UNIVERSITAS INDONESIA

# PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB $b$ −BUSUR-BERURUTAN PADA GRAF *UNICYCLE*

## SKRIPSI

**ARIF AGUNG RIYADI**
**0706261556**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA**
**DEPOK**
**JULI 2011**

UNIVERSITAS INDONESIA

# PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB $b$ −BUSUR-BERURUTAN PADA GRAF *UNICYCLE*

## SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains**

**ARIF AGUNG RIYADI**
**0706261556**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA**
**DEPOK**
**JULI 2011**

# HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

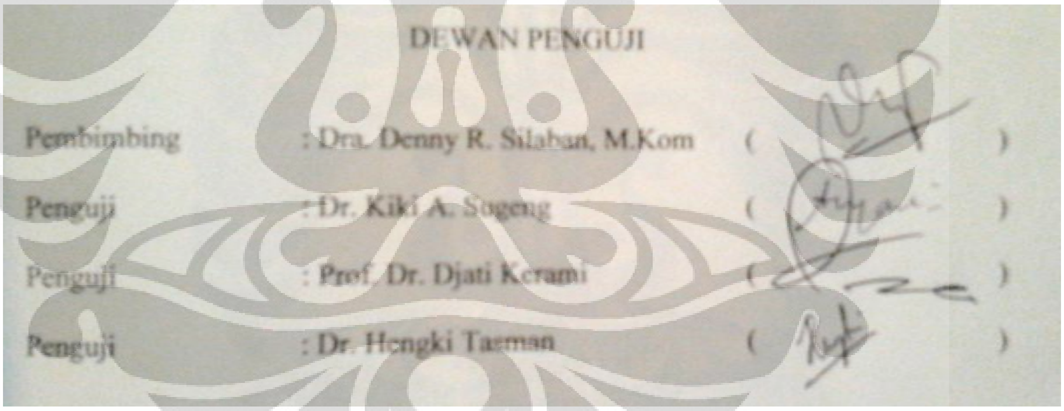
telah saya nyatakan dengan benar.

| | |
|---|---|
| Nama | : Arif Agung Riyadi |
| NPM | : 0706261556 |
| Tanda Tangan | : |
| Tanggal | : 1 Juli 2011 |

# HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh
Nama : Arif Agung Riyadi
NPM : 0706261556
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Total Busur-Ajaib $b-$Busur-Berurutan Pada Graf *Unicycle*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia



DEWAN PENGUJI

| | | |
|---|---|---|
| Pembimbing | : Dra. Denny R. Silaban, M.Kom | ( ) |
| Penguji | : Dr. Kiki A. Sugeng | ( ) |
| Penguji | : Prof. Dr. Djati Kerami | ( ) |
| Penguji | : Dr. Hengki Tasman | ( ) |

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 19 Mei 2011

# KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

(1) Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini;

(2) Dra. Yahma Wisnani, M.Kom. selaku pembimbing akademik penulis selama menjalani masa kuliah;

(3) Dosen pengajar Dept. Matematika FMIPA UI, Dr. Kiki Ariyanti S, Dra. Siti Aminah, M.Kom, Dra. Nora Hariadi, M.Sc, Prof. Dr. Djati Kerami, dll yang telah memberi saran dan kritik penulis selama masa skripsi.

(4) Papa, Mama, adik-adik penulis, Puput dan Tyas, Bude Siti, Bulek Aka, dan seluruh keluarga besar penulis yang telah memberikan dukungan, do'a, dan bantuan baik material maupun moral;

(5) Seluruh karyawan di departemen Matematika UI, mbak Santi, mbak Rusmi, pak Saliman, dll atas bantuan yang telah diberikan;

(6) Muhammad Reza terima kasih banyak atas dukungan, saran dan kritiknya. *You are more than just a best friend, because you are my brother*;

(7) Widita Endyarini & Stefi Rahmawati, terimakasih banyak buat kalian udah memperkenalkan graf labeling dan membantu dalam skripsi ini;

(8) Farah Amalia, Sutisna, Rifza Putra K., Yunita Panca W., makasih atas persahabatannya ya. Udah kayak punya kakak sendiri nih. *Never shall I forget the times I spent with you; continue to be my friend, as you always find me yours*;

(9) Teman-teman Math 2007 Dita, Bowo, Gamar, Stefi, Wiwi, Widi, Isna, Anjar, Dhanar, Shafa, Toto, Farah, Lois, Bapet, Iki, Ferdy, Winda, Adit, Shafira, Amanda, Nedia, Putu, Anggun, Widya, Putri, Mita, Sica, Siska, Nora, Adi, Zul, Anis, Yos, Siti, Hikmah, Andi, Misda, Ashari, Afni, Fauzan, dan Hanif terima kasih atas kebersamaannya di matematika 2007. Sungguh sangat berkesan bisa mengenal kalian semua. Ayo, kita sering kumpul nanti.

(10) Untuk Ririn K.S., terima kasih atas support yang sudah diberikan selama penulisan skripsi ini, semangat untuk kita!

(11) Teman-teman skripsi labeling Ali, Teguh, Rendy, Pangky dan Poe semangat!

(12) Teman-teman 2006, Rizqi, Indah, Nurgi, Tami, Alfa, Budi, Dani, Rafli dll. Thanks atas semangat dan dukungannya. Senang bisa mengenal kalian ☺.

(13) Teman-teman 2008, Bowo, Cindy, Luthfa, Nita, Danis, Ifah, dll. Terima kasih atas supportnya ya. Semangat buat kalian semua. Untuk Luthfa, semangat terus ya! Terim kasih untuk cerita-ceritanya. Untuk Cindy, *be a good actuarist* ya.

(14) Teman-teman 2005, kak anggie, terima kasih bantuannya untuk mencari pelabelan *hairycycle*, walaupun tidak sesuai.

(15) Teman-teman 2009, Dindut, Eja, Mbak yu, Ana dkk.

(16) Teman-teman 2010, Widya, Yuza, Tasya dkk.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2011

# HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Arif Agung Riyadi |
| NPM | : | 0706261556 |
| Program Studi | : | Sarjana |
| Departemen | : | Matematika |
| Fakultas | : | Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |
| Jenis karya | : | Skripsi |

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pelabelan Total Busur-Ajaib $b-$Busur-Berurutan pada Graf *Unicycle*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

# ABSTRAK

Nama : Arif Agung Riyadi
Program Studi : Matematika
Judul : Pelabelan Total Busur-Ajaib $b$ $-$Busur-Berurutan pada Graf *Unicycle*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana tidak berarah dengan $v = |V|$ simpul dan $e = |E|$ busur. Pelabelan total busur ajaib adalah pemetaan bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke bilangan bulat positif berurutan $\{1,2,3, \dots, v + e\}$ sehingga bobot semua busur adalah konstan. Pelabelan total busur ajaib dengan $f(E) = \{b + 1, b + 2, \dots, b + e\}$, dengan $0 \leq b \leq v$ disebut sebagai pelabelan total busur-ajaib $b$ $-$busur berurutan. Telah diketahui bahwa jika suatu graf memiliki pelabelan total busur ajaib $b$ $-$busur berurutan maka pada graf tersebut dipenuhi $e \leq v - 1$, sehingga jika suatu graf terhubung memiliki pelabelan total busur ajaib $b$ $-$busur berurutan maka graf tersebut haruslah graf pohon. Akan tetapi suatu graf terhubung yang bukan pohon dimungkinkan memiliki pelabelan total busur ajaib $b$ $-$busur berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi. Apabila banyak simpul terisolasi yang ditambahkan menyebabkan graf memenuhi $e = v - 1$, maka banyak simpul yang ditambahkan pada graf adalah optimal, jika tidak demikian, maka banyak simpul terisolasi yang ditambakan tidak optimal. Pada skripsi ini akan dikontruksi pelabelan total busur-ajaib $b$ $-$busur-berurutan untuk graf *unicycle*, yaitu graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan penambahan sejumlah optimal simpul terisolasi.

Kata Kunci : Pelabelan total busur-ajaib $b$-busur-berurutan, graf lingkaran, graf matahari, graf korona, graf *hairycycle*, graf *unicycle*
Xiii+76 halaman ; 27 gambar; 1 tabel

Daftar Pustaka : 13 (1986-201)

# ABSTRACT

Name : Arif Agung Riyadi
Study Program : Mathematics
Title : An $b$-Edge Consecutive Edge Magic Total Labeling on Unicycle Graph

Let $G = (V, E)$ be a simple and undirected graph with $v = |V|$ vertices and $e = |E|$ edges. An edge magic total labeling is a bijection $f$ from $V \cup E$ to the set of consecutive integers $\{1,2, \dots, v + e\}$ such that the weight of all edges are constant. An edge magic total labeling which $f(E) = \{b + 1, b + 2, \dots, b + e\}$, $0 \leq b \leq v$ is called $b$-edge consecutive edge magic total labeling. It is known that if a graph has $b$-edge consecutive edge magic total labeling then the graph must be satisfied $e \leq v - 1$, so if a connected graph has $b$-edge consecutive edge magic total labeling then the graph must be a tree. However, a connected graph which not a tree can be labeled $b$-edge consecutive edge magic total labeling by adding some isolated vertices to the graph. If the numbers of isolated vertices added to graph cause a graph to satisfy $e = v - 1$, then the numbers of vertices to the graph is optimal, whereas if not such that, the numbers of isolated vertices added is not optimal. This final project will construct $b$-edge consecutive edge magic total labeling on unicycle graph, that are cycle graph, sun graph, crown graph, and hairycycle graph by adding an optimal isolated vertices.

Keywords : $b$-edge consecutive edge magic total labeling, cycle graph, sun graph, crown graph, hairycycle graph, unicycle graph
Xiii+76 pages ; 27 pictures; 1 table

Bibliography : 13 (1986-2010)

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

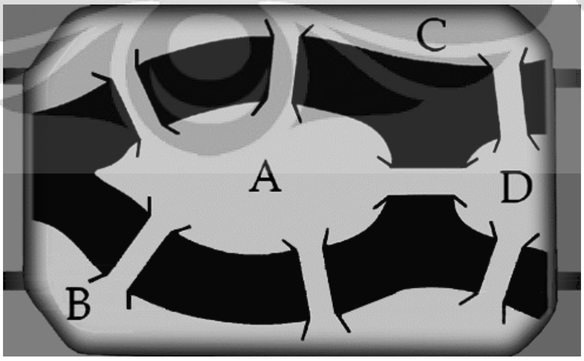
# DAFTAR TABEL

# BAB 1

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan bidang matematika kombinatorik yang memiliki banyak terapan hingga waktu sekarang. Graf mulai dikenal pada abad ke 19. Di sebuah kota yang bernama Königsberg terdapat 4 dataran yang dihubungkan dengan 7 jembatan. Warga kota tersebut berpikir apakah dapat melewati semua jembatan tepat satu kali dari satu titik dan akan kembali di titik awal. Hal ini disebut masalah jembatan Konigsberg yang kemudian dikenal sebagai dasar dari teori graf. Warga kota tersebut hanya bisa menjelaskan dengan cara coba-coba. Pada tahun 1736, seorang matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler (1707-1783) berhasil menemukan jawaban untuk permasalahan tersebut dengan memodelkannya dalam bentuk graf. Jawaban yang diberikan oleh Euler adalah tidak mungkin bisa melewati 7 jembatan masing-masing tepat satu kali dimulai dari satu titik dan kembali ke titik tersebut. Ilustrasi mengenai jembatan Königsberg dapat dilihat pada Gambar 1.1.




Gambar 1. 1 Ilustrasi Jembatan Königsberg

Suatu graf $G = (V, E)$ dibentuk oleh suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut simpul, dan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut simpul-simpul yang berbeda pada $G$ yang disebut busur. Himpunan simpul pada $G$ dinotasikan dengan $V$, dan himpunan busur pada $G$ dinotasikan dengan $E$. Banyaknya anggota dari himpunan simpul dan busur pada $G$ secara berurutan dinotasikan oleh $v = |V|$ dan $e = |E|$ (Chartrand dan Lesniak, 1986). Pada permasalahan jembatan Konigsberg yang diselesaikan oleh Euler, diketahui bahwa terdapat 4 simpul yang menyatakan daratan dan terdapat 7 busur yang menyatakan banyaknya jembatan.

Beberapa jenis graf yang ada memiliki ciri-ciri khusus yang dapat dikelompokkan menjadi suatu kelas graf dan dapat diberi nama sendiri, salah satunya adalah graf *unicycle*. Graf *unicycle* adalah graf yang mengadung tepat satu graf lingkaran. Contoh dari graf *unicycle* yaitu, graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*.

Salah satu cabang yang dipelajari dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan pada suatu graf $G$ merupakan suatu pemetaan setiap elemen dari graf $G$ ke suatu himpunan bilangan. Pada skripsi ini, pelabelan menggunakan bilangan bulat positif. Apabila yang diberi label adalah himpunan busur maka disebut pelabelan busur, apabila yang diberi label adalah himpunan simpul, maka disebut pelabelan simpul, apabila kedua himpunan simpul dan busur diberi label, maka disebut pelabelan total. Jumlah semua label yang terkait pada elemen suatu graf disebut bobot. Apabila pelabelan menghasilkan bobot yang sama untuk setiap simpul dan atau/busur, maka pelabelannya disebut pelabelan ajaib. Suatu pelabelan total busur-ajaib merupakan pelabelan pada simpul dan busur dari graf sedemikian sehingga bobot setiap busurnya adalah konstan. Bilangan konstan ini disebut konstanta ajaib. Pelabelan total busur-ajaib dikatakan sebagai pelabelan total busur-ajaib super jika himpunan simpulnya diberi label-label terkecil. Pelabelan total simpul-berurutan merupakan pelabelan pada simpul dan busur dimana setiap label pada simpul yang diberikan harus berurutan. Jika label pada busur yang berurutan, maka pelabelannya disebut sebagai pelabelan busur-berurutan. Salah satu pengembangan dari pelabelan total ajaib super adalah pelabelan berurutan. Pada pelabelan berurutan, label yang berurutan tidak harus dimulai dari 1 (Sugeng dan Miller, 2008).

Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total busur-ajaib $b$ −simpul-berurutan (PTBA $b$ −simpul-berurutan) dari *G* jika $f$ adalah pelabelan total busur-ajaib dari *G* dan $f(V) = \{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + v\}, 0 \leq a \leq e$. Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut suatu pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan (PTBA $b$ −busur-berurutan) dari *G* jika *f* adalah suatu pelabelan total busur-ajaib dari *G* dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Jika $a = 0$ (atau $b = 0$) maka $f$ disebut pelabelan total busur-ajaib simpul (busur) super. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur-ajaib $a$ −simpul-berurutan (atau $b$ −busur-berurutan disebut graf busur-ajaib *a*-simpul berurutan (atau *b*-busur berurutan) (Sugeng dan Miller, 2008). Pada skripsi ini, yang dibahas adalah PTBA $b$ −busur-berurutan dengan $0 < b < v$.

Jika suatu graf terhubung *G* memiliki pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dengan $b \in \{1,2,3, \dots, v - 1\}$ maka jumlah maksimum busur pada $G$ adalah $v - 1$, sehingga graf terhubung yang mungkin dilabel dengan PTBA $b$ −busur-berurutan adalah graf pohon (Sugeng dan Miller, 2008). Suatu graf dengan $e > v - 1$ dimungkinkan untuk dilabel dengan pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dengan menambahkan simpul terisolasi pada graf tersebut sehingga akan memenuhi $e \leq v - 1$ (Silaban dan Sugeng, pp). Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan $e = v - 1$, maka banyaknya simpul terisolasi yang ditambahkan adalah optimal. Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan $e < v - 1$, maka banyaknya simpul yang ditambahkan tidak optimal.

Beberapa hasil penelitian tentang PTBA $b$ −busur-berurutan antara lain setiap PTBA $b$ −busur-berurutan memiliki pelabelan simpul busur-antiajaib. Dual dari PTBA $b$ −busur-berurutan untuk suatu graf G adalah PTBA $(v - b)$ −busur-berurutan. Setiap graf *caterpillar* memiliki suatu PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap $b$. Jika suatu graf terhubung $G$ memiliki suatu PTBA $b$ −busur-berurutan, dimana $b \in \{1,2, \dots, v - 1\}$, maka $G$ adalah suatu graf pohon (Sugeng & Miller, 2006). Setiap graf *caterpillar* dan graf *firecrackers* yang teratur memiliki PTBA

$b$ −busur-berurutan (Sugeng & Silaban, 2009). Suatu graf tangga $(P_n \times P_2)$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan menambahkan paling sedikit $n-1$ simpul terisolasi, dimana graf tangga $(P_n \times P_2)$ didapatkan dari hasil perkalian kartesius antara graf lintasan $P_n$ dan $P_2$. Graf gabungan $2mP_n$ dengan graf tangga $(P_n \times P_2)$ $(2mP_n \cup (P_n \times P_2))$ memiliki *PTBA* $(m+1)n$ −busur-berurutan dengan $n-1$ simpul terisolasi. Graf $LT_{mnm}$ merupakan graf gabungan antara graf tangga dengan graf lingkaran, dimana $m$ menyatakan banyaknya graf lintasan $P_n$ yang mengapit graf tangga $(P_n \times P_2)$. Graf $LT_{mnm}$ memiliki *PTBA* $(m+1)n-$ busur-berurutan dengan $n-1$ simpul terisolasi (Silaban & Sugeng, 2010).

Pada skripsi ini akan dibahas tentang pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan (PTBA $b$ −busur-berurutan) pada graf *unicycle*. Graf *unicycle* yang digunakan, yaitu graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*. Graf *unicycle* mempunyai banyak busur $e = v$, sehingga untuk menghasilkan pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan yang optimal, yaitu yang memenuhi kondisi $e = v - 1$, maka pada graf *unicycle* perlu ditambahkan satu simpul terisolasi.

## 1.2 Permasalahan dan Ruang Lingkup

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah bagaimanakah konstruksi pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan (PTBA $b$ −busur-berurutan) pada graf *unicycle* sehingga banyak simpul yang ditambahkan optimal. Penelitian dilakukan pada graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*.

## 1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan metode yang digunakan adalah mengembangkan dan mengkonstruksi pelabelan pada kelas graf baru.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengkonstruksi pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan (PTBA $b$ −Busur-berurutan) pada graf *unicycle* dengan banyak simpul terisolasi yang ditambahkan optimal.

# BAB 2

# LANDASAN TEORI

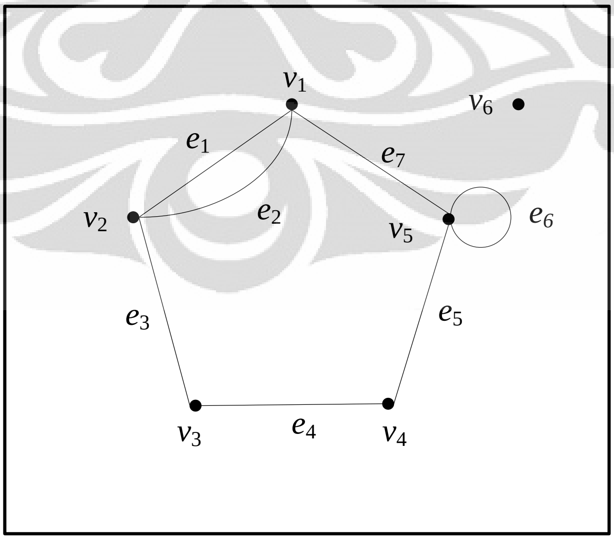
Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dalam teori graf, serta definisi pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

## 2.1 Definisi dan istilah dalam teori graf

Definisi yang digunakan pada subbab ini mengacu pada buku yang ditulis oleh Kenneth H. Rosen (1995), suatu **graf** $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari elemen yang disebut **simpul** (*vertices*) dan himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut sebagai **busur** (*edges*). Himpunan simpul pada graf $G$ disebut **himpunan simpul** (*vertex-set*) dari $G$, dinotasikan dengan $V(G)$ disingkat menjadi $V$ dan himpunan busur pada graf $G$ disebut sebagai **himpunan busur** (*edge-set*) dari $G$, dinotasikan dengan $E(G)$ disingkat menjadi $E$. Himpunan busur pada suatu graf $G$ dapat berupa himpunan kosong (disebut juga **graf kosong**). **Banyaknya anggota** (*cardinality*) dari himpunan simpul pada graf $G$ dinotasikan dengan $v = |V|$dengan $v > 0$ disebut sebagai **order** dari $G$. Banyaknya anggota dari himpunan busur pada graf $G$ dinotasikan dengan $e = |E|$ disebut sebagai **ukuran** dari $G$. Suatu graf **berhingga** (*finite*) adalah suatu graf dengan order dan ukuran yang berhingga. Apabila terdapat suatu busur yang menghubungkan dua simpul (kedua simpul mungkin sama), maka simpul tersebut disebut sebagai **titik-titik ujung** (*endpoints*) dari busur. Jika terdapat dua simpul pada graf $G$ yang dihubungkan dengan satu atau lebih busur, maka simpul tersebut dikatakan **bertetangga** (*adjacent*). Suatu busur dikatakan **hadir** (*incident*) pada suatu simpul apabila simpul tersebut merupakan salah satu ujung dari busur. Dua busur dari graf $G$ dikatakan bertetangga jika kedua busur tersebut hadir pada simpul yang sama. Suatu graf dapat direpresentasikan dalam gambar, dimana simpul direpresentasikan dengan titik dan busur direpresentasikan dengan segmen garis yang mengubungkan simpul-simpul. Biasanya simpul dinotasikan dengan $v_i, i = 1,2, \dots, |V|$ dan busur dinotasikan dengan $e_j, j = 1,2, \dots, |E|$ atau sebagai pasangan dari kedua simpul unjung, $v_i v_j$ dengan $v_i v_j \in V$.

