



UNIVERSITAS INDONESIA

**ANALISIS KESTABILAN PROSES DAUR ULANG NUTRISI
PADA EKOSISTEM KOLAM AIR TAWAR**

TESIS

YUSFRIDAWATI

0806420285

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**



UNIVERSITAS INDONESIA

**ANALISIS KESTABILAN PROSES DAUR ULANG NUTRISI
PADA EKOSISTEM KOLAM AIR TAWAR**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
magister matematika**

YUSFRIDAWATI

0806420285

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Yusfridawati
NPM : 0806420285
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Analisis Kestabilan Proses Daur Ulang
Nutrisi Pada Ekosistem Air Tawar

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Prof. Dr. Djati Kerami

Pembimbing : Dr. Al Haji Akbar, MSc.

Penguji : Dra. Bevina Desjwiandra H., MSc. PhD.

Dikritiskan di: Depok
Tanggal : 13 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada ALLAH SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Djati Kerami dan Dr. Al Haji Akbar, MSc. selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini.
2. Seluruh dosen Jurusan Matematika FMIPA, atas dukungan moril yang telah diberikan kepada penulis.
3. Wahyudin, ST, MSc., suami tercinta yang selalu hadir memberikan dukungan moril, materi dan motivasi kepada penulis selama perkuliahan berlangsung dan selama pengerjaan tesis ini.
4. Orang tua dan seluruh keluarga yang tak hentinya mendukung penulis.
5. Datuk Aminuzal Amin, yang memberi banyak dukungan moril dan materi.
6. Putranto Hadi Utomo dan Lina Mariana, S. Pd, yang dengan keikhlasannya banyak membantu penulis.
7. Dr. Jaharuddin yang memberikan banyak masukan, serta laboratorium Matematika IPB yang memberikan kemudahan dalam menggunakan perangkat lunak *Mathematica 7*.
8. Para Sahabat yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan tesis.
9. Para staf akademik Departemen Matematika FMIPA UI.
10. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Akhir kata, saya berharap ALLAH SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

**Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.**



Nama : Yusfridawati
NPM : 0806420285
Tanda Tangan :
Tanggal : 13 Juli 2010

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yusfridawati
NPM : 0806420285
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu dan Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Analisis Kestabilan Proses Daur Ulang Nutrisi Pada Ekosistem Air Tawar

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama kritis mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di: Depok
Pada tanggal: 13 Juli 2010
Yang menyatakan

(Yusfridawati)

ABSTRAK

Nama : Yusfridawati
NPM : 0806420285
Program Studi : Matematika
Judul : Analisis Kestabilan Proses Daur Ulang Nutrisi Pada Ekosistem Air Tawar

Proses daur ulang nutrisi yang dibahas pada tulisan ini adalah suatu proses daur ulang nutrisi dalam skala kecil pada suatu ekosistem sederhana. Dari proses daur ulang nutrisi yang dibahas dalam tulisan ini diperoleh sebuah model matematika sederhana yang melibatkan lima komponen yang berada pada kolam nutrisi. Pada tulisan ini dianalisa dua kasus yang berbeda, yaitu; karnivora ada dan karnivora tidak ada. Dalam menganalisa model tersebut ditentukan titik kritis sistem dan kestabilannya. Masing-masing kasus mempunyai kestabilan yang berbeda dari titik kritisnya. Secara analitik kestabilan dikritiskan dengan menggunakan kriteria kestabilan titik kritis menggunakan metode nilai eigen. Secara analitik diperoleh bahwa keduanya adalah kasus yang stabil dengan dinamika populasi yang berbeda-beda tergantung dengan nilai awalnya.

Kata Kunci: proses daur ulang nutrisi, titik kritis, nilai eigen, kestabilan.

ABSTRACT

Name : Yusfridawati
NPM : 0806420285
Study Program : Mathematic
Title : Stability Analysis of Nutrient Recycling in Water Ecosystem

Nutrient recycling process in this research is a small scale nutrient recycling process in a simple ecosystem. From the nutrient recycling process discussion in this report, a simple mathematic model has been developed which involve five components in the nutrition pond. In this report there are two cases have been analyzed; the system with carnivore and the system without carnivore. The critical points and the stabilities of the system have been determined in analyzing the model. Each cases have different stability from its critical point. Analytically, the stability of the system has been determined by using critical point stability criteria using eigen value method. Analytically, both cases were found to be stable cases with different population dynamic depends on its initial value.

Keywords: nutrient recycling process, critical point, eigen value, stability

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	v
ABSTRAK	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR LAMPIRAN	x
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian	3
1.5 Sistematika Penulisan.....	3
2. TINJAUAN PUSTAKA.....	4
2.1 Proses Daur Ulang Nutrisi.....	4
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Mandiri	7
2.4 Titik Kritis	7
2.5 Pelinearan	7
3. PEMODELAN.....	13
4. PEMBAHASAN.....	18
4.1 Herbivora sebagai Konsumen Tingkat Akhir.....	18
4.1.1 Penentuan Titik Kritis.....	18
4.1.2 Analisis Kestabilan Titik Kritis.....	19
4.1.3 Orbit Kestabilan dan Dinamika Sistem.....	21
4.2 Karnivora sebagai Konsumen Tingkat Akhir	28
4.2.1 Penentuan Titik Kritis.....	28
4.2.2 Analisis Kestabilan Titik Kritis.....	29
4.2.3 Orbit Kestabilan dan Dinamika Sistem.....	31
5. KESIMPULAN DAN SARAN	41
5.1 Kesimpulan	41
5.2 Saran	41
DAFTAR REFERENSI	42

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Proses Daur Ulang Nutrisi atau Rantai Makanan <i>Grazing</i>	4
Gambar 2.2. Kolam Nutrisi Air Tawar.....	5
Gambar 2.3. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis simpul stabil.....	9
Gambar 2.4. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis simpul tak stabil.....	10
Gambar 2.5. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis sadel.....	10
Gambar 2.6. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis spiral stabil.....	11
Gambar 2.7. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis spiral tak stabil.....	11
Gambar 2.8. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis centre.....	12
Gambar 3.1. Skema Proses Daur Ulang Nutrisi Pada Ekosistem Kolam Air Tawar.....	13
Gambar 4.1. Orbit kestabilan titik $T_1(2,0,0,0)$ pada bidang (N, X)	22
Gambar 4.2. Orbit kestabilan titik $T_1(2,0,0,0)$ pada bidang (Y, D)	22
Gambar 4.3. Dinamika nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora, dan <i>detritus</i> saat T_1 stabil dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$	23
Gambar 4.4. Dinamika nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora, dan <i>detritus</i> saat T_1 stabil dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 0$	25
Gambar 4.5. Dinamika nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora, dan <i>detritus</i> saat T_1 stabil dengan nilai awal $N(0) = 0, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$	26
Gambar 4.6. Orbit kestabilan titik $T_2(0,00253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ pada bidang (N, X)	32
Gambar 4.7. Orbit kestabilan titik $T_2(0,00253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ pada bidang (X, Y)	33
Gambar 4.8. Orbit kestabilan titik $T_2(0,00253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ pada bidang (Z, D)	34
Gambar 4.9. Dinamika nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora, karnivora dan <i>detritus</i> saat T_2 stabil dengan nilai awal $N(0) = 1,1, X(0) = 1,6, Y(0) = 3, Z(0) = 2$ dan $D(0) = 4$	35
Gambar 4.10. Dinamika nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora, karnivora dan <i>detritus</i> saat T_2 stabil dengan nilai awal $N(0) = 0, X(0) = 1,6, Y(0) = 3, Z(0) = 2$ dan $D(0) = 4$	37

Gambar 4.11. Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora dan *detritus* saat T_2 stabil dengan nilai awal $N(0) = 1,1, X(0) = 1,6,$
 $Y(0) = 3, Z(0) = 2$ dan $D(0) = 0$ 39



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Kelompok Nilai Parameter (Kasus I).....	21
Tabel 4.2. Kelompok Nilai Parameter (Kasus II).....	31



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program penentuan titik kritis beserta analisis kestabilan di sekitar titik kritis pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora.....	43
Lampiran 2. Program penentuan nilai karakteristik (nilai eigen) dari titik kritis T_1 pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora	46
Lampiran 3. Program penentuan orbit kestabilan di sekitar titik kritis T_1 pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora.....	47
Lampiran 4. Program penentuan dinamika untuk nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora dan <i>detritus</i> pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora	49
Lampiran 5. Program penentuan titik kritis beserta analisis kestabilan di sekitar titik kritis pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora	52
Lampiran 6. Program penentuan nilai karakteristik (nilai eigen) dari titik kritis T_2 pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora.....	57
Lampiran 7. Program penentuan orbit kestabilan di sekitar titik kritis T_2 pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora	58
Lampiran 8. Program penentuan dinamika untuk nutrisi abiotik, <i>autotrof</i> , herbivora dan <i>detritus</i> pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora	61

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memiliki ekosistem-ekosistem yang merupakan interaksi antara manusia dengan lingkungannya. Di dalam ekosistem-ekosistem tersebut terdapat sebuah atau lebih rantai makanan. Rantai makanan adalah suatu proses yang merupakan siklus (tertutup) mengalirnya energi dari proses memakan dan dimakan. Rantai makanan biasa disebut juga proses daur ulang nutrisi.

Suatu ekosistem memiliki dua kemungkinan rantai makanan yaitu rantai makanan *detritus* dan rantai makanan *grazing*. Rantai makanan *detritus* adalah rantai makanan yang sangat sederhana dimana organisme mendapatkan makanan sebagai energi hanya dari *detritus* (organisme yang sudah mati). Hal ini disebabkan karena terbatasnya ketersediaan organisme lain pada tempat tersebut, seperti pada ekosistem goa; ekosistem laut yang sangat dalam yang tidak dimasuki sinar matahari; dan ekosistem lainnya. Rantai makanan ini biasanya tidak terjadi kecuali dalam keadaan khusus darurat. Sedangkan rantai makanan *grazing* merupakan proses mengalirnya energi dari proses memakan dan dimakan yang secara umum kita ketahui yaitu dimulai dari nutrisi abiotik, produsen, konsumen tingkat satu, konsumen tingkat dua sampai konsumen tingkat akhir, *detritus* (organisme yang sudah mati), *detritivor* (pengurai organisme yang sudah mati menjadi bagian yang lebih kecil) dan *dekomposer* (pengurai organisme menjadi nutrisi abiotik).

Dalam penelitian ini ditinjau suatu proses daur ulang nutrisi pada ekosistem air tawar terbuka yang terdiri dari lima komponen, yaitu: nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora dan *detritus*.

Dalam ekosistem tersebut di atas, kelima komponen saling berinteraksi yang kemudian membentuk sistem daur ulang nutrisi. Dalam penelitian ini digunakan beberapa parameter sebagai berikut, yaitu; input nutrisi, tingkat kehilangan nutrisi, tingkat jenuh nutrisi, tingkat jenuh *autotrof*, tingkat jenuh herbivora, tingkat pertumbuhan *autotrof*, laju remineralisasi *detritus*, perbandingan massa nutrisi biotik dengan massa organisme-organisme yang ada di sistem, tingkat kematian

autotrof, herbivora, dan karnivora yang berada di dalam sistem dan yang keluar dari sistem, laju konsumsi herbivora dan karnivora, organisme-organisme yang sudah mati (*detritus*) yang keluar dari sistem, dan sejumlah makanan yang diserap oleh konsumen. Di samping itu juga dilihat bagaimana perilaku masing-masing komponen dalam ekosistem tersebut selama proses daur ulang nutrisi terjadi.

Parameter-parameter di atas saling berinteraksi sehingga dapat mempengaruhi kestabilan suatu sistem daur ulang nutrisi, kestabilan ini akan mempengaruhi kestabilan ekosistem. Untuk menganalisa kestabilan sistem daur ulang nutrisi pada penelitian ini, pertama-tama dilakukan penurunan bentuk model matematis dari proses daur ulang nutrisi pada ekosistem kolam air tawar yang terdiri dari lima komponen yaitu nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora, dan *detritus*. Kemudian dilakukan pelinearan dan ditentukan titik kritisnya. Setelah itu dilakukan analisa kestabilan dari titik kritis beserta penggambaran bentuk kestabilan (orbit kestabilan) di sekitar titik kritisnya dalam bidang dua dimensi (bidang fase) dan juga dilakukan penggambaran dari dinamika perilaku kelima komponen pembentuk sistem model proses daur ulang nutrisi tersebut beserta analisisnya.

1.2 Perumusan Masalah

Pada penelitian ini dipelajari lebih dalam mengenai masalah-masalah umum sebagai berikut:

1. Proses penentuan besaran-besaran dari parameter yang terjadi pada siklus nutrisi agar tercipta sistem yang stabil.
2. Penggambaran dinamika dari perilaku ke lima komponen pada proses daur ulang nutrisi yang dianalisa.

1.3 Pembatasan Masalah

Penelitian ini hanya meninjau dua keadaan yang dapat terjadi di dalam kolam air tawar yaitu berdasarkan aspek keberadaan dan ketidakberadaan karnivora. Keberadaan karnivora menjadi penting pengaruhnya terhadap sistem karena perilaku konsumsinya yang cukup tinggi dibandingkan herbivora terutama tingkat konsumsi atau daya cerna makanannya. Perbedaan perilaku ini disebabkan sumber

nutrisi yang berbeda, sumber nutrisi herbivora adalah nutrisi yang mengandung selulosa sehingga sulit untuk dicerna sedangkan karnivora sumber nutrisinya adalah herbivora yang tidak mengandung selulosa sehingga lebih mudah dicerna. Dengan demikian, keberadaan karnivora perlu ditinjau untuk mengetahui pengaruhnya terhadap sistem daur ulang nutrisi. Sedangkan untuk penyelesaian sistem daur ulang nutrisi, hanya ditinjau titik kritis yang stabil saja.

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisa kestabilan sistem daur ulang nutrisi dalam bentuk sistem dinamik dengan menggunakan model matematika berdasarkan kriteria kestabilan suatu titik kritis.

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah dapat dilakukannya upaya-upaya tertentu agar suatu sistem tidak mencapai kepunahan.

1.5 Sistematika Penulisan

Tulisan ini terdiri dari lima bab. Bab pertama memuat pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan. Bab kedua berisikan tentang landasan teori yang berupa definisi dan teori yang mendukung karya ilmiah ini. Permodelan matematika dibahas dalam bab ketiga, yaitu meninjau model proses daur ulang nutrisi yang digunakan untuk tulisan ini. Setelah itu, pembahasan tentang penentuan titik kritis, pelinearannya, analisis kestabilan, penggambaran orbit dan dinamika dibahas pada bab empat. Bab lima adalah kesimpulan dari hasil dan saran.

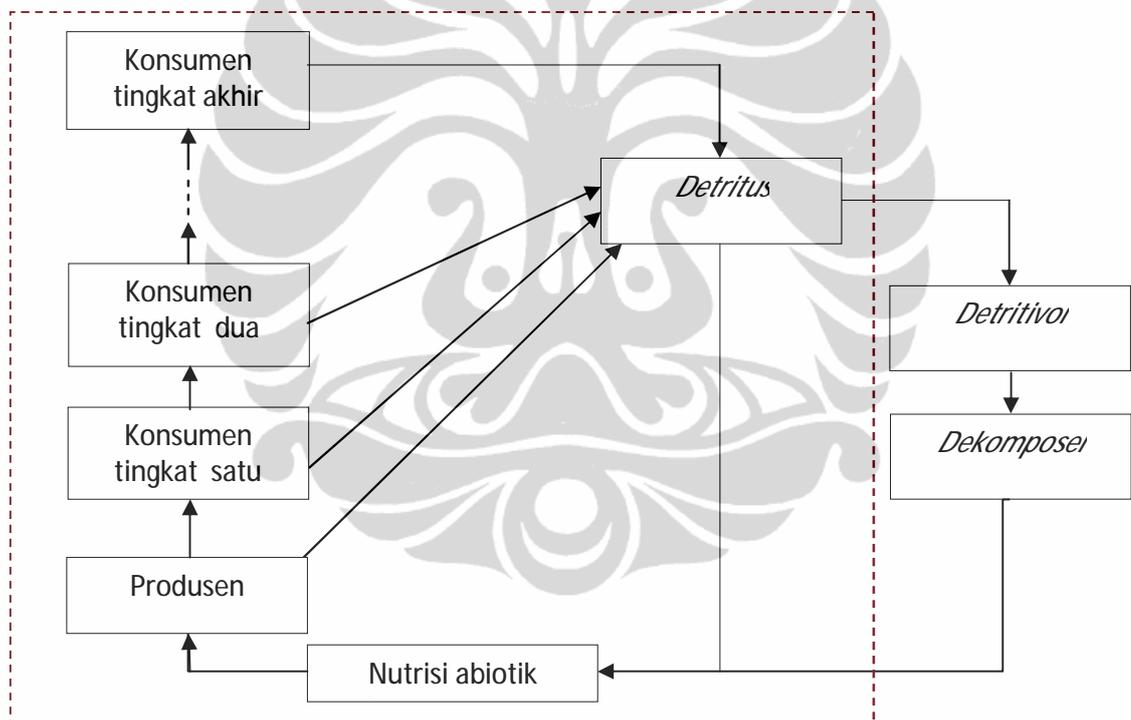
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan penjelasan tentang proses daur ulang nutrisi secara umum dan konsep-konsep dasar yang digunakan dalam pembahasan.

Pertama-tama proses daur ulang nutrisi *grazing* yang terjadi secara umum di alam sebagai dijelaskan sebagai berikut.

2.1 Proses Daur Ulang Nutrisi

Pada sistem daur ulang nutrisi di dalam kolam air tawar terdapat beberapa komponen yang terlibat seperti digambarkan pada gambar 2.1 di bawah ini.



Gambar 2.1. Proses Daur Ulang Nutrisi atau Rantai Makanan *Grazing*

Proses daur ulang ini (*grazing*) dimulai dari nutrisi abiotik, yaitu nutrisi yang bukan makhluk hidup, kritisi berupa unsur-unsur kimia maupun berupa gas seperti kalium (K), fosfor (P), oksigen (O_2), karbondioksida (CO_2) dan mineral-mineral lainnya. Nutrisi abiotik ini kemudian diubah menjadi nutrisi biotik oleh suatu organisme yang dapat menghasilkan makanannya sendiri yang disebut *autotrof*

yang akan berperan seperti produsen. Berbeda dengan nutrisi abiotik, nutrisi biotik adalah nutrisi yang merupakan makhluk hidup seperti tumbuhan, hewan, organisme tingkat rendah, dan organisme lainnya yang dapat membuat makanannya sendiri. Kemudian nutrisi biotik yang berupa *autotrof* ini dimakan oleh organisme yang berperan sebagai konsumen tingkat pertama. Disebut sebagai konsumen tingkat pertama karena organisme tersebut yang pertama kali melakukan proses konsumsi yaitu dengan memakan produsen. Setelah itu, proses berlanjut pada tingkat konsumen yang lebih tinggi sampai berakhir pada *detritus* (pengurai). *Detritus* merupakan organisme yang sudah mati yang akan diuraikan menjadi bagian yang lebih kecil lagi oleh *detritivor* dan akhirnya akan diuraikan menjadi unsur-unsur mineral pembentuknya dengan bantuan organisme yang termasuk ke dalam *dekomposer* atau dengan bantuan kondisi lingkungan sekitar seperti: reaksi kimia dengan oksigen (oksidasi); radiasi matahari (sinar UV); dan lainnya.

