat $t = t_0$, r_t adalah tingkat bunga saat t dan $N[m,s]$ menunjukkan distribusi normal dengan mean m dan variansi s .

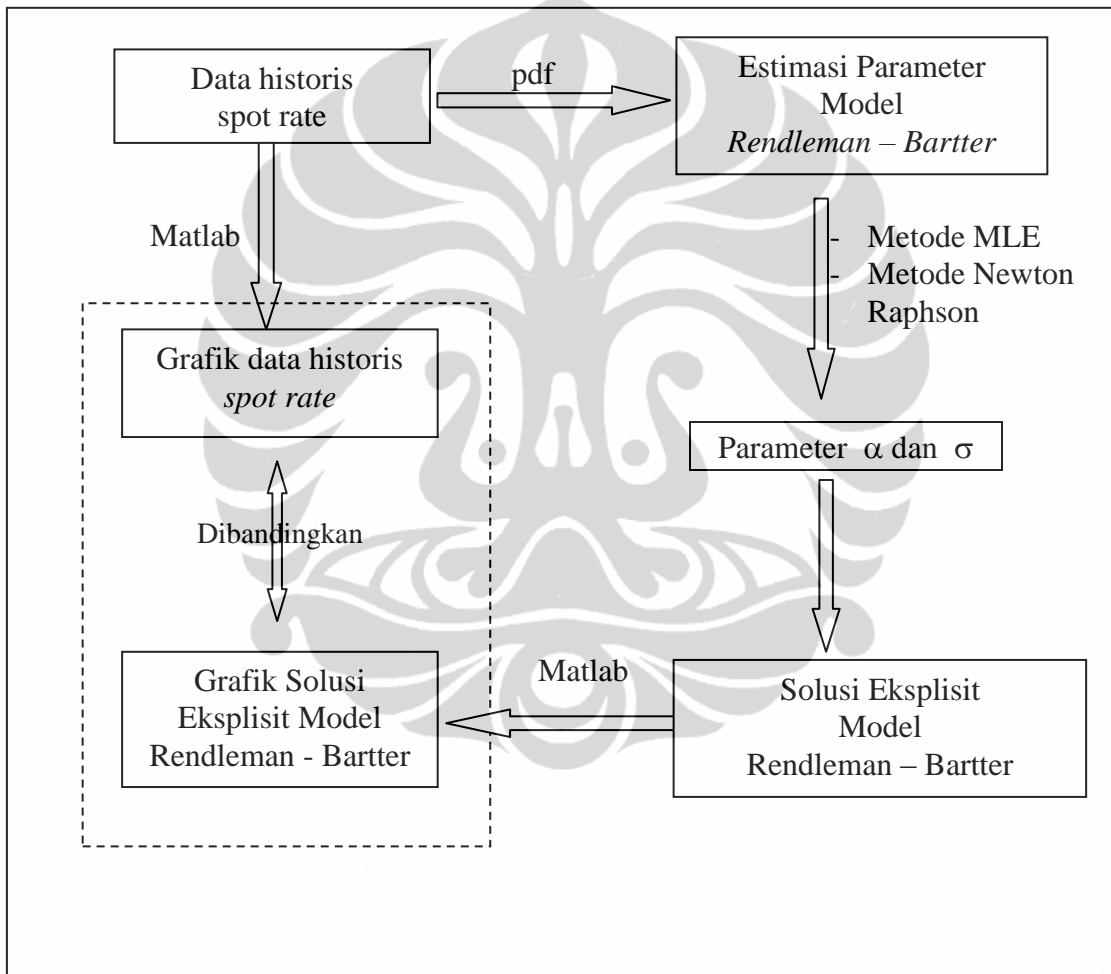
Logaritma natural r_t pada persamaan (3.26) adalah berdistribusi normal dengan mean m dan variansi s . Menurut pembahasan pada subbab 2.8 mengenai distribusi Normal dan Lognormal, maka r_t persamaan (3.27) berdistribusi lognormal dengan mean $m = \ln r_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ dan variansi $s = \sigma^2 t$.

Setelah membahas solusi eksplisit model *short rate* Rendleman – Bartter dan distribusinya, berikut ini akan dilanjutkan dengan bab 4 yang akan membahas estimasi parameter pada model Rendleman–Bartter dan implementasi model Rendleman – Bartter dalam pergerakan *short rate*.

BAB 4

IMPLEMENTASI MODEL RENDLEMAN – BARTTER

Pada bab ini akan dibahas tentang estimasi parameter model Rendleman – Bartter dan implementasi Model Rendleman – Bartter dalam mengaproksimasi short rate yang sedang berlaku di pasar. Secara garis besar proses implementasi model Rendleman – Bartter digambarkan dalam skema berikut:



Gambar 4.1. Skema Implementasi Model Rendleman - Bartter

Penjelasan skema gambar 4 secara singkat adalah sebagai berikut:

1. Data historis *spot rate* yang digunakan untuk implementasi model Rendleman – Bartter adalah data *UK Nominal spot curve and short end* tahun 2008 dari harga bond harian dan berlaku untuk masa jatuh tempo

satu bulan hingga 60 bulan. Karena data *short rate* tidak ditemukan, maka data yang digunakan adalah data *spot rate* harian terkait harga *zero-coupon bond* dari tanggal 02 Januari 2008 sampai tanggal 31 Desember 2008 Bank of England dengan masa jatuh tempo setahun. Data tersebut dapat diunduh di [20]. Data ini menggambarkan pergerakan *short rate*. Melalui data ini akan ditaksir parameter-parameter model Rendleman – Bartter.

2. Taksiran parameter model Rendleman – Bartter ditaksir dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE). Jika tidak dapat diestimasi menggunakan MLE, maka akan dilakukan taksiran parameter model Rendleman – Bartter menggunakan metode Newton Raphson.
3. Hasil estimasi parameter ini selanjutnya akan disubstitusi pada solusi eksplisit model Rendleman – Bartter.
4. Solusi eksplisit model Rendleman – Bartter yang diperoleh dengan *software* Matlab akan dibandingkan dengan data historis *spot rate*. Data yang digunakan sebagai nilai awal model Rendleman – Bartter pada simulasi adalah data *spot rate* pada waktu $t = t_0$, yaitu data *spot rate* tanggal 02 Januari 2008 dengan $r_0 = 4,72$.
5. Dari hasil perbandingan ini akan dilihat seberapa baik model Rendleman – Bartter mengaproksimasi pergerakan *short rate*.

Berdasarkan penjelasan diatas, proses implementasi dibagi kedalam dua bagian, yaitu estimasi parameter model Rendleman – Bartter dan implementasi model Rendleman – Bartter dalam pergerakan *short rate*.

Sebelum mengestimasi parameter dengan menggunakan fungsi *Maximum Likelihood estimation* (MLE) dibutuhkan *probability density function* (pdf) dari model Rendleman – Bartter. Pdf dari model Rendleman – Bartter dapat ditentukan bila mean dan variansi diketahui.

Pada subbab 2.8 telah dibahas pdf suatu distribusi lognormal dengan mean μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[\ln x - \mu]^2}{2\sigma^2}\right); -\infty < r < \infty. \quad (4.1)$$

Pada subbab 3.2 telah dibahas bahwa *short rate* r_t berdistribusi lognormal dengan mean $\ln r_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ dan variansi $\sigma^2 t$.