Suatu busur yang menghubungkan satu simpul ke simpul itu sendiri disebut **gelung** (*loop*). Apabila terdapat dua simpul yang dihubungkan oleh lebih dari satu busur, maka busur tersebut disebut sebagai **busur berganda** (*multiple edges/parallel edges*). Suatu **graf sederhana** (*simple graph*) $G$ adalah graf yang tidak memiliki gelung dan busur berganda.

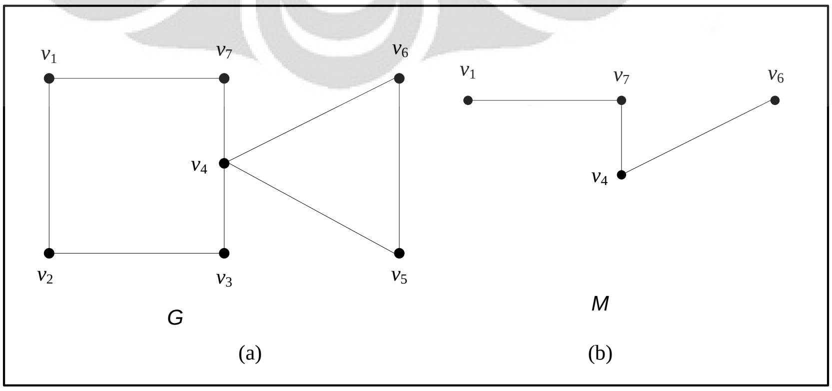
Banyaknya busur yang hadir pada suatu simpul $v$ disebut sebagai **derajat** (*degree* atau *valency*) dari simpul $v$ dan ditulis sebagai $d(v)$. Suatu simpul $v$ yang tidak bertetangga dengan simpul yang lainnya memiliki $d(v) = 0$ dan disebut sebagai **simpul terpencil** (*isolated vertex*). Apabila suatu simpul $v$ bertetangga dengan hanya satu simpul lain, maka simpul tersebut memiliki $d(v) = 1$ dan disebut sebagai **simpul terminal** (*terminal vertex*). Suatu graf $G$ yang memiliki simpul-simpul dengan derajat yang sama atau memiliki derajat $r$ $(d(v) = r)$ disebut sebagai **graf teratur** (*regular graph*).




Gambar 2. 1 Contoh graf $G$

Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf. Graf $G$ pada Gambar 2.1 memiliki himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan busur $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} = \{v_1v_2, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_5, v_5v_1\}$. Banyaknya simpul pada graf $G$ adalah $v = |V| = 6$ dan banyaknya busur adalah $e = |E| = 7$. Busur $e_4$ menguhubungkan simpul $v_3$ dan $v_4$, sehingga simpul tersebut bertetangga. Busur $e_3$ dan $e_4$ bertetangga karena hadir pada simpul yang sama, yaitu simpul $v_3$. Derajat tiap simpul pada Gambar 2.1 adalah $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 2$, $d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 0$. Karena $d(v_6) = 0$, maka simpul $v_6$ disebut sebagai simpul terisolasi. Karena derajat tiap simpul tidak sama, maka graf $G$ bukan graf teratur. Graf $G$ bukan graf sederhana, karena pada graf tersebut terdapat busur ganda, yaitu busur $e_1$ dan $e_2$ yang sama-sama menghubungkan simpul $v_1$ dan $v_2$, dan terdapat gelung yang ditunjukkan oleh busur $e_6$.

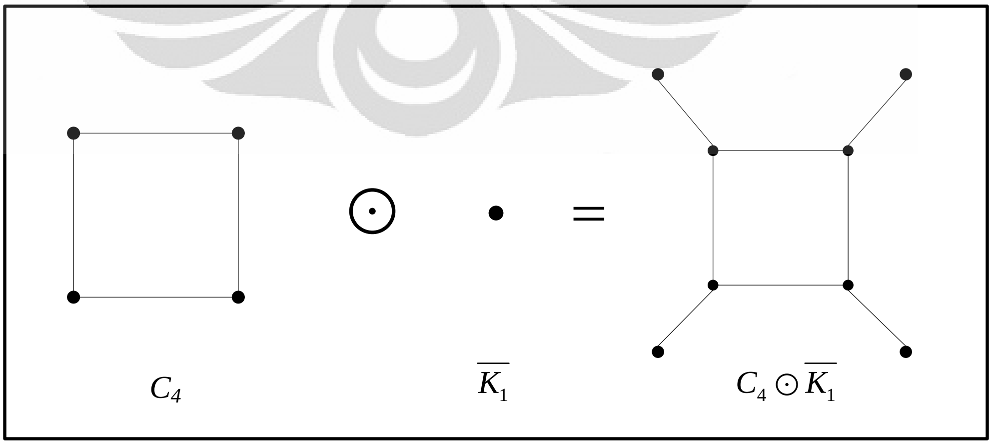
Graf $M$ adalah subgraf dari graf $G$, $M \subseteq G$, jika $V(M) \subseteq V(G)$ dan $E(M) \subseteq E(G)$. Pada Gambar 2.2, $M$ adalah subgraf dari $G$, karena graf $M$ memiliki himpunan simpul dan busur, yaitu $M = (V, E) = (\{v_1, v_7, v_4, v_6\}, \{v_1v_7, v_7v_4, v_4v_6\})$ yang merupakan subset dari himpunan simpul dan busur pada graf $G$, yaitu $G = (V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_4, v_4v_7, v_7v_1\})$. Dapat dilihat bahwa $V(M) \subseteq V(G)$ dan $E(M) \subseteq E(G)$.



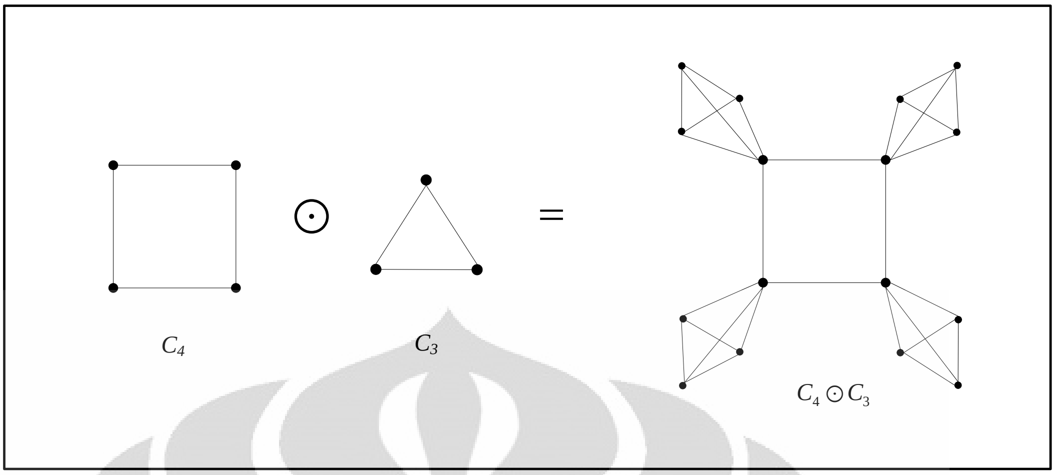

Gambar 2. 2 (a) Graf $G$, (b) Subgraf $M$ dari $G$

Misalkan $x$ dan $y$ adalah simpul-simpul (tidak harus berbeda) pada graf $G$. **Jalan** (*walk*) $x - y$ pada $G$ adalah suatu barisan berhingga di $G$ yang terdiri dari simpul dan busur secara berselingan, $x = x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, x_{n-1}, e_n, x_n = y$, yang diawali dengan simpul $x$ dan diakhiri dengan simpul $y$. **Jejak** (*trail*) $x - y$ adalah suatu jalan $x - y$ dimana tidak ada busur yang berulang. **Lintasan** (*path*) $x - y$ adalah suatu jalan $x - y$ dimana tidak ada simpul yang berulang. Suatu graf $G$ dikatakan **terhubung** (*connected*) jika terdapat suatu lintasan $x - y$ untuk setiap pasang simpul $x,y \in V$. Apabila syarat ini tidak terpenuhi maka graf $G$ dikatakan **tak terhubung** (*disconnected*).

Graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf berhingga, sederhana, dan tak berarah. Berikut ini adalah definisi dari beberapa kelas graf yang akan digunakan dalam skripsi ini. Sebelumnya akan diberikan operasi yang digunakan pada graf yang akan dibahas. Suatu ***corona product*** $G \odot H$ dimana $G$ terdiri dari $n_1$ simpul didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil 1 salinan $G$ dan $n_1$ salinan dari $H$, dan menghubungkan setiap simpul pada salinan ke$-i$dari $H$ dengan simpul ke$-i$ dari $G$, $i = 1,2, \ldots, n_1$ (Yero, dkk, 2010). Pada Gambar 2.3 diberikan contoh *corona product* antara $C_4$ dengan $\overline{K_1}$. Pada Gambar 2.4 diberikan contoh *corona product* antara $C_4$ dengan $C_3$.



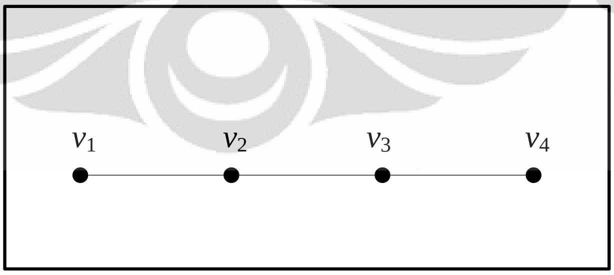

Gambar 2. 3 *Corona product* antara $C_4$ dengan $\overline{K_1}$




Gambar 2. 4 *Corona product* antara $C_4$ dengan $C_3$

## 2.2 Jenis-jenis Graf

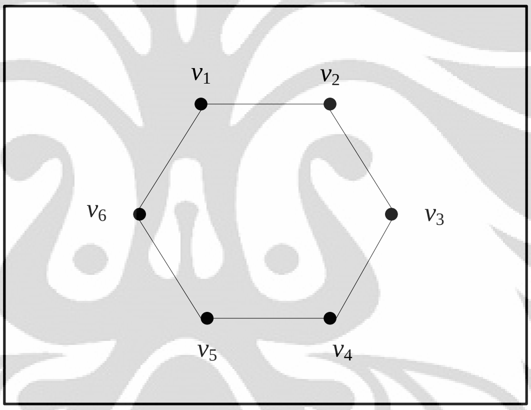
Graf **lintasan,** $P_n$ merupakan suatu graf terhubung yang terdiri dari $n$ simpul dimana setiap simpulnya memiliki derajat 2, kecuali pada simpul awal dan simpul akhir yang memiliki derajat 1. Graf lintasan dengan *n* simpul $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ mempunyai busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf lintasan dengan 4 simpul.




Gambar 2. 5 Graf lintasan $P_4$

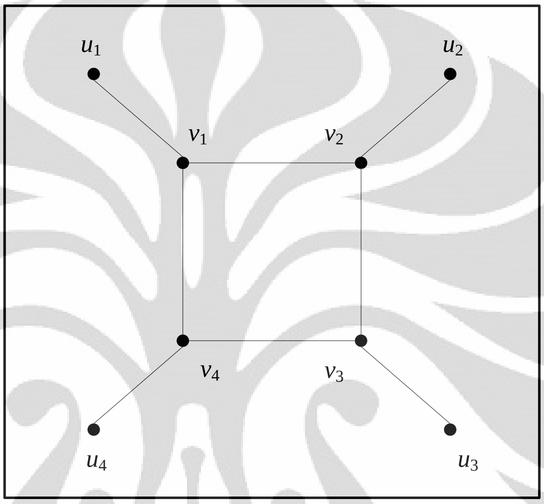
Suatu graf **lingkaran**, $C_n, n \geq 3$ dapat dibentuk dari graf lintasan yang kedua simpul ujungnya diberi tambahan busur sedemikian sehingga setiap simpul pada graf lingkaran akan memiliki derajat 2 . Pada graf lingkaran, banyak simpul sama dengan banyak busurnya atau $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$. Himpunan simpul pada graf lingkaran adalah $V(C_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan busur pada graf lingkaran adalah $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\}$ dengan $i + 1 \text{ mod } n$ . Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf lingkaran dengan 6 simpul $(C_6)$.

Suatu graf yang tidak mengandung subgraf lingkaran disebut **graf pohon**. Contoh dari graf pohon antara lain, graf bintang, graf kembang api dan graf kelabang. Graf yang memiliki tepat satu subgraf lingkaran disebut sebagai **graf *unicycle***. Contoh dari graf *unicycle* yaitu graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*.



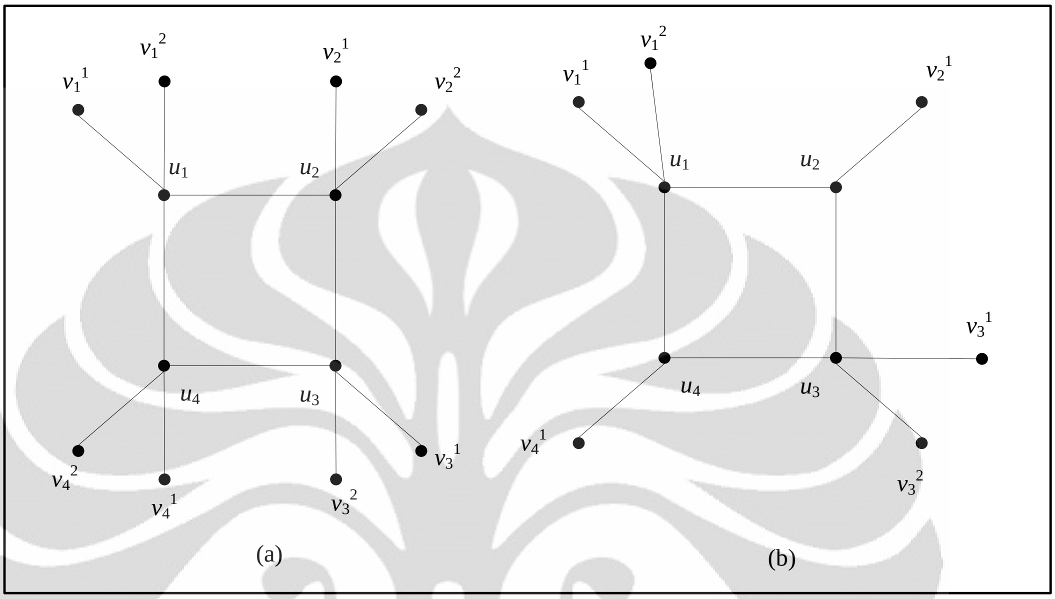

Gambar 2. 6 Graf lingkaran $C_6$

Graf **matahari** $C_n \odot \overline{K_1}$ merupakan suatu graf yang dibentuk dari suatu graf lingkaran $C_n$ dimana setiap simpul pada graf lingkaran tersebut diberi tambahan satu simpul berderajat satu sedemikian sehingga setiap simpul pada graf matahari memiliki derajat 3, kecuali pada simpul ujung-ujungnya yang memiliki derajat 1. Graf matahari dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$, dengan $n$ menyatakan banyaknya simpul pada graf lingkaran. Himpunan simpul pada graf matahari dapat dinyatakan dengan $V(C_n \odot \overline{K_1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpuan busurnya dapat dinyatakan dengan $E(C_n \odot \overline{K_1}) = \{v_1 v_2, \dots, v_{n-1} v_n\} \cup \{v_1 u_1, \dots, v_n u_n\} = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i | 1 \leq i \leq n\}$, dimana $v_i$ merupakan simpul graf matahari yang terletak pada graf lingkaran, $u_i$ merupakan simpul pada graf matahari yang terletak di luar lingkaran dan $i+1$ mod $n$. Banyaknya simpul dan busur pada graf matahari adalah $2n$ dengan $n$ menyatakan banyak simpul pada graf lingkaran yang digunakan untuk membangun graf matahari atau $n$ disebut ukuran graf matahari. Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf matahari $(C_4 \odot \overline{K_1})$.




Gambar 2. 7 Graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$

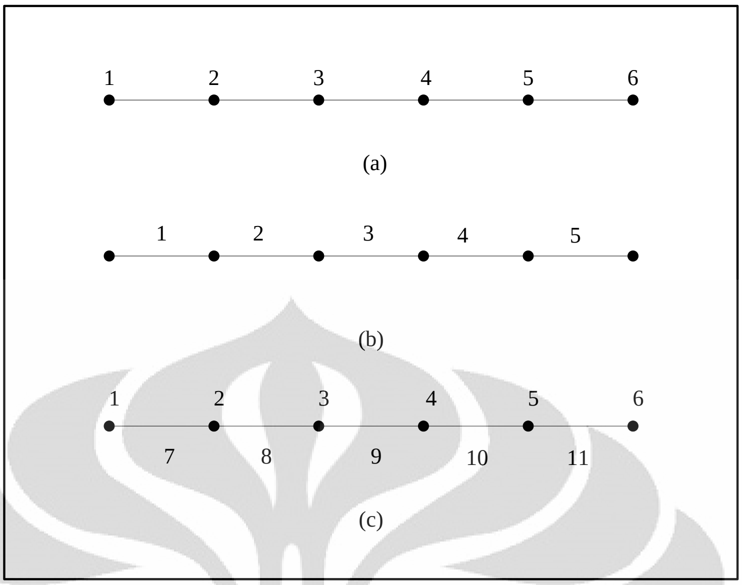
Graf **korona** $C_n \odot \overline{K_r}$ merupakan graf yang dibentuk dari graf lingkaran dengan menambahkan $r$ simpul berderajat satu pada setiap simpul dari graf lingkaran $C_n$, $n \geq 3$. Himpunan simpul pada graf korona adalah $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$ dan himpunan busurnya adalah $E = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$. Banyaknya simpul dan busur pada graf korona adalah $n(r+1)$. Graf ***hairycycle*** $HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n)$dibentuk dari graf lingkaran $C_n$ dengan menambahkan sembarang $r_i$simpul luar berderajat satu pada setiap simpul dalam $v_i, i = 1,2, \dots, n$ pada graf lingkaran $C_n$. Himpunan simpul dari graf *hairycycle*, yaitu $V = \{v_i: 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i^j: 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i\}$ dan himpunan busurnya $E = \{v_i v_{i+1}: 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i^j: 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i\}$, dengan $i+1$ mod $n$ dan dimana $v_i$ merupakan simpul dalam dan $u_i^j$ menyatakan simpul luar ke-$j$ pada simpul pusat ke-$i$. Pada Gambar 2.8 diberikan contoh graf korona dan graf *hairycycle*.




Gambar 2. 8 (a) Graf korona (b) Graf hairycycle

## 2.3 Pelabelan Graf

**Pelabelan** $f$ pada suatu graf $G$ merupakan pemetaan dari elemen-elemen graf $G$ ke suatu himpunan bilangan bulat. Bilangan hasil pemetaan $f$ disebut **label** (Bača & Miller, 2008). Jika domain dari pemetaan berupa himpunan simpul, maka pelabelan $f$ disebut sebagai **pelabelan simpul**. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan busur, maka pelabelan $f$ disebut sebagai **pelabelan busur**. Jika domain dari pemetaan berupa gabungan himpunan simpul dan himpunan busur, maka pelabelan $f$ disebut sebagai **pelabelan total**. Pada Gambar 2.9 diberikan contoh pelabelan simpul, busur, dan total pada graf lintasan. Pada skripsi ini, yang dibahas adalah pelabelan total.

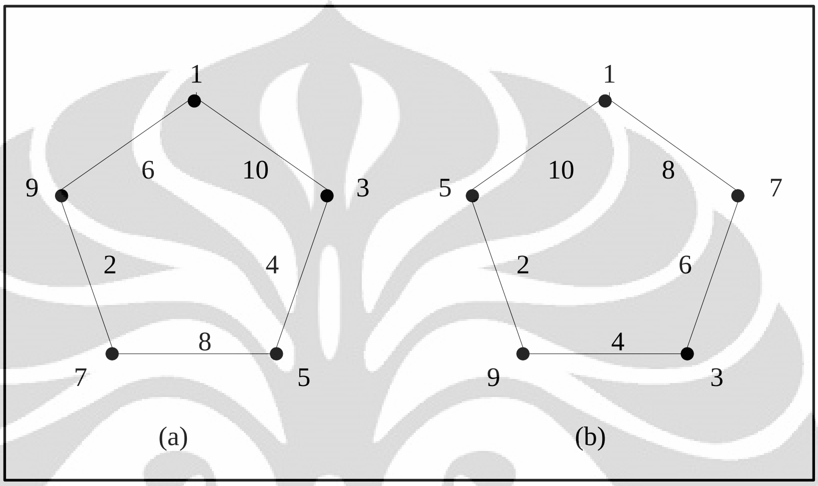



Gambar 2. 9 (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, (c) Pelabelan total

Bentuk penjumlahan label yang dikenakan pada setiap elemen dari graf $G$ di bawah pelabelan $f$ disebut **bobot** (*weight*) pada pelabelan total. **Bobot simpul** diperoleh dengan menjumlahkan label simpul dengan label busur yang hadir pada simpul tersebut (jika ada) untuk setiap simpul di $G$. **Bobot busur** diperoleh dengan menjumlahkan label busur dengan label simpul-simpul ujung pada busur tersebut (jika ada) untuk setiap busur di $G$. Secara matematis, bobot simpul $x \epsilon V$ di bawah suatu pelabelan total $f$ yang dinotasikan dengan $w_f(x)$, dapat dinyatakan sebagai $w_f(x) = f(x) + \sum_{y \epsilon N(x)} f(xy)$, $\forall x \in V$, dimana $N(x)$ adalah himpunan semua simpul yang bertetangga dengan $x$. Sedangkan bobot busur $xy \in E$ di bawah suatu pelabelan total $f$ yang dinotasikan dengan $w_f(xy)$, dapat dinyatakan sebagai $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$, $\forall xy \in E$.