Pada penelitian ini akan ditinjau rantai makanan pada ekosistem terbuka air tawar yang disebut juga kolam terbuka yang terdiri dari nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora (konsumen tingkat I), karnivora (konsumen tingkat II), dan *detritus*.



Gambar 2.2. Kolam Nutrisi Air Tawar

Penelitian tentang rantai makanan telah banyak dilakukan. Salah satu diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh D. L. DeAngelis [4]. Dalam penelitian tersebut dilakukan analisa terhadap kestabilan sistem untuk mengetahui perubahan yang terjadi pada siklus nutrisi yang sangat sederhana. Siklus nutrisi yang sangat sederhana meliputi tiga komponen, yaitu nutrisi abiotik, *autotrof*, dan *detritus*. Penelitian DeAngelis berikutnya adalah menganalisa waktu yang diperlukan untuk mencapai kestabilan yang baru setelah terjadi gangguan terhadap sistem siklus nutrisi [5].

Proses daur ulang nutrisi yang dianalisa kestabilannya adalah dalam skala yang kecil yaitu dengan mengambil ekosistem sederhana berupa kolam terbuka yang berisi air tawar yang di dalamnya terdapat lima komponen. Komponen pertama, yaitu nutrisi abiotik yang berupa kalium (K), fosfor (P), oksigen (O₂), karbondioksida (CO₂), dan mineral-mineral lainnya. Komponen kedua adalah *autotrof* yang merupakan nutrisi biotik, misalnya *algae* atau *phytoplankton*. Komponen ketiga adalah *detritus* yaitu berupa organisme yang sudah mati. Komponen keempat adalah herbivora yang merupakan organisme pemakan tumbuhan atau disebut juga konsumen tingkat pertama, misalnya *zooplankton* (pemakan *phytoplankton*), ikan-ikan kecil pemakan *algae*, dan lainnya. Sedangkan komponen terakhir adalah karnivora yang merupakan organisme pemakan daging atau disebut juga konsumen tingkat kedua, misalnya ikan arwana (pemakan ikan-ikan kecil), dan lainnya.

Berikutnya dijelaskan tentang sistem persamaan diferensial linear.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Seperti yang dijelaskan oleh Tu (1994) pada tulisannya yang berjudul *Dynamical System an Introduction with Application in Economics and Biology*, misalkan sebuah sistem persamaan diferensial (SPD) dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_1(0) &= x_{1,0} \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_2(0) &= x_{2,0} \\ &\dots & & \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_n(0) &= x_{n,0} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bentuk linear dari persamaan (2.1) adalah :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

dengan \mathbf{A} adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$ dan vektor konstan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, maka sistem tersebut dinamakan SPD linear orde 1 dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Sistem (2.2) dikatakan homogen jika $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ dan tak homogen jika $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Penjelasan tentang sistem diferensial mandiri diuraikan sebagai berikut.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Mandiri

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde 1 sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan f dan g fungsi kontinu bernilai real dari x dan y , dengan laju perubahan \dot{x} dan \dot{y} dinyatakan dengan fungsi x dan y sendiri serta tidak berubah terhadap waktu, maka sistem (2.3) merupakan sistem persamaan diferensial mandiri (*autonomous differential equation*) [10].

Berikut diberikan penjelasan tentang titik kritis.

2.4. Titik Kritis

Misalkan suatu SPD dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z).\end{aligned}$$

Jika titik (x^*, y^*, z^*) berada di bidang (x, y, z) , dengan

$P(x^*, y^*, z^*) = 0$, $Q(x^*, y^*, z^*) = 0$, dan $R(x^*, y^*, z^*) = 0$ maka titik (x^*, y^*, z^*) disebut titik kritis. [Kreyszig, 1998].

Sub bab berikut menjelaskan tentang pelinearan.

2.5 Pelinearan

Pelinearan dilakukan karena dalam penentuan solusi pada sistem persamaan diferensial tak linear sulit dilakukan. Sistem persamaan diferensial yang homogen dengan koefisien berupa matriks konstan dapat dinyatakan oleh sistem berikut :

$$\dot{x} = Ax\tag{2.4}$$

Sistem persamaan (2.4) merupakan pelinearan dari persamaaan (2.3), apabila

matriks A berbentuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\tag{2.5}$$

dengan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Matriks A sering disebut juga matriks **Jacobi**. Sistem persamaan (2.4) merupakan pelinearan dari persamaan (2.2) menggunakan perluasan Taylor di sekitar titik kritis $x = x^*$. Bukti secara lengkap dapat dilihat dalam [Tu, P. N. V. 1994].

Perhatikan persamaan berikut:

$$Ax = \lambda x \quad (2.6)$$

dengan A merupakan matriks Jacobi yang didefinisikan pada (2.5). Matriks **Jacobi** A merupakan matriks konstan yang berukuran $n \times n$. Nilai skalar λ dan vektor x berturut-turut disebut nilai eigen dan vektor eigen. Kestabilan titik kritis dari sistem persamaan diferensial (1) didasarkan pada nilai eigen dan vektor eigen. Untuk mencari nilai eigen λ dari matriks A , persamaan (2.6) ditulis:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.7)$$

dengan I matriks identitas. Persamaan (2.7) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan karakteristik dari A . Berikut ini akan disajikan kriteria untuk menentukan kestabilan titik kritis. Penentuan kestabilan titik kritis didapat dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu: $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik (2.8).

Secara umum, kestabilan suatu titik kritis didasarkan pada kriteria berikut:

1. Stabil, jika:
 - a. $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ untuk semua j .
 - b. Terdapat $\text{Re}(\lambda_j) = 0$ untuk sembarang j dan $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ untuk semua $i \neq j$.
2. Tak stabil, jika terdapat paling sedikit satu j dengan $\text{Re}(\lambda_j) > 0$.

3. Sadel, jika perkalian dua buah nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i \lambda_j < 0$ untuk setiap i dan j sembarang).

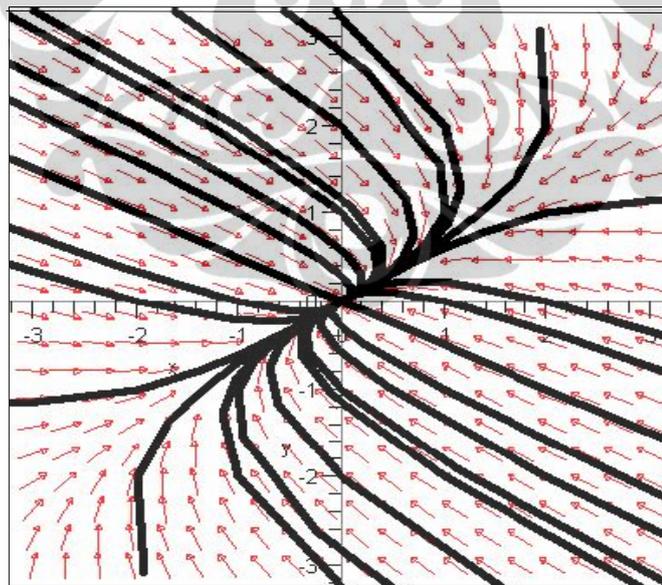
Khususnya, jika bentuk persamaan karakteristik (2.7) seperti

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.9)$$

dengan a, b, c bilangan-bilangan real, maka kriteria kestabilan titik kritisnya didasarkan pada kriteria Routh-Hourwitz. Berdasarkan kriteria Routh-Hourwitz, nilai eigen dari persamaan (2.9) adalah negatif jika dan hanya jika a, c positif, dan $ab > c$. Bukti secara lengkap dapat dilihat dalam [Tu, 1994]. Dengan demikian titik kritis yang memberikan persamaan karakteristik (2.9) adalah stabil, apabila a, c positif, dan $ab > c$, dan jika tidak terpenuhi keadaan tersebut maka titik kritisnya tidak stabil.

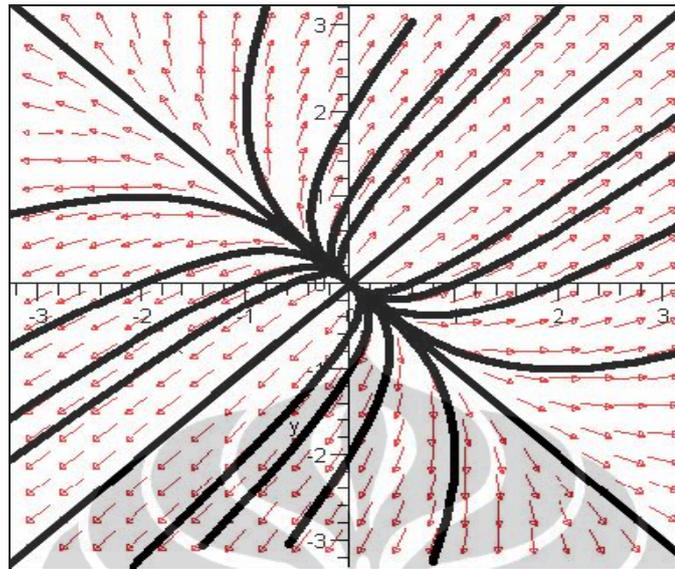
Adapun bentuk umum kestabilan di sekitar titik kritis adalah sebagai berikut :

- a. Simpul stabil, seperti diberikan pada gambar 2.3



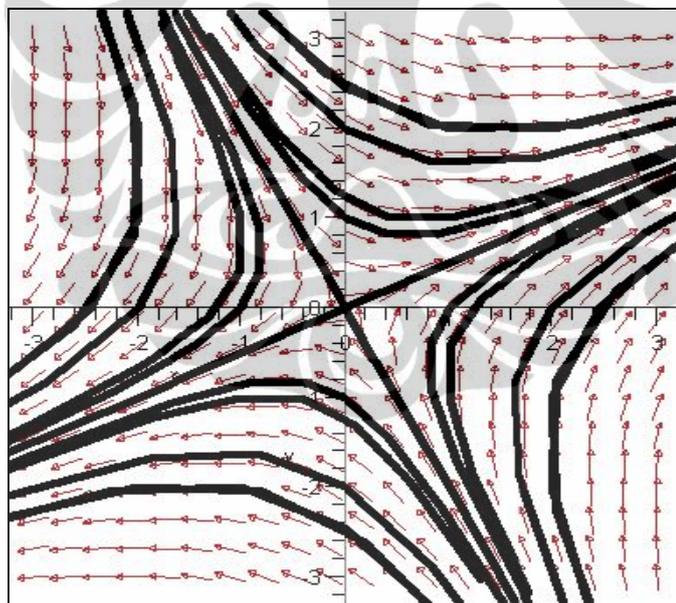
Gambar 2.3. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis simpul stabil

b. Simpul tak stabil, seperti diberikan pada gambar 2.4



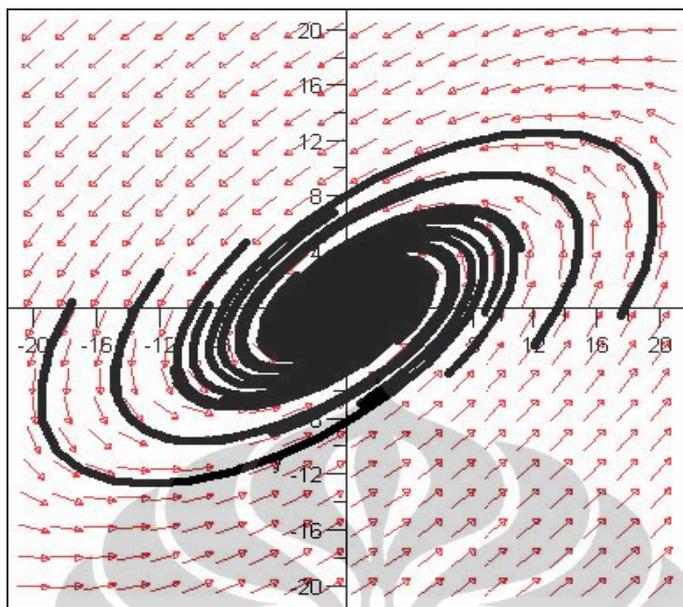
Gambar 2.4. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis simpul tak stabil

c. Sadel, seperti diberikan pada gambar 2.5



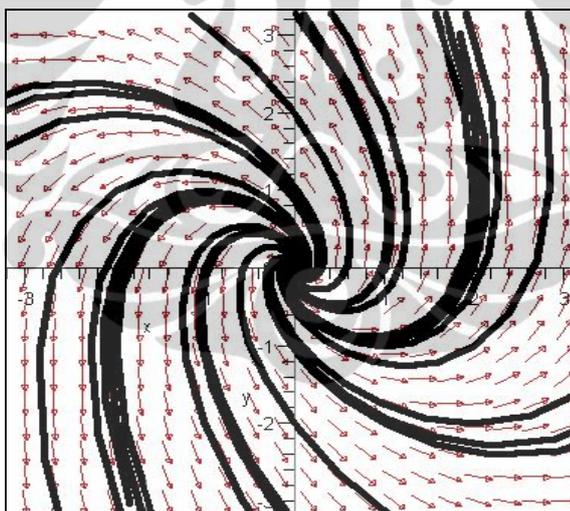
Gambar 2.5. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis sadel

- d. Spiral stabil, seperti diberikan pada gambar 2.6



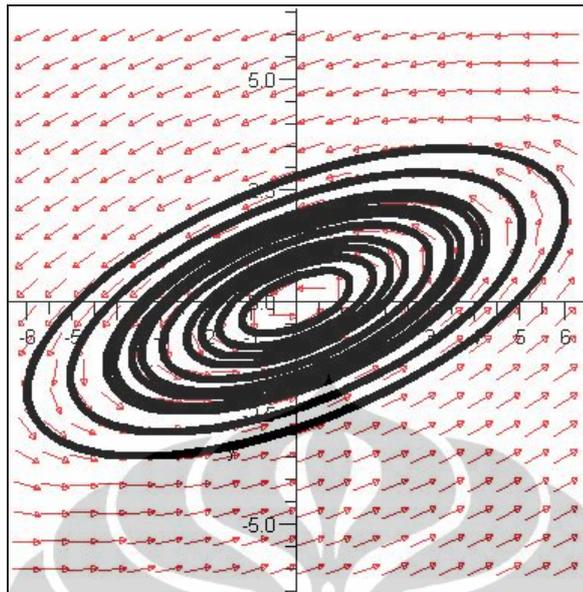
Gambar 2.6. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis spiral stabil

- e. Spiral tak stabil, seperti diberikan pada gambar 2.7



Gambar 2.7. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis spiral tak stabil

f. Centre, seperti diberikan pada gambar 2.8

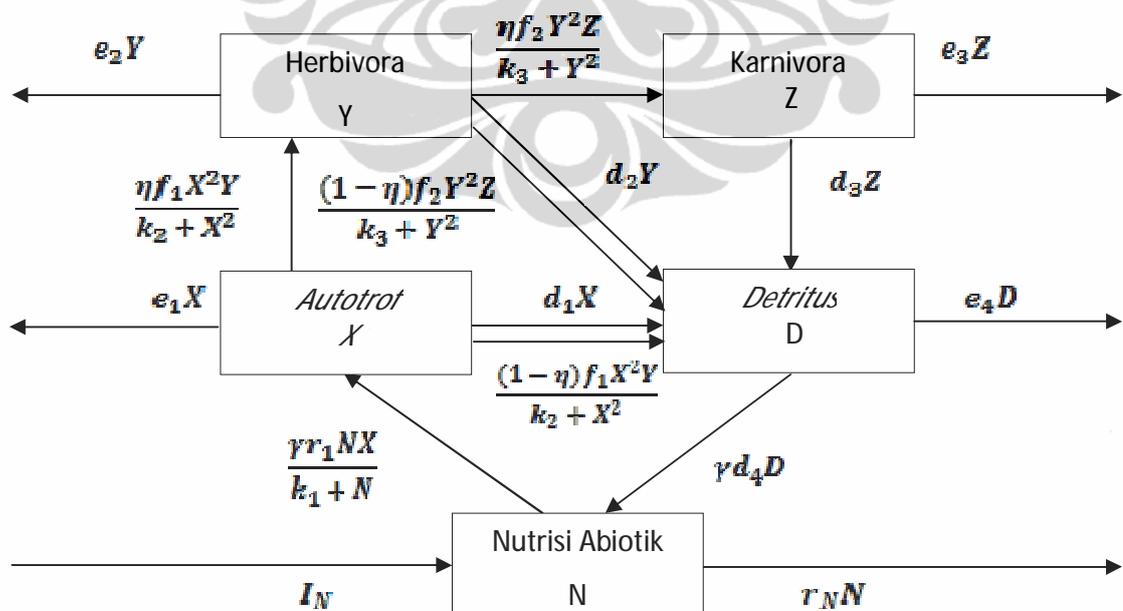


Gambar 2.8. Orbit kestabilan di sekitar titik kritis centre

BAB 3 PEMODELAN

Model proses daur ulang nutrisi yang ditinjau adalah model yang disusun oleh DeAngelis, 1989. Pada proses permodelan, komponen proses daur ulang nutrisi yang diteliti adalah terdiri dari lima komponen seperti ditunjukkan pada gambar 3.1, yaitu:

1. Nutrisi abiotik seperti kalium (K), fosfor (P), oksigen (O₂), karbon dioksida (CO₂) dan mineral-mineral lainnya.
2. *Autotrof* yang akan berperan seperti produsen.
3. Herbivora yang berperan sebagai konsumen pertama yaitu pemakan produsen (autotrof).
4. Karnivora yang berperan sebagai konsumen kedua yaitu pemakan organisme-organisme yang termasuk ke dalam herbivora.
5. *Detritus* yang merupakan organisme mati seperti organisme-organisme *autotrof*, herbivora dan karnivora yang nantinya akan diuraikan oleh detritivor dan dekomposer.



Gambar 3.1. Skema Proses Daur Ulang Nutrisi Pada Ekosistem Kolam Air Tawar

Misalkan banyaknya (massa) nutrisi abiotik dalam kolam nutrisi adalah N (gram), banyaknya (massa) *autotrof* dalam kolam nutrisi adalah X (gram), banyaknya herbivora dalam kolam nutrisi adalah Y (gram), banyaknya karnivora dalam kolam nutrisi adalah Z (gram), dan banyaknya *detritus* dalam kolam nutrisi adalah D (gram).

Laju perubahan banyaknya nutrisi yang berada dalam kolam nutrisi yang dinotasikan dengan $\frac{dN}{dt}$ dapat dipengaruhi oleh:

- Banyaknya nutrisi yang masuk ke dalam kolam per satuan waktu, dinotasikan dengan I_N .
- Banyaknya nutrisi yang hilang persatuan waktu, karena keluarnya air dari dalam kolam yang dinyatakan oleh $r_N N$. Laju kehilangan (berkurangnya) nutrisi yang disebabkan keluarnya sebagian air kolam dari sistem dinyatakan oleh r_N .
- Banyaknya nutrisi dalam kolam nutrisi yang digunakan oleh *autotrof* persatuan waktu, adalah PX , dengan P bergantung pada banyaknya nutrisi pada kolam nutrisi yang dinotasikan $\frac{r_1 N}{k_1 + N}$, sedangkan untuk masing-masing r_1 dan k_1 menyatakan tingkat pertumbuhan *autotrof* dan tingkat kejenuhan *autotrof* dalam mengonsumsi nutrisi abiotik.
- Banyaknya nutrisi yang diperoleh dari hasil urai *detritus* per satuan waktu atau laju remineralisasi *detritus*, dinotasikan oleh $\gamma d_2 D$, d_2 menyatakan input nutrisi yang berasal dari remineralisasi *detritus* dan γ menyatakan perbandingan massa nutrisi abiotik dengan massa organisme-organisme *autotrof*, herbivora, karnivora, dan *detritus*.