Oleh karena itu, mengacu pada pdf subbab 2.8 dari *short rate* r_t dalam selang $[u, t]$ dengan $u < t$ adalah

$$f(r_t) = \frac{1}{r_t\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_t - (\ln r_u + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right). \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) ini akan digunakan untuk membentuk persamaan Likelihood.

Sedangkan persamaan (4.2) memiliki mean $r_t = E(r_t) = e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ dan variansi $r_t = \text{Var}(r_t) = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$. (4.3)

Pada setiap nilai *short rate* r_t , yaitu $\{r_t, t \geq 0\}$, berkorespondensi dengan informasi $\{I_t, t \geq 0\}$, sehingga dapat dikatakan bahwa $\{r_t, t \geq 0\}$ *adapted* terhadap filtrasi $\{I_t, t \geq 0\}$. Mengenai definisi *adapted* dan filtrasi dapat dilihat pada [Neftci, 2000]. Dengan demikian setiap r_i , saling bebas dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka pdf bersama variabel random-variabel random r_1, r_2, \dots, r_n dengan $n < \infty$ dapat digunakan dalam persamaan Likelihood. Pdf bersama dari variabel random tersebut adalah :

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2, \dots, r_n) &= f(r_1) \cdot f(r_2) \dots f(r_n) \\ &= \frac{1}{r_1\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_1 - (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right) \cdot \\ &\quad \frac{1}{r_2\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_2 - (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right) \cdot \\ &\quad \dots \frac{1}{r_n\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_n - (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Persamaan (4.4) ini dapat digunakan sebagai persamaan Likelihood yang bergantung pada parameter α dan σ , dan dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \sigma) &= f(r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n) = f(r_1) \cdot f(r_2) \cdot \dots \cdot f(r_n), \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{r_i \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_i - (\ln r_{i-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Setelah pdf bersama diketahui, maka akan ditentukan estimasi parameter α dan σ pada model Rendleman – Bartter.

4.1. Estimasi Parameter Model Rendleman – Bartter

Pada subbab ini akan dijelaskan proses estimasi parameter-parameter yang dibutuhkan pada model Rendleman – Bartter, yaitu α dan σ .

Dengan menggunakan persamaan Likelihood persamaan (4.5) akan dicari parameter-parameter α dan σ dengan cara memaksimumkan fungsi Likelihood $L(\alpha, \sigma)$. Untuk mempermudah perhitungan, persamaan (4.5) dimodifikasi menjadi bentuk $\ln L(\alpha, \sigma)$. Dengan memaksimumkan $\ln L(\alpha, \sigma)$, maka akan juga memaksimumkan $L(\alpha, \sigma)$. Dengan demikian persamaan Likelihood (4.5) menjadi:

$$\begin{aligned}
\ln L(\alpha, \sigma) &= \ln F(r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n; \alpha, \sigma), \\
&= \ln \prod_{i=1}^n F(r_i; \alpha, \sigma), \\
&= \ln \left[\frac{1}{r_1 \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_1 - (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right) \right. \\
&\quad \frac{1}{r_2 \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_2 - (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right) \cdot \\
&\quad \dots \left. \frac{1}{r_n \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_n - (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right) \right]. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}
f(r_1; \alpha, \sigma) &= \frac{1}{r_1 \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_1 - (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right); \\
f(r_2; \alpha, \sigma) &= \frac{1}{r_2 \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_2 - (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right);
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f(r_n; \alpha, \sigma) = \frac{1}{r_n \sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln r_n - (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)]^2}{2\sigma^2\delta t}\right). \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.7) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \sigma) &= \ln\left(\frac{1}{r_1 \dots r_n}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}}\right)^n \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\delta t} \left[(\ln r_1 - (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\ln r_2 - (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + (\ln r_n - (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t))^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} &= \ln\left(\frac{1}{r_1 \dots r_n}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}}\right)^n + \ln \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\delta t} \left[(\ln r_1^2 - 2\ln r_1 (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t) + (\ln r_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\ln r_2^2 - 2\ln r_2 (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t) + (\ln r_1 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + (\ln r_n^2 - 2\ln r_n (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t) + (\ln r_{n-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)^2) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) dapat disederhanakan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \sigma) &= \sum_{i=1}^n \ln r_i + \frac{n}{2} \ln \frac{1}{2\pi\sigma^2\delta t} - \frac{1}{2\sigma^2\delta t} \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left[(\ln r_i^2 - 2\ln r_i (\ln r_{i-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t) + (\ln r_{i-1} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t)^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Turunan parsial persamaan (4.10) terhadap α dan σ menggunakan *software* Mapel versi 13 berturut-turut adalah

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} = -\frac{\ln r_0}{\sigma^2} + \frac{\ln r_n}{\sigma^2} - \frac{n\alpha\delta t}{\sigma^2} + \frac{1}{2}n\delta t, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} = & -\frac{n}{2\sigma} - \frac{2\alpha \ln r_0}{\sigma^3} + \frac{2\alpha \ln r_n}{\sigma^3} - \frac{n\alpha^2 \delta t}{\sigma^3} + \frac{1}{4}n \delta t + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2 \ln r_i \ln r_{i-1}}{\sigma^3 \delta t} - \frac{(\ln r_{i-1})^2}{\sigma^3 \delta t} - \right. \\ & \left. \frac{(\ln r_i)^2}{\sigma^3 \delta t} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.11) dan (4.12) masing-masing masih mengandung α dan σ , sehingga $\frac{\partial \ln L(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} = 0$ masih bergantung pada α dan σ . Akibatnya parameter model Rendleman – Bartter, yaitu α dan σ , tidak dapat ditentukan.

Karena dengan metode MLE tidak dapat ditentukan parameternya, maka estimasi dilakukan dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Pada metode Newton-Raphson digunakan taksiran awal yang beragam agar memperoleh hasil estimasi parameter yang maksimal. Pada tesis ini metode Newton-Raphson dilakukan dengan *software* Matlab dan Maple. Program dari metode Newton-Raphson terdapat pada lampiran 2. Dari estimasi parameter metode Newton-Raphson ini diperoleh taksiran parameter model Rendleman – Bartter yang dinyatakan dengan notasi $a_{(k+1)} = \bar{\alpha}$ dan $v_{(k+1)} = \bar{\sigma}$, dimana $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\sigma}$ berturut-turut adalah taksiran dari α dan σ .

Berikut adalah langkah-langkah metode Newton-Raphson:

- 1 Tentukan nilai awal untuk $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\sigma}$ yaitu a_0 dan v_0 .
- 2 Hitung nilai a dan v secara iteratif, dengan rumus

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \Bigg|_{\begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

3. Langkah ke dua diulangi hingga $\left| \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix} \right| \leq TOL$ memenuhi toleransi TOL yang dikehendaki.
4. Setelah melewati langkah tiga, pilih $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}$ pada iterasi yang terakhir sebagai taksiran dari parameter $\bar{\alpha} = a_{k+1}$ dan $\bar{\sigma} = v_{k+1}$.

Setelah dijelaskan langkah-langkah metode Newton-Raphson, berikut pembahasan lebih dalam mengenai langkah-langkah diatas.