Dalam pelabelan graf terdapat istilah **pelabelan ajaib**. Suatu pelabelan $f$ dikatakan sebagai pelabelan ajaib jika terdapat suatu bilangan $k$ sedemikian sehingga bobot simpul-simpul (atau busur-busur) pada graf adalah $k$. Bilangan $k$ yang ada pada pelabelan ini disebut sebagai **konstanta ajaib** atau **bilangan ajaib**. Pada pelabelan total, apabila $w_f(x) = k$, $\forall x \epsilon V$ maka pelabelan $f$ disebut sebagai

**pelabelan total simpul-ajaib**. Apabila $w_f(xy) = k$, $\forall xy \epsilon E$ maka pelabelan $f$ disebut sebagai **pelabelan total busur-ajaib**. Jika label dari simpul adalah himpunan bilangan yang terkecil maka pelabelan disebut sebagai **pelabelan super**. Pada Gambar 2.10 diberikan contoh pelabelan total simpul-ajaib dan pelabelan total busur-ajaib pada graf $C_5$.




Gambar 2. 10 (a) Pelabelan total simpul-ajaib pada $C_5$ dengan $k = 17$, (b) Pelabelan total busur-ajaib pada $C_5$ dengan $k = 16$

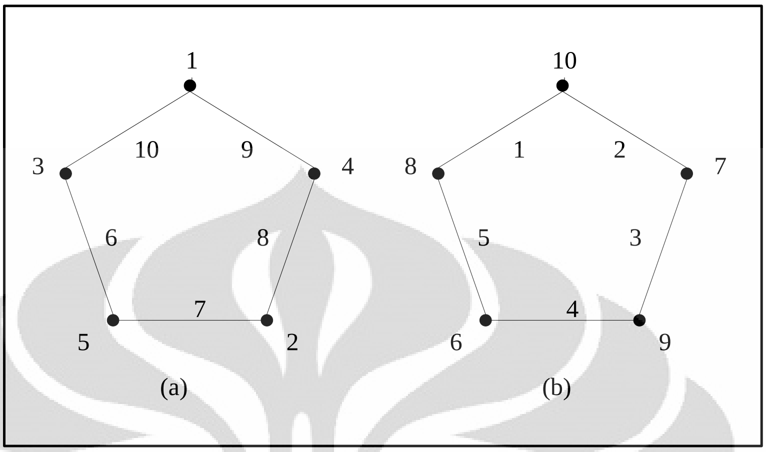
Pelabelan yang akan dibahas selanjutnya adalah pelabelan total busur-ajaib. Misalkan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, v + e\}$ adalah suatu pemetaan bijektif pada $G$. Jika bobot busur pada $G$ dengan pelabelan $f$ adalah $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) = k$, $\forall xy \in E$, maka $f$ disebut sebagai **pelabelan total busur-ajaib**. (Enomoto,dkk, 1998)

Pada pelabelan total busur-ajaib didefinisikan **pelabelan dual**. Misalkan pelabelan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, v + e\}$ merupakan pelabelan total busur ajaib pada graf $G$. Definisikan suatu pelabelan $f': V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, v + e\}$ sebagai berikut

$$f'(x) = v + e + 1 - f(x), \forall x \in V$$

$$f'(xy) = v + e + 1 - f(xy), \forall xy \in E.$$

Pada Gambar 2.11 diberikan contoh pelabelan total busur-ajaib pada $C_5$ dengan $k = 14$ dan dualnya dengan $k = 19$.

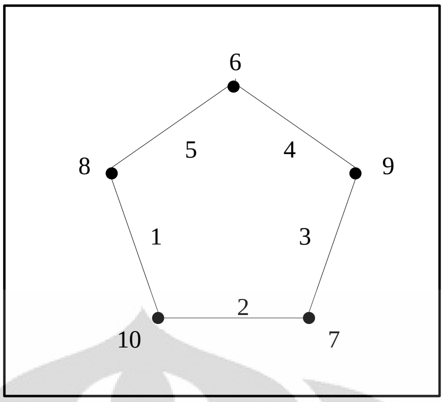



Gambar 2. 11 (a) Pelabelan total busur-ajaib $f$ pada $C_5$, (b) Pelabelan total busur-ajaib $f'$ pada $C_5$

Berhubungan dengan pelabelan dual, diberikan Teorema 2.1.

**Teorema 2.1** (Wallis, 2001) Pelabelan dual dari suatu pelabelan total busur-ajaib merupakan pelabelan total busur-ajaib.

Maka $f'$ disebut sebagai **dual** dari $f$. (Wallis, 2001). Telah dijelaskan pada bab I, **pelabelan berurutan** merupakan pengembangan dari pelabelan super. Pada pelabelan super, label yang berurutan dimulai dari 1, sedangkan pada pelabelan berurutan label yang berurutan tidak harus dimulai dari 1. Pada Gambar 2.12 diberikan contoh pelabelan total busur-ajaib super-busur, yaitu label pada busurnya dimulai dari 1.




Gambar 2. 12 Pelabelan total busur-ajaib super-busur pada graf $C_5$

Pada pelabelan berurutan, label yang berurutan dapat diberikan pada himpunan simpul atau busur. Jika label yang berurutan diberikan pada himpunan simpul, maka pelabelan disebut sebagai **pelabelan simpul-berurutan**. Jika label yang berurutan diberikan pada himpunan busur, maka pelabelan disebut sebagai **pelabelan busur-berurutan** (Sugeng & Miller, 2008). Pada skripsi ini yang akan dibahas hanyalah pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan yang akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

## 2.4 Pelabelan Total Busur-Ajaib $b$ −Busur-Berurutan

**Pelabelan total busur-bjaib $\boldsymbol{b}$ −busur-berurutan** (PTBA $b$ −busur-berurutan) didefinisikan sebagai suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, v+e\}$ pada suatu graf $G$, dengan $f$ merupakan suatu pelabelan total busur-ajaib dari $G$ dengan label busur $f(E) = \{b+1, b+2, \dots, b+e\}, 0 \leq b \leq n$ (Sugeng & Miller, 2008).

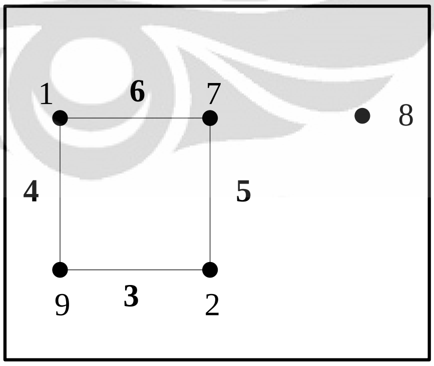
Konsep dari pelabelan total busur-ajaib berurutan diperkenalkan oleh Sugeng dan Miller (2006). Beberapa teorema yang berhubungan dengan pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dapat diberikan pada Teorema 2.2-2.4.

**Teorema 2.2** (Sugeng & Miller, 2006) Setiap graf busur-ajaib $b$ −busur-berurutan mempunyai pelabelan simpul busur anti-ajaib.

**Teorema 2.3** (Sugeng & Miller, 2006) Dual dari pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan untuk suatu graf $G$ adalah suatu pelabelan total busur ajaib $(v - b)$ −busur-berurutan.

**Teorema 2.4** (Sugeng & Miller, 2006) Jika suatu graf terhubung $G$ mempunyai pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dengan $b \in \{1,2,3, \dots, v - 1\}$ maka $G$ adalah suatu graf pohon.

Pada pembuktian Teorema 2.4 dinyatakan bahwa jika suatu graf $G$ memiliki suatu PTBA $b$ −busur-berurutan maka banyak maksimum busur pada $G$ adalah $v - 1$. Oleh karena itu, kelas graf terhubung yang dapat memenuhi kondisi tersebut hanyalah graf pohon. Namun, suatu graf terhubung yang bukan pohon dapat memiliki suatu PTBA $b$ −busur-berurutan dengan menambahkan sejumlah simpul terisolasi agar pada graf tersebut dipenuhi $e \leq v - 1$. Apabila banyak simpul terisolasi yang ditambahkan menyebabkan graf memenuhi $e = v - 1$, maka banyaknya simpul terisolasi yang ditambahkan optimal. Jikabanyaknya simpul terisolasi yang ditambahkan menyebabkan graf memenuhi $e < v - 1$, maka banyaknya simpul terisolasi yang ditambahkan tidak optimal. Pada Gambar 2.13 diberikan contoh PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf lingkaran $C_4$ dengan penambahan 1 simpul terisolasi.




Gambar 2. 13 PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf lingkaran $C_4$

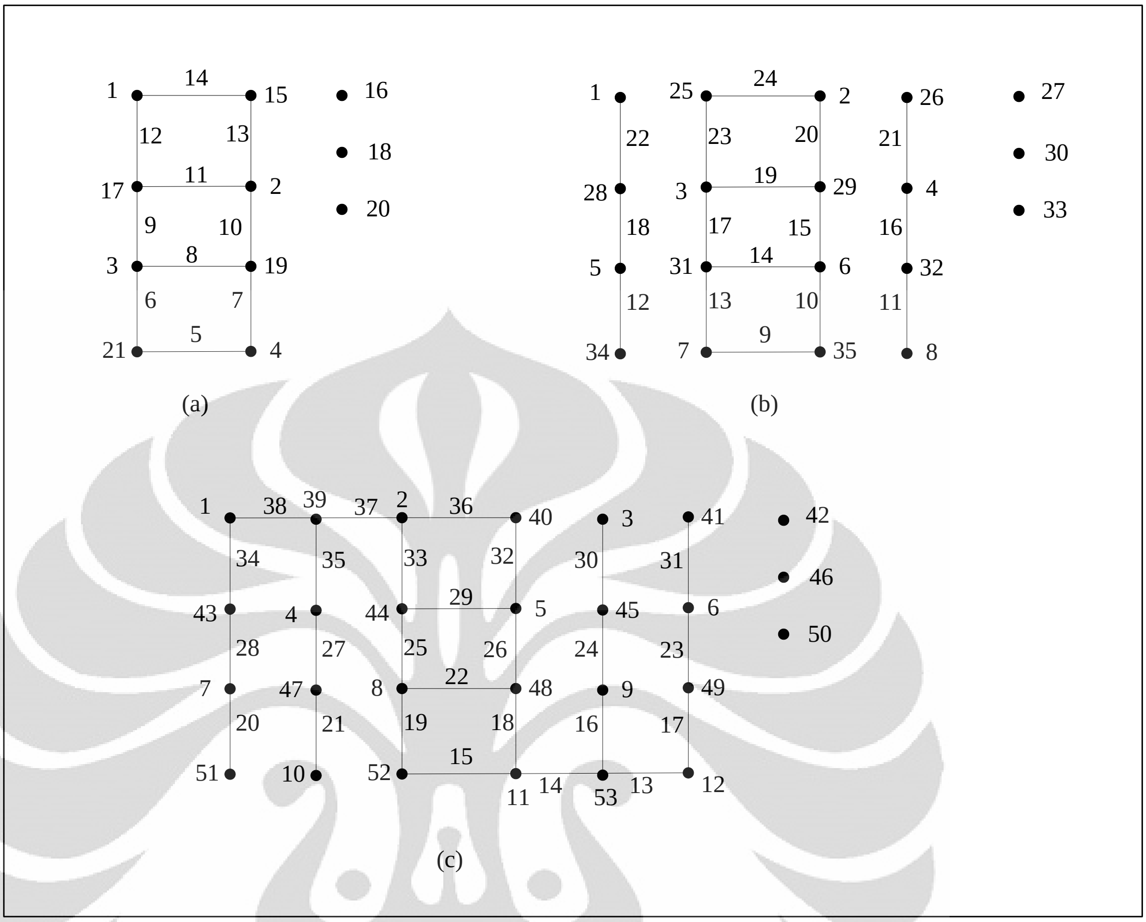
## 2.5 Hasil-hasil yang Diketahui

Hasil-hasil yang diketahui dari PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf yang termasuk graf pohon antara lain setiap graf *caterpillar* memiliki suatu PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap $b$, dimana :

$$b = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{r+1}{2} \right\rceil + \sum\limits_{i \text{ genap}} n_i - 2 & ,\text{jika } i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \dfrac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i\ genap\ , i<r} n_i - 2 + (n_r - 1) & ,\text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

(Sugeng & Miller, 2008). Setiap *firecrackers* teratur memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan, dengan $b = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor s + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, dan setiap regular *caterpillar-like tree* memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan, dengan $b = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor s + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ (Silaban & Sugeng, 2008).

Hasil yang diketahui dari PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf yang bukan pohon antara lain graf tangga $P_n \times P_2$ memiliki PTBA $(2n-1)$ −busur-berurutan dengan $n-1$ simpul terisolasi, graf gabungan $2mP_n$ dengan graf tangga $P_n \times P_2$ $(2mP_n \cup (P_n \times P_2))$ memiliki PTBA $\big((m+2)n-1\big)$ −busur-berurutan dengan $n-1$ simpul terisolasi, dan graf $LT_{mnm}$ memiliki PTBA $\big((m+2)n-1\big)$ −busur-berurutan dengan $n-1$ simpul terisolasi (Silaban & Sugeng, 2010). Pada bab berikutnya, akan dibahas PTBA $b$ −busur-berurutan untuk graf terhubung yang bukan pohon. Kelas graf yang dibahas adalah graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*. Pada Gambar 2.14 diberikan contoh PTBA $5$ −busur-berurutan pada graf tangga $P_5 \times P_2$, PTBA $8$ −busur-berurutan pada graf $2P_4 \cup (P_4 \times P_2)$, dan PTBA $8$ −busur-berurutan pada graf $LT_{242}$.




Gambar 2. 14 (a) PTBA $5$ −busur-berurutan pada graf tangga $P_4 \times P_2$, (b) PTBA $8$ −busur-berurutan pada graf $2P_4 \cup (P_4 \times P_2)$, dan (c) PTBA $8$ −busur-berurutan pada graf $LT_{242}$

# BAB 3

# PELABELAN TOTAL BUSUR-AJAIB $b$ −BUSUR-BERURUTAN PADA GRAF *UNICYCLE*

Pada bab ini akan diberikan konstruksi pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan, atau yang bisa disingkat dengan PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf *unicycle*, yaitu graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*.

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$ disebut sebagai suatu pelabelan total busur ajaib $b$-busur-berurutan (PTBA $b$ −busur-berurutan) dari $G$ jika $f$ adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari $G$ dan $f(E) = \{b+1, b+2, b+3, \dots, b+e\}$, $0 \leq b \leq v$. Jika $b = 0$, maka $f$ disebut sebagai pelabelan total busur-ajaib super-busur. Pada skripsi ini hanya dibahas untuk nilai $0 < b < v$. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan disebut sebagai graf busur-ajaib $b$ −busur-berurutan. Jika suatu graf terhubung $G$ memiliki pelabelan total busur-ajaib $b$-busur-berurutan dengan $b \in \{1,2,3,\dots,v-1\}$ maka jumlah maksimum busur pada $G$ adalah $v-1$, sehingga graf terhubung yang mungkin memiliki pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan adalah suatu graf pohon (Sugeng dan Miller, 2008). Suatu graf terhubung yang bukan pohon dimungkinkan akan memenuhi kondisi ini dengan menambahkan sejumlah berhingga simpul terisolasi pada graf tersebut sehingga akan dipenuhi $e \leq v-1$ (Silaban dan Sugeng, pp).

Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan banyak busur sama dengan banyak simpul dikurang satu atau $e = v-1$, maka banyaknya simpul terisolasi yang ditambahkan adalah optimal. Jika penambahan simpul terisolasi mengakibatkan kondisi banyak busur kurang dari banyak simpul dikurang satu atau $e < v-1$, maka banyaknya simpul yang ditambahkan tidak optimal.

Untuk membuktikan bahwa suatu graf memiliki kontruksi PTBA $b$ −busur-berurutan, dapat digunakan Lemma 3.2 yang merupakan adaptasi dari

Lemma 3.1. Lemma yang diberikan oleh Figuerora-Centeno dkk. ini merupakan sifat dari pelabelan total ajaib super.

**Lemma 3.1** (Figuerora-Centeno, Ichisima, dan Batle, 2001) Suatu graf$-(v,e)$ $G$ merupakan busur-ajaib super jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan bijektif $f: V \to \{1,2,\ldots,v\}$ sedemikian sehingga himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari $e$ bilangan bulat berurutan. Dalam kasus ini, $f$ dapat ditingkatkan menjadi suatu pelabelan total busur-ajaib super dari $G$ dengan nilai $k = v + e + s$, dimana $s = \min(S)$ dan $S = \{k - (v+1), k - (v+2), \ldots, k - (v+e)\}$.

Pelabelan berurutan merupakan pengembangan dari pelabelan super. Pada pelabelan total busur-ajaib super-busur, label busur berurutan dimulai dari 1. Pada pelabelan busur-berurutan, label dari busur berurutan bisa dimulai tidak dari satu. Maka, sifat dari pelabelan total ajaib super juga berlaku untuk PTBA $b$ $-$busur-berurutan. Oleh karena itu, Lemma 3.1 tersebut kemudian diadaptasi dan digunakan untuk membuktikan PTBA $b$ $-$busur-berurutan. Adaptasi Lemma 3.1 diberikan pada Lemma 3.2.

**Lemma 3.2** (Silaban dan Sugeng, pp) Suatu graf $G$ dengan $v$ simpul dan $e$ busur adalah suatu graf busur-ajaib $b$-busur-berurutan jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif $f: V \cup E \to \{1,2,3,\ldots,v+e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1,2,3,\ldots,v+e\} - \{b+1, b+2, b+3, \ldots, b+e\}, 0 \le b \le v$ dan himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari $e$ bilangan bulat positif berurutan. Dalam kasus ini, $f$ dapat ditingkatkan menjadi suatu PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada $G$ dengan konstanta ajaib $k = b + e + s$ dengan $s = \min(S)$ dan
$S = \{f(x) + f(y) | xy \in E(G)\} = \{k - (b+1), k - (b+2), \ldots, k - (b+e)\}$.

**Bukti.**

Diketahui bahwa $G$ adalah graf busur-ajaib $b$ $-$busur-berurutan, maka terdapat $f: V \cup E \to \{1,2,\ldots,v+e\}$ dan himpunan label busur yang berurutan $f(E) = \{b+1, b+2, \ldots, b+e\}$ sedemikian sehingga akan didapat bobot busur yang konstan $w_f = f(x) + f(y) + f(xy) = k$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan label simpul akan terbagi menjadi 2 kelompok himpunan bilangan, yaitu

$f(V \cup E) = f(V) + f(E)$

$f(V) = f(V \cup E) - f(E)$

$= \{1,2,\dots,v+e\} - \{b+1, b+2,\dots,b+e\}$

$= \{1,2,\dots,b\} \cup \{b+e+1, b+e+2,\dots,v+e\}$.

Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa terdapat $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ yang terdiri dari $e$ bilangan bulat positif berurutan.

$S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$

$= \{k - f(xy) | xy \in E\}$.

Karena $f(E) = \{f(xy) | xy \in E\} = \{b+1, b+2,\dots,b+e\}$, maka

$$S = \{k-(b+1), k-(b+2),\dots,k-(b+e)\}$$

Terdapat graf $G$ dengan $f: V \cup E \to \{1,2,\dots,v+e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1,2,\dots,v+e\} - \{b+1, b+2,\dots,b+e\}$, $0 \le b \le v$ dan himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari $e$ bilangan bulat positif berurutan. Akan ditunjukkan bahwa $G$ adalah graf busur-ajaib $b$ −busur-berurutan. Pertama, dapat ditunjukkan bahwa terdapat himpunan label busur yang berurutan, yaitu

$f(V) = \{1,2,\dots,v+e\} - \{b+1, b+2,\dots,b+e\}$

$f(E) = \{b+1, b+2,\dots,b+e\}$.

Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa terdapat himpunan bobot busur konstan.

$W_f = \{f(x) + f(y) + f(xy) | xy \in E\}$

$W_f = S + \{f(xy) | xy \in E\}$ dengan $f(E) = \{f(xy) | xy \in E\}$

Karena $S$ adalah himpunan bilangan berurutan dan $f(E)$ berurutan, maka akan didapat nilai dari anggota $W_f$ yang konstan. Jika $s = \min(S)$, maka $k = b + e + s$. ■

Pada skripsi ini yang dibahas adalah pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dengan $0 < b < v$ . Karena $0 < b < v$, maka label dari simpul-simpul pada PTBA $b$ −busur-berurutan akan terbagi dalam dua himpunan bilangan berurutan.

Untuk menunjukkan bahwa suatu konstruksi yang diberikan merupakan PTBA $b$ −busur-berurutan dari graf terkait, maka secara garis besar pembuktian dilakukan dengan alur sebagai berikut : pertama-tama didefinisikan fungsi pelabelan untuk simpul, tunjukkan bahwa label dari simpul akan terbagi menjadi dua himpunan bilangan berurutan, tunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y), xy \in E\}$ terdiri dari $e$ bilangan bulat positif berurutan, dan dengan menggunakan Lemma 3.2 tunjukkan bahwa suatu graf memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan nilai $k = b + e + s$.

Pada subbab 3.1 akan dibahas mengenai hasil yang diperoleh untuk PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf lingkaran dengan nilai $n$ adalah kelipatan 4.