Laju perubahan banyaknya organisme *autotrof* yang dinotasikan dengan $\frac{dX}{dt}$

dapat dipengaruhi oleh :

- Banyaknya organisme *autotrof* yang mati atau menjadi *detritus* persatuan waktu, dinotasikan dengan $(d_1 + e_1)X$, dengan d_1 suatu konstanta yang disebut laju kematian *autotrof* yang mempengaruhi banyaknya *detritus* didalam

kolam nutrisi sedangkan e_1 suatu konstanta yang disebut laju kematian *autotrof* yang keluar dari sistem atau keluar dari kolam nutrisi.

- b. Banyaknya nutrisi abiotik yang dikonsumsi sebagai bahan mentah untuk *autotrof* membuat makanannya sendiri yang dinotasikan sebanyak $\frac{r_1 N X}{k_1 + N}$.
- c. Banyaknya *autotrof* yang dikonsumsi oleh herbivora sebanyak $\frac{\eta f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2}$ yang jumlahnya bergantung pada laju konsumsi dari herbivora yang dinotasikan oleh f_1 , tingkat kejenuhan herbivora dalam proses konsumsi yang dinotasikan oleh k_2 , dan sejumlah makanan yang diserap oleh konsumen dinotasikan oleh η .
- d. Banyaknya *autotrof* yang tidak dikonsumsi oleh herbivora dan menjadi *detritus* yaitu sebanyak $\frac{(1-\eta) f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2}$.

Laju perubahan banyaknya organisme herbivora yang dinotasikan dengan $\frac{dY}{dt}$

dapat dipengaruhi oleh :

- a. Banyaknya herbivora yang dikonsumsi oleh karnivora yaitu sebanyak $\frac{\eta f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2}$, yang jumlahnya bergantung pada laju konsumsi dari karnivora yang dinotasikan oleh f_2 , tingkat kejenuhan karnivora dalam proses konsumsi yang dinotasikan oleh k_3 .
- b. Banyaknya organisme herbivora yang mati atau menjadi *detritus* persatuan waktu, dinotasikan dengan $(d_2 + e_2)Y$, dengan d_2 suatu konstanta yang disebut laju kematian herbivora yang mempengaruhi banyaknya *detritus* didalam kolam nutrisi sedangkan e_2 suatu konstanta yang disebut laju kematian herbivora yang keluar dari sistem atau keluar dari kolam nutrisi.
- c. Banyaknya *autotrof* yang dikonsumsi oleh herbivora yaitu sebanyak $\frac{\eta f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2}$
- d. Banyaknya herbivora yang tidak dikonsumsi oleh karnivora dan menjadi *detritus* yaitu sebanyak $\frac{(1-\eta) f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2}$.

Laju perubahan banyaknya organisme karnivora yang dinotasikan dengan $\frac{dZ}{dt}$

dapat dipengaruhi oleh :

- Banyaknya herbivora yang dikonsumsi oleh karnivora yaitu sebanyak $\frac{\eta f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2}$.
- Banyaknya organisme karnivora yang mati atau menjadi *detritus* persatuan waktu, dinotasikan dengan $(d_3 + e_3)Z$, dengan d_3 suatu konstanta yang disebut laju kematian karnivora yang mempengaruhi banyaknya *detritus* didalam kolam nutrisi sedangkan e_3 suatu konstanta yang disebut laju kematian karnivora yang keluar dari sistem atau keluar dari kolam nutrisi.

Laju perubahan banyaknya organisme *detritus* yang dinotasikan dengan $\frac{dD}{dt}$

dapat dipengaruhi oleh :

- Komponen-komponen biotik yang menjadi *detritus* atau mati yang dinotasikan dengan d_1X, d_2Y, d_3Z yang berturut-turut menyatakan *autotrof* menjadi *detritus*, herbivora menjadi *detritus*, dan karnivora menjadi *detritus*.
- Komponen-komponen biotik yang berpindah ke luar sistem yang mungkin dikarenakan oleh pengurasan kolam, pemanenan komponen-komponen biotiknya, penguburan kolam di dalam lapisan tanah yang dalam, dan penyebab-penyebab lainnya yang dinotasikan dengan e_1X untuk *autotrof*, e_2Y untuk herbivora dan e_3Z untuk karnivora dan e_4D untuk *detritus*.
- Banyaknya organisme *autotrof* yang tidak dikonsumsi oleh herbivora yang dinotasikan dengan $\frac{(1-\eta)f_1X^2Y}{k_2+X^2}$.
- Banyaknya organisme herbivora yang tidak dikonsumsi oleh karnivora yang dinotasikan dengan $\frac{(1-\eta)f_2Y^2Z}{k_3+Y^2}$.
- Banyaknya *detritus* yang diurai oleh detritivor menjadi nutrisi abiotik (remineralisasi) yang dinotasikan dengan γd_4D .

Dengan demikian proses daur ulang nutrisi dalam kasus ini dimodelkan dalam sistem persamaan berikut :

$$\frac{dN}{dt} = I_N - r_N N - \frac{\gamma r_1 N X}{k_1 + N} + \gamma d_4 D, \quad (3.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r_1 N X}{k_1 + N} - \frac{f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2} - (d_1 + e_1) X, \quad (3.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\eta f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2} - \frac{f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2} - (d_2 + e_2) Y, \quad (3.3)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\eta f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2} - (d_3 + e_3) Z, \quad (3.4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(1-\eta)f_1 X^2 Y}{k_2 + X^2} + \frac{(1-\eta)f_2 Y^2 Z}{k_3 + Y^2} + d_1 X + d_2 Y + d_3 Z - (d_4 + e_4) D, \quad (3.5)$$

dengan $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, $\frac{dD}{dt}$ berturut-turut adalah laju perubahan dari: nutrisi abiotik; *autotrof*; herbivora; karnivora; dan *detritus*.

Karena bentuk sistem persamaan (3.1) sampai persamaan (3.5) bukan persamaan yang mudah untuk dianalisa maka terlebih dahulu disederhanakan dengan cara mengasumsikan $\frac{f_1 X^2}{k_2 + X^2}$ menjadi $f_1 X$ dan $\frac{f_2 Y^2}{k_3 + Y^2}$ menjadi $f_2 Y$. Dengan demikian persamaan (3.2) sampai persamaan (3.5) menjadi :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r_1 N X}{k_1 + N} - f_1 X Y - (d_1 + e_1) X, \quad (3.6)$$

$$\frac{dY}{dt} = \eta f_1 X Y - f_2 Y Z - (d_2 + e_2) Y, \quad (3.7)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \eta f_2 Y Z - (d_3 + e_3) Z, \quad (3.8)$$

$$\frac{dD}{dt} = (1 - \eta) f_1 X Y + (1 - \eta) f_2 Y Z + d_1 X + d_2 Y + d_3 Z - (d_4 + e_4) D, \quad (3.9)$$

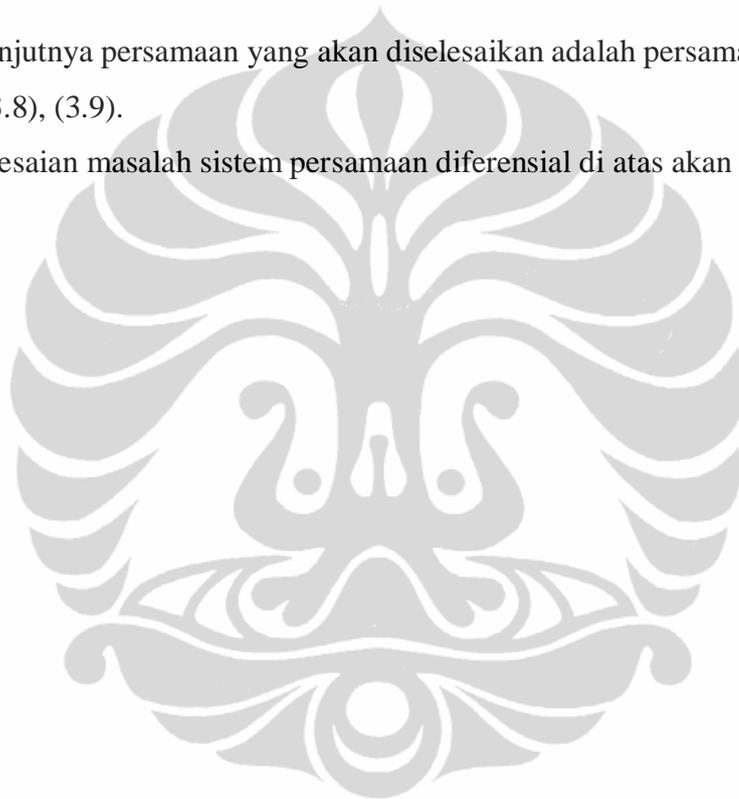
Sistem persamaan diferensial (3.1), (3.6), (3.7), (3.8), dan (3.9) merupakan sistem persamaan (2.1) dengan

$$x_1 = N, \quad x_2 = X, \quad x_3 = Y, \quad x_4 = Z, \quad x_5 = D$$

$$\begin{aligned}
 f_1 &= I_N - r_N N - \frac{\gamma r_1 N X}{k_1 + N} + \gamma d_4 D \\
 f_2 &= \frac{r_1 N X}{k_1 + N} - f_1 X Y - (d_1 + e_1) X \\
 f_3 &= \eta f_1 X Y - f_2 Y Z - (d_2 + e_2) Y \\
 f_4 &= \eta f_2 Y Z - (d_3 + e_3) Z \\
 f_5 &= (1 - \eta) f_1 X Y + (1 - \eta) f_2 Y Z + d_1 X + d_2 Y + d_3 Z - (d_4 + e_4) D
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Untuk selanjutnya persamaan yang akan diselesaikan adalah persamaan (3.1), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9).

Proses penyelesaian masalah sistem persamaan diferensial di atas akan dijelaskan pada bab 4.



BAB 4 PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan lebih lanjut mengenai proses penentuan titik kritis, kestabilan, dan dinamika dari dua kasus yang diteliti yaitu; kasus pertama herbivora sebagai konsumen tingkat akhir (tidak ada karnivora) dan kasus kedua karnivora sebagai konsumen tingkat akhir.

Proses perhitungan dan visualisasi dari sistem yang dibahas digunakan perangkat lunak *Mathematica 7*.

4.1 Herbivora sebagai Konsumen Tingkat Akhir

Pada kasus ini, diasumsikan organisme karnivora diabaikan ($Z = 0$) sehingga model proses daur ulang nutrisinya menjadi:

$$\frac{dN}{dt} = I_N - r_N N - \frac{\gamma r_1 N X}{k_1 + N} + \gamma d_4 D, \quad (3.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r_1 N X}{k_1 + N} - f_1 X Y - (d_1 + e_1) X, \quad (3.6)$$

$$\frac{dY}{dt} = \eta f_1 X Y - (d_2 + e_2) Y, \quad (3.11)$$

$$\frac{dD}{dt} = (1 - \eta) f_1 X Y + d_1 X + d_2 Y - (d_4 + e_4) D, \quad (3.12)$$

Selanjutnya ditentukan titik kritis untuk persamaan (3.1), (3.6), (3.11), (3.12) yang kemudian dianalisa kestabilan di sekitar titik kritis tersebut serta dinamika populasinya.

4.1.1 Penentuan Titik Kritis

Titik kritis (N^*, X^*, Y^*, D^*) diperoleh berdasarkan persamaan berikut:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = 0, \quad \frac{dY}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = 0$$

dan diperoleh 4 titik kritis (lampiran 1) kritisi karena tiga titik kritis diantaranya membutuhkan proses komputasi yang sangat lama, hanya satu titik kritis saja yang dianalisa kestabilannya yaitu: $T_1 \left(\frac{1}{r_n}, 0, 0, 0 \right)$.

4.1.2 Analisis Kestabilan Titik Kritis

Untuk menganalisa perilaku solusi di sekitar titik kritis, dilakukan pelinearannya pada model yang merupakan persamaan diferensial taklinear. Misalkan sistem persamaan (3.1), (3.6), (3.11), (3.12) berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dN}{dt} = f_1(N, X, Y, D) \quad (4.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = f_2(N, X, Y, D) \quad (4.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_3(N, X, Y, D) \quad (4.3)$$

$$\frac{dD}{dt} = f_4(N, X, Y, D) \quad (4.4)$$

Sistem persamaan (3.1), (3.6), (3.11), (3.12) dapat diubah ke dalam bentuk :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dN}{dt} & \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} & \frac{dD}{dt} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x} = [N \ X \ Y \ D]^T$$

Sedangkan \mathbf{A} matriks Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} & \frac{\partial f_1}{\partial D} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} & \frac{\partial f_2}{\partial D} \\ \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Y} & \frac{\partial f_3}{\partial D} \\ \frac{\partial f_4}{\partial N} & \frac{\partial f_4}{\partial X} & \frac{\partial f_4}{\partial Y} & \frac{\partial f_4}{\partial D} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk $f_1, f_2, f_3,$ dan f_4 secara berturut-turut adalah ruas kanan dari persamaan (3.1), (3.6), (3.11), dan (3.12).

Dalam hal ini matriks A adalah sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} -r_n - \frac{\gamma r_1 k_1 X}{(k_1 + N)^2} & -\frac{\gamma r_1 N}{(k_1 + N)} & 0 & \gamma d_4 \\ \frac{r_1 k_1 X}{(k_1 + N)^2} & \frac{r_1 N}{(k_1 + N)} - f_1 Y - (d_1 + e_1) & -f_1 X & 0 \\ 0 & \eta f_1 Y & \eta f_1 X - (d_2 + e_2) & 0 \\ 0 & (1 - \eta) f_1 Y + d_1 & (1 - \eta) f_1 X + d_2 & -(d_4 + e_4) \end{bmatrix}$$

Bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan A seperti tersebut di atas merupakan sistem persamaan linear $\dot{x} = Ax + b$, $x(0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $b=0$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \\ \frac{dD}{dt} \end{bmatrix}$$

Substitusi $T_1 \left(\frac{I_n}{r_n}, 0, 0, 0 \right)$ pada matriks A tersebut di atas menghasilkan matriks

Jacobi sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -r_n & -\frac{\gamma r_1 I_n}{\left(k_1 + \frac{I_n}{r_n}\right) r_n} & 0 & \gamma d_4 \\ 0 & \frac{r_1 I_n}{\left(k_1 + \frac{I_n}{r_n}\right) r_n} - (d_1 + e_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d_2 + e_2) & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 & -(d_4 + e_4) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen yang nantinya nilai eigen tersebut akan digunakan untuk menganalisa kestabilan dari titik kritis $T_1 \left(\frac{I_n}{r_n}, 0, 0, 0 \right)$.

Nilai eigen dari A adalah akar dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_2 - e_2$$

$$\lambda_2 = -d_4 - e_4$$

$$\lambda_3 = -d_1 - e_1 - \frac{I_n r_1}{(k_1 + \frac{I_n}{r_n}) r_n}$$

$$\lambda_4 = -r_n$$

Karena semua parameter taknegatif maka semua nilai eigen yang dihasilkan bernilai negatif. Dan karena seluruh nilai eigen dari $T_1(\frac{I_n}{r_n}, 0, 0, 0)$ adalah negatif, maka $T_1(\frac{I_n}{r_n}, 0, 0, 0)$ adalah titik kritis yang bersifat stabil.

4.1.3 Orbit Kestabilan dan Dinamika Sistem

Untuk menganalisa kestabilan dari titik kritisnya diperlukan nilai parameter (berdasarkan nilai-nilai parameter

$I_n, \gamma, r_1, k_1, k_2, k_3, r_n, e_1, e_2, e_3, e_4, d_1, d_2, d_3, d_4, f_1, f_2, \eta$ yang diperoleh dari beberapa percobaan).

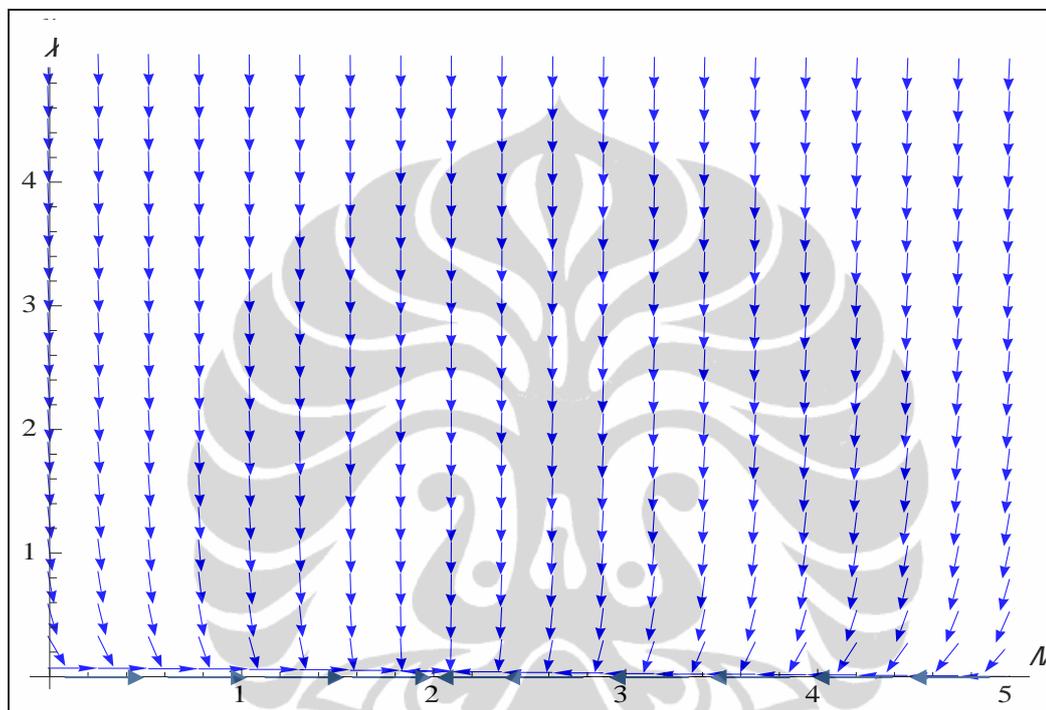
Nilai parameter tersebut diberikan pada tabel berikut.