Matriks $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}$ yang terdapat pada langkah ke dua adalah

matriks Hessian H . Matriks H dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$H(a_{k+1}, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

dengan $h_{i,j}$ menyatakan elemen matrik H pada baris ke- i dan kolom ke- j , untuk $i= 1,2$ dan $j = 1,2$.

Untuk proses iterasi Newton-Raphson yang diperlukan adalah matriks invers dari H yaitu H^{-1} . Untuk matriks H berukuran 2×2 , matriks H^{-1} adalah

$$H^{-1} = \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}} \begin{pmatrix} h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Dalam hal ini, nilai $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \neq 0$, atau matriks H bukan matriks singular.

Kemudian pada langkah ke dua terdapat pula matriks $\begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \end{pmatrix}$.

Matriks ini dikenal dengan nama matriks *scoring* S , dengan penjabaran sebagai berikut:

$$S(a_{k+1}, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

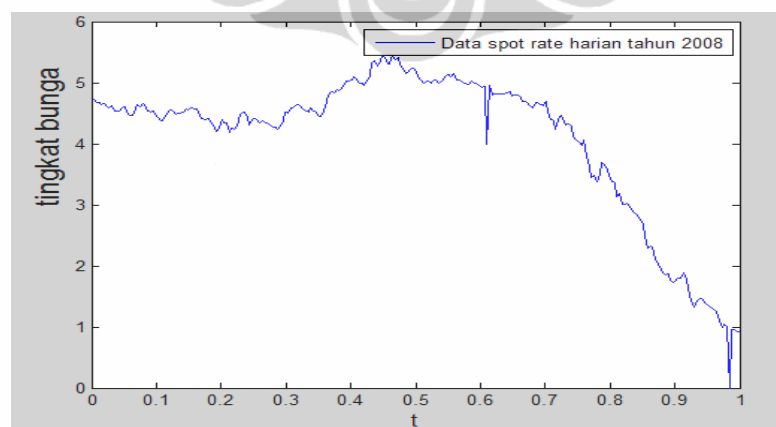
Elemen S_1 dan S_2 pada matriks *scoring* telah dibahas dalam subbab 2.10. Elemen-elemen matriks Hessian selengkapnya terdapat pada lampiran 1.

Langkah ke dua pada metode Newton-Raphson persamaan (4.13) dengan menggunakan persamaan-persamaan (4.15) dan (4.16) dapat disederhanakan menjadi

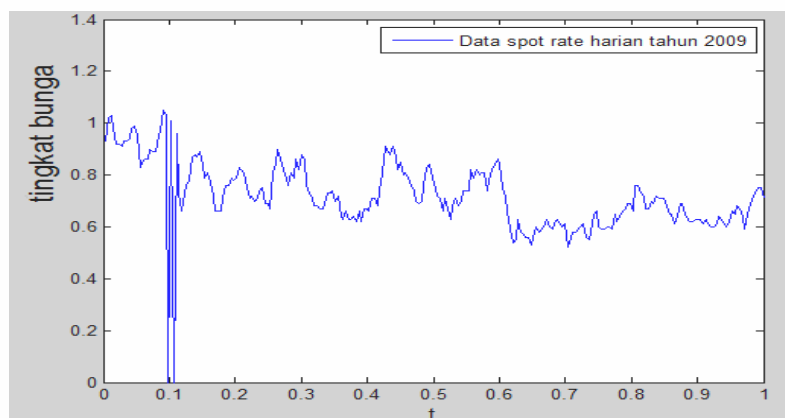
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix} - H^{-1}(a_k, v_k) \cdot S(a_k, v_k), \\ &= \begin{pmatrix} a_k \\ v_k \end{pmatrix} - \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}} \begin{pmatrix} h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pada langkah ketiga, proses iterasi di langkah kedua akan berhenti bila $\max(|a_{k+1} - a_k|, |v_{k+1} - v_k|) < \text{TOL}$, dengan variabel TOL menyatakan besarnya toleransi yang dikehendaki. Setelah kondisi terpenuhi, diperoleh $a(k+1) = \bar{a}$ dan $v(k+1) = \bar{v}$ sebagai taksiran parameter model Rendleman – Bartter .

Berikut ini akan dibahas estimasi parameter dengan metode Newton-Raphson menggunakan data *spot rate harian* tahun 2008 dan 2009 yang dapat diunduh pada [20]. Hubungan antara *spot rate* dan *short rate* telah dibahas pada subbab 2.1 mengenai tingkat bunga. Grafik data *spot rate* tersebut seperti tampak pada gambar 4.2. a) dan 4.2. b) berikut ini.



Gambar 4.2. a) Grafik data *spot rate* harian tahun 2008 dari Bank of England



Gambar 4.2. b) Grafik data *spot rate* harian tahun 2009 dari Bank of England

Dari kedua gambar tersebut hanya dipilih data tahun 2008 saja yang akan dianalisa dengan menggunakan model Rendleman – Bartter . Hal ini dikarenakan data *spot rate* tahun 2009 memiliki lompatan (*jump*) yang sangat dalam, sehingga dikhawatirkan hasil aproksimasi model menjadi tidak baik, meskipun data *spot rate* tahun 2008 juga terdapat lompatan (*jump*), namun tidak terlalu dalam.

Selanjutnya, diakhir pembahasan bab 4, grafik data tahun 2008 ini akan dibandingkan dengan solusi eksplisit model Rendleman – Bartter.

Dalam mengestimasi parameter model Rendleman – Bartter dari data yang tersedia, dilakukan pemilihan nilai awal untuk estimasi parameter. Pemilihan nilai awal yang digunakan ada dua macam seperti yang ada pada tabel 4.1. a) dengan mengambil a_0 yang tetap, tetapi v_0 berubah-ubah, sedangkan tabel 4.1. b) dengan mengambil v_0 yang tetap tetapi a_0 yang berubah-ubah.

Masing-masing nilai awal akan digunakan dalam metode Newton-Raphson sebanyak 100 iterasi atau hingga memenuhi batas toleransi yang ditetapkan. Dalam tesis ini toleransi error yang digunakan adalah sebesar $TOL = 10^{-6}$.

Tabel 4.1.a) Pemilihan Nilai Awal dan Hasil Estimasi Newton Raphson dengan menggunakan data *spot rate* harian tahun 2008 dengan nilai awal a_0 tetap tetapi nilai awal v_0 berubah-ubah

No.	Nilai Awal Parameter		Hasil Estimasi Parameter	
	a_0	v_0	$a_{(k+1)}$	$v_{(k+1)}$
1.	0,1	0,2	0,012943	0,160888
2.	0,1	0,5	0,027230	0,233743
3.	0,1	0,8	0,030723	0,247870
4.	0,1	1	0,031374	0,250482
5.	0,5	0,4	0,023950	0,218853
6.	0,5	0,6	0,028723	0,239667
7.	0,5	0,8	0,030573	0,247265
8.	0,5	1	0,031330	0,250309
9.	0,5	2	0,015003	0,173218
10.	1,0	0,4	0,020437	0,202164
11.	1,0	0,6	0,026613	0,230696
12.	1,0	0,8	0,029430	0,242600
13.	1,0	1,0	0,030723	0,247872
14.	1,0	2	0,030993	0,248959
15.	1.5	0,8	0,009509	0,137900

Berikut ini data hasil estimasi parameter dengan nilai awal untuk v_0 tetap tetapi nilai a_0 yang berubah-ubah, dengan hasil terdapat pada tabel 4.1. b).