## 3.1 Pelabelan Total Busur-Ajaib $b$ −Busur-Berurutan pada Graf Lingkaran

Graf lingkaran yang memiliki $n$ simpul dimana $n \geq 3$ dapat dinotasikan dengan $C_n$. Himpunan simpul pada graf lingkaran adalah $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan busur pada graf lingkaran adalah $E = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\}$ dengan $i + 1$ diambil dalam mod $n$. Pada graf lingkaran, jumlah simpul sama dengan jumlah busurnya atau $v = e = n$. Agar graf lingkaran dapat dilabel menggunakan pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan maka harus memenuhi $e = v - 1$. Oleh karena itu, maka perlu ditambahkan sebuah simpul terisolasi pada graf lingkaran.

Pada Teorema 3.1 diberikan hasil yang diperoleh untuk PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf lingkaran dengan banyaknya simpul pada graf lingkaran adalah kelipatan 4 atau $n \equiv 0 \bmod 4$.

**Teorema 3.1** Setiap graf lingkaran $C_n$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $n/2$ −busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

**Bukti**. Nyatakan simpul terisolasi dengan $x$. Ambil

$$a = \frac{3n}{2}.$$

Label simpul-simpul dari $(C_n)$ sebagai berikut

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i+1}{2} & , i \text{ ganjil} \\ a + \dfrac{i}{2} & , i \text{ genap}, i = 2,4, \ldots, \dfrac{n}{2} \\ a + \dfrac{i}{2} + 1 & i \text{ genap}, i = \dfrac{n}{2} + 2, \dfrac{n}{2} + 4, \ldots, n \end{cases}$$

dan label simpul terisolasi dengan

$$f(x) = a + \frac{n}{4} + 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label dari simpul membentuk dua himpunan bilangan seperti yang disyaratkan pada Lemma 3.2. Dengan menggunakan definisi label simpul pada graf lingkaran, nyatakan

$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ ganjil}\}$

$\quad = \left\{1,2,3, \ldots, \frac{n}{2}\right\}.$

$L_2 = \left\{f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = 2,4, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$

$\quad = \left\{a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + \frac{n}{4}\right\}.$

$L_3 = \left\{f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \ldots, n\right\}$

$\quad = \left\{a + \frac{n}{4} + 2, a + \frac{n}{4} + 3, \ldots, a + \frac{n}{2} + 1\right\}.$

Maka himpunan label simpul dari $C_n$ adalah

$$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \{f(x)\}$$

$$= \left\{1,2,3,..,\tfrac{n}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+\tfrac{n}{4}\right\} \cup \{a+\tfrac{n}{4}+2, a+\tfrac{n}{4}+3, a+\tfrac{n}{4}+4, \dots, a+\tfrac{n}{2}+1\} \cup \left\{a+\tfrac{n}{4}+1\right\}$$

$$= \left\{1,2,3, \dots, \frac{n}{2}\right\} \cup \left\{a+1, a+2, \dots, a+\frac{n}{4}, a+\frac{n}{4}+1, \dots, a+\frac{n}{2}+1\right\}$$

$$= \left\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\right\} \cup \left\{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}, \boldsymbol{a}+\mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right\}.$$

Dari persamaan di atas, terlihat bahwa label-label simpul terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan. Dapat dilihat bahwa nilai konstanta $b = \frac{n}{2}$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk bilangan bulat positif yang berurutan. Berdasarkan pendefinisian label simpul pada graf lingkaran, pembuktian akan dibagi menjadi 3 kasus busur yang diilustrasikan pada Gambar 3.1.

1. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2}$
2. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$
3. $v_n v_1$

Kasus 1 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2}$ .

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i+1$ genap.

$$s_1 = f(v_i) + f(v_{i+1})$$

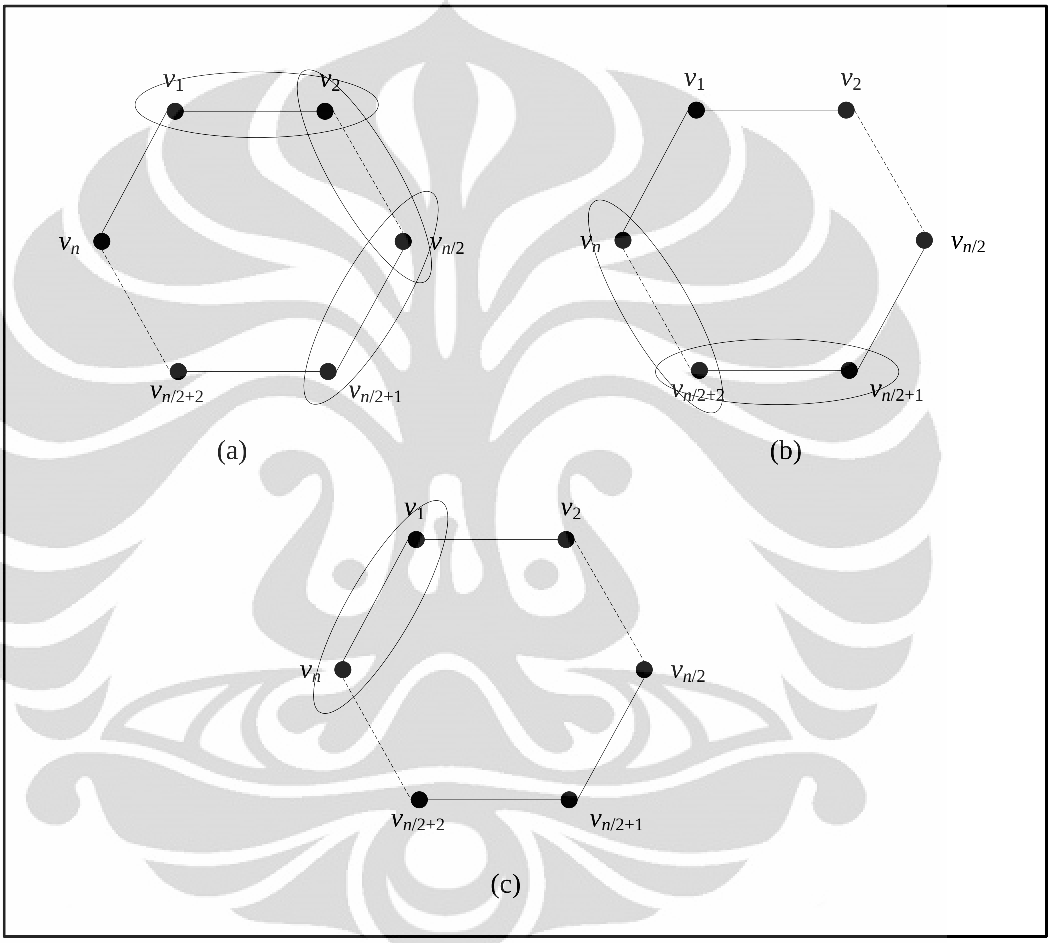
$$= \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(a + \frac{1+i}{2}\right)$$

$$= a + i + 1.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2}$, didapat himpunan bobot busur

$$S_1 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} \right\}$$

$$= \left\{ a + 2, a + 3, \dots, a + \frac{n}{2} + 1 \right\}.$$




Gambar 3. 1 (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, dan (c) Kasus 3.

Kasus 2 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$

Ttanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i + 1$ genap.

$s_2 = f(v_i) + f(v_{i+1})$

$$= \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(a + \frac{1+i}{2} + 1\right)$$

$$= a + i + 2.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$, didapat himpunan bobot busur

$$S_2 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1 \right\}$$

$$= \left\{ a + \frac{n}{2} + 1 + 2, a + \frac{n}{2} + 2 + 2, \dots, a + n - 1 + 2 \right\}$$

$$= \left\{ a + \frac{n}{2} + 3, a + \frac{n}{2} + 4, \dots, a + n + 1 \right\}.$$

Kasus 3 untuk busur $v_n v_1$

$$s_3 = f(v_i) + f(v_n)$$

$$= 1 + \left(a + \frac{n}{2} + 1\right)$$

$$= a + \frac{n}{2} + 2.$$

Maka himpunan bobot busur $S_3$ adalah

$$S_3 = \{f(v_i) + f(v_n)\}$$

$$= \left\{ a + \frac{n}{2} + 2 \right\}.$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ dari graf lingkaran membentuk suatu himpunan bilangan bulat positif berurutan.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$= \left\{a+2, a+3, a+4, \dots, a+\frac{n}{2}+1\right\} \cup \{a+\frac{n}{2}+3, a+\frac{n}{2}+4, a+\frac{n}{2}+ 5 \dots, a+n+1\} \cup \{a+\frac{n}{2}+2\}$

$= \{a+2, a+3, a+4, \dots., a+\frac{n}{2}+1, a+\frac{n}{2}+2, a+\frac{n}{2}+3, a+\frac{n}{2}+4, a+\frac{n}{2}+ 5, \dots, a+n+1\}$

$= \{a+2, a+3, a+4, \dots, a+n+1\}.$

Karena himpunan bobot busur $S = \{f(x) + f(y), xy \in E\}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif berurutan $\{a+2, a+3, \dots, a+n+1\}$, maka dengan menggunakan Lemma 3.2 terbukti bahwa graf lingkaran $C_n$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan nilai $b = \frac{n}{2}$.■

Menurut Lemma 3.2, nilai konstanta ajaib adalah

$k = b + e + s$, dimana $s = \min(S) = a + 2$

$$k = \frac{n}{2} + n + a + 2$$

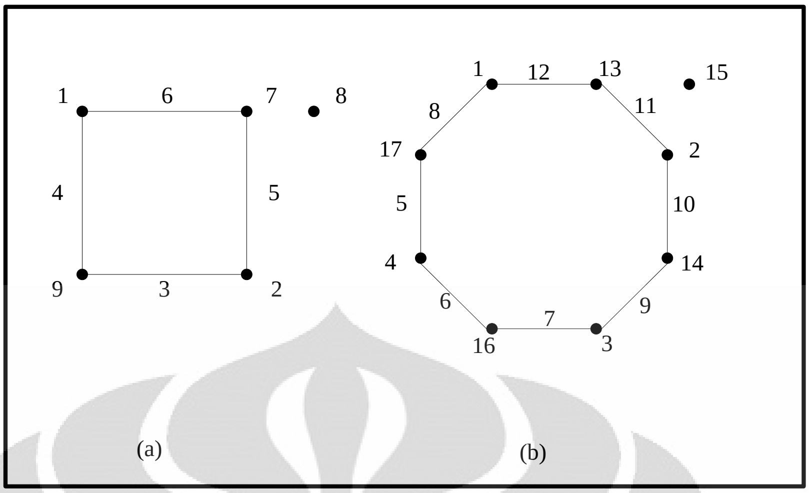
$$= \frac{3n}{2} + a + 2.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $a = \frac{3n}{2}$, maka

$$k = \frac{3n}{2} + \frac{3n}{2} + 2$$

$$= 3n + 2.$$

Pada Gambar 3.2 diberikan contoh PTBA $\frac{n}{2}$ −busur-berurutan pada graf lingkaran dengan $C_4$ dan $C_8$.



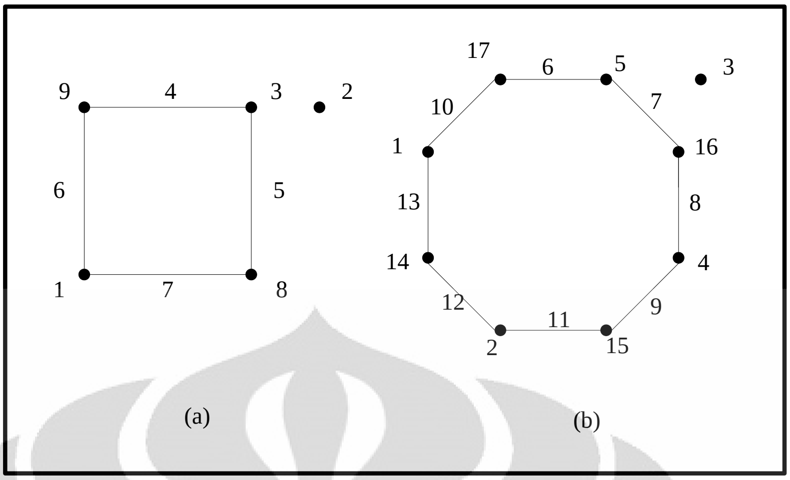

Gambar 3. 2 (a) PTBA $2$ $-$busur-berurutan pada $C_4$ dengan $k = 14$ dan (b) PTBA $4$ $-$busur-berurutan pada $C_8$ dengan $k = 26$.

Berdasarkan Teorema 2.3 didapatkan pelabelan dual dari PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf lingkaran yang diberikan pada Akibat 3.1.

**Akibat 3.1** Setiap graf lingkaran $C_n$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ $-$busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

Pada Gambar 3.3 diberikan contoh PTBA $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ $-$busur-berurutan pada graf lingkaran $C_4$ dan $C_8$.

Pada subbab selanjutnya akan dibahas PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf matahari dengan banyaknya simpul pada graf matahari adalah $n \equiv 0 \bmod 4$.




Gambar 3. 3 (a) PTBA $3-$busur-berurutan pada $C_4$ dengan $k = 16$ dan (b) PTBA 5-busur-berurutan pada $C_8$ dengan $k = 28$.

## 3.2 Pelabelan Total Busur-Ajaib $b-$Busur Berurutan pada Graf Matahari

Graf matahari yang memiliki $n$ simpul dimana $n \geq 3$ dapat dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$. Himpunan simpul pada graf matahari adalah $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan busur pada graf matahari adalah $E = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dengan $i + 1$ mod $n$ dan dimana $v_i$ menyatakan simpul dalam (simpul pada graf lingkaran) dan $u_i$ menyatakan simpul luar pada simpul di graf lingkaran ke-$i$. Nilai $n$ menyatakan banyaknya simpul pada graf lingkaran yang digunakan untuk membangun graf matahari sehingga nilai $n$ disebut sebagai ukuran dari graf matahari. Pada graf matahari, banyak simpul sama dengan banyak busurnya atau $v = e = 2n$. Agar graf matahari dapat dilabel dengan menggunakan pelabelan total busur-ajaib $b-$busur-berurutan, maka harus memenuhi $e = v - 1$. Oleh karena itu, maka perlu ditambahkan sebuah simpul terisolasi pada graf matahari.

Pada Teorema 3.2 diberikan hasil yang diperoleh untuk PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf matahari dengan banyaknya simpul pada graf lingkaran di graf matahari adalah kelipatan 4 atau $n \equiv 0 \bmod 4$.

**Teorema 3.2** Setiap graf matahari dengan $n \equiv 0 \bmod 4$ memiliki PTBA $n$ −busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

**Bukti**. Nyatakan simpul terisolasi dengan $x$. Ambil

$$a = 3n.$$

Label simpul-simpul dari $(C_n \odot \overline{K_1})$ sebagai berikut

$$f(v_i) = \begin{cases} i & , i \text{ genap} \\ a + i & , i \text{ ganjil}, i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ a + i + 1 & , i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1 \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} i & , i \text{ ganjil} \\ a + i & , i \text{ genap}, i = 2,4, \dots, \frac{n}{2} \\ a + i + 1 & , i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n \end{cases}.$$

dan label simpul terisolasi dengan

$$f(x) = a + \frac{n}{2} + 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label dari simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan seperti yang disyaratkan pada Lemma 3.2. Dengan menggunakan definisi label simpul pada graf matahari, nyatakan

$$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ genap}\}$$

$$= \{2,4,6, \dots, n\}.$$

$$L_2 = \left\{f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$$

$$= \left\{a + 1, a + 3, a + 5, \dots, a + \frac{n}{2} - 1\right\}.$$

$$L_3 = \left\{f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}\right\}$$

$$= \left\{a + \frac{n}{2} + 1 + 1, a + \frac{n}{2} + 3 + 1, a + \frac{n}{2} + 5 + 1 \dots, a + n - 1 + 1\right\}$$

$$= \left\{a + \frac{n}{2} + 2, a + \frac{n}{2} + 4, \dots, a + n\right\}.$$

$$L_4 = \{f(u_i) | i \text{ ganjil}\}$$

$$= \{1,3,5, \dots, n - 1\}.$$

$$L_5 = \left\{f(u_i) \middle| i \text{ genap}, i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}\right\}$$

$$= \left\{a + 2, a + 4, a + 6, \dots, a + \frac{n}{2}\right\}.$$

$$L_6 = \left\{f(u_i) \middle| i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n\right\}$$

$$= \{a + \frac{n}{2} + 2 + 1, a + \frac{n}{2} + 4 + 1, a + \frac{n}{2} + 6 + 1, \dots, a + n + 1\}$$

$$= \left\{a + \tfrac{n}{2} + 3, a + \tfrac{n}{2} + 5, \dots, a + n + 1\right\}.$$

Maka himpunan simpul label simpul $C_n \odot \overline{K_1}$ adalah

$$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup \{f(x)\}$$

$= \{2,4,6, \dots, n\} \cup \left\{a + 1, a + 3, a + 5, \dots, a + \frac{n}{2} - 1\right\} \cup \left\{a + \frac{n}{2} + 2, a + \frac{n}{2} +\right.$

*4,…,a+n∪1,3,5,…,n−1∪a+2,a+4,a+6,…,a+n2∪a+n2+3,a+n2+5,…,*

*a+n+1∪{a+n2+1}*

$= \{1,2,3,4, \dots, n-1, n\} \cup \{a+1, a+2, a+3, a+4, \dots, a+\frac{n}{2}-1, a+\frac{n}{2}, a+\frac{n}{2}+1, a+\frac{n}{2}+2, a+\frac{n}{2}+3, a+\frac{n}{2}+4, a+n, a+n+1\}$

$= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{n}\} \cup \{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}, \boldsymbol{a}+\mathbf{2}, \boldsymbol{a}+\mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}+\mathbf{1}\}$.

Dari persamaan di atas, terlihat bahwa label-label simpul terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan. Dapat dilihat bahwa nilai konstanta $b = n$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk bilangan bulat positif yang berurutan. Berdasarkan pendefinisian label simpul pada graf matahari, pembuktian akan dibagi menjadi 7 kasus busur yang diilustrasikan pada Gambar 3.4.

1. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$
2. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1$
3. $v_n v_1$
4. $u_i v_i$ untuk $i$ ganjil, $i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1$
5. $u_i v_i$ untuk $i$ ganjil, $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n-1$
6. $u_i v_i$ untuk $i$ genap, $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$
7. $u_i v_i$ untuk $i\ genap, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n$

Kasus 1 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i+1$ genap.

$s_1 = f(v_i) + f(v_{i+1})$

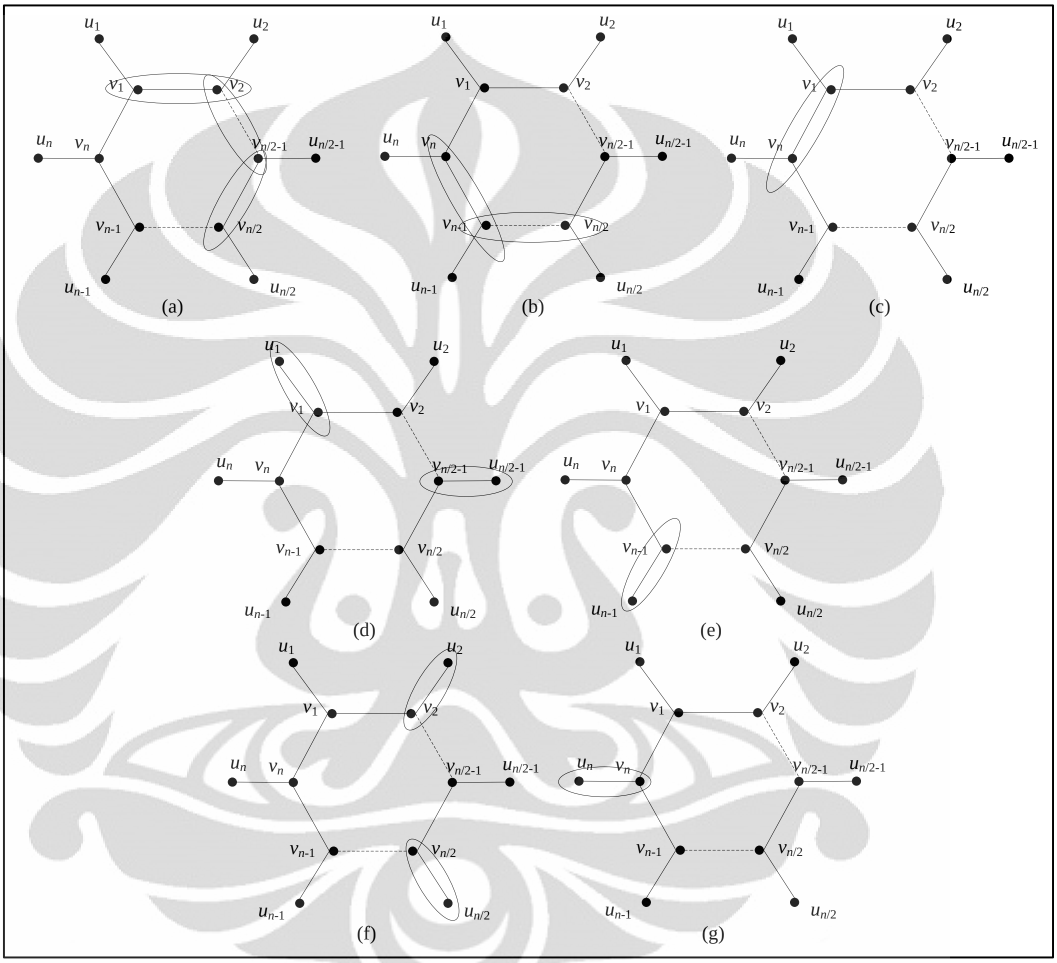
$\quad = (a+i) + (i+1)$

$\quad = a + 2i + 1.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$, didapat himpunan bobot busur

$$S_1 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$$

$$= \{a + 3, a + 5, \dots, a + n - 1\}.$$




Gambar 3. 4 (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, (c) Kasus 3, (d) Kasus 4, (e) Kasus 5, (f) Kasus 6, dan (g) Kasus 7.