Tabel 4.1. Kelompok Nilai Parameter (Kasus I)

No	Parameter	Nilai	No	Parameter	Nilai
1	I_n	0,010	8	e_1	0,001
2	γ	0,020	9	e_2	0,001
3	r_1	0,300	10	e_4	0,001
4	k_1	0,005	11	d_1	0,100
5	η	0,500	12	d_2	0,100
6	f_1	2,000	13	d_4	0,100
7	r_n	0,005			

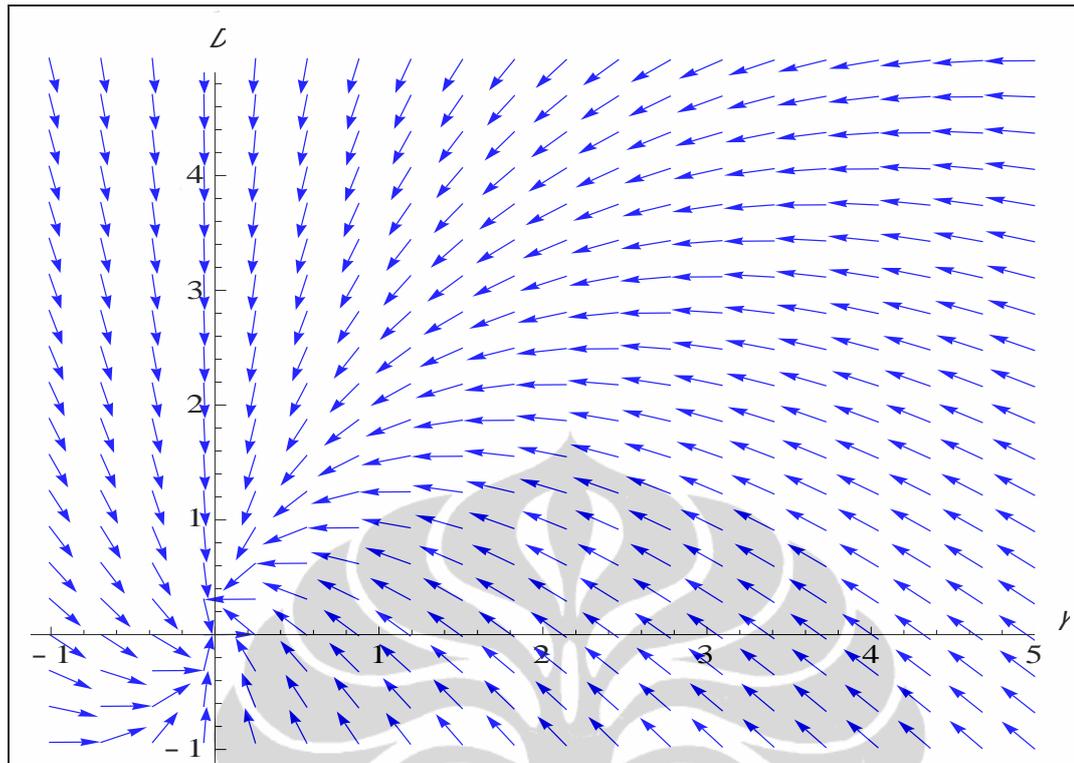
Nilai-nilai parameter pada tabel di atas dipilih karena dapat menghasilkan kestabilan untuk titik kritis $T_1(2, 0, 0, 0)$.

Berikut ini akan digambarkan bidang fase yang menunjukkan orbit kestabilan di sekitar $T_1\left(\frac{L_1}{r_1}, 0, 0, 0\right)$ dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada tabel 4.1 di atas dan nilai awal $N(0) = 1,1$; $X(0) = 1,6$; $Y(0) = 3$ dan $D(0) = 4$, seperti diberikan pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 berikut ini.



Gambar 4.1. Orbit kestabilan di sekitar titik $T_1(2,0,0,0)$ pada bidang (N, X)

Dari Gambar 4.1 di atas terlihat bahwa titik kritis T_1 pada bidang (N, X) yaitu $T_1(2,0)$ dituju oleh orbit (panah berarah).

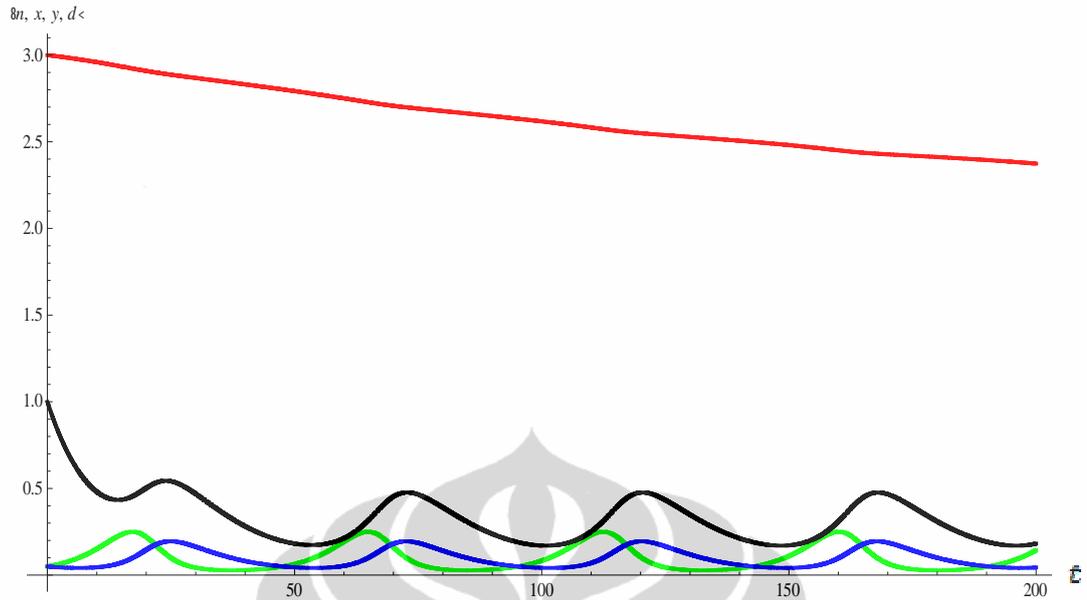


Gambar 4.2. Kestabilan di sekitar titik $T_1(2,0,0,0)$ pada bidang (Y, D)

Dari Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa titik kritis T_1 pada bidang (N, X) yaitu $T_1(0,0)$ dituju oleh orbit.

Berdasarkan Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa orbit bergerak mendekati titik kritis $T_1(2,0,0,0)$. Hal ini memberikan kestabilan bagi titik kritis T_1 untuk nilai parameter pada Tabel 4.1.

Setelah menggambarkan kestabilan di sekitar titik kritis T_1 selanjutnya digambarkan perilaku dinamika dari nutrisi abiotik, organisme *autotrof*, organisme herbivora, dan organisme *detritus* selama proses daur ulang nutrisi berlangsung dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang terdapat di Tabel 4.1 dan nilai-nilai awal yang berbeda.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.3. Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, dan *detritus* saat T_1 stabil dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$

Gambar 4.3 memperlihatkan dinamika perilaku dari masing-masing komponen selama proses daur ulang nutrisi berlangsung dengan nilai awal yang berbeda dengan kasus yang sebelumnya, yaitu nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, dan *detritus* berturut-turut adalah sebesar 3; 0,05; 0,05; dan 1. Dari Gambar 4.3 terlihat bahwa pada awal proses terjadinya daur ulang nutrisi yaitu pada saat $t = 0$ jumlah nutrisi abiotik berkurang. Berkurangnya jumlah nutrisi abiotik dikarenakan adanya proses konsumsi nutrisi abiotik oleh *autotrof* untuk membuat makanannya sendiri yang mengakibatkan jumlah *autotrof* meningkat sampai dengan $t = 19$. Setelah $t = 19$ *autotrof* mengalami penurunan sampai pada saat $t = 38$. Penurunan *autotrof* ini dikarenakan oleh semakin berkurangnya jumlah

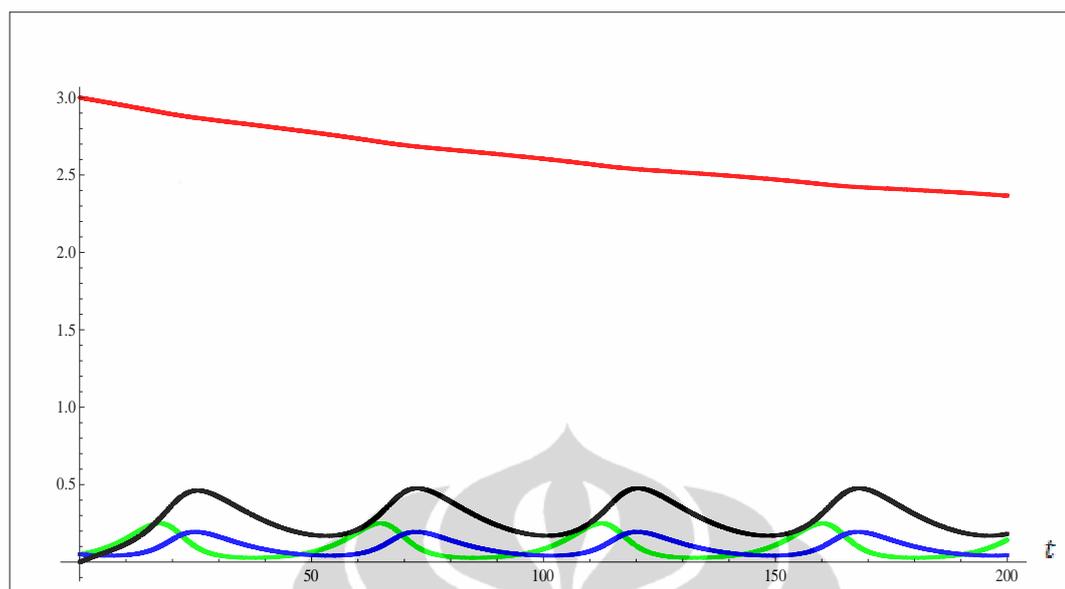
nutrisi abiotik yang tersedia di kolam dan sejumlah *autotrof* yang dikonsumsi oleh herbivora. Dan setelahnya *autotrof* akan meningkat kembali dan kemudian akan mengalami penurunan kembali sampai mencapai keadaan yang stabil.

Lain halnya dengan *autotrof* yang mengalami peningkatan saat $t = 0$, herbivora malah mengalami penurunan sampai dengan $t = 7$. Hal ini dikarenakan oleh daya cerna (tingkat konsumsi) herbivora yang lambat untuk mengkonsumsi asupan nutrisi abiotik sehingga karenanya sebagian kecil herbivora mengalami kematian. Namun setelah $t = 7$ sampai dengan $t = 25$ herbivora mengalami peningkatan jumlah, hal ini disebabkan oleh melimpahnya persediaan *autotrof* di dalam kolam karena pada saat itu jumlah *autotrof* meningkat. Namun setelah $t = 25$ herbivora kembali mengalami penurunan karena jumlah *autotrof* yang tersedia dalam kolam sudah banyak berkurang. Dan setelah mengalami penurunan herbivora akan kembali mengalami peningkatan dan proses akan berlangsung terus menerus sampai herbivora mencapai keadaan stabil.

Serupa dengan herbivora, jumlah *detritus* pun pada saat $t = 0$ mengalami penurunan yang disebabkan sejumlah *detritus* yang diuraikan kembali menjadi nutrisi abiotik. Namun sampai dengan $t = 15$ terjadi penurunan jumlah *detritus*, dan setelahnya *detritus* mengalami peningkatan kembali, karena pada saat ini banyak *autotrof* dan herbivora yang mati. Peningkatan jumlah *detritus* hanya sampai $t = 25$, karena *detritus* kembali diremineralisasi untuk menambahkan jumlah nutrisi abiotik yang sudah mulai berkurang yang menyebabkan penurunan jumlah *detritus*, yang kemudian mengalami peningkatan setelah $t = 53$. Tidak berbeda dengan *autotrof* dan herbivora, *detritus* juga mengalami peningkatan dan penurunan kembali, yang akhirnya mencapai kestabilan.

Dan nutrisi abiotik yang terus bergerak menurun pun juga mencapai kestabilannya. Sehingga secara keseluruhan proses daur ulang nutrisi dalam sistem pada akhirnya akan mencapai kestabilan.

Selanjutnya dianalisa kasus yang berbeda dengan sebelumnya, yaitu nilai awal *detritus* dikritiskan dengan nilai nol seperti terlihat pada Gambar 4.4 dibawah ini.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.4. Dinamika Nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, dan *detritus* saat T_1 stabil dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 0$

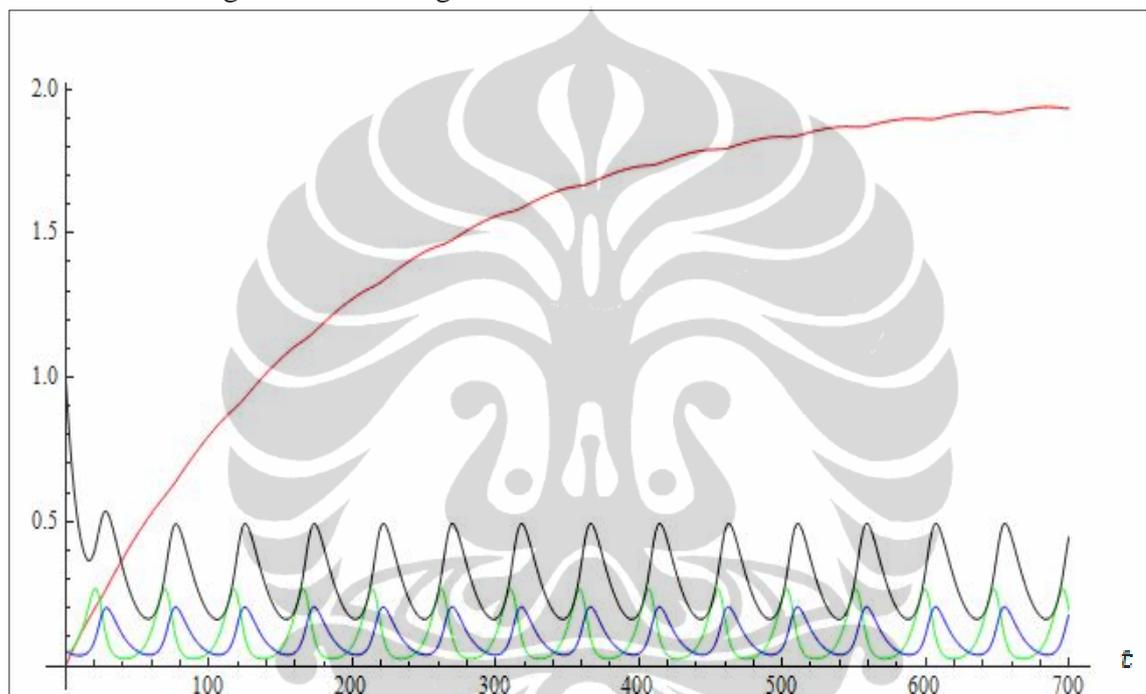
Gambar 4.4 memperlihatkan perilaku dinamika keempat komponen dalam ekosistem air tawar pada saat proses daur ulang nutrisi berlangsung dengan nilai awal yang sedikit berbeda dengan gambar sebelumnya yaitu Gambar 4.3. Karena pada awal proses *detritus* dibuat nol, penurunan nutrisi abiotik sedikit lebih curam dibandingkan dengan Gambar 4.3 karena tidak adanya remineralisasi dari *detritus*, dan untuk dinamika perilaku *autotrof*, dan herbivora tidak jauh berbeda dengan kasus sebelumnya.

Jumlah *detritus* mengalami peningkatan dari $t = 0$ sampai dengan $t = 25$, dan setelahnya *detritus* akan mengalami penurunan karena sejumlah *detritus* diuraikan kembali menjadi nutrisi abiotik sehingga dapat membantu peningkatan jumlah nutrisi abiotik yang nantinya dikonsumsi oleh *autotrof*. Kemudian *detritus* mengalami peningkatan kembali dan beberapa waktu setelahnya akan mengalami

penurunan kembali, dan proses akan berlangsung terus menerus sampai *detritus* mencapai keadaan yang stabil.

Dan setelah seluruh komponen dalam sistem proses daur ulang nutrisi telah mencapai keadaan yang stabil maka proses daur ulang nutrisi dapat dikatakan mencapai kestabilan.

Pada Gambar 4.5 dibawah ini digambarkan proses daur ulang nutrisi dengan nilai awal nutrisi abiotik dikritiskan dengan nilai nol. Sedangkan jumlah *detritus* dikritiskan dengan nilai awal 1 gram.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.5. Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, dan *detritus* saat T_1

stabil dengan nilai awal $N(0) = 0, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$

Gambar 4.5 menghasilkan perilaku dinamika yang terjadi saat tidak tersedianya nutrisi abiotik di dalam kolam. Pada saat $t = 0$ dan setelahnya jumlah nutrisi abiotik mengalami peningkatan yang cukup signifikan sampai akhirnya mencapai titik puncak dan menjadi stabil. Hal ini disebabkan proses remineralisasi *detritus*

pada awal proses lebih cepat dibandingkan dengan tingkat konsumsi nutrisi abiotik oleh *autotrof* sehingga jumlah nutrisi abiotik kritis meningkat walaupun sebagian nutrisi abiotik dikonsumsi oleh *autotrof*. Dan itulah yang menyebabkan jumlah *detritus* pada saat $t = 0$ sampai dengan $t = 16$ mengalami penurunan.

Kritis kemudian tingkat konsumsi nutrisi abiotik dan tingkat kematian menjadi seimbang dan menjadi stabil sehingga jumlah nutrisi abiotik dalam sistem pun akan mencapai kestabilannya.

Jumlah *detritus* akan mengalami peningkatan setelah $t = 16$, dan akan terus meningkat sampai dengan $t = 28$, setelah itu *detritus* kembali mengalami penurunan. Peningkatan jumlah *detritus* disebabkan oleh sejumlah herbivora yang pada saat $t = 0$ sampai dengan $t = 9$ mengalami kematian. Namun seiring dengan menurunnya jumlah herbivora pada awal proses, *autotrof* malah mengalami peningkatan jumlah sampai dengan $t = 21$. Namun setelah $t = 21$ *autotrof* mengalami penurunan yang disebabkan oleh proses konsumsi yang dilakukan oleh herbivora yang menyebabkan jumlah herbivora meningkat setelah $t = 9$ sampai dengan $t = 28$.

Jumlah ketiga komponen di atas yaitu; *autotrof*, herbivora dan *detritus* akan naik turun (berosilasi) terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

Dan karena seluruh komponen dalam sistem mencapai keadaan yang stabil maka proses daur ulang nutrisi pada kasus inipun dikatakan telah mencapai kestabilan.

Dari ketiga gambar dinamika sebelumnya yaitu Gambar 4.3, 4.4, dan 4.5, dapat diambil kesimpulan bahwa proses daur ulang nutrisi yang terjadi pada kasus herbivora sebagai konsumen tingkat akhir dengan titik kritis $T_1 \left(\frac{I_1}{r_N}, 0, 0, 0 \right)$ dan nilai parameter seperti pada Tabel 4.1 adalah proses yang pada selang waktu tertentu akan mengalami proses osilasi yang kontinyu yang menunjukkan keadaan stabil. Namun pada awal proses akan menghasilkan hasil dinamika yang berbeda tergantung dengan nilai awalnya.

4.2 Karnivora sebagai Konsumen Tingkat Akhir

Pada kasus ini, diasumsikan seluruh komponen terdapat dalam sistem daur ulang nutrisi, sehingga organisme karnivora tidak diabaikan. Oleh karena itu model persamaan yang ditinjau berbentuk seperti berikut:

$$\frac{dN}{dt} = I_N - r_N N - \frac{\gamma r_1 N X}{k_1 + N} + \gamma d_4 D, \quad (3.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r_1 N X}{k_1 + N} - f_1 X Y - (d_1 + e_1) X, \quad (3.6)$$

$$\frac{dY}{dt} = \eta f_1 X Y - f_2 Y Z - (d_2 + e_2) Y, \quad (3.7)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \eta f_2 Y Z - (d_3 + e_3) Z, \quad (3.8)$$

$$\frac{dD}{dt} = (1 - \eta) f_1 X Y + (1 - \eta) f_2 Y Z + d_1 X + d_2 Y + d_3 Z - (d_4 + e_4) D, \quad (3.9)$$

Proses selanjutnya sama seperti pada kasus sebelumnya, yaitu ditentukan titik kritis untuk persamaan (3.1), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), yang kemudian dianalisa kestabilan disekitar titik kritis tersebut, kestabilan dan dinamika populasinya.