Tabel 4.1.b) Pemilihan Nilai Awal dan Hasil Estimasi Newton Raphson dengan menggunakan data *spot rate* harian tahun 2008 dengan dengan nilai awal v_0 tetap tetapi nilai awal a_0 berubah-ubah

No.	Nilai Awal		Hasil diperoleh	
	a_0	v_0	$a_{(k+1)}$	$v_{(k+1)}$
1.	0,2	0,1	0,004354	0,093312
2.	0,4	0,1	0,004167	0,091286
3.	0,7	0,1	0,003627	0,085173
4.	1	0,1	0,002670	0,073069
6.	0,4	0,8	0,030706	0,247803
7.	0,6	0,8	0,030471	0,246853
8.	0,8	0,8	0,030133	0,245480
9.	1	0,8	0,029430	0,242600
11.	0,4	1,0	0,031362	0,250437
12.	0,6	1,0	0,031281	0,250113
13.	0,8	1,0	0,031107	0,249414
14.	1,2	1,0	0,029713	0,243764
15.	1,5	1,0	0,018591	0,192820

Dari hasil estimasi diatas, masing-masing $\bar{\alpha} = a(k + 1)$ dan $\bar{\sigma} = v(k + 1)$ disubstitusi pada solusi eksplisit model Rendleman – Bartter. Kemudian nilai-nilai solusi eksplisit model ini disimulasikan menggunakan Matlab dan masing-masing simulasi dibandingkan dengan data real. Dari masing-masing simulasi ditentukan error absolut maksimum yang ditimbulkan, kemudian dari error absolut maksimum yang ditimbulkan dipilih nilai error absolut maksimum yang minimum. Parameter yang memberikan nilai error absolut maksimum yang minimum dipilih sebagai hasil estimasi parameter.

Dari tabel 4.1.a) dan 4.1.b) dipilih 5 nilai parameter yang memberikan nilai error absolut maksimum yang minimum. Nilai-nilai parameter yang dipilih terdapat pada tabel 4.2.a) dan 4.2.b). Error-error

absolut dari solusi eksplisit model Rendleman – Bartter dengan data real di setiap titik t diperoleh seperti tampak pada tabel berikut

Tabel 4.2. a) Tabel Error Maksimum Absolut yang dihasilkan antara model Rendleman – Bartter dengan data Real di setiap titik untuk a_0 yang tetap

No.	Estimasi Parameter		Error Maksimum Absolut	
	$a_{(k+1)}$	$v_{(k+1)}$	Tanpa Jump	Ada Jump
1.	0,031374	0,250482	2,940983	3,796942
2.	0,031330	0,250309	3,620579	4,451043
3.	0,030723	0,247872	3,622293	4,453586
4.	0,030993	0,248959	3,621528	4,452452
5.	0,030573	0,247265	3,622721	4,454221
Rata-rata error maksimum			3,6215162	4,4524334

Pada tabel 4.2. a) dan 4.2. b) error maksimum absolut tanpa *jump* (lompatan), artinya tidak menyertakan data real *spot rate* tahun 2008 yang memiliki rentang nilai yang sangat besar. Dari tabel tampak bahwa nilai error absolut maksimum tanpa *jump* sangat berbeda dengan nilai error absolut yang ada *jump*.

Tabel 4.2. b) Tabel Error Maksimum Absolut yang dihasilkan antara model Rendleman – Bartter dengan data Real di setiap titik untuk v_0 yang tetap

No.	Estimasi Parameter		Abs. Error Maksimum	
	$a_{(k+1)}$	$a_{(k+1)}$	Tanpa Jump	Ada Jump
1.	0,030706	0,247803	3,600497	4,453659
2.	0,030471	0,246853	3,623010	4,454650
3.	0,030133	0,245480	3,623975	4,456084
4.	0,031362	0,240437	3,638655	4,472058
5.	0,031107	0,249414	3,621211	4,451979
Rata-rata error maksimum			3,6214696	4,457686

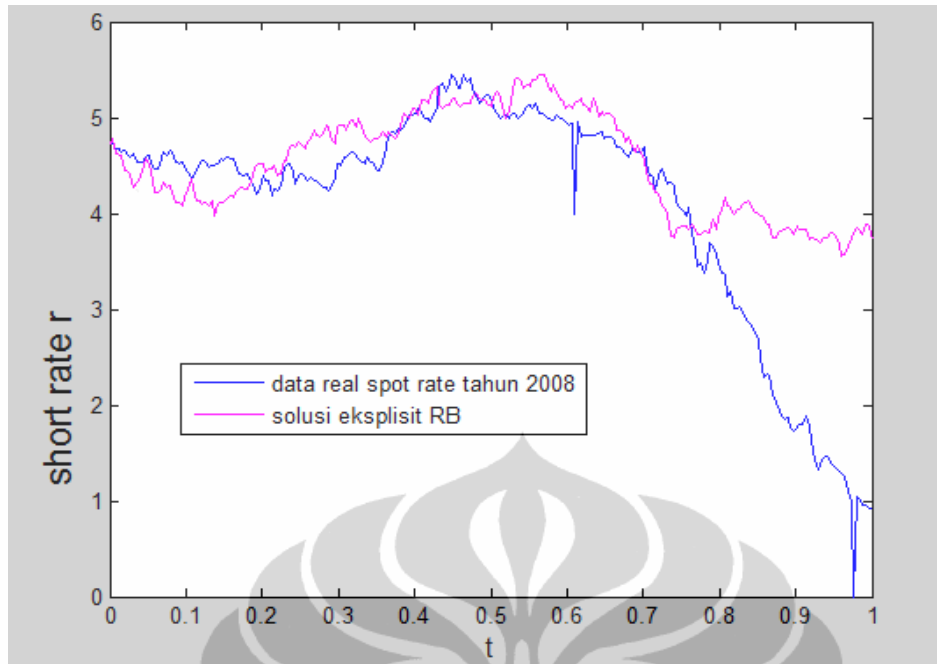
Dari tabel 4.2.a) tampak bahwa hasil estimasi parameter yang memberikan nilai error absolut maksimum terkecil adalah nilai $a(k+1) = 0,031374$ dan $v(k+1) = 0,250482$, dan dari tabel 4.2.b) tampak bahwa hasil estimasi parameter yang memberikan nilai error absolut maksimum terkecil adalah nilai $a(k+1) = 0.030706$ dan $v(k+1) = 0.247803$. Sehingga nilai-nilai estimasi parameter yang memberikan error paling kecil inilah yang akan digunakan untuk membentuk grafik solusi eksplisit pada model Rendleman – Bartter.