Kasus 2 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1$ .

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i + 1$ genap.

$s_2 = f(v_i) + f(v_{i+1})$

$= (a + i + 1) + (i + 1)$

$= a + 2i + 2.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \ldots, n-1$ , didapat himpunan bobot busur

$S_2 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \ldots, n-1 \right\}$

$= \{a + n + 2, a + n + 2 + 2, \ldots, a + 2n - 2 + 2\}$

$= \{a + n + 2, a + n + 4, \ldots, a + 2n\}.$

Kasus 3 untuk busur $v_n v_1$

$s_3 = f(v_n) + f(v_1)$

$= n + a + 1.$

Maka himpunan bobot busurnya adalah

$S_3 = \{f(v_n) + f(v_1)\}$

$= \{a + n + 1\}.$

Kasus 4 untuk busur $u_i v_i$ dengan $i$ ganjil, $i = 1,3, \ldots, \frac{n}{2} - 1$

$s_4 = f(u_i) + f(v_i)$

$= i + (a + i)$

$= a + 2i.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i$ ganjil, $i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1$, didapat himpunan bobot busur

$S_4 = \left\{ f(u_i) + f(v_i) | i \text{ ganjil}, i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$

$= \{a + 2, a + 6, \dots, a + n - 2\}.$

Kasus 5 untuk busur $u_i v_i$ dengan $i$ ganjil dan $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$

$s_5 = f(u_i) + f(v_i)$

$= i + (a + i + 1)$

$= a + 2i + 1.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$, didapat himpunan bobot busur

$S_5 = \left\{ f(u_i) + f(v_i) | i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1 \right\}$

$= \{a + n + 2 + 1, a + n + 6 + 1, \dots, a + 2n - 2 - 1\}$

$= \{a + n + 3, a + n + 7, \dots, a + 2n - 3\}.$

Kasus 6 untuk busur $u_i v_i$ dengan $i$ genap, $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$

$s_6 = f(u_i) + f(v_i)$

$= (a + i) + i$

$= a + 2i.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i$ genap, $i = 2,4,\ldots,\frac{n}{2}$, didapat himpunan bobot busur

$S_6 = \left\{ f(u_i) + f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = 2,4,\ldots,\frac{n}{2} \right\}$

$= \{a + 4, a + 8, \ldots, a + n\}.$

Kasus 7 untuk busur $u_i v_i$ dengan $i$ genap , $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n$

$s_7 = f(u_i) + f(v_i)$

$= (a + i + 1) + i$

$= a + 2i + 1.$

Dengan mensubstitusikan nilai $i$ genap, $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n$, didapat himpunan bobot busur

$S_7 = \left\{ f(u_i) + f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n \right\}$

$= \{a + n + 4 + 1, a + n + 8 + 1, \ldots, a + 2n + 1\}$

$= \{a + n + 5, a + n + 9, \ldots, a + 2n + 1\}.$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ dari graf matahari membentuk suatu himpunan bilangan bulat positif berurutan.

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$

$= \{a + 3, a + 5, \ldots, a + n - 1\} \cup \{a + n + 2, a + n + 4, \ldots, a + 2n\} \cup \{a + n + 1\} \cup \{a + 2, a + 6, \ldots, a + n - 2\} \cup \{a + n + 3, a + n + 7, \ldots, a + 2n - 3\} \cup \{a + 4, a + 8, \ldots, a + n\} \cup \{a + n + 5, a + n + 9, \ldots, a + 2n + 1\}$

$= \{a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, \dots, a+n-2, a+n-1, a+n, a+n+1, a+n+2, a+n+3, \dots, a+2n-3, \dots, a+2n, a+2n+1\}$

$= \{a+2, a+3, a+4, \dots, a+2n+1\}.$

Karena himpunan bobot busur $S = \{f(x)+f(y), xy \in E\}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif berurutan $\{a+2, a+3, \dots, a+2n+1\}$, maka dengan menggunakan Lemma 3.2 terbukti bahwa graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \equiv 0 \bmod 4$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan nilai $b = n$.■

Menurut Lemma 3.2, nilai konstanta ajaib adalah

$k = b + e + s$, dimana $s = \min(S) = a + 2$

$k = n + 2n + a + 2$

$k = 3n + a + 2.$

Dengan mensubstitusikan nilai $a = 3n$, maka

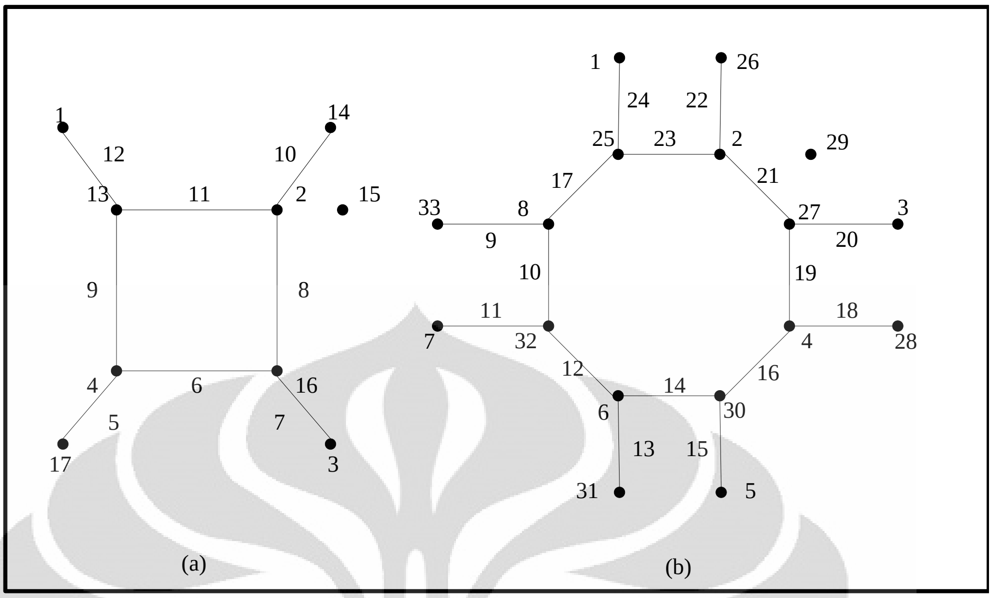
$k = 3n + 3n + 2$

$k = 6n + 2.$

Pada Gambar 3.5 diberikan contoh PTBA $n$ −busur-berurutan pada graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$ dan $C_8 \odot \overline{K_1}$.

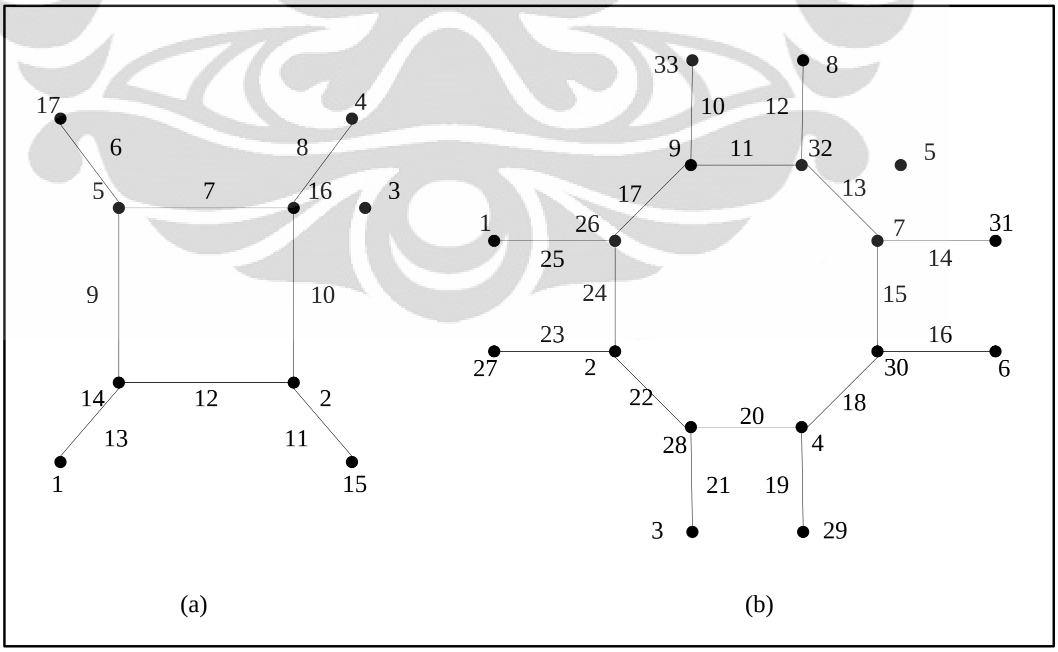
Berdasarkan Teorema 2.3 didapatkan pelabelan dual dari PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf matahari yang diberikan pada Akibat 3.2.

**Akibat 3.2** Setiap graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \equiv 0 \bmod 4$ memiliki PTBA $(n+1)$ −busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.




Gambar 3. 5 (a) PTBA $4$ $-$busur-berurutan pada $C_4 \odot \overline{K_1}$ dengan $k = 26$ dan (b) PTBA $8$ $-$busur-berurutan pada $C_8 \odot \overline{K_1}$dengan $k = 50$.

Pada Gambar 3.6 diberikan contoh PTBA $(n+1)$ $-$busur-berurutan pada graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$ dan $C_8 \odot \overline{K_1}$.



Gambar 3. 6 (a) PTBA $5$ $-$busur-berurutan pada $C_4 \odot \overline{K_1}$ dengan $k = 28$ dan (b) PTBA $9$ $-$busur-berurutan pada $C_8 \odot \overline{K_1}$ dengan $k = 52$.

Pada subbab selanjutnya akan dibahas PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf korona dengan banyaknya simpul adalah $n \equiv 0$ mod $4$. Dengan menggunakan fungsi pelabelan simpul pada graf matahari, tidak bisa diperoleh PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf lingkaran, karena fungsi pelabelan yang didapat berbeda.

## 3.3 Pelabelan Total Busur-Ajaib $b$ $-$Busur-Berurutan pada Graf Korona

Graf korona yang memiliki $n$ simpul pada graf lingkaran dimana $n \geq 3$ dan $r$ simpul berderajat satu pada setiap simpul pada graf lingkaran dapat dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_r}$. Himpunan simpul pada graf korona adalah $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$ dan himpunan busur pada graf lingkaran adalah $E = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$, dengan $i + 1$ dalam mod $n$ dan dimana $v_i$ menyatakan simpul dalam (simpul pada graf lingkaran) dan $u_i^j$ menyatakan simpul luar ke-$j$ pada simpul di graf lingkaran ke-$i$. Nilai $n$ menyatakan banyaknya simpul pada graf lingkaran yang digunakan untuk membangun graf korona sehingga nilai $n$ disebut sebagai ukuran dari graf korona. Pada graf korona, banyak simpul sama dengan banyak busurn atau $v = e = (r + 1)n$. Agar graf korona dapat dilabel dengan menggunakan pelabelan total busur-ajaib $b$ $-$busur-berurutan, maka harus memenuhi $e = v - 1$. Oleh karena itu, maka perlu ditambahkan sebuah simpul terisolasi pada graf korona.

Pada Teorema 3.3 diberikan hasil yang diperoleh untuk PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf korona dengan banyaknya simpul pada lingkaran di graf korona adalah kelipatan 4 atau $n \equiv 0$ mod $4$.

**Teorema 3.3** Setiap graf korona dengan $n \equiv 0 \bmod 4$ memiliki PTBA $\frac{n}{2}(r+1)-$busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

**Bukti.** Nyatakan simpul terisolasi dengan $x$. Ambil

$$a = \frac{3n}{2}(r+1).$$

Label simpul-simpul dari graf korona sebagai berikut

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i}{2}(r+1) & , i \text{ genap} \\ a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 1 & , i \text{ ganjil}, i = 1,3,\dots,\frac{n}{2}-1 \\ a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 2 & , i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+3, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(r+1) + j & , i \text{ ganjil}, j = 1,2,\dots,r \\ a + \left(\frac{i}{2}-1\right)(r+1) + 1 + j & , i \text{ genap}, i = 2,4,\dots,\frac{n}{2}; j = 1,2,\dots,r \\ a + \left(\frac{i}{2}-1\right)(r+1) + 2 + j & , i \text{ genap}, i = \frac{n}{2}+2,\dots,n; j = 1,2,\dots,r \end{cases}.$$

dan label simpul terisolasi dengan

$$f(x) = a + \frac{n}{4}(r+1) + 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label dari simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan seperti yang disyaratkan pada Lemma 3.2. Dengan menggunakan definisi label simpul pada graf korona, nyatakan

$$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ genap}\}$$
$$= \left\{\frac{2}{2}(r+1), \frac{4}{2}(r+1), \dots, \frac{n}{2}(r+1)\right\}$$
$$= \left\{(r+1), 2(r+1), \dots, \frac{n}{2}(r+1)\right\}.$$

$$L_2 = \left\{f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 1,3,\dots,\frac{n}{2}-1\right\}$$

$$= \left\{a + 0(r+1) + 1, a + (r+1) + 1, \dots, a + \left(\frac{n}{4} - 1\right)(r+1) + 1\right\}$$

$$= \left\{a + 1, a + 2 + r, \dots, a + \frac{n}{4} + \frac{n}{4}r - 1 + r + 1\right\}$$

$$= \left\{a + 1, a + 2 + r, \dots, a + \frac{n}{4}(r+1) - r\right\}.$$

$$L_3 = \left\{ f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1\right\}$$

$$= \left\{a + \frac{n}{4}(r+1) + 2, a + \left(\frac{n}{4} + 1\right)(r+1) + 2, \dots, a + \left(\frac{n}{2} - 1\right)(r+1) + 2\right\}$$

$$= \left\{a + \frac{n}{4}(r+1) + 2, a + \frac{n}{4} + \frac{n}{4}r + 1 + r + 2, \dots, a + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}r - 1 - r + 2\right\}$$

$$= \left\{a + \frac{n}{4}(r+1) + 2, a + \frac{n}{4}(r+1) + r + 3, \dots, a + \frac{n}{2}(r+1) - r + 1\right\}.$$

$$L_4 = \left\{ f\left(u_i^j\right) \middle| i \text{ ganjil}; j = 1,2, \dots, r\right\}$$

$= \Big\{0(r+1) + 1, 0(r+1) + 2, \dots, 0(r+1) + r, (r+1) + 1, (r+1) +$
*2,…,r+1+r,…,n2−1r+1+1,n2−1r+1+2,…,n2−1r+1+r*

$= \Big\{1,2, \dots, r, r+2, r+3, \dots, 2r+1, \dots, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}r - 1 - r + 1, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}r - 1 - r +$
*2,…,n2+n2r−1−r+r*

$= \Big\{1,2, \dots, r, r+2, r+3, \dots, 2r+1, \dots, \frac{n}{2}(r+1) - r, \frac{n}{2}(r+1) - r +$
*1,…,n2r+1−1.*

$$L_5 = \left\{ f\left(u_i^j\right) \middle| i \text{ ganjil}, i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}; j = 1,2, \dots r\right\}$$

$= \Big\{a + 0(r+1) + 1 + 1, a + 0(r+1) + 1 + 2, \dots, a + 0(r+1) + 1 +$
*r,a+r+1+1+1,a+r+1+1+2,…,a+r+1+r+1,…,a+n4−1r+1+1+1,a+n4−1r+1+1+2,…,a+n4−1r+1+1+r*

$= \{a+2, a+3, \dots, a+r+1, a+r+3, a+r+4, a+2r+1, \dots, a+\frac{n}{4}r+$
*n4−1−1+1+1,a+n4r+n4−r−1+1+2,...,a+n4r+n4−r−1+1+r*

$= \{a+2, a+3, \dots, a+r+1, a+r+4, \dots, a+2r+1, \dots, a+\frac{n}{4}(r+1)-$
*r+1,a+n4r+1−r+2,...,a+n4r+1.*

$$L_6 = \left\{ f(u_i^j) | i \text{ genap}, i = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, n; j = 1,2,\dots,r \right\}$$

$= \{a+\left(\frac{n}{4}+1-1\right)(r+1)+2+1, a+\left(\frac{n}{4}+1-1\right)(r+1)+2+1, \dots, a+$
*n4+1−1r+1+2+r,...,a+n4+2−1r+1+2+1,a+n4+2−1r+1+2+2,...,a+*
*n4+2−1r+1+2+r,a+n2−1r+1+2+1,a+n2−1r+1+2+2,...,a+n2−1r+*
*1+2+r*

$= \{a+\frac{n}{4}(r+1)+3, a+\frac{n}{4}(r+1)+4, \dots, a+\frac{n}{4}(r+1)+r+2, a+$
*n4+1r+1+3,a+n4+1r+1+4,...,a+n4+1r+1+r+2,...,a+n2r+n2−r−1*
*+3,a+n2r+n2−r−1+4,...,a+n2r+n2−r−1+r+2*

$= \{a+\frac{n}{4}(r+1)+3, a+\frac{n}{4}(r+1)+4, \dots, a+\frac{n}{4}(r+1)+r+2, a+$
*n4r+1+r+4,a+n4r+1+r+5,...,a+n4r+1+2r+2,...,a+n2r+1−r+2,a+n*
*2r+1−r+3,...,a+n2r+1+1.*

Maka himpunan himpunan simpul $C_n \odot \overline{K_r}$ tersebut adalah

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup \{f(x)\}$

$= \left\{r+1, 2(r+1), \dots, \frac{n}{2}(r+1)\right\} \cup \left\{a+1, a+r+2, \dots, a+\frac{n}{4}(r+1)-r\right\} \cup \left\{a+\frac{n}{4}(r+1)+2, a+\frac{n}{4}(r+1)+r+3, \dots, a+\frac{n}{2}(r+1)-r+1\right\} \cup \left\{1,2,\dots,\frac{n}{2}(r+1)-1\right\} \cup \left\{a+2, a+3, \dots, a+\frac{n}{4}(r+1)\right\} \cup \{a+$

$\frac{n}{4}(r+1)+3, a+\frac{n}{4}(r+1)+4, \dots, a+\frac{n}{2}(r+1)+1\Big\} \cup \Big\{a+\frac{n}{4}(r+1)+1\Big\}$

$$= \left\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}+\mathbf{1})\right\} \cup \left\{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}, \boldsymbol{a}+\mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{r}+\mathbf{1})+\mathbf{1}\right\}.$$

Dari persamaan di atas, terlihat bahwa label-label simpul terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan. Dapat dilihat bahwa nilai konstanta $b = \frac{n}{2}(r+1)$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk bilangan bulat positif yang berurutan. Berdasarkan pendefinisian label simpul pada graf korona, pembuktian akan dibagi menjadi 7 kasus busur yang diilustrasikan pada Gambar 3.4.

1. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$
2. $v_i v_{i+1}$ untuk $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1$
3. $v_n v_1$
4. $u_i^j v_i$ untuk $i$ ganjil, $i = 1,3, \dots, \frac{n}{2} - 1$
5. $u_i^j v_i$ untuk $i$ ganjil, $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n-1$
6. $u_i^j v_i$ untuk $i$ genap, $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$
7. $u_i^j v_i$ untuk $i$ genap, $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n$

Kasus 1 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i+1$ genap.

$$s_1 = f(v_i) + f(v_{i+1})$$

$$= \left(a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 1\right) + \left(\left(\frac{i+1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= a + \frac{ir}{2} - \frac{r}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{ir}{2} + \frac{i}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= a + ir + i + 1$$

$$= a + i(r+1) + 1.$$

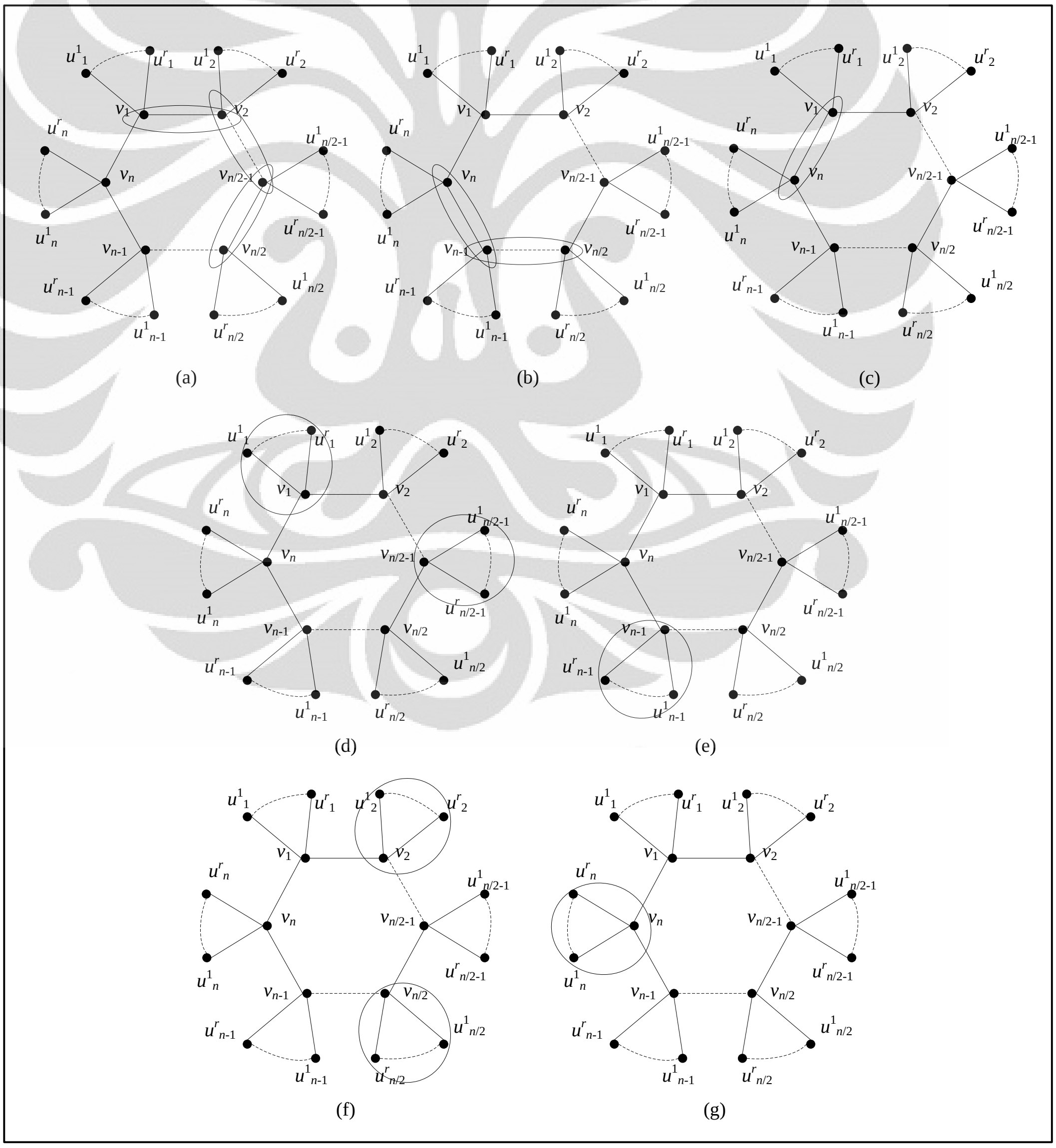
Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2} - 1$, didapat himpunan bobot busur

$$S_1 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2} - 1 \right\}$$

$$= \left\{ a + (r+1) + 1, a + 2(r+1) + 1, \ldots, a + \left(\frac{n}{2} - 1\right)(r+1) + 1 \right\}$$

$$= \left\{ a + r + 2, a + 2r + 2 + 1, \ldots, a + \frac{n}{2} r + \frac{n}{2} - r - 1 + 1 \right\}$$

$$= \left\{ a + r + 2, a + 2r + 3, \ldots, a + \frac{n}{2}(r+1) - r \right\}.$$



Gambar 3. 7 (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, (c) Kasus 3, (d) Kasus 4, (e) Kasus 5, (f) Kasus 6, dan (g) Kasus 7.