4.2.1 Penentuan Titik Kritis

Titik kritis $(N^*, X^*, Y^*, Z^*, D^*)$ diperoleh berdasarkan persamaan berikut:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = 0, \quad \frac{dY}{dt} = 0, \quad \frac{dZ}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = 0$$

dan diperoleh 4 (empat) titik kritis, kritisi pada penelitian ini hanya satu titik kritis saja yang dianalisa kestabilannya yaitu:

$$T_2 \left(-\frac{(d_2 + e_2) k_2}{d_1 + e_1 - r_1}, \frac{(d_2 + e_2) (-I_N r_1 + (d_1 + e_1) (I_N + k_1 r_1))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1) e_4) \gamma (d_1 + e_1 - r_1)}, 0, 0, \frac{d_1 (-I_N r_1 + (d_1 + e_1) (I_N + k_1 r_1))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1) e_4) \gamma (d_1 + e_1 - r_1)} \right)$$

4.2.2 Analisis Kestabilan Titik Kritis

Untuk melihat perilaku solusi di sekitar titik kritis, maka dilakukan pelinearan pada model yang merupakan persamaan diferensial taklinear. Misalkan sistem persamaan (3.1), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\frac{dN}{dt} = f_1(N, X, Y, Z, D) \quad (4.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = f_2(N, X, Y, Z, D) \quad (4.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_3(N, X, Y, Z, D) \quad (4.3)$$

$$\frac{dZ}{dt} = f_4(N, X, Y, Z, D) \quad (4.5)$$

$$\frac{dD}{dt} = f_5(N, X, Y, Z, D) \quad (4.6)$$

Kita ubah sistem persamaan (3.1), (3.6), (3.7), (3.8) dan (3.9) ke dalam bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\frac{dN}{dt} \quad \frac{dX}{dt} \quad \frac{dY}{dt} \quad \frac{dZ}{dt} \quad \frac{dD}{dt} \right]^T$$

$$\mathbf{x} = [N \quad X \quad Y \quad Z \quad D]^T$$

Sedangkan \mathbf{A} matriks Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} & \frac{\partial f_1}{\partial Z} & \frac{\partial f_1}{\partial D} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} & \frac{\partial f_2}{\partial Z} & \frac{\partial f_2}{\partial D} \\ \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Y} & \frac{\partial f_3}{\partial Z} & \frac{\partial f_3}{\partial D} \\ \frac{\partial f_4}{\partial N} & \frac{\partial f_4}{\partial X} & \frac{\partial f_4}{\partial Y} & \frac{\partial f_4}{\partial Z} & \frac{\partial f_4}{\partial D} \\ \frac{\partial f_5}{\partial N} & \frac{\partial f_5}{\partial X} & \frac{\partial f_5}{\partial Y} & \frac{\partial f_5}{\partial Z} & \frac{\partial f_5}{\partial D} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk f_1, f_2, f_3, f_4 dan f_5 adalah ruas kanan dari persamaan (3.1), (3.6), (3.7), (3.8) dan (3.9).

Dalam hal ini matriks A adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -r_n - \frac{\gamma r_1 k_1 X}{(k_1 + N)^2} & -\frac{\gamma r_1 N}{(k_1 + N)} & 0 & 0 & \gamma d_4 \\ \frac{r_1 k_1 X}{(k_1 + N)^2} & -d_1 - e_1 - f_1 Y - \frac{r_1 N}{(k_1 + N)} & -f_1 X & 0 & 0 \\ 0 & \eta f_1 Y & \eta f_1 X - d_2 - e_2 - f_2 Z & -f_2 Z & 0 \\ 0 & 0 & \eta f_2 Z & \eta f_2 Y - d_3 - e_3 & 0 \\ 0 & (1 - \eta) f_1 Y + d_1 & (1 - \eta) f_1 X + d_2 + (1 - \eta) f_2 Z & (1 - \eta) f_2 Y + d_3 & -d_4 - e_4 \end{bmatrix}$$

Bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan A seperti tersebut di atas merupakan sistem persamaan linear $\dot{x} = Ax + b$, $x(0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $b=0$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dD}{dt} \end{bmatrix}$$

Substitusi $T_2 \left(-\frac{(d_1 + e_1) k_1}{d_1 + e_1 - r_1}, \frac{(d_1 + e_1)(-I_n r_1 + (d_1 + e_1)(k_1 + k_1 r_n))}{(d_1 + e_1 + (d_1 + e_1) e_2) \gamma (d_1 + e_1 - r_1)}, 0, 0, \frac{d_1(-I_n r_1 + (d_1 + e_1)(k_1 + k_1 r_n))}{(d_1 + e_1 + (d_1 + e_1) e_2) \gamma (d_1 + e_1 - r_1)} \right)$

pada matriks A tersebut di atas menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc}
 \left[\begin{array}{cccc}
 \frac{(d_4 + e_4)k_1 r_1 (-nr_1 + d_1(n + k_1 r_n) + e_1(n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1)e_4)(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1})(d_1 + e_1 - r_1)} & \frac{(d_1 + e_1)k_1 r_1}{(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1})(d_1 + e_1 - r_1)} & 0 & 0 & d_4 \eta \\
 \frac{(d_4 + e_4)k_1 r_1 (-nr_1 + d_1(n + k_1 r_n) + e_1(n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1)e_4)g(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1})(d_1 + e_1 - r_1)} & -d_1 - e_1 + \frac{(d_1 + e_1)k_1 r_1}{(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1})(d_1 + e_1 - r_1)} & \frac{(d_4 + e_4)f_1(-nr_1 + d_1(n + k_1 r_n) + e_1(n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1)e_4)g(d_1 + e_1 - r_1)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -d_2 - e_2 + \frac{(d_4 + e_4)f_1(-nr_1 + d_1(n + k_1 r_n) + e_1(n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1)e_4)g(d_1 + e_1 - r_1)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -d_3 - e_3 & 0 \\
 0 & d_1 & d_2 + \frac{(d_4 + e_4)f_1(1 - I)(-nr_1 + d_1(n + k_1 r_n) + e_1(n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + (d_1 + e_1)e_4)g(d_1 + e_1 - r_1)} & d_3 & -d_4 - e_4
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen yang nantinya nilai eigen tersebut akan digunakan untuk menganalisa kestabilan dari titik kritis T_2 .

Nilai eigen dari A adalah akar dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -d_3 - e_3$$

$$\lambda_2 = -d_4 - e_4$$

$$\lambda_3 = -d_1 - e_1 + \frac{(d_1 + e_1)k_1 r_1}{\left(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1}\right)(d_1 + e_1 - r_1)}$$

$$\lambda_4 = -r_n$$

$$\lambda_5 = -d_2 - e_2 + \frac{(d_4 + e_4)f_1 \eta (-I_n r_1 + (d_1 + e_1)(I_n + k_1 r_n))}{(d_4 e_1 + ((d_1 + e_1)e_4)) \gamma (d_1 + e_1 - r_1)}$$

Karena semua parameter taknegatif maka $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$, sehingga kestabilan di titik ini bergantung pada nilai eigen λ_3 dan λ_5 . Titik kritis T_2

merupakan titik kritis stabil, jika $d_1 + e_1 > \frac{(d_1 + e_1)k_1 r_1}{\left(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1}\right)(d_1 + e_1 - r_1)}$ dan

$d_2 + e_2 > \frac{(d_4 + e_4)f_1 \eta (-I_n r_1 + (d_2 + e_2)(I_n + k_1 r_n))}{(d_4 e_2 + ((d_2 + e_2)e_4)) \gamma (d_2 + e_2 - r_2)}$. Sebaliknya titik kritis T_2 tidak stabil

jika $d_1 + e_1 < \frac{(d_1 + e_1)k_1 r_1}{\left(k_1 - \frac{(d_1 + e_1)k_1}{d_1 + e_1 - r_1}\right)(d_1 + e_1 - r_1)}$ dan

$d_2 + e_2 < \frac{(d_4 + e_4)f_1 \eta (-I_n r_1 + (d_2 + e_2)(I_n + k_1 r_n))}{(d_4 e_2 + ((d_2 + e_2)e_4)) \gamma (d_2 + e_2 - r_2)}$.

4.2.3 Orbit Kestabilan dan Dinamika Sistem

Untuk menganalisa kestabilan dari titik kritisnya diperlukan nilai parameter (berdasarkan nilai-nilai parameter

$I_n, \gamma, r_1, k_1, k_2, k_3, r_n, e_1, e_2, e_3, e_4, d_1, d_2, d_3, d_4, f_1, f_2, \eta$ yang diperoleh dari beberapa percobaan).

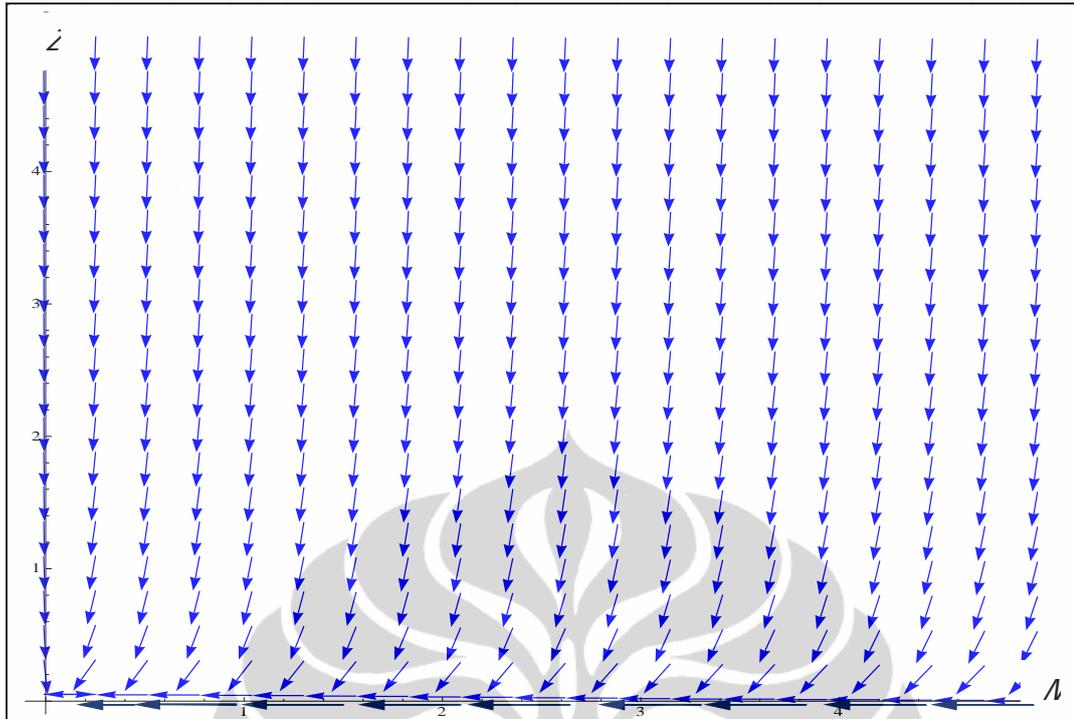
Nilai parameter tersebut diberikan pada tabel berikut.

Tabel 4.2. Kelompok Nilai Parameter (Kasus II)

No	Parameter	Nilai	No	Parameter	Nilai
1	I_n	0,010	9	e_1	0,001
2	γ	0,020	10	e_2	0,001
3	r_1	0,300	11	e_3	0,001
4	k_1	0,005	12	e_4	0,001
5	η	0,500	13	d_1	0,100
6	f_1	2,000	14	d_2	0,100
7	f_2	10	15	d_3	0,100
8	r_n	0,005	16	d_4	0,100

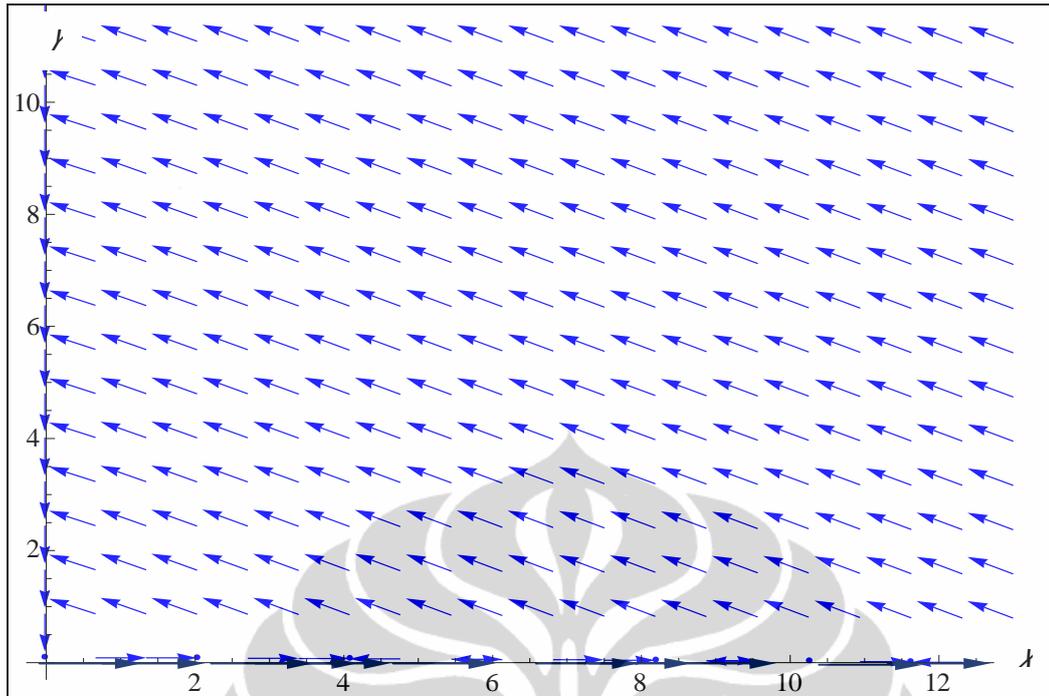
Nilai-nilai parameter pada tabel di atas dipilih karena dapat menghasilkan kestabilan untuk titik kritis $T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$.

Berikut ini digambarkan bidang fase yang menunjukkan orbit kestabilan di sekitar $T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada tabel 4.1 di atas dan nilai awal $N(0) = 1,1$, $X(0) = 1,6$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan $D(0) = 4$, seperti diberikan pada Gambar 4.6 s.d. Gambar 4.8 di bawah ini.



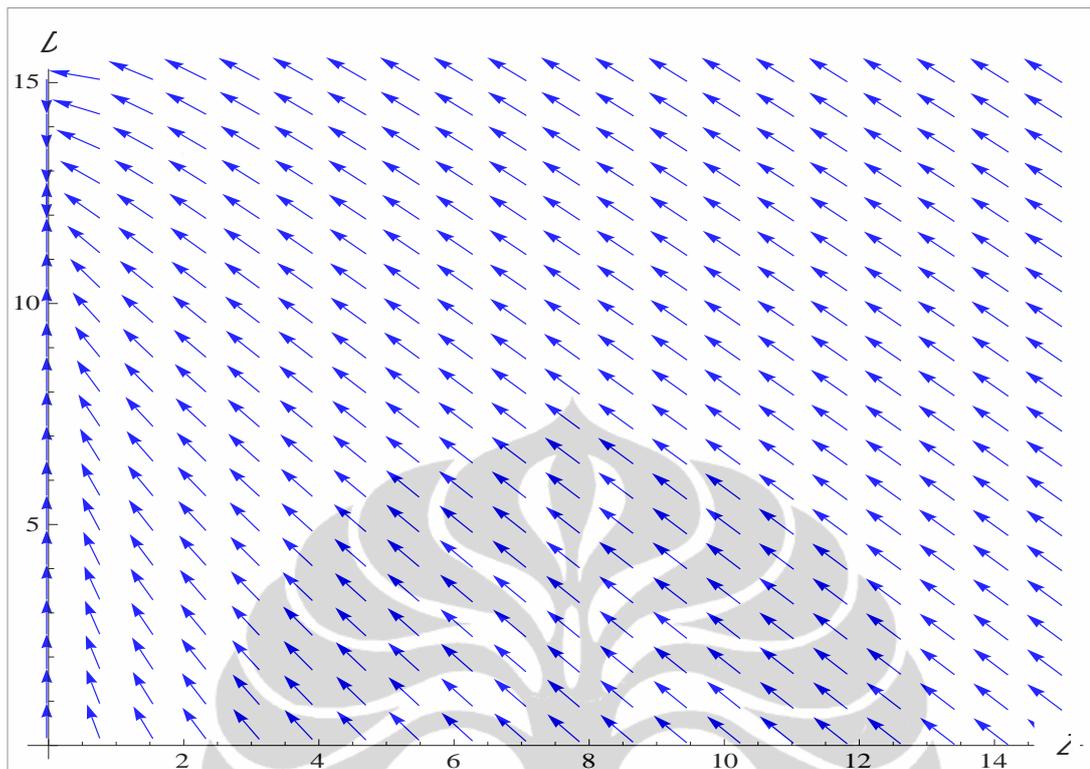
Gambar 4.6. Kestabilan di sekitar titik $T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$
pada bidang (N, Z)

Dari Gambar 4.6 di atas terlihat bahwa titik kritis T_2 pada bidang (N, Z) yaitu $T_2(0,253769; 0)$ dituju oleh orbit.



Gambar 4.7. Kestabilan di sekitar titik $T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$
pada bidang (X, Y)

Dari Gambar 4.7 di atas terlihat bahwa titik kritis T_2 pada bidang (X, Y) yaitu $T_2(12,2434; 0)$ dituju oleh orbit.



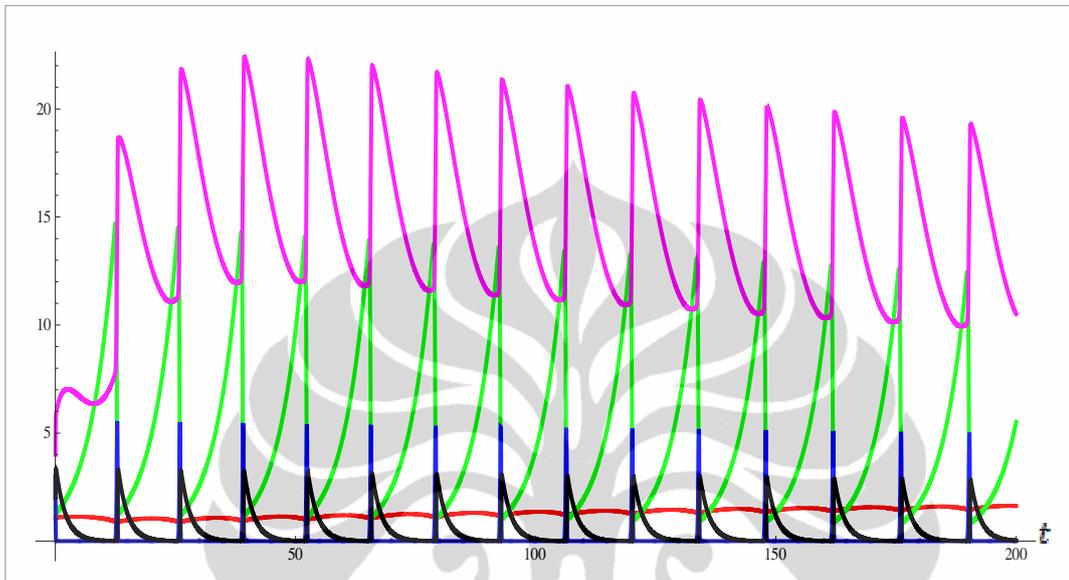
Gambar 4.8. Kestabilan di sekitar titik $T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ pada bidang (Z, D)

Dari Gambar 4.8 di atas terlihat bahwa titik kritis T_2 pada bidang (Z, D) yaitu $T_2(0; 12,1222)$ dituju oleh orbit.