4.2. Implementasi Solusi Eksplisit Model *Rendleman – Bartter* untuk mengaproksimasi *Short rate* Harian

Pada subbab ini akan dibahas implementasi model Rendleman – Bartter untuk mengaproksimasi *short rate* harian. Adapun langkah-langkah implementasi model sebagai berikut:

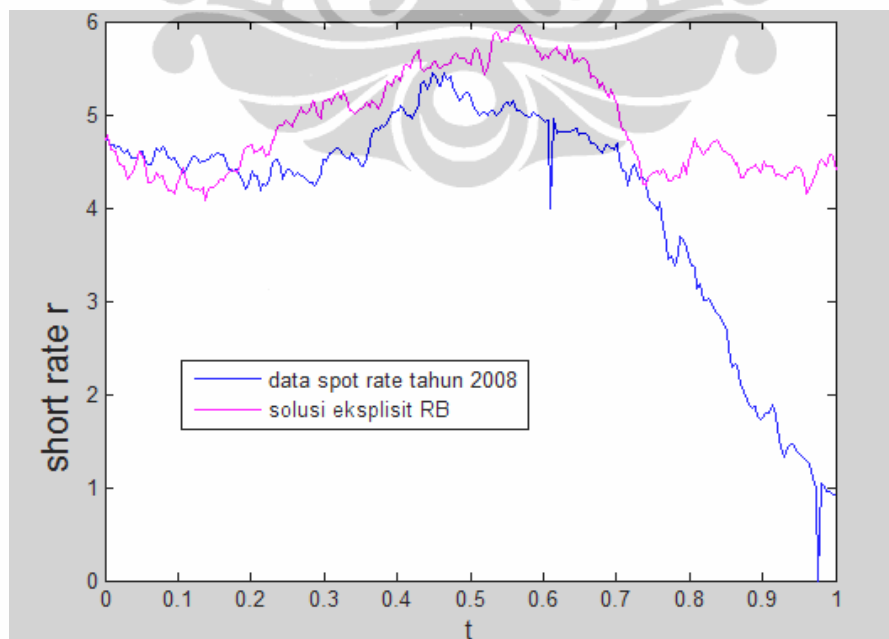
Hasil estimasi parameter yang diperoleh pada tabel 4.1.a) $a(k+1) = \bar{\alpha} = 0,031374$, dan $v(k+1) = \bar{\sigma} = 0,250482$ digunakan pada solusi eksplisit Rendleman – Bartter dapat dilihat pada gambar 4.3. a), yaitu grafik data real dibandingkan dengan grafik solusi eksplisit Rendleman – Bartter. Nilai awal lintasan menggunakan data di awal tahun, $t = t_0$, tanggal 02 Januari 2008, dengan nilai $t_0 = 4,72$.

Dengan cara yang sama pada tabel 4.1.a), hasil estimasi pada tabel 4.1.b) dengan $a(k+1) = \bar{\alpha} = 0,030706$, dan $v(k+1) = \bar{\sigma} = 0,247803$ digunakan untuk solusi eksplisit Rendleman-Bartter dapat dilihat pada gambar 4.3. b), yaitu grafik data real dibandingkan dengan grafik solusi eksplisit Rendleman – Bartter, dengan nilai awal $t_0 = 4,72$.



Gambar 4.3.a) Grafik Solusi Eksplisit Model Rendleman – Bartter dan Data Real, dengan $\alpha = 0,031374$, dan $\sigma = 0,250482$

Dari gambar 4.3.a) dan gambar 4.3.b) terlihat bahwa gambar 4.3.a) menunjukkan pendekatan solusi eksplisit model Rendleman – Bartter terhadap data real lebih baik daripada gambar 4.2.b).



Gambar 4.3.b) Grafik Solusi Eksplisit Model Rendleman – Bartter dan Data Real, dengan $\alpha = 0,0303706$, dan $\sigma = 0,247803$

Dari gambar 4.3.a) diperoleh error absolut dan error relatif di setiap t yang tercantum pada tabel 4.3 berikut :

Tabel 4.3. Error Absolut dan Error Relatif antara Solusi Eksplisit Model Rendleman – Bartter dan Data Real pada setiap titik t

$t(i)$	Nilai $x(i)$	Nilai RB(i)	Error Rell	Error Abs
1	4.720000	4.836313	0.024643	0.116313
2	4.670000	4.549035	0.025903	0.120965
3	4.670000	4.517117	0.032737	0.152883
4	4.640000	4.523340	0.025142	0.116660
5	4.650000	4.278052	0.079989	0.371948
6	4.600000	4.233535	0.079666	0.366465
7	4.590000	4.222013	0.080171	0.367987
8	4.620000	3.997486	0.134743	0.622514
⋮				
246	1.090000	3.519258	2.228677	2.429258
247	0.990000	3.628150	2.664798	2.638150
248	0.000000	3.761593	Inf	3.761593
249	1.040000	3.849535	2.701475	2.809535
250	1.010000	3.804126	2.766461	2.794126
251	0.950000	3.746775	2.943974	2.796775
252	0.960000	3.913868	3.076946	2.953868
253	0.920000	3.884548	3.222335	2.964548
254	0.910000	3.665102	3.027585	2.755102

Yang dimaksud error relatif dan error absolut, menurut Burden [2001] “Jika p^* adalah nilai aproksimasi p , maka error relatif adalah $\frac{|p-p^*|}{p}$ dan error absolut adalah $|p - p^*|$ ”.

Nilai error absolut yang diperoleh antara data real dengan nilai solusi eksplisit model Rendleman – bartter paling besar sepanjang waktu $0 < t < T$ adalah 2,964548, bila tidak disertakan *jump* dan bila disertakan *jump* nilai error absolut maksimum adalah 3,761593.

Hasil implementasi Model Rendleman – Bartter pada data *spot rate* tahun 2008 menunjukkan bahwa dengan pemilihan parameter yang tepat, pergerakan *short rate* model Rendleman – Bartter cukup baik mengaproksimasi data real untuk jangka waktu dibawah satu tahun. Pada tesis ini model Rendleman – Bartter cukup baik mengaproksimasi

sampai saat $t = 0,76$ atau sampai hari ke-194, bila dibandingkan pada titik $t = T$ dengan nilai error absolut adalah 2,940983. Pada tabel 4.4 terlihat bahwa error absolut yang lebih kecil dari 0,1 terdapat sebanyak 36 hari.

Tabel 4.4 Error absolut yang lebih kecil dari 0,1

No.	Hari ke	Abs. Error < 0,1	No.	Hari ke	Abs. Error < 0,1
1	1	0,064813	19	101	0,073777
2	2	0,052266	20	102	0,033749
3	3	0,072530	21	103	0,064957
4	4	0,040509	22	122	0,011840
5	12	0,016585	23	123	0,055411
6	13	0,082739	24	124	0,027437
7	14	0,068927	25	125	0,030005
8	27	0,024355	26	132	0,030034
9	47	0,017132	27	133	0,074134
10	58	0,072164	28	174	0,021662
11	59	0,045035	29	175	0,009578
12	93	0,065639	30	176	0,078511
13	94	0,032996	31	177	0,005159
14	95	0,066940	32	179	0,072051
15	96	0,048780	33	180	0,083928
16	97	0,040911	34	181	0,086420
17	99	0,023095	35	182	0,024423
18	100	0,032542	36	194	0,097268

Setelah implementasi model Rendleman – Bartter maka selesai pembahasan bab 4.