Kasus 2 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \dots, n-1$

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i+1$ genap.

$$\begin{aligned}
s_2 &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\
&= \left(a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 2\right) + \left(\frac{i+1}{2}(r+1)\right) \\
&= a + \frac{ir}{2} - \frac{r}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{ir}{2} + \frac{i}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \\
&= a + ir + i + 2 \\
&= a + i(r+1) + 2.
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \dots, n-1$, didapat himpunan bobot busur

$$\begin{aligned}
S_2 &= \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \dots, n-1 \right\} \\
&= \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + 2, a + \left(\frac{n}{2}+1\right)(r+1) + 2, \dots, a + (n-1)(r+1) + 2 \right\} \\
&= \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + 2, a + \frac{n}{2}r + \frac{n}{2} + r + 1 + 2, \dots, a + n(r+1) - r - 1 + 2 \right\} \\
&= \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + 2, a + \frac{n}{2}(r+1) + r + 3, \dots, a + n(r+1) - r + 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Kasus 3 untuk busur $v_n v_1$

$$\begin{aligned}
s_3 &= f(v_n) + f(v_1) \\
&= \left(\frac{n}{2}(r+1)\right) + \left(a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 1\right)
\end{aligned}$$

$= \frac{n}{2}(r+1) + a + 1$

$= a + \frac{n}{2}(r+1) + 1.$

Maka himpunan bobot busurnya adalah

$S_3 = \{f(v_n) + f(v_1)\}$

$= \left\{a + \frac{n}{2}(r+1) + 1\right\}.$

Kasus 4 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan $i$ ganjil, $i = 1,3,\ldots,\frac{n}{2} - 1$ dan $j = 1,2,\ldots,r$

$s_4 = f(u_i^j) + f(v_i)$

$= \left(a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 1\right) + \left(\frac{i-1}{2}(r+1) + j\right)$

$= a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 1 + \frac{i-1}{2}(r+1) + j$

$= a + (i-1)(r+1) + 1 + j.$

Dengan mensusbtitusikan nilai $i = 1,3,\ldots,\frac{n}{2} - 1$ dan $j = 1,2,\ldots,r$, didapat himpunan bobot busur

$S_4 = \left\{f(u_i^j) + f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 1,3,\ldots,\frac{n}{2} - 1; j = 1,2,\ldots,r\right\}$

$= \{a + 0(r+1) + 1 + 1, a + 0(r+1) + 1 + 2, \ldots, a + 0(r+1) + 1 +$
$r, a+2r+1+1+1, a+2r+1+1+2, \ldots, a+2r+1+1+r, \ldots, a+n2-2r+1+1+1, a$
$+n2-2r+1+1+2, \ldots, a+n2-2r+1+1+r$

$= \{a + 2, a + 3, \ldots, a + r + 2, a + 2r + 2 + 2, a + 2r + 2 + 3, \ldots, a + 2r +$
$2+1+r, \ldots, a+n2r+n2-2r-2+2, a+n2r+n2-2r-2+3, \ldots, a+n2r+n2-2r$
$-2+1+r$

$= \left\{a + 2, a + 3, \ldots, a + r + 1, a + 2r + 4, a + 2r + 5, \ldots, a + 3r + 3, \ldots, a + \frac{n}{2}(r+1) - 2r, a + \frac{n}{2}(r+1) - 2r + 1, \ldots, a + \frac{n}{2}(r+1) - r - 1\right\}.$

Kasus 5 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan $i$ ganjil, $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$ dan $j = 1,2, \dots, r$

$$s_5 = f(u_i^j) + f(v_i)$$

$$= \left(a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 2\right) + \left(\frac{i-1}{2}(r+1) + j\right)$$

$$= a + \frac{i-1}{2}(r+1) + 2 + \frac{i-1}{2}(r+1) + j$$

$$= a + (i-1)(r+1) + 2 + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$ dan $j = 1,2, \dots, r$, didapat himpunan bobot busur

$$S_5 = \left\{f(u_i^j) + f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n-1; j = 1,2, \dots, r\right\}$$

$= \{a + \frac{n}{2}(r+1) + 2 + 1, a + \frac{n}{2}(r+1) + 2 + 2, \dots, a + \frac{n}{2}(r+1) + 2 +$
*r,a+n2+1r+1+2+1,a+n2+1r+1+2+2,...,a+n2+1r+1+2+r,...,a+n−2*
*r+1+2+1,a+n−2r+1+2+2,...,a+n−2r+1+2+r*

$= \{a + \frac{n}{2}(r+1) + 3, a + \frac{n}{2}(r+1) + 4, \dots, a + \frac{n}{2}(r+1) + r + 2, a + \frac{n}{2}r +$
*n2+r+1+3,a+n2r+n2+r+1+4,...,a+n2r+n2+r+1+2+r,...,a+nr+n−*
*2r−2+3,a+nr+n−2r−2+4,...,a+nr+n−2r−2+2+r*

$= \{a + \frac{n}{2}(r+1) + 3, a + \frac{n}{2}(r+1) + 4, \dots, a + \frac{n}{2}(r+1) + r + 2, a +$
*n2r+1+r+4,a+n2r+1+5,...,a+n2r+1+2r+3,...,a+nr+1−2r+1,a+nr+*
*1−2r+2,...,a+nr+1−r.*

Kasus 6 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan $i$ genap, $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$ dan $j = 1,2, \dots, r$

$$s_6 = f(u_i^j) + f(v_i)$$

$$= \left(\frac{i}{2}(r+1)\right) + \left(a + \left(\frac{i}{2} - 1\right)(r+1) + 1 + j\right)$$

$$= \frac{i}{2}(r+1) + a + \frac{i}{2}(r+1) - r - 1 + 1 + j$$

$$= a + i(r+1) - r + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$ dan $j = 1,2, \dots, r$, didapat himpunan bobot busur

$$S_6 = \left\{ f\left(u_i^j\right) + f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}; j = 1,2, \dots, r \right\}$$

$= \{a + 2(r+1) - r + 1, a + 2(r+1) - r + 2, \dots, a + 2(r+1) - r + r, a +$
$4r+1-r+1, a+4r+1-r+2, \dots, a+4r+1-r+r, \dots, a+n2r+1-r+1, a+n2r+1$
$-r+2, \dots, a+n2r+1-r+r$

$= \{a + 2r + 2 - r + 1, a + 2r + 2 - r + 2, \dots, a + 2r + 2 - r + r, \dots, a +$
$4r+4-r+1, a+4r+4-r+2, \dots, a+4r+4-r+r, \dots, a+n2r+1-r+1, a+n2r+1$
$-r+2, \dots, a+n2r+1-r+r$

$= \{a + r + 3, a + r + 4, \dots, a + 2r + 2, a + 3r + 5, a + 3r + 6, \dots, a + 4r +$
$4, \dots, a+n2r+1-r+1, a+n2r+1-r+2, \dots, a+n2r+1.$

Kasus 7 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan $i$ genap, $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, r$

$$s_7 = f\left(u_i^j\right) + f(v_i)$$

$$= \left(\frac{i}{2}(r+1)\right) + \left(a + \left(\frac{i}{2} - 1\right)(r+1) + 2 + j\right)$$

$$= \frac{i}{2}(r+1) + a + \frac{i}{2}(r+1) - r - 1 + 2 + j$$

$$= a + i(r+1) - r + 1 + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, r$, akan didapat himpunan bobot busur

$S_7 = \left\{ f(u_i^j) + f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n; j = 1,2, \ldots, r \right\}$

$= \left\{ a + \left(\frac{n}{2} + 2\right)(r+1) - r + 1 + 1, a + \left(\frac{n}{2} + 2\right)(r+1) - r + 1 + 2, \ldots, a + \right.$
*n2+2r+1−r+1+r,a+n2+4r+1−r+1+1,a+n2+4r+1−r+1+2,...,a+n2 +4r+1−r+1+r,...,a+n(r+1−r+1+1,a+nr+1−r+1+2,...,a+nr+1−r+* $1 + r\}$

$= \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + 2r + 2 - r + 2, a + \frac{n}{2}(r+1) + 2r + 2 - r + 3, \ldots, a + \right.$
*n2r+1+2r+2+1,a+n2r+1+4r+4−r+2,a+n2r+1+4r+4−r+3,...,a+n 2r+1+4r+4+1,...,a+nr+1−r+2,a+nr+1−r+3,...,a+nr+1+1*

$= \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + r + 4, a + \frac{n}{2}(r+1) + r + 5, \ldots, a + \frac{n}{2}(r+1) + 2r + \right.$
*3,a+n2r+1+3r+6,a+n2r+1+3r+7,...,a+n2r+1+4r+5,...,a+nr+1−r+ 2,a+nr+1−r+3,...,a+nr+1+1.*

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S = \{f(x) + f(y) | xy\ E\}$ dari graf korona membentuk suatu himpunan bilangan bulat positif berurutan

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$

$= \left\{ a + r + 2, a + 2r + 3, \ldots, a + \frac{n}{2}(r+1) - r \right\} \cup \left\{ a + \frac{n}{2}(r+1) + 2, a + \right.$
*n2r+1+r+3,...,a+nr+1−r+1∪a+n2r+1+1∪a+2,a+3,...,a+n2r+1−r− 1∪a+n2r+1+3,a+n2r+1+4,...,a+nr+1−r∪a+r+3,a+r+4,...,a+n2r+1 ∪a+n2r+1+r+4,a+n2r+1+r+5,...,a+nr+1+1*

$= \{a + 2, a + 3, \ldots, a + n(r+1) + 1\}.$

Karena himpunan bobot busur $S = \{f(x) + f(y), xy \in E\}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif berurutan $\{a + 2, a + 3, \ldots, a + n(r+1) + 1\}$, maka dengan menggunakan Lemma 3.2 terbukti bahwa graf korona $C_n \odot \overline{K_r}$ dengan $n \equiv 0 \bmod 4$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan nilai $b = \frac{n}{2}(r+1)$.■

Menurut Lemma 3.2, nilai konstanta ajaib adalah

$k = b + e + s$, dimana $s = \min(S) = a + 2$

$$k = \frac{n}{2}(r+1) + n(r+1) + a + 2$$

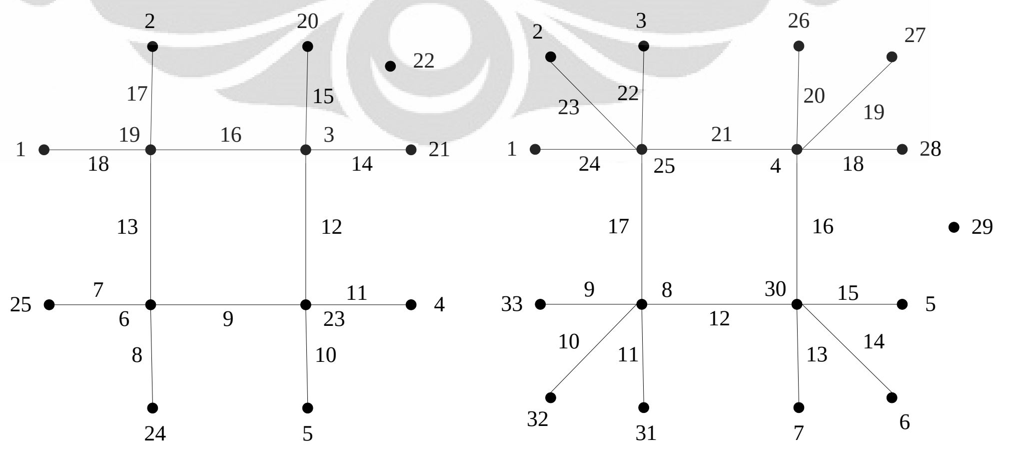
$$= \frac{3n}{2}(r+1) + a + 2.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $a = \frac{3n}{2}(r+1)$, maka

$$k = \frac{3n}{2}(r+1) + \frac{3n}{2}(r+1) + 2$$

$$= 3n(r+1) + 2.$$

Pada Gambar 3.3 diberikan contoh PTBA $\frac{n}{2}(r+1)$ −busur-berurutan pada graf korona $C_4 \odot \overline{K_2}$ dan $C_4 \odot \overline{K_3}$.



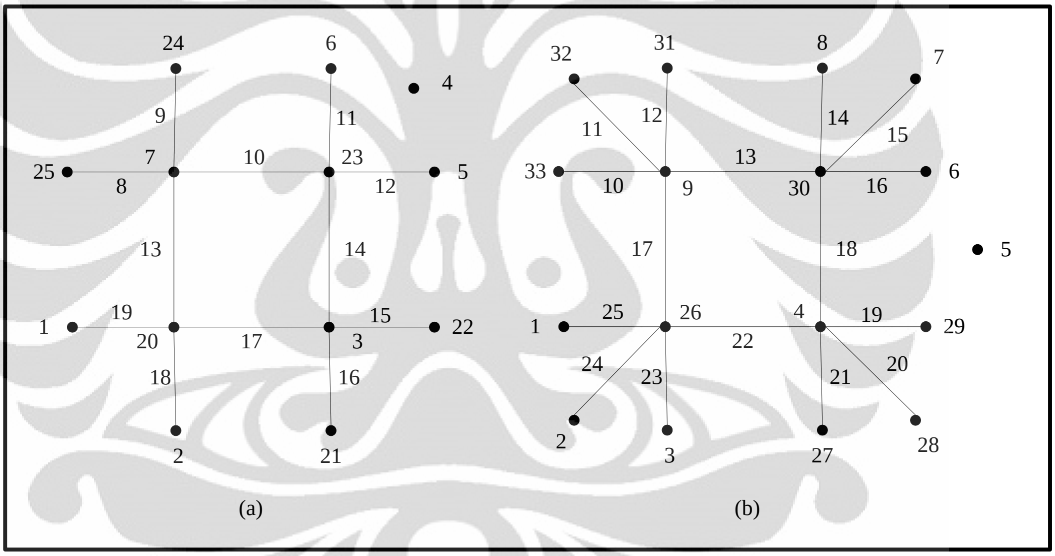

(a) (b)

Gambar 3. 8 (a) PTBA $6$ $-$busur-berurutan pada graf $C_4 \odot \overline{K_2}$ dengan $k = 38$ dan (b) PTBA $8$ $-$busur-berurutan pada graf $C_4 \odot \overline{K_3}$ dengan $k = 50$.

Berdasarkan Teorema 2.3 didapatkan pelabelan dual dari PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf korona yang diberikan pada Akibat 3.3.

**Akibat 3.3** Setiap graf korona $C_n \odot \overline{K_r}$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $\left(\frac{n}{2}(r+1)+1\right)$ $-$busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

Pada Gambar 3.6 diberikan contoh PTBA $\left(\frac{n}{2}(r+1)+1\right)$ $-$busur-berurutan pada graf korona $C_4 \odot \overline{K_2}$ dan $C_4 \odot \overline{K_3}$.




Gambar 3. 9 (a) PTBA $7$ $-$busur-berurutan pada $C_4 \odot \overline{K_2}$ dengan $k = 40$ dan (b) PTBA $9$ $-$busur-berurutan pada $C_4 \odot \overline{K_3}$ dengan $k = 52$.

Dengan menggunakan definisi pelabelan pada graf korona, bisa didapat PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf matahari sesuai dengan Teorema 3.2 dengan nilai $r = 1$. Pada subbab selanjutnya akan dibahas PTBA $b$ $-$Busur-berurutan pada graf *hairycycle* dengan banyaknya simpul adalah $n \equiv 0$ mod $4$.

## 3. 4 Pelabelan Total Busur Ajaib $b$ −Busur-Berurutan pada Graf *Hairycycle*

Graf *hairycycle* adalah graf yang dapat dibentuk dengan menambahkan sejumlah $r_i, i = 1,2, \dots, n$ simpul berderajat satu pada setiap simpul dari graf lingkaran $C_n$, $n \geq 3$.yang memiliki $n$ simpul pada graf lingkaran dimana $n \geq 3$ dan dapat dinotasikan dengan $HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n)$. Himpunan simpul pada graf *hairycycle* adalah $V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i\}$ dan himpunan busur pada graf *hairycycle* adalah $E = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i\}$, dengan $i + 1$ ada dalam mod $n$ dan dimana $v_i$ menyatakan simpul dalam (simpul pada graf lingkaran) dan $u_i^j$ menyatakan simpul luar ke-$j$ pada simpul di graf lingkaran ke-$i$. Nilai $n$ menyatakan banyaknya simpul pada graf lingkaran yang digunakan untuk membangun graf *hairycycle* sehingga nilai $n$ disebut sebagai ukuran dari graf korona. Pada graf *hairycycle*, jumlah simpul sama dengan jumlah busurnya atau $v = e = n + \sum_{i=1}^{n} r_i$. Agar terpenuhi kondisi banyak simpul terisolasi yang ditambahkan optimal ($e = v - 1$), maka perlu ditambahkan sebuah simpul terisolasi pada graf *hairycycle*.

Pada Teorema 3.4 diberikan hasil yang diperoleh untuk *PTBA b-Busur-berurutan* pada graf *hairycycle* dengan banyaknya simpul graf lingkaran pada graf *hairycycle* adalah kelipatan 4 atau $n \equiv 0$ mod 4.

**Teorema 3.4**. Setiap graf *hairycycle* $(HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n))$ dan $r_i = r_{n-i+1}$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki pelabelan total busur-ajaib $(\sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p -$ busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

**Bukti.** Nyatakan simpul terisolasi dengan $x$. Ambil

$$a = \frac{3n}{2} + \sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n} \mathrm{r_p}.$$

Label simpul-simpul dari $HC(n, r_i)$ sebagai berikut

$$f(v_i) = \begin{cases} \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} (r_{q-1}+1) & , i \text{ genap}, i = 2,4,\dots,n \\ a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1}+1) & , i \text{ ganjil}, i = 1,3,\dots,\frac{n}{2}-1 \\ a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1}+1) + 1 & , i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+3, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} j & , \begin{matrix} i = 1 \\ j = 1,2,\dots,r_i \end{matrix} \\ \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-2}+1) + j & , \begin{matrix} i \text{ ganjil}, i = 3,5,\dots,n-1 \\ j = 1,2,\dots,r_i \end{matrix} \\ a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} (r_{q-2}+1) + j & , \begin{matrix} i \text{ genap}, i = 2,4,\dots,\frac{n}{2} \\ j = 1,2,\dots,r_i \end{matrix} \\ a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} (r_{q-2}+1) + 1 + j & , \begin{matrix} i \text{ genap}, i = \frac{n}{2}+2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,r_i \end{matrix} \end{cases}.$$

Dimana $r_0 = 0$.

Kemudian label simpul terisolasi dengan

$$f(x) = a + \left(r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}}\right) + \frac{n}{4} + 1$$

$$f(x) = a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}} r_q + \frac{n}{4} + 1.$$

Pertama akan ditunjukkan bahwa label dari simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan seperti yang disyaratkan pada Lemma 3.2.