Berdasarkan Gambar 4.6 sampai dengan Gambar 4.8 diatas dapat dilihat bahwa orbit bergerak mendekati titik kritis T_2 . Hal ini memberikan kestabilan bagi titik kritis T_2 untuk nilai parameter pada Tabel 4.2.

Setelah menggambarkan kestabilan di sekitar titik kritis T_2 selanjutnya digambarkan perilaku dinamika dari nutrisi abiotik, organisme *autotrof*, organisme herbivora, dan organisme *detritus* selama proses daur ulang nutrisi berlangsung dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang terdapat di Tabel 4.2 dan nilai-nilai awal yang berbeda.

Gambar 4.9 berikut adalah dinamika perilaku dari masing-masing komponen pembentuk proses daur ulang nutrisi dengan menggunakan nilai awal untuk nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora, dan *detritus* berturut-turut adalah 1,1; 1,6; 3; 2; 4.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari karnivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.9. Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora dan *detritus* saat T_2 stabil dengan nilai awal $N(0) = 1,1$, $X(0) = 1,6$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan $D(0) = 4$

Dari Gambar 4.9 terlihat bahwa pada awal proses yaitu $t = 0$, jumlah nutrisi abiotik mengalami sedikit peningkatan sampai dengan $t = 4$. Jumlah nutrisi abiotik yang meningkat walaupun telah dikonsumsi oleh *autotrof* untuk membuat makanannya sendiri adalah karena mendapat sejumlah tambahan dari hasil urai *detritus* dan meskipun *detritus* diremineralisasi, jumlah *detritus* tidak mengalami penurunan melainkan meningkat yaitu dari $t = 0$ sampai dengan $t = 3$.

Peningkatan jumlah *detritus* tersebut dikarenakan oleh banyaknya organisme herbivora dan karnivora yang mati dan menyebabkan jumlah organisme-organisme tersebut menurun. Jumlah herbivora yang menurun pada $t = 0$ sampai dengan $t = 5$ disebabkan oleh kurangnya persediaan *autotrof* di dalam kolam dan lambatnya daya cerna dari herbivora. Hal yang sama juga terjadi oleh karnivora, karena jumlah herbivora yang tersedia di dalam kolam tidak mencukupi kebutuhan konsumsi karnivora mengakibatkan jumlah karnivora menurun pada saat $t = 0$ sampai $t = 12$.

Jumlah nutrisi abiotik yang meningkat sampai dengan $t = 4$ akan mengalami penurunan setelahnya sampai dengan $t = 13$. Hal tersebut dikarenakan oleh *autotrof* yang secara terus menerus mengkonsumsi nutrisi abiotik. Namun setelah $t = 13$ sampai dengan $t = 20$, nutrisi abiotik yang tersedia dalam kolam akan meningkat kembali, dan setelahnya akan kembali menurun. Selanjutnya, jumlah nutrisi abiotik akan mengalami naik dan turun (berosilasi) terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

Jumlah *autotrof* pada saat awal proses yaitu $t = 0$ menurun sampai dengan $t = 1$ namun setelahnya sampai dengan $t = 12$ jumlah *autotrof* akan meningkat karena ketersediaan nutrisi abiotik yang cukup untuk konsumsi *autotrof*. Jumlah *autotrof* yang meningkat akan mengalami penurunan setelah $t = 12$. Menurunnya jumlah *autotrof* dikarenakan oleh proses konsumsi yang dilakukan oleh herbivora dan hanya sampai $t = 15$, dan setelahnya *autotrof* mengalami peningkatan kembali. Sama halnya dengan nutrisi abiotik, *autotrof* pun mengalami naik turun dalam hal jumlahnya di dalam kolam secara terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

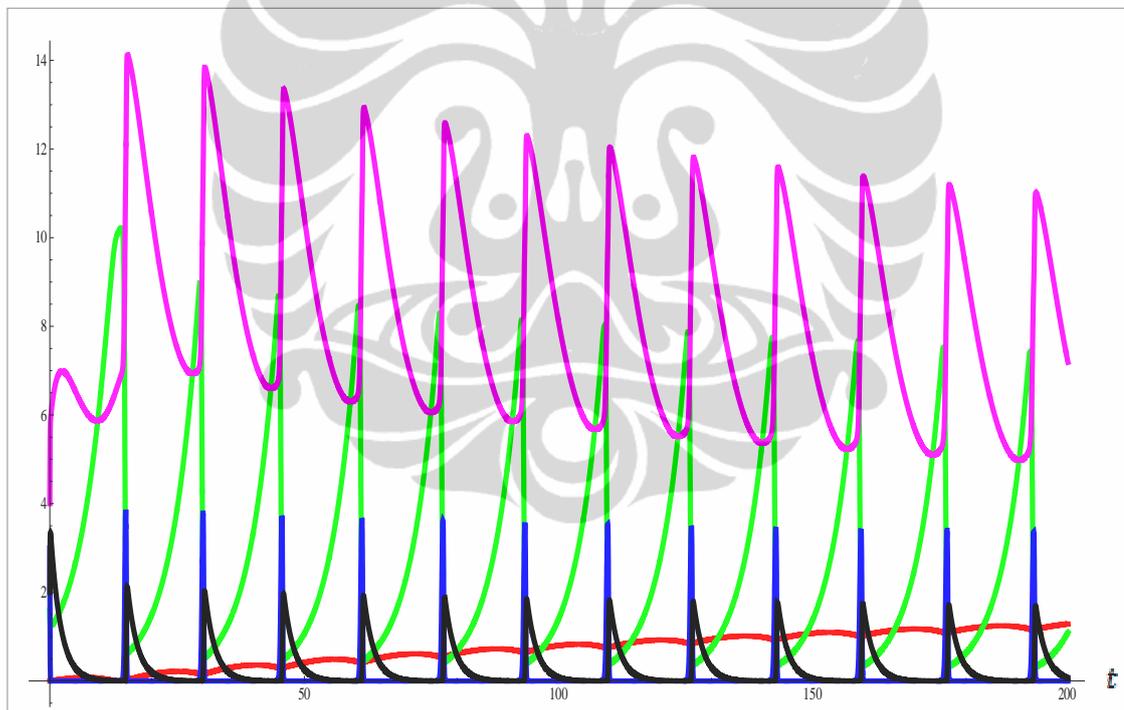
Herbivora akan mengalami peningkatan setelah $t = 5$ sampai dengan $t = 13$ dan setelahnya herbivora kembali akan mengalami penurunan. Sedangkan karnivora akan mengalami peningkatan setelah $t = 12$ sampai dengan $t = 14$ dan setelahnya karnivora akan mengalami penurunan kembali. Tak berbeda dengan

nutrisi abiotik dan *autotrof*, herbivora dan karnivora pun mengalami peningkatan dan penurunan jumlah secara terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

Penurunan jumlah *detritus* akan terjadi setelah $t = 3$ sampai dengan $t = 8$. Hal ini dikarenakan oleh sejumlah *detritus* yang diremineralisasi. Namun setelah $t = 8$ sampai dengan $t = 14$ *detritus* kembali mengalami peningkatan.

Peningkatan dan penurunan jumlah secara terus menerus juga terjadi pada *detritus* sampai akhirnya menuju kepada keadaan stabil.

Proses yang diuraikan diatas akan berlangsung terus menerus sampai kelima komponen dalam sistem mencapai keadaan yang stabil. Sehingga proses daur ulang nutrisi akan mencapai kestabilan.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari karnivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.10 Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora dan *detritus* saat T_2 stabil dengan nilai awal $N(0) = 0$, $X(0) = 1,6$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan

$$D(0) = 4$$

Gambar 4.10 di atas memperlihatkan dinamika perilaku dari masing-masing komponen selama proses daur ulang nutrisi berlangsung dengan nilai awal yang berbeda dengan kasus yang sebelumnya, yaitu nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora, dan *detritus* berturut-turut adalah sebesar 0; 1,6; 3; 2; dan 4. Dinamika pada kasus ini tidak jauh berbeda dengan kasus sebelumnya, hanya berbeda pada waktunya (t) saja.

Pada awal proses dimulai, jumlah nutrisi abiotik yang tadinya tidak ada atau sebesar nol akan bergerak naik sampai dengan $t = 7$. Setelah $t = 7$ jumlah nutrisi abiotik menurun sampai dengan $t = 14$. Dan kembali mengalami peningkatan dan penurunan secara terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

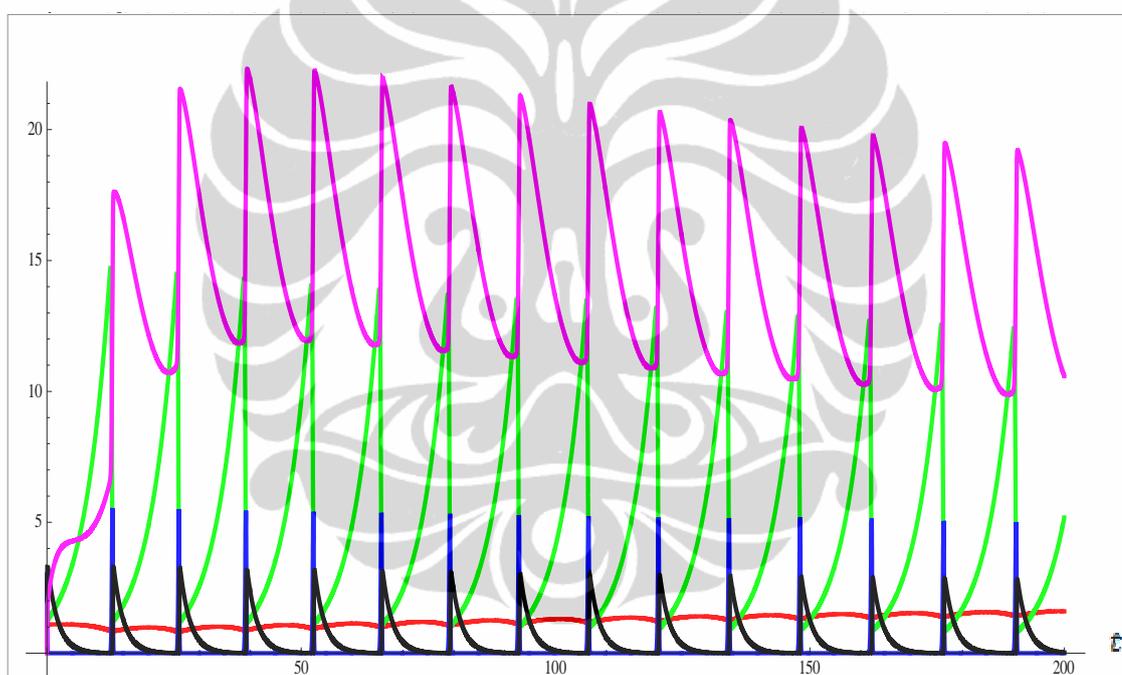
Autotrof akan menurun dari $t = 0$ sampai $t = 1$, kemudian setelahnya akan meningkat sampai dengan $t = 14$ dan kembali mengalami penurunan sampai dengan $t = 16$. Sama halnya dengan nutrisi abiotik, *autotrof* pun akan mengalami naik turun secara terus menerus sampai mencapai keadaan yang stabil.

Jumlah herbivora akan menurun pada $t = 0$ sampai dengan $t = 6$. Setelah $t = 6$ sampai dengan $t = 15$ herbivora akan mengalami peningkatan dan kemudian akan mengalami penurunan kembali. Karnivora pun akan mengalami penurunan pada awal proses yaitu dari $t = 0$ sampai dengan $t = 14$. Setelah $t = 14$ sampai dengan $t = 16$ karnivora mengalami peningkatan dan kemudian mengalami penurunan kembali. Berbeda dengan herbivora dan karnivora yang menurun pada awal proses, *detritus* malah meningkat yaitu dari $t = 0$ sampai dengan $t = 3$. Setelah $t = 3$ *detritus* akan menurun sampai dengan $t = 9$, dan setelahnya akan kembali meningkat sampai dengan $t = 16$, lalu penurunan

jumlah *detritus* kembali terjadi setelahnya. Ketiga komponen inipun mengalami naik dan turun secara terus menerus sampai akhirnya mencapai keadaan yang stabil.

Karena seluruh komponen pembentuk proses daur ulang nutrisi telah mencapai keadaan yang stabil, proses daur ulang nutrisi pada kasus inipun dapat dikatakan proses daur ulang yang stabil.

Setelah digambarkan dinamika perilaku dari masing-masing komponen pembentuk proses daur ulang nutrisi dengan dua nilai awal yang berbeda di atas, berikut akan dilihat dinamika perilaku dengan nilai awal yang sedikit berbeda dari kasus pertama yaitu dengan nilai awal *detritus*nya adalah nol dan nilai awal yang sama untuk yang lain.



Keterangan :

- : Dinamika perilaku dari nutrisi abiotik
- : Dinamika perilaku dari *autotrof*
- : Dinamika perilaku dari herbivora
- : Dinamika perilaku dari karnivora
- : Dinamika perilaku dari *detritus*

Gambar 4.11. Dinamika nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora, karnivora dan *detritus* saat T_2 stabil dengan nilai awal

$$N(0) = 1,1, X(0) = 1,6, Y(0) = 3, Z(0) = 2 \text{ dan } D(0) = 0$$

Dari Gambar 4.11 diatas dapat terlihat perilaku dinamika kelima komponen yang di sistem selama proses daur ulang nutrisi berlangsung untuk nilai awal yang berbeda dari dua kasus sebelumnya.

Dinamika pada kasus ini tidak jauh berbeda dengan kasus-kasus sebelumnya, hanya berbeda pada waktunya (t) saja.

Jumlah nutrisi abiotik akan meningkat pada awal waku dari $t = 0$ sampai dengan $t = 2$. Setelahnya akan mengalami penurunan sampai dengan $t = 13$ kemudian kembali mengalami kenaikan sampai dengan $t = 20$, dan setelahnya mengalami penurunan kembali.

Autotrof akan menurun dari $t = 0$ sampai $t = 1$, kemudian setelahnya akan meningkat sampai dengan $t = 12$ dan kembali mengalami penurunan sampai dengan $t = 13$.

Jumlah herbivora akan menurun pada $t = 0$ sampai dengan $t = 10$. Setelah $t = 10$ sampai dengan $t = 13$ herbivora akan mengalami peningkatan dan kemudian akan mengalami penurunan kembali. Karnivora pun akan mengalami penurunan pada awal proses yaitu dari $t = 0$ sampai dengan $t = 12$. Setelah $t = 12$ sampai dengan $t = 13$ karnivora mengalami peningkatan dan kemudian mengalami penurunan kembali. Berbeda dengan herbivora dan karnivora yang menurun pada awal proses, *detritus* malah meningkat yaitu dari $t = 0$ sampai dengan $t = 14$. Setelah $t = 14$ *detritus* akan menurun sampai dengan $t = 24$, lalu peningkatan jumlah *detritus* kembali terjadi setelahnya.

Selanjutnya proses berlangsung terus menerus seperti dua kasus sebelumnya, sampai kelima komponen mencapai jumlah yang stabil. Karenanya proses daur ulang nutrisi dapat dikatakan stabil.

Dari ketiga gambar dinamika diatas yaitu Gambar 4.9, 4.10, 4.11, kita dapat mengambil analisa bahwa proses daur ulang nutrisi yang terjadi pada kasus

karnivora sebagai konsumen tingkat akhir dengan titik kritis

$T_2(0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ dan nilai parameter seperti pada Tabel 4.2

adalah proses yang pada selang waktu tertentu akan mengalami proses osilasi yang kontinyu yang menunjukkan keadaan stabil. Namun pada awal proses akan menghasilkan hasil dinamika yang berbeda tergantung dengan nilai awalnya.



BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah dilakukan beberapa kali percobaan terhadap parameter-parameter dalam sistem proses daur ulang nutrisi, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- 1) Pada proses daur ulang nutrisi yang tidak terdapat karnivora di dalamnya diperoleh empat buah titik kritis, sedangkan pada proses daur ulang nutrisi yang terdapat karnivora di dalamnya diperoleh lima buah titik kritis.
- 2) Pada penelitian ini hanya dibahas satu titik kritis pada masing-masing proses yaitu; $T_1 (2,0,0,0)$ pada proses daur ulang nutrisi yang tidak terdapat karnivora dan $T_2 (0,253769; 12,2434; 0; 0; 12,1222)$ pada proses daur ulang nutrisi yang terdapat karnivora.
- 3) Hasil analisa kestabilan dari kedua proses di atas menunjukkan bahwa proses daur ulang nutrisi pada masing-masing aspek bersifat stabil.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat diperluas dalam sistem yang lebih rinci komponennya, misalnya dengan ditambahkan konsumen pada tingkat yang lebih tinggi.

DAFTAR REFERENSI

- [1] Anton, H. (1995). *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ke-7. Terjemahan Pantur Silaban & I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.
- [2] Baglama, J. (2005). *Nutrient–Plankton Models with Nutrient Recycling*. *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 49. 375-387.
- [3] Bandyopadhyay, M. (2004). *Dynamics of an autotroph-herbivore ecosystem with nutrient recycling*. *Ecological modelling*. 201-209.
- [4] DeAngelis, D, L. (1986). *Nutrient Recycling and Systems Resilience in a Model of an Experimental Aquatic System*. *Mathematical ecology*. 189-215.
- [5] DeAngelis, D, L. (1989). *Effects of Nutrient Recycling an Food-Chain Length on Resilience*. *The American Naturalist*. Vol. 134, No. 5. 778-805.
- [6] Grimshaw, R. (1990). *Nonlinear Ordinary Differential Equation*. Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- [7] Kreyszig, E. (1998). *Advanced Engineering Mathematica*. Sixth Edition. John Wiley and Sons.
- [8] M. Salman Akhyar. (2004). *Biologi untuk SMA Kelas 7 Semester I*. Grafindo Media Pratama. Bandung.
- [9] Tu, P. N. V. (1994). *Dynamical System. An introduction with Application in Economics and Biology*. Springer-Verlag. Heidelberg, Germany.
- [10] Verhulst, F. (1990). *Nonlinear Differential Equation and Dynamical Systems*. Springer-Verlag. Heidelberg, Germany.
- [11] Yusfridawati. (2009, Februari). *Analisis Kestabilan Model Proses Daur Ulang Nutrisi Dalam Suatu Kolam Nutrisi*. Prosiding Seminar Nasional Matematika UI.