BAB 5 PENUTUP

Pada bab 5 ini disampaikan kesimpulan hasil pembahasan pada bab 3 dan bab 4, yaitu:

- 1). Model tingkat bunga Rendleman – Bartter memiliki solusi eksplisit yang dapat diperoleh dengan menggunakan Lemma Ito dan tingkat bunga r_t memiliki distribusi lognormal dengan parameter α dan σ .
- 2). Dengan pemilihan parameter yang tepat model Rendleman – Bartter cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat bunga untuk jangka waktu yang tidak terlalu panjang. Apabila jangka waktu terlalu panjang, maka nilai error absolut antara solusi eksplisit model Rendleman – Bartter dengan data real akan semakin besar khususnya di batas akhir interval. Hasil estimasi parameter α berkisar antara 0,0307 – 0,0310 dan σ berkisar antara 0,24 – 0,25 terhadap data historis *spot rate* tahun 2008 Bank of England cukup baik digunakan pada solusi eksplisit model Rendleman – Bartter.

DAFTAR REFERENSI

- [1] Baxter, Martin dan Andrew Rennie. (2002). *Financial Calculus*. Cambridge University Press.
- [2] Bodie, Zvi; Alex Kane and Alan J. Marcus. (2007). *Investments*, 7th ed. Singapore : McGraw Hill.
- [3] Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. (2001). *Numerical Analysis, seventh editions*. USA: Brooks / Cole.
- [4] McDonald, Robert L. (2006). *Derivative Market, second edition*. USA: Pearson Education, inc.
- [5] Higham, Desmond J. (2001). *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations* . Jurnal Siam Review vol. 43 No. 3.
- [6] Hull, John dan Allan White. (1994). *Numerical procedures for Implementing Term Structure models I: One Factor Models*.
- [7] Hull, John C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivative*. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall.
- [8] Klebaner, Fima C. (1998). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. London: Imperial college Press
- [9] Kloeden, Peter E., dan Eckhard Platen. (1999). *Application of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. New York: Springer.
- [10] Luenberger, David G. (2006). *Investment Science*. New York: Oxford University Press.
- [11] Mikosch, Thomas. (2000). *Elementary Stochastic Calculus, with finance in View*. Vol 6. Singapore: World Scientific..
- [12] Matsuda, Kazuhisa. (2004). *Introduction to Black Scholes Model*. New York.
- [13] Neftci, Salih N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Seconde edition*. London: Academic Press.
- [14] Popoulis, Athanasios. (1999). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. Third edition*. New York: McGraw – Hill.

- [15] Ross, Sheldon M. (1996). *Stochastic Processes, seconde editions*. USA: John Willey & Sons, inc.
- [16] Sen, Saurav. (2000). *Interest Rate Modelling. Advanced Fiance Lecture Series*.
- [17] Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous – Time Models*. New York: Springer.
- [18] Syahrul; Muhammad Afdi Mizar, dan Arditos. (2000). *Kamus lengkap Ekonomi*. Jakarta: Citra Harta Prima.
- [19] Yolcu, Yeliz. (2005). *One Factor Interest Rate Models: Anallytic Solutions and Approximations*.
- [20]. Historical data *yield curve* Bank of England
<http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>

Lampiran 1

Hasil penurunan parsial fungsi Likelihood terhadap α dan σ

➤ $L(\alpha, \sigma) =$

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} \ln(2\pi dt) - n \ln \sigma - \frac{1}{2} \sigma^{-2} dt^{-1} \sum_{i=1}^n (r_i)^2 + \\ & \sigma^{-2} dt^{-1} \sum_{i=1}^n r_i \ln(r_{i-1}) + \sigma^{-2} \alpha \sum_{i=1}^n r_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i - \\ & \frac{1}{2} \sigma^{-2} dt^{-1} \sum_{i=1}^n (\ln r_i)^2 - \sigma^{-2} \alpha \sum_{i=1}^n \ln r_{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln r_{i-1} - \\ & - \frac{1}{2} n dt \alpha^2 \sigma^{-2} + \frac{1}{2} n dt \alpha - \frac{1}{8} n dt \sigma^2. \end{aligned}$$

> $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln(r_i) - \ln(r_{i-1}) - \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot (\delta t) \right)^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot \delta t} \right]$

$$S1 = \left[- \frac{\ln(r_0)}{\sigma^2} + \frac{\ln(r_n)}{\sigma^2} - \frac{n \delta t \alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} n \delta t \right]$$

> $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{n}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \delta t} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln(r_i) - \ln(r_{i-1}) - \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot (\delta t) \right)^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot \delta t} \right]$

$$\begin{aligned} S2 = & \left[- \frac{1}{2} \frac{n}{\sigma} - \frac{2 \ln(r_0) \alpha}{\sigma^3} + \frac{2 \ln(r_n) \alpha}{\sigma^3} - \frac{n \delta t \alpha^2}{\sigma^3} + \frac{1}{4} n \sigma \delta t \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2 \ln(r_i) \ln(r_{i-1})}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_{i-1})^2}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_i)^2}{\sigma^3 \delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

$$> \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{\ln(r_0)}{\sigma^2} + \frac{\ln(r_n)}{\sigma^2} - \frac{n \delta t \alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} n \delta t \right]$$

$$h_{11} = \left[-\frac{n \delta t}{\sigma^2} \right]$$

$$> \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{\ln(r_0)}{\sigma^2} + \frac{\ln(r_n)}{\sigma^2} - \frac{n \delta t \alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} n \delta t \right]$$

$$h_{12} = \left[\frac{2 \ln(r_0)}{\sigma^3} - \frac{2 \ln(r_n)}{\sigma^3} + \frac{2 n \delta t \alpha}{\sigma^3} \right]$$

$$> \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{1}{2} \frac{n}{\sigma} + \frac{2 \ln(r_0) \alpha}{\sigma^3} - \frac{2 \ln(r_n) \alpha}{\sigma^3} + \frac{n \delta t \alpha^2}{\sigma^3} - \frac{1}{4} n \sigma \delta t - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2 \ln(r_i) \ln(r_{i-1})}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_{i-1})^2}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_i)^2}{\sigma^3 \delta t} \right) \right) \right]$$

$$h_{21} = \left[\frac{2 \ln(r_0)}{\sigma^3} - \frac{2 \ln(r_n)}{\sigma^3} + \frac{2 n \delta t \alpha}{\sigma^3} \right]$$

$$> \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{1}{2} \frac{n}{\sigma} + \frac{2 \ln(r_0) \alpha}{\sigma^3} - \frac{2 \ln(r_n) \alpha}{\sigma^3} + \frac{n \delta t \alpha^2}{\sigma^3} - \frac{1}{4} n \sigma \delta t - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{2 \ln(r_i) \ln(r_{i-1})}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_{i-1})^2}{\sigma^3 \delta t} - \frac{\ln(r_i)^2}{\sigma^3 \delta t} \right) \right) \right]$$

$$h_{22} = \left[\frac{1}{2} \frac{n}{\sigma^2} - \frac{6 \ln(r_0) \alpha}{\sigma^4} + \frac{6 \ln(r_n) \alpha}{\sigma^4} - \frac{3 n \delta t \alpha^2}{\sigma^4} - \frac{1}{4} n \delta t - \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{6 \ln(r_i) \ln(r_{i-1})}{\sigma^4 \delta t} + \frac{3 \ln(r_{i-1})^2}{\sigma^4 \delta t} + \frac{3 \ln(r_i)^2}{\sigma^4 \delta t} \right) \right) \right]$$