Dengan menggunakan definisi label simpul pada graf korona, nyatakan

$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ genap}, i = 2,4,\dots,n\}$

$$= \left\{ \sum_{q=2,q \text{ genap}}^{2} (r_{q-1}+1), \sum_{q=2,q \text{ genap}}^{4} (r_{q-1}+1), \dots, \sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} (r_{q-1}+1) \right\}$$

$$= \{(r_1+1), (r_1+1)+(r_3+1), \dots, (r_1+1)+(r_3+1)+\dots+(r_{n-1}+1)\}$$

$$= \left\{(r_1+1), (r_1+r_3)+2, \dots, (r_1+r_3+\dots+r_{n-1})+\frac{n}{2}\right\}.$$

$$L_2 = \left\{ f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 1,3, \dots, \frac{n}{2}-1 \right\}$$

$= \Big\{a + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{1} (r_{p-1}+1), a + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{3} (r_{p-1}+1), \dots, a +$

$p$=1, $p$ ganjil$n$2−1$rp$−1+1

$= \Big\{a + (r_0+1), a + (r_0+1) + (r_2+1), \dots, a + (r_0+1) + (r_2+1) + \dots +$

($rn$2−1−1+1)

$= \{a + (0+1), a + (0+1) + (r_2+1), \dots, a + (0+1) + (r_2+1) + \dots +$

$(r_{\frac{n}{2}-2}+1)\}$

$$= \left\{a+1, a+r_2+2, \dots, a+r_2+r_4+\dots+r_{\frac{n}{2}-2}+\frac{i+1}{2}\right\}$$

$$= \left\{a+1, a+r_2+2, \dots, a+\left(r_2+r_4+\dots+r_{\frac{n}{2}-2}\right)+\frac{n}{4}\right\}.$$

$$L_3 = \left\{ f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2}+1, \dots, n-1 \right\}$$

$= \Big\{a + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-1}+1)+1,\ a + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3} (r_{p-1}+1)+1, \dots, a +$

$p$=1, $p$ ganjil$n$−1$rp$−1+1+1

$= \Big\{ a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \Big( r_{\frac{n}{2}+1-1} + 1 \Big) + 1, a + (r_0 + 1) +$

*r2+1+…+rn2+3−1+1+1,…,a+r0+1+r2+1+…+rn−1−1+1+1*

$= \Big\{ a + (0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \Big( r_{\frac{n}{2}} + 1 \Big) + 1, a + (0 + 1) + (r_2 + 1) +$

*…+rn2+2+1+1,…,a+0+1+r2+1+…+(rn−2+1)+1*

$= \Big\{ a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \Big) + \frac{i+1}{2} + 1, a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+2} \Big) + \frac{i+1}{2} +$

*1,…,a+r2+r4+…+rn−2+i+12+1*

$= \Big\{ a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \Big) + \frac{\frac{n}{2}+1+1}{2} + 1, a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+2} \Big) + \frac{\frac{n}{2}+3+1}{2} +$

*1,…,a+r2+r4+…+rn−2+n−1+12+1*

$= \Big\{ a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \Big) + \frac{n}{4} + 1 + 11, a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+2} \Big) + \frac{n}{4} +$

*2+1,…,a+r2+r4+…+rn−2+n2+1*

$= \Big\{ a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \Big) + \frac{n}{4} + 2, a + \Big( r_2 + r_4 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+2} \Big) + \frac{n}{4} +$

*3,…,a+r2+r4+…+rn−2+n2+1.*

$L_4 = \{ f\big(u_i^j\big) |, i = 1, j = 1,2, \ldots, r_i$

$= \{1,2,3, \ldots, r_1\}.$

$L_5 = \{ f\big(u_i^j\big) | i \text{ ganjil}, i = 3,5, \ldots, n-1;\ j = 1, \ldots, r_i$

$= \{ \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{3} \big(r_{p-2} + 1\big) + 1, \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{3} \big(r_{p-2} + 1\big) + 2,$

$\ldots, \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{3} \big(r_{p-2} + 1\big) + r_3, \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{5} \big(r_{p-2} + 1\big) +$

$1, \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{5} \big(r_{p-2} + 1\big) + 2, \ldots, \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{5} \big(r_{p-2} + 1\big) +$

$r_5, \ldots, \sum_{p=3,p\text{ ganjil}}^{n-1}\left(r_{p-2}+1\right)+1, \sum_{p=3,p\text{ ganjil}}^{n-1}\left(r_{p-2}+1\right)+$
$2, \ldots, \sum_{p=3,p\text{ ganjil}}^{n-1}\left(r_{p-2}+1\right)+r_5\}$

$=\{(r_1+1)+1, (r_1+1)+2, \ldots, (r_1+1)+r_3, (r_1+r_3)+2+1, (r_1+r_3)+$
*2+2,...,r1+r3+2+r5,...,r1+r3+...+rn−1−2+n−22+1,r1+r3+...+rn−1−2+n−22+2,...,r1+r3+...+rn−1−2+n−22+rn−1*

$=\{r_1+2, r_1+3, \ldots, (r_1+r_3)+1, (r_1+r_3)+3, (r_1+r_3)+4, \ldots, (r_1+r_3+$
*r5+2,...,r1+r3+...+rn−3+12n,r1+r3+...+rn−3+12n+1,...,r1+r3+...+rn−3+rn−1+12n−1.*

$L_6=\left\{f\left(u_i^j\right)\middle| i \text{ genap}, i=2,4,\ldots,\frac{n}{2};\ j=1,\ldots,r_i\right\}$

$=\{a+\sum_{q=2,q\text{ genap}}^{2}\left(r_{q-2}+1\right)+1, a+\sum_{q=2,q\text{ genap}}^{2}\left(r_{q-2}+1\right)+2, \ldots, a+$
*q=2, q* genap *2rq−2+1+r2,a+q=2, q* genap *4rq−2+1+1,a+q=2, q* genap *4rq−2+1+2,...,a+q=2, q* genap *4rq−2+1+r4,...,a+q=2, q* genap *n2rq−2+1+1,a+q=2, q* genap *n2rq−2+1+2,...,a+q=2, q* genap *n2rq−2+1+rn2*

$=\{a+(r_0+1)+1, a+(r_0+1)+2, \ldots, a+(r_0+1)+r_2, a+(r_0+1)+$
*r2+1+1,a+r0+1+r2+1+2,...,a+r0+1+r2+1+r4,...,a+r0+1+r2+1+...+rn2−2+1+1,a+r0+1+r2+1+...+rn2−2+1+2,...,a+r0+1+r2+1+...+rn2−2+1+rn2*

$= \{a + 2, a + 3, \dots, a + r_2 + 1, a + r_2 + 3, a + r_2 + 4, \dots, a + (r_2 + r_4) +$

*2,…,a+r2+…+rn2−2+i2+1,a+r2+…+rn2−2+i2+2,…,a+r2+…+rn2−2+i2+rn2*

$= \{a + 2, a + 3, \dots, a + r_2 + 1, a + r_2 + 3, a + r_2 + 4, \dots, a + (r_2 + r_4) +$

*1,a+r2+…+rn2−2+n22+1,a+r2+…+rn2−2+n22+2,…,a+r2+…+rn2−2+rn2+n22*

$= \{a + 2, a + 3, \dots, a + r_2 + 1, a + r_2 + 3, a + r_2 + 4, \dots, a + (r_2 + r_4) +$

*1,a+r2+…+rn2−2+n4+1,a+r2+…+rn2−2+n4+2,…,a+r2+…+rn2−2+rn2+n4.*

$L_7 = \left\{ f\left(u_i^j\right) \middle| i \text{ genap, } i = \frac{n}{2} + 2, \dots, n; j = 1, \dots, r_i \right\}$

$= \{a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-2} + 1\right) + 1 + 1, a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-2} + 1\right) + 1 +$

*2,…,a+q=2,q* genap*n2+2rq−2+1+1+rn2+2,a+q=2, q* genap*n2+4rq−2+1+1+1,a+q=2, q* genap*n2+4rq−2+1+1+2,…,a+q=2, q* genap*n2+4rq−2+1+1+rn2+4,…,a+q=2, q* genap*nrq−2+1+1+1,a+q=2, q* genap*nrq−2+1+1+2,…,a+q=2, q* genap*nrq−2+1+1+rn*

$= \{a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}+2-2} + 1\right) + 2, a + (r_0 + 1) +$

$(r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}+2-2} + 1\right) + 3, \dots, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots +$

$\left(r_{\frac{n}{2}+2-2} + 1\right) + 1 + r_{\frac{n}{2}+2}, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}+4-2} + 1\right) +$

$2, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}+4-2} + 1\right) + 3, \dots, a + (r_0 + 1) +$

$(r_2+1)+\cdots+\left(r_{\frac{n}{2}+4-2}+1\right)+1+r_{\frac{n}{2}+4},\ldots,a+(r_0+1)+(r_2+1)+\cdots+(r_{n-2}+1)+2,a+(r_0+1)+(r_2+1)+\cdots+(r_{n-2}+1)+3,\ldots,a+(r_0+1)+(r_2+1)+\cdots+(r_{n-2}+1)+1+r_n\Big\}$

$=\Big\{a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+1+2,a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+1+3,\ldots,a+$

*r2+…+rn2+(n2+2)2+1+rn2+2,a+r2+…+rn2+2+n4+2+2,a+r2+…*
*+rn2+2+n4+2+3,…,a+r2+…+rn2+2+n4+2+1+rn2+4,…,a+r2+…+*
*rn−2+n2+2,a+r2+…+rn−2+n2+3,…,a+r2+…+rn−2+n2+1+rn2*

$=\Big\{a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+3,a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+4,\ldots,a+$

*r2+…+rn2+rn2+2+n4+2,a+r2+…+rn2+2+n4+4,a+r2+…+rn2+2*
*+n4+5,…,a+r2+…+rn2+2+rn2+4+n4+3,…,a+r2+…+rn−2+n2+2,a*
*+r2+…+rn−2+n2+3,…,a+r2+…+rn−2+rn2+n2+1.*

Maka himpunan label simpul dari $HC(n; r_i, i=1,2,\ldots,n)$ adalah

$f(V)=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_5\cup L_6\cup L_7\cup\{f(x)\}$

$=\Big\{r_1+1,r_1+r_3+2,\ldots,r_1+r_3+\cdots+r_{n-1}+\frac{n}{2}\Big\}\cup\Big\{a+1,a+r_2+2,\ldots,a+r_2+r_4+\cdots+r_{\frac{n}{2}-2}+\frac{n}{4}\Big\}\cup\Big\{a+r_2+r_4+\cdots+r_{\frac{n}{2}}+\frac{n}{4}+2,a+r_2+r_4+\cdots+r_{\frac{n}{2}+2}+\frac{n}{4}+3,\ldots,a+r_2+r_4+\cdots+r_{n-2}+\frac{n}{2}+1\Big\}\cup\{1,2,3,\ldots,r_1\}\cup\Big\{r_1+2,r_1+3,\ldots,(r_1+r_3)+1,(r_1+r_3)+3,(r_1+r_3)+4,\ldots,(r_1+r_3+r_5)+2,\ldots,(r_1+r_3+\cdots+r_{n-3})+\frac{1}{2}n,(r_1+r_3+\cdots+r_{n-3})+\frac{1}{2}n+1,\ldots,(r_1+r_3+\cdots+r_{n-3}+r_{n-1})+$

$\frac{1}{2}n-1\Big\} \cup \Big\{a+2, a+3, \dots, a+r_2+1, a+r_2+3, a+r_2+4, \dots, a+$

$(r_2+r_4)+1, a+\left(r_0+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}-2}\right)+\frac{n}{4}+1, a+\left(r_0+r_2+\cdots+\right.$

$\left.r_{\frac{n}{2}-2}\right)+\frac{n}{4}+2, \dots, a+\left(r_0+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}-2}+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}\Big\} \cup \Big\{a+$

$\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+3, a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+4, \dots, a+$

$\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}+r_{\frac{n}{2}+2}\right)+\frac{n}{4}+2, a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+2}\right)+\frac{n}{4}+4, a+$

$\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+2}\right)+\frac{n}{4}+5, \dots, a+\left(r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+2}+r_{\frac{n}{2}+4}\right)+\frac{n}{4}+$

$3, \dots, a+(r_2+\cdots+r_{n-2})+\frac{n}{2}+2, a+(r_2+\cdots+r_{n-2})+\frac{n}{2}+3, \dots, a+$

$\left(r_2+\cdots+r_{n-2}+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{2}+1\Big\} \cup \Big\{a+\left(r_2+r_4+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{4}+1\Big\}$

$=\Big\{1,2,3, \dots, (r_1+r_3+\cdots+r_{n-1})+\frac{n}{2}\Big\} \cup \Big\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+$
$r2+\ldots+rn-2+rn2+n2+1$

$=\Big\{1,2, \dots, \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p+\frac{n}{2}\Big\} \cup \Big\{a+1, a+2, \dots, a+\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{n-2} r_q+$
$n2+1.$

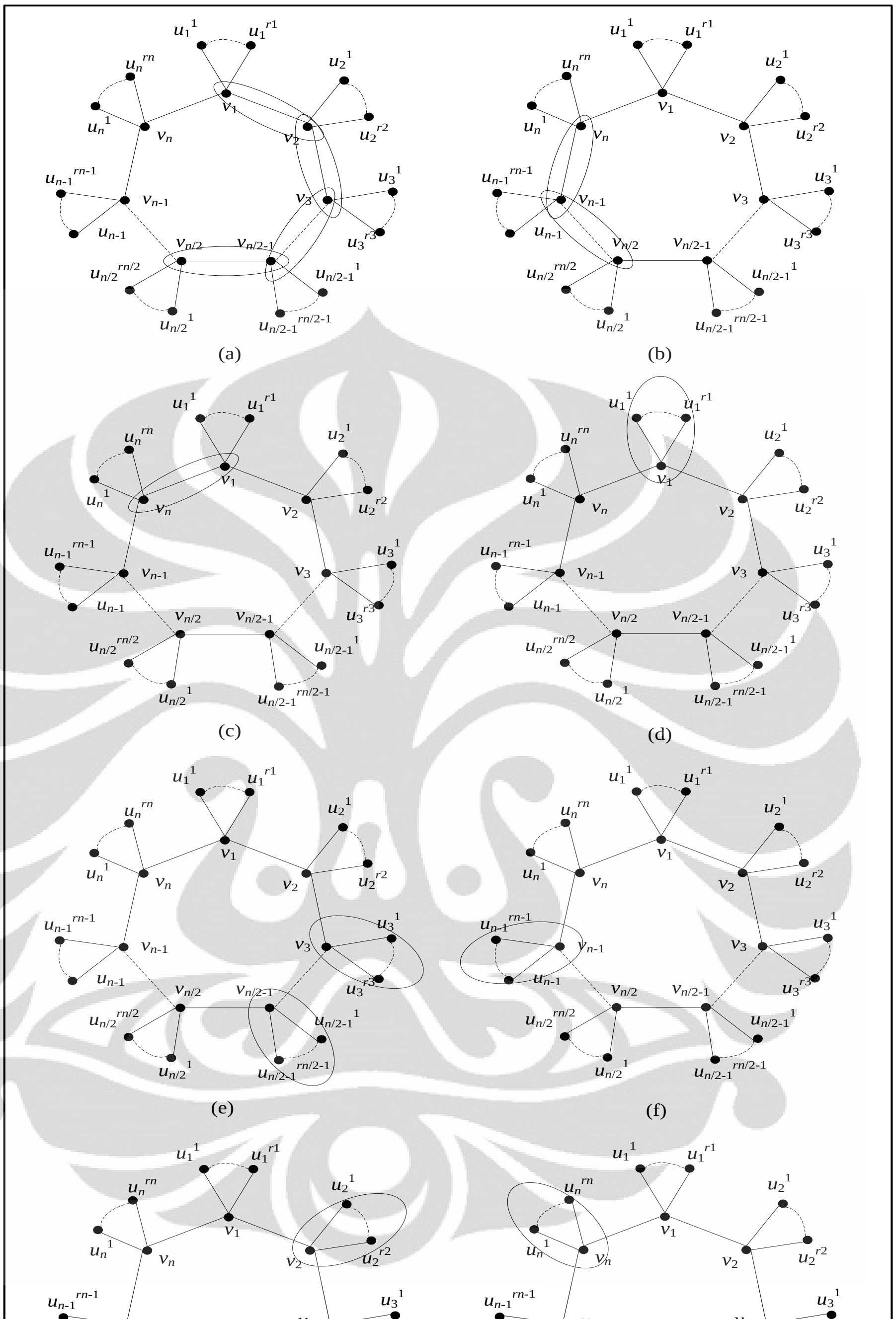
Dari persamaan di atas, terlihat bahwa label-label simpul terbagi menjadi 2 kelompok himpunan bilangan. Dapat dilihat bahwa nilai konstanta

$b=\sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p+\frac{n}{2}.$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S=\{f(x)+f(y) | xy \in E\}$ membentuk bilangan bulat positif yang berurutan. Berdasarkan pendefinisian label simpul $f$, pembuktian akan dibagi menjadi 8 kasus busur yang diilustrasikan pada Gambar 3.10.

1. $v_i v_{i+1}$ untuk $i=1,2, \dots, \frac{n}{2}-1$
2. $v_i v_{i+1}$ untuk $i=\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$
3. $v_n v_1$
4. $u_i^j v_i$ untuk $i=1$ dan $j=1,2, \dots, r_1$
5. $u_i^j v_i$ untuk $i$ ganjil, $i=3,5, \dots, \frac{n}{2}-1$ dan $j=1,2, \dots, r_i$

6. $u_i^j v_i$ untuk $i$ ganjil, $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$ dan $j = 1,2, \dots, r_i$
7. $u_i^j v_i$ untuk $i$ genap, $i = 2,4, \dots, \frac{n}{2}$ dan $j = 1,2, \dots, r_i$
8. $u_i^j v_i$ untuk $i$ genap, $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, r_i$




Gambar 3. 10 (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, (c) Kasus 3, (d) Kasus 4, (e) Kasus 5, (f) Kasus 6, (g) Kasus 7, dan (h) Kasus 8.

Kasus 1 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan nilai $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i + 1$ genap.

$s_1 = f(v_i) + f(v_{i+1})$

$$= \left( a + \sum_{q=1, q \text{ ganjil}}^{i} (r_{q-1} + 1) \right) + \left( \sum_{p=2, p \text{ genap}}^{i+1} (r_{p-1} + 1) \right)$$

$$= a + \sum_{m=1}^{i+1} (r_{m-1} + 1).$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$, didapat himpunan bobot busur

$$S_1 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$$

$$= \left\{ a + \sum_{m=1}^{2} (r_{m-1} + 1), a + \sum_{m=1}^{3} (r_{m-1} + 1), \dots, a + \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} (r_{m-1} + 1) \right\}$$

$= \Big\{ a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1), a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) + (r_2 + 1), \dots, a +$
*r0+1+r1+1+...+rn2−1+1*

$= \Big\{ a + (r_0 + r_1) + 2, a + (r_0 + r_1 + r_2) + 3, \dots, a + \left( r_0 + r_1 + \dots + r_{\frac{n}{2}-1} \right) +$
*i+1*

$$= \left\{ a + r_1 + 2, a + (r_1 + r_2) + 3, \dots, a + \left( r_1 + r_2 + \dots + r_{\frac{n}{2}-1} \right) + \frac{n}{2} \right\}.$$

Kasus 2 untuk busur $v_i v_{i+1}$ dengan nilai $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1$

Tanpa kehilangan keumuman asumsikan $i$ ganjil dan $i + 1$ genap.