LAMPIRAN PROGRAM

Lampiran 1. Program penentuan titik kritis beserta analisis kestabilan di sekitar titik kritis pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora

```
sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 3/27/2010
intersset;plotset;
setstate[{n,x,y,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d4,rn,e1,e2,e4,f1}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,i*f1*x*y-d2*y-e2*y,(1-i)*f1*x*y+d1*x+d2*y-d4*d-e4*d};
eqstates=findpolyeq

{{{(-d1 k1-e1 k1)/(d1+e1-r1),(d4 in+e4 in-(d4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)-(e4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1))/((d4 e1+d1 e4+e1 e4) g),0,(1/(d4 g))(-in+((-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)+(d1 (d4 in+e4 in-(d4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)-(e4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)))/(d4 e1+d1 e4+e1 e4)+(e1 (d4 in+e4 in-(d4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)-(e4 (-d1 k1-e1 k1) rn)/(d1+e1-r1)))/(d4 e1+d1 e4+e1 e4))},{1/(2 (d4+e4) f1 i rn) (-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in-d2 e4 g r1-e2 e4 g r1-d4 e2 g i r1-d4 f1 i k1 rn-e4 f1 i k1 rn-
\[\Sqrt]{4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in) k1 rn+(d2 d4 e1 g+d4 e1 e2 g-d1 d4 e2 g i-d4 e1 e2 g i-d4 f1 i in-e4 f1 i in+d2 e4 g r1+e2 e4 g r1+d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 rn)^2)),(d2+e2)/(f1 i),1/f1 (-d1-e1+r1-(k1 r1)/(k1+1/(2 (d4+e4) f1 i rn) (-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in-d2 e4 g r1-e2 e4 g r1-d4 e2 g i r1-d4 f1 i k1 rn-e4 f1 i k1 rn-\[\Sqrt]{4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in) k1 rn+(d2 d4 e1 g+d4 e1 e2 g-d1 d4 e2 g i-d4 e1 e2 g i-d4 f1 i in-e4 f1 i in+d2 e4 g r1+e2 e4 g r1+d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 rn)^2))}),1/(d4 g) ((d1 d4 e2 g)/(2 (d4+e4) f1 i)+(d4 e1 e2 g)/(2 (d4+e4) f1 i)-(d2 d4 e1 g)/(2 (d4+e4) f1 i)-(d4 e1 e2 g)/(2 (d4+e4) f1 i)-in+(d4 in)/(2 (d4+e4))+e4 in)/(2 (d4+e4))-(d4 e2 g r1)/(2 (d4+e4) f1 i)+(d2 g r1)/(f1 i)+(e2 g r1)/(f1 i)-(d2 e4 g r1)/(2 (d4+e4) f1 i)-(e2 e4 g r1)/(2 (d4+e4) f1 i)-(d4 k1 rn)/(2 (d4+e4))-(e4 k1 rn)/(2 (d4+e4))-1/(2 (d4+e4) f1 i) (\[\Sqrt]{4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in) k1
```

$$\begin{aligned}
 & r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i - i n - e_4 f_1 i + i n + d_2 e_4 g \\
 & r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 r_n^2)) - (d_2 g k_1 r_1) / (f_1 i \\
 & (k_1 + 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 \\
 & i i n + e_4 f_1 i - i n - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - d_4 e_2 g i r_1 - d_4 f_1 i k_1 r_n - e_4 f_1 i k_1 r_n - \\
 & \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i \\
 & i n + e_4 f_1 i i n) k_1 r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i - i n - e_4 \\
 & f_1 i + i n + d_2 e_4 g r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 r_n^2))))) - (e_2 g \\
 & k_1 r_1) / (f_1 i (k_1 + 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 \\
 & e_2 g + i d_4 f_1 i + i n + e_4 f_1 i - i n - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - d_4 e_2 g i r_1 - d_4 f_1 i k_1 r_n - e_4 f_1 i \\
 & k_1 r_n - \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i \\
 & f_1 i + i n + e_4 f_1 i i n) k_1 r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i \\
 & i n - e_4 f_1 i + i n + d_2 e_4 g r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 \\
 & r_n^2))))) \}, \{ 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g \\
 & i + d_4 f_1 i + i n + e_4 f_1 i - i n - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - d_4 e_2 g i r_1 - d_4 f_1 i k_1 r_n - e_4 f_1 i k_1 \\
 & r_n + \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i \\
 & i + i n + e_4 f_1 i i n) k_1 r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i - i n - \\
 & e_4 f_1 i + i n + d_2 e_4 g r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 \\
 & r_n^2)) \}, (d_2 + e_2) / (f_1 i), 1 / f_1 (-d_1 - e_1 + r_1 - (k_1 r_1) / (k_1 + 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 \\
 & g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i + i n + e_4 f_1 i - i n - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - \\
 & d_4 e_2 g i r_1 - d_4 f_1 i k_1 r_n - e_4 f_1 i k_1 r_n + \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 \\
 & g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i + i n + e_4 f_1 i i n) k_1 r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - \\
 & d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i - i n - e_4 f_1 i + i n + d_2 e_4 g r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i \\
 & r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 r_n^2)) \}, 1 / (d_4 g) ((d_1 d_4 e_2 g) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) + (d_4 e_1 e_2 \\
 & g) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) - (d_2 d_4 e_1 g) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) - (d_4 e_1 e_2 g) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) - \\
 & i n + (d_4 i n) / (2 (d_4 + e_4)) + (e_4 i n) / (2 (d_4 + e_4)) - (d_4 e_2 g r_1) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) + (d_2 g \\
 & r_1) / (f_1 i) + (e_2 g r_1) / (f_1 i) - (d_2 e_4 g r_1) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) - (e_2 e_4 g r_1) / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) - \\
 & (d_4 k_1 r_n) / (2 (d_4 + e_4)) - (e_4 k_1 r_n) / (2 (d_4 + e_4)) + 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i) (\sqrt{(4 (d_4 + e_4) \\
 & f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 i + i n + e_4 f_1 i i n) k_1 \\
 & r_n + (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g - i d_4 e_1 e_2 g - i d_4 f_1 i - i n - e_4 f_1 i + i n + d_2 e_4 g \\
 & r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 r_n + e_4 f_1 i k_1 r_n^2)) - (d_2 g k_1 r_1) / (f_1 i \\
 & (k_1 + 1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g + i d_4 e_1 e_2 g + i d_4 f_1 \\
 & i + i n + e_4 f_1 i - i n - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - d_4 e_2 g i r_1 - d_4 f_1 i k_1 r_n - e_4 f_1 i k_1
 \end{aligned}$$


```
{-rn-(y*r1*k1*x)/(k1+n)^2, (-y*r1*n)/(k1+n), 0, y*d4},
{(r1*k1*x)/(k1+n)^2, -d1-e1-f1*y-(r1*n)/(k1+n), -f1*x, 0},
{0, i*f1*y, i*f1*x-d2-e2, 0},
{0, (1-i)*f1*y+d1, (1-i)*f1*x+d2, -d4-e4}
}\[NoBreak]
```

```
{{-rn-(k1 r1 x y)/(k1+n)^2,-((n r1 y)/(k1+n)),0,d4 y},{(k1 r1 x)/(k1+n)^2,-d1-e1-(n
r1)/(k1+n)-f1 y,-f1 x,0},{0,f1 i y,-d2-e2+f1 i x,0},{0,d1+f1 (1-i)
y,d2+f1 (1-i) x,-d4-e4}}
```

Titik kritis keempat

```
(Mjacobi/.{n@in/rn,x@0,y@0,d@0})//MatrixForm
Eigenvalues[%]//TableForm
(\[NoBreak]{
```

```
{-rn, 0, 0, 0},
{0, -d1-e1-(in r1)/((k1+in/rn) rn), 0, 0},
{0, 0, -d2-e2, 0},
{0, d1, d2, -d4-e4}
}\[NoBreak])
{
{-d2-e2},
{-d4-e4},
{-d1-e1-(in r1)/((k1+in/rn) rn)},
{-rn}
}
```

Lampiran 3. Program penentuan orbit kestabilan di sekitar titik kritis T_1

pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora

1. Pada bidang (N, X)

```
sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/9/2010
interset;plotset;
setstate[{n,x}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y}/.{y@0, d->0};
evalparm[slopevec]
```

```

{12.1222 d4 g+in-n rn-(g n r1 x)/(k1+n),-d1 x-e1 x+(n r1 x)/(k1+n)}
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
initvec = {1.1,1.6};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;
window={{-10,10},{-10,10}};
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,4]
{{0.,1.1,1.6},{0.01,1.10019,1.60317},{0.02,1.10038,1.60634},{0.03,1.10057,1.6
0952},{0.04,1.10077,1.6127}}
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,4]
{{1.1,1.6},{1.10019,1.60317},{1.10038,1.60634},{1.10057,1.60952},{1.10077,1.
6127}}
{nn, xx, yy, dd} = buildinterp[sol1];
state[0.2]
{1.1038,1.66451}
slope[0.2]
{0.0187833,0.328986}
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
{-1.80511×10-11,6.12896×10-10}
asprat = 1.0;
setdash[{}];
plrange = {{0,5},{0,5}};
setcolor[{Red}];
arrowflag=True;
arrowvec={1/5,2/5,3/5,4/5};
graph5 = phaseplot[sol1,1,2]
setcolor[{Blue}];
gambar2=dirfield

```

2. Pada bidang (Y,D)

```

sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/9/2010
interset;plotset;
setstate[{y,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y}/.{n@2, x->0};
evalparm[slopevec]
{12.1222 d4 g+in-n rn-(g n r1 x)/(k1+n),-d1 x-e1 x+(n r1 x)/(k1+n)}
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
initvec = {3,4};

```

```

t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;
window={{-10,10},{-10,10}};
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,4]
{{0.,1.1,1.6},{0.01,1.10019,1.60317},{0.02,1.10038,1.60634},{0.03,1.10057,1.60952},{0.04,1.10077,1.6127}}
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,4]
{{1.1,1.6},{1.10019,1.60317},{1.10038,1.60634},{1.10057,1.60952},{1.10077,1.6127}}
{nn, xx, yy, dd} = buildinterp[sol1];
state[0.2]
{1.1038,1.66451}
slope[0.2]
{0.0187833,0.328986}
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
{-1.80511×10-11,6.12896×10-10}
asprat = 1.0;
setdash[{}];
plrange = {{0,5},{0,5}};
setcolor[Red];
arrowflag=True;
arrowvec={1/5,2/5,3/5,4/5};
graph5 = phaseplot[sol1,1,2]
setcolor[Blue];
gambar2=dirfield

```

Lampiran 4. Program penentuan dinamika untuk nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora dan *detritus* pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora

a. Dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$

```

sysid;
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d4,rm,e1,e2,e4,f1}];
parmv={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,2};
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-f1*x*y,i*f1*x*y-d2*y-e2*y,(1-i)*f1*x*y+d1*x+d2*y-d4*d-e4*d};
evalparm[slopevec]

```

```

sysreport
initvec = {3,0.05,0.05,1};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;
window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0]
xx[0]
yy[200]
dd[200]
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black}];
colorvec
colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]
graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,{1,2,3,4}]

```

b. Dengan nilai awal $N(0) = 3, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 0$

```

sysid;
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d4, rn,e1,e2,e4,f1}];
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,2};
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,i*f1*x*y-d2*y-e2*y,(1-i)*f1*x*y+d1*x+d2*y-d4*d-e4*d};
evalparm[slopevec]
sysreport
initvec = {3,0.05,0.05,0};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;

```

```

window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)
intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0]
xx[0]
yy[200]
dd[200]

solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]
plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black}];
colorvec
colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]
graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,{1,2,3,4}]

```

c. Dengan nilai awal $N(0) = 0, X(0) = 0,05, Y(0) = 0,05$ dan $D(0) = 1$

```

sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 5/29/2010
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d4,rm,e1,e2,e4,f1}];
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,2};
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,i*f1*x*y-d2*y-e2*y,(1-i)*f1*x*y+d1*x+d2*y-d4*d-e4*d};
evalparm[slopevec]
sysreport
initvec = {0,0.05,0.05,1};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;

```

```

window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0.1]
xx[0.1]
yy[0.1]
dd[0.1]
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black}];
colorvec
{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,1,0],RGBColor[0,0,1],RGBColor[0,0,0]}
colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]
graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,{1,2,3,4}]

```

Lampiran 5. Program penentuan titik kritis beserta analisis kestabilan di sekitar titik kritis pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora

```

Start
sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/9/2010
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,z,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,i*f1*x*y-f2*y*z-d2*y-e2*y,i*f2*y*z-d3*z-e3*z,(1-i)*f1*x*y+(1-
i)*f2*y*z+d1*x+d2*y+d3*z-d4*d-e4*d};
eqstates=findpolyeq

```

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{(d_4+e_4) f_1 i r_n}{(-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n-\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2))}, \frac{(d_2+e_2)}{(f_1 i)}, \frac{1}{f_1} \frac{(-d_1-e_1+r_1-(k_1 r_1)}{(k_1+1/2(d_4+e_4) f_1 i r_n)} \frac{(-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n-\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2))}, 0, \frac{1}{(d_4 g)} \left(\frac{(d_1 d_4 e_2 g)}{2(d_4+e_4) f_1 i} + \frac{(d_4 e_1 e_2 g)}{2(d_4+e_4) f_1 i} - \frac{(d_2 d_4 e_1 g)}{2(d_4+e_4) f_1 i} - \frac{(d_4 e_1 e_2 g)}{2(d_4+e_4) f_1 i} - \frac{(d_4 i n)}{2(d_4+e_4)} + \frac{(e_4 i n)}{2(d_4+e_4)} - \frac{(d_4 e_2 g r_1)}{2(d_4+e_4) f_1 i} + \frac{(d_2 g r_1)}{(f_1 i)} + \frac{(e_2 g r_1)}{(f_1 i)} - \frac{(d_2 e_4 g r_1)}{2(d_4+e_4) f_1 i} - \frac{(e_2 e_4 g r_1)}{2(d_4+e_4) f_1 i} - \frac{(d_4 k_1 r_n)}{2(d_4+e_4)} - \frac{(e_4 k_1 r_n)}{2(d_4+e_4)} - \frac{1}{2(d_4+e_4) f_1 i} \left(\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2)} - \frac{(d_2 g k_1 r_1)}{(f_1 i (k_1+1/2(d_4+e_4) f_1 i r_n)} \frac{(-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n-\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2)} \right) \right) \right) \left. \right\}, \frac{1}{2} \frac{(d_4+e_4) f_1 i r_n}{(-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n-\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2)} \right) \right\}, \frac{1}{2} \frac{(d_4+e_4) f_1 i r_n}{(-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n-\sqrt{(4(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i i n+e_4 f_1 i i n) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i i n-e_4 f_1 i i n+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n)^2)} \right) \right\} \right\}$$

$r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n^2)),(d_2+e_2)/(f_1 i),1/f_1 (-d_1-e_1+r_1-(k_1 r_1)/(k_1+1/(2$
 $(d_4+e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4$
 $f_1 i in-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n+\sqrt{(4$
 $(d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i$
 $in) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-d_4 f_1 i in-e_4 f_1 i in+d_2$
 $e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1 r_n^2))))),0,1/(d_4 g) ((d_1 d_4$
 $e_2 g)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)+(d_4 e_1 e_2 g)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)-(d_2 d_4 e_1 g)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)-(d_4$
 $e_1 e_2 g)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)-in+(d_4 in)/(2 (d_4+e_4))+e_4 in)/(2 (d_4+e_4))-(d_4 e_2 g$
 $r_1)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)+(d_2 g r_1)/(f_1 i)+(e_2 g r_1)/(f_1 i)-(d_2 e_4 g r_1)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)-(e_2$
 $e_4 g r_1)/(2 (d_4+e_4) f_1 i)-(d_4 k_1 r_n)/(2 (d_4+e_4))-(e_4 k_1 r_n)/(2 (d_4+e_4))+1/(2$
 $(d_4+e_4) f_1 i) (\sqrt{(4 (d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1 e_2$
 $g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i in) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g i-$
 $d_4 f_1 i in-e_4 f_1 i in+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1$
 $r_n^2)))-(d_2 g k_1 r_1)/(f_1 i (k_1+1/(2 (d_4+e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2$
 $g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i in-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i k_1$
 $r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n+\sqrt{(4 (d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4 e_1$
 $e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i in) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2 g$
 $i-d_4 f_1 i in-e_4 f_1 i in+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1$
 $r_n^2)))))-(e_2 g k_1 r_1)/(f_1 i (k_1+1/(2 (d_4+e_4) f_1 i r_n) (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4$
 $e_2 g i+d_4 e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i in-d_2 e_4 g r_1-e_2 e_4 g r_1-d_4 e_2 g i r_1-d_4 f_1 i$
 $k_1 r_n-e_4 f_1 i k_1 r_n+\sqrt{(4 (d_4+e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g-d_4 e_1 e_2 g+d_1 d_4 e_2 g i+d_4$
 $e_1 e_2 g i+d_4 f_1 i in+e_4 f_1 i in) k_1 r_n+(d_2 d_4 e_1 g+d_4 e_1 e_2 g-d_1 d_4 e_2 g i-d_4 e_1 e_2$
 $g i-d_4 f_1 i in-e_4 f_1 i in+d_2 e_4 g r_1+e_2 e_4 g r_1+d_4 e_2 g i r_1+d_4 f_1 i k_1 r_n+e_4 f_1 i k_1$
 $r_n^2))))),\{in/r_n,0,0,0,0\},\{(-d_1 k_1-e_1 k_1)/(d_1+e_1-r_1),(d_4 in+e_4 in-(d_4 (-d_1 k_1-e_1$
 $k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1)-(e_4 (-d_1 k_1-e_1 k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1))/((d_4 e_1+d_1 e_4+e_1 e_4)$
 $g),0,0,1/(d_4 g) (-in+((-d_1 k_1-e_1 k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1)+(d_1 (d_4 in+e_4 in-(d_4 (-d_1 k_1-$
 $e_1 k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1)-(e_4 (-d_1 k_1-e_1 k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1)))/(d_4 e_1+d_1 e_4+e_1$
 $e_4)+(e_1 (d_4 in+e_4 in-(d_4 (-d_1 k_1-e_1 k_1) r_n)/(d_1+e_1-r_1)-(e_4 (-d_1 k_1-e_1 k_1)$
 $r_n)/(d_1+e_1-r_1)))/(d_4 e_1+d_1 e_4+e_1 e_4)),\{(-d_3 d_4 e_2 g-d_4 e_2 e_3 g+d_2 d_4 e_3 g i+d_4$
 $e_2 e_3 g i+d_4 f_2 i in+e_4 f_2 i in)/((d_4+e_4) f_2 i r_n),0,(d_3+e_3)/(f_2 i),(-d_2-e_2)/f_2,(-d_3$
 $e_2-e_2 e_3+d_2 e_3 i+e_2 e_3 i)/((d_4+e_4) f_2 i)\},\{(-d_3 f_1 k_1-e_3 f_1 k_1-d_1 f_2 i k_1-e_1 f_2 i$
 $k_1)/(d_3 f_1+e_3 f_1+d_1 f_2 i+e_1 f_2 i-f_2 i r_1),(-d_3 d_4 e_2 g-d_4 e_2 e_3 g+d_2 d_4 e_3 g i+d_4$