Lampiran 2

Source code dengan menggunakan Matlab

Data 2008 (m.file)

```
function[r]=data28()
r=[4.72  4.67  4.67  4.64  4.65  4.60  4.59  4.62  4.53  4.54 ...
  4.54  4.59  4.60  4.52  4.47  4.46  4.57  4.64  4.60  4.65 ...
  4.64  4.54  4.52  4.53  4.48  4.43  4.38  4.38  4.45  4.51 ...
  4.55  4.54  4.49  4.50  4.50  4.51  4.57  4.56  4.58  4.57 ...
  4.57  4.51  4.42  4.40  4.40  4.42  4.35  4.26  4.21  4.26 ...
  4.40  4.34  4.35  4.18  4.25  4.23  4.29  4.48  4.50  4.52 ...
  4.44  4.31  4.40  4.41  4.38  4.35  4.38  4.35  4.34  4.31 ...
  4.28  4.28  4.24  4.29  4.38  4.51  4.50  4.59  4.59  4.62 ...
  4.64  4.61  4.57  4.53  4.52  4.58  4.53  4.52  4.45  4.45 ...
  4.54  4.69  4.79  4.85  4.84  4.88  4.86  4.90  4.98  5.02 ...
  5.02  5.04  5.09  5.07  4.99  4.99  4.95  5.03  5.11  5.33 ...
  5.36  5.27  5.34  5.44  5.42  5.30  5.30  5.44  5.37  5.41 ...
  5.29  5.24  5.15  5.16  5.22  5.23  5.19  5.11  5.05  5.00 ...
  5.01  5.03  5.00  5.02  5.04  5.00  5.03  5.05  5.12  5.13 ...
  5.09  5.15  5.04  5.04  5.02  5.00  4.97  4.98  5.02  4.99 ...
  4.97  4.95  4.92  4.93  4.00  4.95  4.80  4.82  4.81  4.81 ...
  4.81  4.81  4.84  4.85  4.78  4.79  4.79  4.77  4.70  4.70 ...
  4.66  4.63  4.59  4.67  4.65  4.64  4.63  4.69  4.51  4.39 ...
  4.38  4.24  4.40  4.46  4.36  4.30  4.32  4.29  4.12  4.06 ...
  4.02  3.98  4.06  3.79  3.62  3.44  3.48  3.38  3.50  3.69 ...
  3.65  3.58  3.49  3.38  3.36  3.13  3.18  3.01  3.01  3.03 ...
  2.98  2.90  2.86  2.84  2.77  2.68  2.49  2.29  2.32  2.31 ...
  2.11  2.02  1.94  1.89  1.85  1.87  1.76  1.73  1.76  1.80 ...
  1.80  1.88  1.78  1.62  1.43  1.32  1.37  1.44  1.46  1.42 ...
  1.38  1.35  1.31  1.29  1.25  0.00  1.09  0.99  1.04  1.01 ...
  0.95  0.96  0.92  0.91];
```

Program Newton -Raphson

```
clc;clear;
r=data28()
%a=alfa;
%v=sigma;
N=size(r);
n=100;
T=1;
i=1:N; %untuk r(i) -->data
%k=1:n; % untuk a(k) dan v(k)
TOL=10^(-6);
a(1)=0.1;
v(1)=1;
kali=0;
for i=1:N
    kali=kali+log(r(i))*log(r(i));
end
```

```

for k = 1:n
    h11=-n*(T^3)/v(k)^2
    h12=(-2)*v(k)*(sum(log(r(i))))+2*n*a(k)*(T^3)/(v(k)^3)
    h21=(-2)*v(k)*(sum(log(r(i))))+2*n*a(k)*(T^3)/v(k)^3
    %h22=n/v(k)^2-3*(sum((log(r(i)))*(log(r(i)))))/(v(k)^4*T)-
    2*a(k)*(sum(log(r(i))))...
    % -3*n*a(k)^2*(T^3)/v(k)^4-(1/4)*n*(T^3)
    h22=n/v(k)^2-3*kali/(v(k)^4*T)-2*a(k)*(sum(log(r(i))))...
    -3*n*a(k)^2*(T^3)/v(k)^4-(1/4)*n*(T^3)
    s1=-(v(k)^2)*(sum(log(r(i))))-n*a(k)*(T^3)/v(k)^2+1/2*n*(T^3)
    s2=-n/v(k)+(sum(log(r(i)))^2)/(v(k)^3*T)-
    (2*a(k))*v(k)*(sum(log(r(i))))...
    -n*(a(k)^2)*(T^3)/(v(k)^3)-1/4*n*(T^3)*v(k)

    H=[h11 h12 ; h21 h22]
    S=[s1;s2]
    %H*S
    kurang=[a(k) ;v(k)]-inv(H)*S;
    a(k+1)=kurang(1);
    v(k+1)=kurang(2);

    sela=abs(a(k+1)-a(k))
    selv=abs(v(k+1)-v(k))

    if sela<TOL || selv<TOL
        break
    end

end
fprintf('\n-----');
fprintf('\nke-i | a(k+1)\t | v(k+1)');
fprintf('\n-----');
for k=0:n
    fprintf('\n%4d | %8f | %8f ', (k+1), a(k+1), v(k+1));
end
fprintf('\n-----');

%abs ([a(k+1) ; v(k+1)]-[a(k) ; v(k)])<TOL;

```

Solusi Eksplisit Model Rendleman – Bartter dengan Data Real

```

clear;
clc;

r=data28()

T=1; N=size(x,1); dt=1/N;
plot([dt:dt:T],x,'b-'); hold on

randn('state',100)

alfar=0.060154; sigmar=0.206685; Xzero=4.72;           %problem
parameters
T=1; N=254; dt=T/N;
dW=sqrt(dt)*randn(1,N);           %Brownian increments
W=cumsum(dW);           %discretized Brownian path

Xtrue = Xzero*exp((alfar-0.5*sigmar^2)*([dt:dt:T])+sigmar*W);
%Solusi eksak RB
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'m-'), hold on
%plot solusi eksak RB

xlabel('t','fontsize',12)
ylabel('X','fontsize',16,'Rotation',0,
'HorizontalAlignment','right')

fprintf('-----\n');
fprintf('t(i) | Nilai x(i) | Nilai RB(i) | Error Abs | \n');
fprintf('-----\n');
errorabs=abs(x'-Xtrue);

for i=1:N
    fprintf('\n%4d | %6f | %10f | %10f | %10f ',
        i, x(i), Xtrue(i), errorabs(i) );
end