$$\frac{e_2 e_3 g i + d_4 f_2 i \text{ in} + e_4 f_2 i \text{ in} - (d_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1) - (e_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1)) / (g (d_3 e_4 f_1 + e_3 e_4 f_1 + d_4 e_1 f_2 i + d_1 e_4 f_2 i + e_1 e_4 f_2 i + d_4 e_3 f_1 i^2)), (d_3 + e_3) / (f_2 i), 1 / f_2 (-d_2 - e_2 + (f_1 i (-d_3 d_4 e_2 g - d_4 e_2 e_3 g + d_2 d_4 e_3 g i + d_4 e_2 e_3 g i + d_4 f_2 i \text{ in} + e_4 f_2 i \text{ in} - (d_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1) - (e_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1)) / (g (d_3 e_4 f_1 + e_3 e_4 f_1 + d_4 e_1 f_2 i + d_1 e_4 f_2 i + e_1 e_4 f_2 i + d_4 e_3 f_1 i^2))), 1 / (d_4 g) (-\text{in} + ((-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1) + r_1 (-d_3 d_4 e_2 g - d_4 e_2 e_3 g + d_2 d_4 e_3 g i + d_4 e_2 e_3 g i + d_4 f_2 i \text{ in} + e_4 f_2 i \text{ in} - (d_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1) - (e_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1)) / (d_3 e_4 f_1 + e_3 e_4 f_1 + d_4 e_1 f_2 i + d_1 e_4 f_2 i + e_1 e_4 f_2 i + d_4 e_3 f_1 i^2) - (k_1 r_1 (-d_3 d_4 e_2 g - d_4 e_2 e_3 g + d_2 d_4 e_3 g i + d_4 e_2 e_3 g i + d_4 f_2 i \text{ in} + e_4 f_2 i \text{ in} - (d_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1) - (e_4 f_2 i (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) \text{ rn}) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1)) / ((d_3 e_4 f_1 + e_3 e_4 f_1 + d_4 e_1 f_2 i + d_1 e_4 f_2 i + e_1 e_4 f_2 i + d_4 e_3 f_1 i^2) (k_1 + (-d_3 f_1 k_1 - e_3 f_1 k_1 - d_1 f_2 i k_1 - e_1 f_2 i k_1) / (d_3 f_1 + e_3 f_1 + d_1 f_2 i + e_1 f_2 i - f_2 i r_1))))} \}$$

eq1=eqstates[[1]]//Simplify

$$\{-1 / (2 (d_4 + e_4) f_1 i \text{ rn}) (d_2 d_4 e_1 g + d_4 e_1 e_2 g - d_1 d_4 e_2 g i - d_4 e_1 e_2 g i - d_4 f_1 i \text{ in} - e_4 f_1 i \text{ in} + d_2 e_4 g r_1 + e_2 e_4 g r_1 + d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 \text{ rn} + e_4 f_1 i k_1 \text{ rn} + \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g + e_4 f_1 i \text{ in} + d_4 (e_1 e_2 g (-1+i) + i (d_1 e_2 g + f_1 \text{ in}))) k_1 \text{ rn} + (d_2 g (d_4 e_1 + e_4 r_1) + e_4 (-f_1 i \text{ in} + e_2 g r_1 + f_1 i k_1 \text{ rn}) + d_4 (-e_1 e_2 g (-1+i) + i (-d_1 e_2 g - f_1 \text{ in} + e_2 g r_1 + f_1 k_1 \text{ rn})))^2}), (d_2 + e_2) / (f_1 i), -1 / f_1 (d_1 + e_1 - r_1 + (2 (d_4 + e_4) f_1 i k_1 r_1 \text{ rn}) / (-d_2 d_4 e_1 g - d_4 e_1 e_2 g + d_1 d_4 e_2 g i + d_4 e_1 e_2 g i + d_4 f_1 i \text{ in} + e_4 f_1 i \text{ in} - d_2 e_4 g r_1 - e_2 e_4 g r_1 - d_4 e_2 g i r_1 + d_4 f_1 i k_1 \text{ rn} + e_4 f_1 i k_1 \text{ rn} - \sqrt{(4 (d_4 + e_4) f_1 i (-d_2 d_4 e_1 g + e_4 f_1 i \text{ in} + d_4 (e_1 e_2 g (-1+i) + i (d_1 e_2 g + f_1 \text{ in}))) k_1 \text{ rn} + (d_2 g (d_4 e_1 + e_4 r_1) + e_4 (-f_1 i \text{ in} + e_2 g r_1 + f_1 i k_1 \text{ rn}) + d_4 (-e_1 e_2 g (-1+i) + i (-d_1 e_2 g - f_1 \text{ in} + e_2 g r_1 + f_1 k_1 \text{ rn})))^2}), 0, -1 / (2 d_4 g) (-((d_1 d_4 e_2 g) / ((d_4 + e_4) f_1)) - (d_4 e_1 e_2 g) / ((d_4 + e_4) f_1) + (d_2 d_4 e_1 g) / (d_4 f_1 i + e_4 f_1 i) + (d_4 e_1 e_2 g) / (d_4 f_1 i + e_4 f_1 i) + 2 \text{ in} - (d_4 \text{ in}) / (d_4 + e_4) - (e_4 \text{ in}) / (d_4 + e_4) + (d_4 e_2 g r_1) / ((d_4 + e_4) f_1) - (2 d_2 g r_1) / (f_1 i) - (2 e_2 g$$

$$\begin{aligned} & r1)/(f1 i)+(d2 e4 g r1)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+(e2 e4 g r1)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+(d4 k1 \\ & rn)/(d4+e4)+(e4 k1 rn)/(d4+e4)+1/((d4+e4) f1 i) (\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 \\ & g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 \\ & (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 \\ & rn)))^2)}-(4 d2 (d4+e4) g k1 r1 rn)/(d2 d4 e1 g+d4 e1 e2 g-d1 d4 e2 g i-d4 e1 e2 g i- \\ & d4 f1 i in-e4 f1 i in+d2 e4 g r1+e2 e4 g r1+d4 e2 g i r1-d4 f1 i k1 rn-e4 f1 i k1 \\ & rn+[\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 \\ & in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (- \\ & 1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 rn)))^2)}-(4 e2 (d4+e4) g k1 r1 rn)/(d2 d4 e1 \\ & g+d4 e1 e2 g-d1 d4 e2 g i-d4 e1 e2 g i-d4 f1 i in-e4 f1 i in+d2 e4 g r1+e2 e4 g \\ & r1+d4 e2 g i r1-d4 f1 i k1 rn-e4 f1 i k1 rn+[\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g+e4 \\ & f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 (-f1 i \\ & in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 \\ & rn)))^2}})] \end{aligned}$$

eq2=eqstates[[2]]//Simplify

$$\begin{aligned} & \{-1/(2 (d4+e4) f1 i rn) (d2 d4 e1 g+d4 e1 e2 g-d1 d4 e2 g i-d4 e1 e2 g i-d4 f1 i in- \\ & e4 f1 i in+d2 e4 g r1+e2 e4 g r1+d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 rn-[\sqrt{(4 \\ & (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 \\ & rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 \\ & e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 rn)))^2)},(d2+e2)/(f1 i),-1/f1 (d1+e1-r1+(2 (d4+e4) f1 i k1 \\ & r1 rn)/(-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in-d2 \\ & e4 g r1-e2 e4 g r1-d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 rn+[\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (- \\ & d2 d4 e1 g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 \\ & r1)+e4 (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g \\ & r1+f1 k1 rn)))^2)},0,-1/(2 d4 g) (-((d1 d4 e2 g)/((d4+e4) f1 i))-(d4 e1 e2 g)/((d4+e4) \\ & f1 i)+(d2 d4 e1 g)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+(d4 e1 e2 g)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+2 in-(d4 \\ & in)/(d4+e4)-(e4 in)/(d4+e4)+(d4 e2 g r1)/((d4+e4) f1 i)-(2 d2 g r1)/(f1 i)-(2 e2 g \\ & r1)/(f1 i)+(d2 e4 g r1)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+(e2 e4 g r1)/(d4 f1 i+e4 f1 i)+(d4 k1 \\ & rn)/(d4+e4)+(e4 k1 rn)/(d4+e4)-1/((d4+e4) f1 i) (\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 \\ & g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 \\ & (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 \\ & rn)))^2)}+(4 d2 (d4+e4) g k1 r1 rn)/(-d2 d4 e1 g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g \\ & i+d4 f1 i in+e4 f1 i in-d2 e4 g r1-e2 e4 g r1-d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 \\ & rn+[\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g+e4 f1 i in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 \\ & in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 (-f1 i in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (- \\ & 1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1 rn)))^2)}+(4 e2 (d4+e4) g k1 r1 rn)/(-d2 d4 e1 \\ & g-d4 e1 e2 g+d1 d4 e2 g i+d4 e1 e2 g i+d4 f1 i in+e4 f1 i in-d2 e4 g r1-e2 e4 g r1- \\ & d4 e2 g i r1+d4 f1 i k1 rn+e4 f1 i k1 rn+[\sqrt{(4 (d4+e4) f1 i (-d2 d4 e1 g+e4 f1 i \\ & in+d4 (e1 e2 g (-1+i)+i (d1 e2 g+f1 in))) k1 rn+(d2 g (d4 e1+e4 r1)+e4 (-f1 i \end{aligned}$$

```

in+e2 g r1+f1 i k1 rn)+d4 (-e1 e2 g (-1+i)+i (-d1 e2 g-f1 in+e2 g r1+f1 k1
rn)))2))}
eq3=eqstates[[3]]//Simplify
{in/rn,0,0,0,0}
eq4=eqstates[[4]]//Simplify
{-(((d1+e1) k1)/(d1+e1-r1)),((d4+e4) (-in r1+d1 (in+k1 rn)+e1 (in+k1 rn)))/((d4
e1+(d1+e1) e4) g (d1+e1-r1)),0,0,(d1 (-in r1+d1 (in+k1 rn)+e1 (in+k1 rn)))/((d4
e1+(d1+e1) e4) g (d1+e1-r1))}
eq5=eqstates[[5]]//Simplify
{(-d3 d4 e2 g+e4 f2 i in+d4 (e2 e3 g (-1+i)+i (d2 e3 g+f2 in)))/((d4+e4) f2 i
rn),0,(d3+e3)/(f2 i),-((d2+e2)/f2),(-d3 e2+e3 (e2 (-1+i)+d2 i))/((d4+e4) f2 i)}
parmval={0.0005,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001
,2,10};
eqval=eqstateval[eq1]
{-0.00508701,0.101,8.71903,0,17.4517}
classify[eq1]
unstable
eq2val=eqstateval[eq2]
{0.098093,0.101,0.092225,0,0.283537}
classify[eqfree2]
strictly stable
eq3val=eqstateval[eq3]
{0.1,0,0,0,0}
classify[eqfree3]
strictly stable
eq4val=eqstateval[eq4]
{0.00253769,12.2434,0,0,12.1222}
classify[eqfree4]
strictly stable
eq5val=eqstateval[eq5]
{0.0996432,0,0.1002,-0.0101,-0.000892079}
classify[eqfree5]
strictly stable

```

Lampiran 6. Program penentuan nilai karakteristik (nilai eigen) dari titik kritis T_2 pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora

```

Mjacobi=([NoBreak]{
  {-rn-(g*r1*k1*x)/(k1+n)2, (-g*r1*n)/(k1+n), 0, 0, g*d4},
  {(r1*k1*x)/(k1+n)2, -d1-e1-f1*y-(r1*n)/(k1+n), -f1*x, 0, 0},
  {0, i*f1*y, i*f1*x-d2-e2-f2*z, -f2*z, 0},
  {0, 0, i*f2*z, i*f2*y-d3-e3, 0},
  {0, (1-i)*f1*y+d1, (1-i)*f1*x+d2+(1-i)*f2*z, (1-i)*f2*y+d3, -d4-e4}
})/[NoBreak]//MatrixForm

```

$$\begin{pmatrix}
 -rn - \frac{gk1r1x}{(k1+n)^2} & -\frac{gnr1}{k1+n} & 0 & 0 & d4g \\
 \frac{k1r1x}{(k1+n)^2} & -d1 - e1 - \frac{nr1}{k1+n} - f1y & -f1x & 0 & 0 \\
 0 & f1iy & -d2 - e2 + f1ix - f2z & -f2z & 0 \\
 0 & 0 & f2iz & -d3 - e3 + f2iy & 0 \\
 0 & d1 + f1(1-i)y & d2 + f1(1-i)x + f2(1-i)z & d3 + f2(1-i)y & -d4 - e4
 \end{pmatrix}$$

Titik kritis keempat

```

(Mjacob/.{n@-(((d1+e1) k1)/(d1+e1-r1)),x@((d4+e4) (-in r1+d1 (in+k1 rn)+e1
(in+k1 rn)))/((d4 e1+(d1+e1) e4) g (d1+e1-r1)),y@0,z@0,d@(d1 (-in r1+d1 (in+k1
rn)+e1 (in+k1 rn)))/((d4 e1+(d1+e1) e4) g (d1+e1-r1))})//MatrixForm
Eigenvalues[%]//TableForm
([NoBreak]{

```

```

{-rn, -((g in r1)/((k1+in/rn) rn)), 0, 0, d4 g},

```

```

{0, -d1-e1-(in r1)/((k1+in/rn) rn), 0, 0, 0},

```

```

{0, 0, -d2-e2, 0, 0},

```

```

{0, 0, 0, -d3-e3, 0},

```

```

{0, d1, d2, d3, -d4-e4}

```

```

})[NoBreak]

```

```

{

```

```

{-d2-e2},

```

```

{-d3-e3},

```

```

{-d4-e4},

```

```

{-d1-e1-(in r1)/((k1+in/rn) rn)},

```

```

{-rn}

```

```

}

```

Lampiran 7. Program penentuan orbit kestabilan di sekitar titik kritis T_2

pada proses daur ulang nutrisi dengan karnivora

1. Pada bidang (N,Z)

```
sysid;
```

```
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/1/2010
```

```
interset;plotset;
```

```
setstate[{n,z}];
```

```

slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,
  i*f2*y*z-d3*z-e3*z}/.{x->12.243399834995873`,y@0,d@0};
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
evalparm[slopevec]
parmv={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
  10};
initvec = {1.1,2};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 2000;

window={{-10,10},{-10,10}};
(* sugtimestep>window *)
intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
asprat = 1.0;
setdash[{}];
plrange = {{0,5},{0,5}};
setcolor[{Red}];
arrowflag=True;
arrowvec={1/5,2/5,3/5,4/5};
graph5 = phaseplot[sol1,1,2]
setcolor[{Blue}];
gambar2=dirfield

```

2. Pada bidang (X,Y)

```

sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/9/2010
interset;plotset;
setstate[{x,y}];
slopevec={ (r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-f1*x*y,
  i*f1*x*y-f2*y*z-d2*y-e2*y}/.{n->0.0025376884422110557`,z->0,d-
  >12.12217805445136`};
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
evalparm[slopevec]

```

```

parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
sysreport
initvec = {1.6,3};t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 2000;

window={{-10,10},{-10,10}};
(* sugtimestep>window *)
intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
asprat = 1.0;
setdash[{}];
plrange = {{0,5},{0,5}};
setcolor[Red];
arrowflag=True;
arrowvec={1/5,2/5,3/5,4/5};
graph5 = phaseplot[sol1,1,2]
setcolor[Blue];
gambar2=dirfield

```

3. Pada bidang (Z,D)

```

sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/9/2010
interset;plotset;
setstate[{z,d}];

slopevec={i*f2*y*z-d3*z-e3*z,(1-i)*f1*x*y+(1-i)*f2*y*z+d1*x+d2*y+d3*z-
d4*d-e4*d}/.{n->0.0025376884422110557`,x->12.243399834995873`,y->0};
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,m,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
evalparm[slopevec]
{-d3 z-e3 z,12.2434 d1-d d4-d e4+d3 z}
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
sysreport
initvec = {2,4};t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 2000;

```

```

window={{-10,10},{-10,10}};
(* sugtimestep>window *)
intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
asprat = 1.0;
setdash[{}];
plrange = {{0,5},{0,5}};
setcolor[Red];
arrowflag=True;
arrowvec={1/5,2/5,3/5,4/5};
graph5 = phaseplot[sol1,1,2]
setcolor[Blue];
gambar2=dirfield

```

Lampiran 8. Program penentuan dinamika untuk nutrisi abiotik, *autotrof*, herbivora dan *detritus* pada proses daur ulang nutrisi tanpa karnivora

a. Dengan nilai awal $N(0) = 1,1$, $X(0) = 1,6$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan $D(0) = 4$

```

sysid;
Mathematica 7.0.0, DynPac 11.03, 6/11/2010
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,z,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,
i*f1*x*y-f2*y*z-d2*y-e2*y,
i*f2*y*z-d3*z-e3*z,(1-i)*f1*x*y+(1-i)*f2*y*z+d1*x+d2*y+d3*z-d4*d-e4*d};
evalparm[slopevec]
parmval={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
sysreport
initvec = {1.1,1.6,3,2,4};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;

```

```

window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)
intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0]
xx[0]
yy[0.2]
zz[0.1]
dd[0.000005]
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]
plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black,Magenta}];
colorvec
colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]

graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,5]
graph6 = timeplot[sol1,{1,2,3,4,5}]

```

b. Dengan nilai awal $N(0) = 0$, $X(0) = 1$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan

$$D(0) = 4$$

```

sysid;
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,z,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rm,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,
  i*f1*x*y-f2*y*z-d2*y-e2*y,
  i*f2*y*z-d3*z-e3*z,(1-i)*f1*x*y+(1-i)*f2*y*z+d1*x+d2*y+d3*z-d4*d-e4*d};
evalparm[slopevec]
parmvall={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
sysreport

```

```

initvec = {0,1.6,3,2,4};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;
window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)

intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0]
xx[0.1]
yy[0.2]
zz[0.2]
dd[0.2]
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]
plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black,Magenta}];
colorvec

colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]
graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,5]
graph6 = timeplot[sol1,{1,2,3,4,5}]

```

c. Dengan nilai awal $N(0) = 1,1$, $X(0) = 1,6$, $Y(0) = 3$, $Z(0) = 2$ dan $D(0) = 0$

```

sysid;
interset;plotset;
setstate[{n,x,y,z,d}];
setparm[{in,g,r1,k1,i,d1,d2,d3,d4,rn,e1,e2,e3,e4,f1,f2}];
slopevec={in-rn*n-g*(r1*n)/(k1+n)*x+g*d4*d,(r1*n)/(k1+n)*x-e1*x-d1*x-
f1*x*y,
i*f1*x*y-f2*y*z-d2*y-e2*y,

```

```

i*f2*y*z-d3*z-e3*z,(1-i)*f1*x*y+(1-i)*f2*y*z+d1*x+d2*y+d3*z-d4*d-e4*d);
evalparm[slopevec]
parmvall={0.01,0.02,0.3,0.005,0.5,0.1,0.1,0.5,0.1,0.005,0.001,0.001,0.001,0.001,2,
10};
sysreport
initvec = {1.1,1.6,3,2,0};
t0 = 0.0;
h = 0.01;
nsteps = 20000;
window={{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10},{-30,10}};
(* sugtimestep>window *)

intreset;
sol1 = integrate[initvec,t0,h,nsteps];
Take[sol1,5]
notimesol1 = stripsol[sol1,0];
Take[notimesol1,5]
{nn, xx, yy,zz, dd} = buildinterp[sol1];
nn[0]
xx[0.1]
yy[0.2]
zz[0.2]
dd[0.2]
solinterp[sol1,state,slope];
state[0.2]
slope[0.2]
err[t_]=D[state[t],t]-slope[t];
err[0]
err[5]
err[10]

plotreset;
asprat = 0.5;
setcolor[{Red,Green,Blue,Black,Magenta}];
colorvec
colorvecdis
graph1 = timeplot[sol1,1]
graph2 = timeplot[sol1,2]
graph3 = timeplot[sol1,3]
graph4 = timeplot[sol1,4]
graph5 = timeplot[sol1,5]
graph6 = timeplot[sol1,{1,2,3,4,5}]

```