```

LAMPIRAN 3
DATA SPOT RATE HARIAN BANK of ENGLAND TAHUN 2008

TANGGAL	SPOT RATE	TANGGAL	SPOT RATE	TANGGAL	SPOT RATE
02 Jan 08	4,72	29 Feb 08	4,42	01 Mei 08	4,52
03 Jan 08	4,67	03 Mar 08	4,40	02 Mei 08	4,58
04 Jan 08	4,67	04 Mar 08	4,40	06 Mei 08	4,53
07 Jan 08	4,64	05 Mar 08	4,42	07 Mei 08	4,52
08 Jan 08	4,65	06 Mar 08	4,35	08 Mei 08	4,45
09 Jan 08	4,60	07 Mar 08	4,26	09 Mei 08	4,45
10 Jan 08	4,59	10 Mar 08	4,21	12 Mei 08	4,54
11 Jan 08	4,62	11 Mar 08	4,26	13 Mei 08	4,69
14 Jan 08	4,53	12 Mar 08	4,40	14 Mei 08	4,79
15 Jan 08	4,54	13 Mar 08	4,34	15 Mei 08	4,85
16 Jan 08	4,54	14 Mar 08	4,35	16 Mei 08	4,84
17 Jan 08	4,59	17 Mar 08	4,18	19 Mei 08	4,88
18 Jan 08	4,60	18 Mar 08	4,25	20 Mei 08	4,86
21 Jan 08	4,52	19 Mar 08	4,23	21 Mei 08	4,90
22 Jan 08	4,47	20 Mar 08	4,29	22 Mei 08	4,98
23 Jan 08	4,46	25 Mar 08	4,48	23 Mei 08	5,02
24 Jan 08	4,57	26 Mar 08	4,50	27 Mei 08	5,02
25 Jan 08	4,64	27 Mar 08	4,52	28 Mei 08	5,04
28 Jan 08	4,60	28 Mar 08	4,44	29 Mei 08	5,09
29 Jan 08	4,65	31 Mar 08	4,31	30 Mei 08	5,07
30 Jan 08	4,64	01 Apr 08	4,40	02 Jun 08	4,99
31 Jan 08	4,54	02 Apr 08	4,41	03 Jun 08	4,99
01 Feb 08	4,52	03 Apr 08	4,38	04 Jun 08	4,95
04 Feb 08	4,53	04 Apr 08	4,35	05 Jun 08	5,03
05 Feb 08	4,48	07 Apr 08	4,38	06 Jun 08	5,11
06 Feb 08	4,43	08 Apr 08	4,35	09 Jun 08	5,33
07 Feb 08	4,38	09 Apr 08	4,34	10 Jun 08	5,36
08 Feb 08	4,38	10 Apr 08	4,31	11 Jun 08	5,27
11 Feb 08	4,45	11 Apr 08	4,28	12 Jun 08	5,34
12 Feb 08	4,51	14 Apr 08	4,28	13 Jun 08	5,44
13 Feb 08	4,55	15 Apr 08	4,24	16 Jun 08	5,42
14 Feb 08	4,54	16 Apr 08	4,29	17 Jun 08	5,30
15 Feb 08	4,49	17 Apr 08	4,38	18 Jun 08	5,30
18 Feb 08	4,50	18 Apr 08	4,51	19 Jun 08	5,44
19 Feb 08	4,50	21 Apr 08	4,50	20 Jun 08	5,37
20 Feb 08	4,51	22 Apr 08	4,59	23 Jun 08	5,31
21 Feb 08	4,57	23 Apr 08	4,59	24 Jun 08	5,29
22 Feb 08	4,56	24 Apr 08	4,62	25 Jun 08	5,24
25 Feb 08	4,58	25 Apr 08	4,64	26 Jun 08	5,15
26 Feb 08	4,57	28 Apr 08	4,61	27 Jun 08	5,16

27 Feb 08	4,57
28 Feb 08	4,51

29 Apr 08	4,57
30 Apr 08	4,53

30 Jun 08	5,22
01 Jul 08	5,23

TANGGAL	SPOT RATE
02 Jul 08	5,19
03 Jul 08	5,11
04 Jul 08	5,05
07 Jul 08	5,00
08 Jul 08	5,01
09 Jul 08	5,03
10 Jul 08	5,00
11 Jul 08	5,02
14 Jul 08	5,04
15 Jul 08	5,00
16 Jul 08	5,03
17 Jul 08	5,05
18 Jul 08	5,12
21 Jul 08	5,13
22 Jul 08	5,09
23 Jul 08	5,15
24 Jul 08	5,04
25 Jul 08	5,04
28 Jul 08	5,02
29 Jul 08	5,00
30 Jul 08	4,97
31 Jul 08	4,98
01 Agust 08	5,02
04 Agust 08	4,99
05 Agust 08	4,97
06 Agust 08	4,95
07 Agust 08	4,92
08 Agust 08	4,93
11 Agust 08	5,00
12 Agust 08	4,95
13 Agust 08	4,80
14 Agust 08	4,82
15 Agust 08	4,81
18 Agust 08	4,81
19 Agust 08	4,81
20 Agust 08	4,81
21 Agust 08	4,84
22 Agust 08	4,85
26 Agust 08	4,78

TANGGAL	SPOT RATE
03 Sep 08	4,66
04 Sep 08	4,63
05 Sep 08	4,59
08 Sep 08	4,67
09 Sep 08	4,65
10 Sep 08	4,64
11 Sep 08	4,63
12 Sep 08	4,69
15 Sep 08	4,51
16 Sep 08	4,39
17 Sep 08	4,38
18 Sep 08	4,24
19 Sep 08	4,40
22 Sep 08	4,46
23 Sep 08	4,36
24 Sep 08	4,30
25 Sep 08	4,32
26 Sep 08	4,29
29 Sep 08	4,12
30 Sep 08	4,06
01 Okt 08	4,02
02 Okt 08	3,98
03 Okt 08	4,06
06 Okt 08	3,79
07 Okt 08	3,62
08 Okt 08	3,44
09 Okt 08	3,48
10 Okt 08	3,38
13 Okt 08	3,50
14 Okt 08	3,69
15 Okt 08	3,65
16 Okt 08	3,58
17 Okt 08	3,49
20 Okt 08	3,38
21 Okt 08	3,36
22 Okt 08	3,13
23 Okt 08	3,18
24 Okt 08	3,01
27 Okt 08	3,01

TANGGAL	SPOT RATE
04 Nop 08	2,77
05 Nop 08	2,68
06 Nop 08	2,49
07 Nop 08	2,29
10 Nop 08	2,32
11 Nop 08	2,31
12 Nop 08	2,11
13 Nop 08	2,02
14 Nop 08	1,94
17 Nop 08	1,89
18 Nop 08	1,85
19 Nop 08	1,87
20 Nop 08	1,76
21 Nop 08	1,73
24 Nop 08	1,76
25 Nop 08	1,80
26 Nop 08	1,80
27 Nop 08	1,88
28 Nop 08	1,78
01 Des 08	1,62
02 Des 08	1,43
03 Des 08	1,32
04 Des 08	1,37
05 Des 08	1,44
08 Des 08	1,46
09 Des 08	1,42
10 Des 08	1,38
11 Des 08	1,35
12 Des 08	1,31
15 Des 08	1,29
16 Des 08	1,25
17 Des 08	1,09
18 Des 08	0,99
19 Des 08	1,04
22 Des 08	1,01
23 Des 08	1,00
24 Des 08	0,95
29 Des 08	0,96
30 Des 08	0,92

27 Agust 08	4,79	28 Okt 08	3,03	31 Des 08	0,91
28 Agust 08	4,79	29 Okt 08	2,98		
29 Agust 08	4,77	30 Okt 08	2,90		
01 Sep 08	4,70	31 Okt 08	2,86		
02 Sep 08	4,70	03 Nop 08	2,84		