$s_2 = f(v_i) + f(v_{i+1})$

$$= \left( a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} \left(r_{p-1} + 1\right) + 1 \right) + \left( \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i+1} \left(r_{q-1} + 1\right) \right)$$

$$= a + \sum_{m=1}^{i+1} (r_{m-1} + 1) + 1.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1$, didapat himpunan bobot busur

$$S_2 = \left\{ f(v_i) + f(v_{i+1}) \middle| i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n \right\}$$

$= \Big\{ a + \left( \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}+1} r_{m-1} + 1 \right) + 1, a + \left( \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}+2} r_{m-1} + 1 \right) + 1, \dots, a +$
*m=1nrm−1+1+1*

$= \Big\{ a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) + \cdots + \left( r_{\frac{n}{2}} + 1 \right) + 1, a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) +$
*…+rn2+1+1+1,…,a+r0+1+r1+1+…+rn−1+1+1*

$= \Big\{ a + \left( r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \right) + i + 1 + 1, a + \left( r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + \right.$
*rn2+1+i+1+1,…,a+r0+r1+r2+…+rn−1+i+1+1*

$= \Big\{ a + \left( r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}} \right) + \frac{n}{2} + 2, a + \left( r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+1} \right) + \frac{n}{2} +$
*3,…,a+r1+r2+…+rn−1+n+1 .*

Kasus 3 untuk busur $v_n v_1$

$$s_3 = f(v_n) + f(v_1)$$

$$= \left( \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1} + 1\right) \right) + \left( a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) \right)$$

$$= a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1} + 1\right).$$

Didapat himpunan bobot busur

$$S_3 = \{f(v_n) + f(v_1)\}$$

$$= \left\{a + \sum_{p=1,p\text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) + \sum_{q=2,q\text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1} + 1\right)\right\}$$

$$= \{a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + \cdots + (r_{n-1} + 1)\}$$

$$= \left\{a + (r_0 + r_1 + r_3 + \cdots + r_{n-1}) + \frac{n}{2} + 1\right\}$$

$$= \left\{a + (r_1 + r_3 + r_5 + \cdots + r_{n-1}) + \frac{n}{2} + 1\right\}.$$

Kasus 4 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan nilai $i = 1$ dan $j = 1,2, \ldots, r_1$

$$s_4 = f\left(u_1^j\right) + f(v_1)$$

$$= j + \left(a + \sum_{p=1,p\text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right)\right)$$

$$= a + \sum_{p=1,p\text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1$ dan $j = 1,2, \ldots, r_1$ , didapat himpunan bobot busur

$$S_4 = \left\{f\left(u_1^j\right) + f(v_1) \middle| i = 1; j = 1,2, \ldots, r_1\right\}$$

$$= \left\{a + \textstyle\sum_{p=1,p\text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) + 1, \ldots, a + \sum_{p=1,p\text{ ganjil}}^{1} \left(r_{p-1} + 1\right) + r_1\right\}$$

$$= \{a + (r_0 + 1) + 1, a + (r_0 + 1) + 2, \ldots, a + (r_0 + 1) + r_1\}$$

$$= \{a + 2, a + 3, \ldots, a + r_1 + 1\}.$$

Kasus 5 untuk busur $u_i^j v_1$ dengan nilai $i$ ganjil, $i = 3,5, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ dan $j = 1,2, \ldots, r_1$

$$s_5 = f(u_i) + f(v_i)$$

$$= \left( \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-2} + 1) + j \right) + \left( a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1} + 1) \right)$$

$$= a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1} + 1) + \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-2} + 1) + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 3,5, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ dan $j = 1,2, \ldots, r_1$ akan didapat himpunan bobot busur

$$S_5 = \left\{ f(u_i^j) + f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = 3,5, \ldots, \frac{n}{2} - 1; j = 1,2, \ldots, r_i \right\}$$

$= \Big\{ a + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{3} (r_{p-1} + 1) + \sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{3} (r_{p-2} + 1) + 1, a +$
*p=1, p* ganjil *3rp−1+1+p=3, p* ganjil*3rp−2+1+2,...,a+p=1, p* ganjil *3rp−1+1+p=3, p* ganjil*3rp−2+1+r3,a+p=1, p* ganjil *5rp−1+1+p=3, p* ganjil*5rp−2+1+1,a+p=1, p* ganjil *5rp−1+1+p=3, p* ganjil*5rp−2+1+2,...,a+p=1, p* ganjil *5rp−1+1+p=3, p* ganjil*5rp−2+1+r5,...,a+p=1, p* ganjil *n2−1rp−1+1+p=3, p* ganjil*n2−1rp−2+1+1,a+p=1, p* ganjil *n2−1rp−1+1+p=3, p* ganjil*n2−1rp−2+1+2,...,a+p=1, p* ganjil *n2−1rp−1+1+p=3, p* ganjil*n2−1rp−2+1+rn2−1*

$$= \Big\{ a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_1 + 1) + 1, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_1 + 1) + 2, \ldots, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_1 + 1) + r_3, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_4 + 1) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + 1, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_4 + 1) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + 2, \ldots, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + (r_4 + 1) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + r_5, \ldots, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-2} + 1\right) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-3} + 1\right) + 1, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-2} + 1\right) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-3} + 1\right) + 2, \ldots, a + (r_0 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-2} + 1\right) + (r_1 + 1) + (r_3 + 1) + \cdots + \left(r_{\frac{n}{2}-3} + 1\right) + r_{\frac{n}{2}-1} \Big\}$$

$= \{a + (r_0 + r_1 + r_2) + i + 1, a + (r_0 + r_1 + r_2) + i + 2, \dots, a +$
*r0+r1+r2+i+r3,a+r0+r1+r2+r3+r4+i+1,a+r0+r1+r2+r3+r4+i+ 2,...,a+r0+r1+r2+r3+r4+i+r5,...,a+r0+r1+r2+...+rn2−3+rn2−2+i +1,a+r0+r1+r2+...+rn2−3+rn2−2+i+2,...,a+r0+r1+r2+...+rn2−3 +rn2−2+i+rn2−1*

$= \{a + (r_1 + r_2) + 4, a + (r_1 + r_2) + 5, \dots, a + (r_1 + r_2 + r_3) + 3, a +$
*r1+r2+r3+r4+6,a+r1+r2+r3+r4+7,...,a+r1+r2+r3+r4+r5+5,...,a+ r1+r2+...+rn2−2+n2,a+r1+r2+...+rn2−2+n2+1,...,a+r1+r2+...+rn 2−2+rn2−1+n2−1.*

Kasus 6 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan nilai $i$ ganjil, $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$ dan $j = 1,2, \dots, r_i$.

$s_6 = f(u_i^j) + f(v_i)$

$$= \left( \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-2} + 1) + j \right) + \left( a + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1} + 1) + 1 \right)$$

$$= a + \sum_{p=3, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-2} + 1) + \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{i} (r_{p-1} + 1) + 1 + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1$ dan $j = 1,2, \dots, r_i$ didapatkan himpunan bobot busur

$$S_6 = \left\{ f(u_i^j) + f(v_i) \middle| i \text{ ganjil}, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 1; j = 1,2, .. r_i \right\}$$

$= \{a + \sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-2} + 1) + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-1} + 1) + 1 + 1, a +$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-2} + 1) + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-1} + 1) + 1 + 2, \dots, a +$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-2} + 1) + \sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+1} (r_{p-1} + 1) + 1 + r_{\frac{n}{2}+1}, a +$

$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-1}+1)+1+1, a+$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-1}+1)+1+2, \dots, a+$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{\frac{n}{2}+3}(r_{p-1}+1)+1+r_{\frac{n}{2}+3}, \dots, a+$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-1}+1)+1+1, a+$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-1}+1)+1+2, \dots, a+$
$\sum_{p=3,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-2}+1)+\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1}(r_{p-1}+1)+1+r_{n-1}\Big\}$

$= \Big\{a+\Big(r_0+r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}-1}+r_{\frac{n}{2}}\Big)+i+2, a+\Big(r_0+r_1+r_2+\cdots+$
*rn2−1+rn2+i+3,...,a+r0+r1+r2+...+rn2−1+rn2+i+1+rn2+1,a+r0*
*+r1+r2+...+rn2+1+rn2+2+i+2,a+r0+r1+r2+...+rn2+1+rn2+2+i*
*+3,...,a+r0+r1+r2+...+rn2+1+rn2+2+i+1+rn2+3,...,a+r0+r1+r2*
*+...+rn−3+rn−2+i+2,a+r0+r1+r2+...+rn−3+rn−2+i+3,...,a+r0+*
*r1+r2+...+rn−3+rn−2+i+1+rn−1*

$= \Big\{a+\Big(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\Big)+\frac{n}{2}+3, a+\Big(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}}\Big)+\frac{n}{2}+4, \dots, a+$
*r1+r2+...+rn2+rn2+1+n2+2,a+r1+r2+...+rn2+2+n2+5,a+r1+r2*
*+...+rn2+2+n2+6,...,a+r1+r2+...+rn2+2+rn2+3+n2+4,...,a+r1+r*
*2+...+rn−2+n+1,a+r1+r2+...+rn−2+n+2,...,a+r1+r2+...+rn−2+r*
*n−1+n.*

Kasus 7 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan nilai $i$ genap, $i = 2,4,\dots,\frac{n}{2}$ dan $j = 1,2,\dots,r_i$.

$s_7 = f(u_i^j) + f(v_i)$

$$= \left(a + \sum_{q=2,q \text{ genap}}^{i} (r_{q-2}+1) + j\right) + \left(\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{i} (r_{q-1}+1)\right)$$

**Universitas Indonesia**

$$= a + \sum_{q=2,q\text{ genap}}^{i} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2,q\text{ genap}}^{i} \left(r_{q-1} + 1\right) + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 2,4,\dots,\frac{n}{2}$ dan $j = 1,2,\dots,r_i$ didapat himpunan bobot busur

$$S_7 = \left\{f\left(u_i^j\right) + f(v_i)\right\} \middle| i \text{ genap}, i = 2,4,\dots,\frac{n}{2}; j = 1,2,..,r_i \right\}$$

$= \Big\{a + \sum_{q=2,q\text{ genap}}^{2} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2,q\text{ genap}}^{2} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1, a +$

q=2, q genap2rq−2+1+q=2, q genap2rq−1+1+2,...,a+q=2, q
genap2rq−2+1+q=2, q genap2rq−1+1+r2,a+q=2, q
genap4rq−2+1+q=2, q genap4rq−1+1+1,a+q=2, q
genap4rq−2+1+q=2, q genap4rq−1+1+2,...,a+q=2, q
genap4rq−2+1+q=2, q genap4rq−1+1+r4,...,a+q=2, q
genapn2rq−2+1+q=2, q genapn2rq−1+1+1,a+q=2, q
genapn2rq−2+1+q=2, q genapn2rq−1+1+2,...,a+q=2, q
genapn2rq−2+1+q=2, q genapn2rq−1+1+rn2

$= \Big\{a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) + 1, a + (r_0 + 1) + (r_1 + 1) + 2, \dots, a +$

r0+1+r1+1+r2,a+r0+1+r2+1+r1+1+r3+1+1,a+r0+1+r2+1+r1
+1+r3+1+2,...,a+r0+1+r2+1+r1+1+r3+1+r4,...,a+r0+1+r2+1+
...+rn2−2+1+r1+1+r3+1+...+rn2−1+1+1,a+r0+1+r2+1+...+rn2
−2+1+r1+1+r3+1+...+rn2−1+1+2,...,a+r0+1+r2+1+...+rn2−2+
1+r1+1+r3+1+...+rn2−1+1+rn2

$= \Big\{a + (r_0 + r_1) + 2 + 1, a + (r_0 + r_1) + 2 + 2, \dots, a + (r_0 + r_1) + 2 +$
$r_2, a + (r_0 + r_1 + r_2 + r_3) + 4 + 1, a + (r_0 + r_1 + r_2 + r_3) + 4 + 2, \dots, a +$
$(r_0 + r_1 + r_2 + r_3) + 4 + r_4, \dots, a + \left(r_0 + r_1 + \cdots + r_{\frac{n}{2}-2} + r_{\frac{n}{2}-1}\right) + i +$

$1, a + \left(r_0 + r_1 + \cdots + r_{\frac{n}{2}-2} + r_{\frac{n}{2}-1}\right) + i + 2, \ldots, a + \left(r_0 + r_1 + \cdots + r_{\frac{n}{2}-2} + r_{\frac{n}{2}-1}\right) + i + r_{\frac{n}{2}}\Big\}$

$= \Big\{a + r_1 + 3, a + r_1 + 4, \ldots, a + (r_1 + r_2) + 2, a + (r_1 + r_2 + r_3) + 5, a +$
*r1+r2+r3+6,...,a+r1+r2+r3+r4+4,...,a+r1+r2+...+rn2−2+rn2−1 +n2+1,a+r1+r2+...+rn2−2+rn2−1+n2+2,...,a+r1+r2+...+rn2−2+ rn2−1+rn2+n2.*

Kasus 8 untuk busur $u_i^j v_i$ dengan nilai $i$ genap, $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots, r_i$.

$s_8 = f(u_i) + f(v_i)$

$$= \left(a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} \left(r_{q-2} + 1\right) + 1 + j\right) + \left(\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} \left(r_{q-1} + 1\right)\right)$$

$$= a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{i} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + j.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots, r_i$ didapat himpunan bobot busur

$$S_8 = \left\{ f\left(u_i^j\right) + f(v_i) \middle| i \text{ genap}, i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n; j = 1,2, .., r_i \right\}$$

$= \Big\{a + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + 1, a +$
$\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + 2, \ldots, a +$
$\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+2} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + r_{\frac{n}{2}+2}, a +$
$\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + 1, a +$
$\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + 2, \ldots, a +$
$\sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-2} + 1\right) + \sum_{q=2, q \text{ genap}}^{\frac{n}{2}+4} \left(r_{q-1} + 1\right) + 1 + r_{\frac{n}{2}+4}, \ldots, a +$

$\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-2}+1\right)+\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1}+1\right)+1+1, a+$
$\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-2}+1\right)+\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1}+1\right)+1+2, \ldots, a+$
$\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-2}+1\right)+\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} \left(r_{q-1}+1\right)+1+r_n \Big\}$

$= \Big\{a+\left(r_0+r_1+\cdots+r_{\frac{n}{2}}+r_{\frac{n}{2}+1}\right)+i+1+1, a+\Big(r_0+r_1+\cdots+r_{\frac{n}{2}}+$
*rn2+1+i+1+2,...,a+r0+r1+...+rn2+rn2+1+i+1+rn2+2,a+r0+r1+*
*...+rn2+2+rn2+3+i+1+1,a+r0+r1+...+rn2+2+rn2+3+i+1+2,...,a*
*+r0+r1+...+rn2+2+rn2+3+i+1+rn2+4,...,a+r0+r1+...+rn−2+rn−*
*1+i+1+1,a+r0+r1+...+rn−2+rn−1+i+1+2,...,a+r0+r1+...+rn−2+*
*rn−1+i+1+rn*

$= \Big\{a+\left(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+1}\right)+\frac{n}{2}+2+2, a+\left(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+1}\right)+\frac{n}{2}+$
*2+3,...,a+r1+r2+...+rn2+1+n2+2+1+rn2+2,a+r1+r2+...+rn2+3+*
*n2+4+2,a+r1+r2+...+rn2+3+n2+4+3,...,a+r1+r2+...+rn2+3+n2+*
*4+1+rn2+4,...,a+r1+r2+...+rn−1+n−1+2,a+r1+r2+...+rn−1+n−*
*1+3,...,a+r1+r2+...+rn−1+n+1+rn*

$= \Big\{a+\left(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+1}\right)+\frac{n}{2}+4, a+\left(r_1+r_2+\cdots+r_{\frac{n}{2}+1}\right)+\frac{n}{2}+$
*5,...,a+r1+r2+...+rn2+1+rn2+2+n2+3,a+r1+r2+...+rn2+3+n2+6,*
*a+r1+r2+...+rn2+3+n2+7,...,a+r1+r2+...+rn2+3+rn2+4+n2+5,...*
*,a+r1+r2+...+rn−1+n+1,a+r1+r2+...+rn−1+n+2,...,a+r1+r2+...+*
*rn−1+rn+n+1.*

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot busur $S=\{f(x)+f(y)|xy\ E\}$ dari graf korona membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan.

$S=S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \cup S_8$

$$= \left\{a + r_1 + 2, a + (r_1 + r_2) + 3, \dots, a + \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}-1}\right) + \frac{n}{2}\right\} \cup$$
$$\left\{a + \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}}\right) + \frac{n}{2} + 2, a + \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_{\frac{n}{2}+1}\right) + \frac{n}{2} + 3, \dots, a +\right.$$

*r1+r2+…+rn−1+n+1∪a+r1+r3+…+rn−1+n2+1∪{a+2,a+3,…,a+r1 +1}∪a+r1+r2+4,a+r1+r2+5,…,a+r1+r2+…+rn2−2+rn2−1+n2−1 ∪a+r1+r2+…+rn2+n2+3,a+r1+r2+…+rn2+n2+4,…,a+r1+r2+…+r n−2+rn−1+n∪a+r1+3,a+r1+4,,…,a+r1+r2+…+rn2−2+rn2−1+rn2 +n2∪a+r1+r2+…+rn2+1+n2+4,a+r1+r2+…+rn2+1+n2+5,…,a+r 1+r2+…+rn−1+rn+n+1*

$$= \{a + 2, a + 3, \dots, a + (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) + n + 1\}$$

$$= \left\{a + 2, a + 3, \dots, a + \left(\sum_{m=1}^{n} r_m\right) + n + 1\right\}.$$

Karena himpunan bobot busur $S = \{f(x) + f(y), xy \in E\}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif berurutan $\{a + 2, a + 3, \dots, a + (\sum_{m=1}^{n} r_m) + n + 1\}$, maka dengan menggunakan Lemma 3.2 terbukti bahwa graf *hairycycle* $HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, r_i)$ dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan dengan nilai $b = \left(\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p\right) + \frac{n}{2}$.■

Menurut Lemma 3.2, nilai konstanta ajaib adalah

$k = b + e + s$, dimana $s = \min(S) = a + 2$

$$k = \left(\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p\right) + \frac{n}{2} + n + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) + a + 2$$

$$= \frac{3n}{2} + \left(\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) + a + 2.$$

Dengan mensubstitusikan nilai

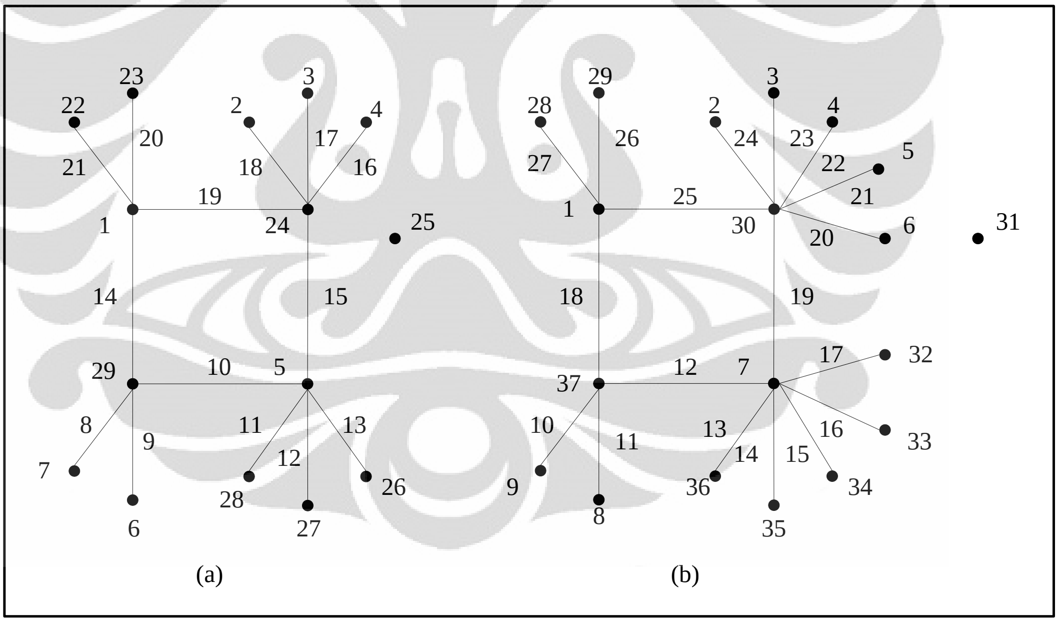
$$a = \frac{3n}{2} + \left( \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} \mathrm{r_i} \right).$$

maka,

$$k = \frac{3n}{2} + \left( \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} r_i \right) + \frac{3n}{2} + \left( \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} r_i \right) + 2$$

$$= 3n + 2 \left[ \left( \sum_{p=1, p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} r_i \right) \right] + 2.$$

Pada Gambar 3.11 diberikan contoh PTBA $\left(\left(\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p\right) + \right.$ $n2-$busur-berurutan pada graf *hairycycle* $HC(4;2,3,3,2)$ dan $HC(4k2,5,5,2)$.

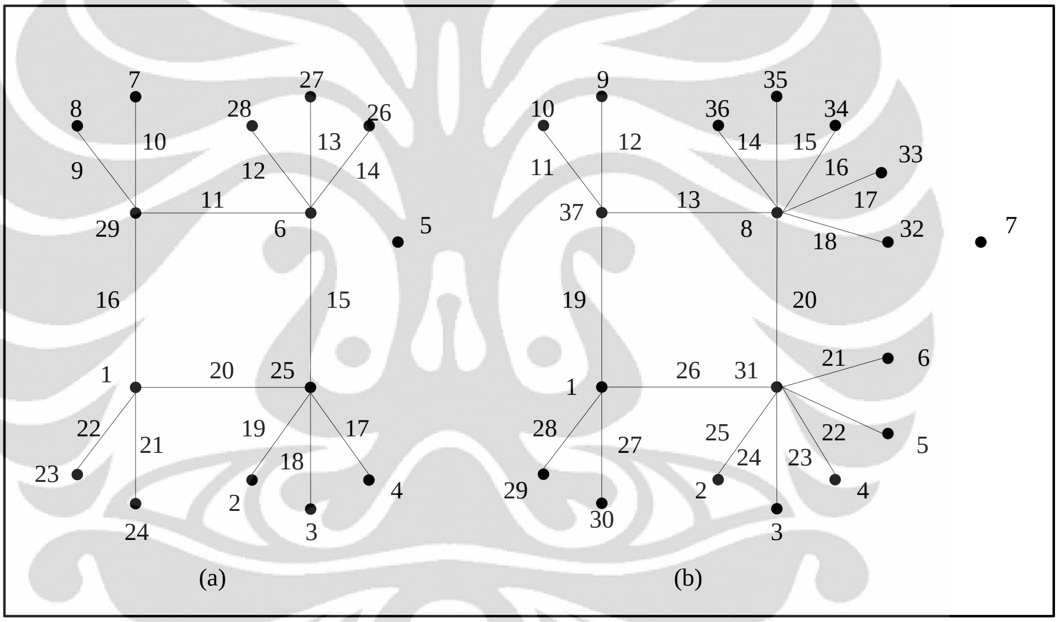



Gambar 3. 11 (a) PTBA $7$ $-$busur-berurutan pada $HC(4; 2,3,3,2)$ dengan $k = 44$ dan (b) PTBA $9$ $-$busur-berurutan pada $HC(4; 2,5,5,2)$ dengan $k = 56$.

Berdasarkan Teorema 2.3 didapatkan pelabelan dual dari PTBA $b$ $-$busur-berurutan pada graf *hairycycle* yang diberikan pada Akibat 3.4.

**Akibat 3.3** Setiap graf *hairycycle* $HC(n; r_i, i = 1,2,\ldots,r_i)$ dan $r_i = r_{n-i+1}$dengan $n \equiv 0$ mod 4 memiliki PTBA $\left(\left(\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} r_q\right) + \frac{n}{2} + 1\right)$ −busur-berurutan dengan menambahkan 1 simpul terisolasi.

Pada Gambar 3.12 diberikan contoh PTBA $\left(\left(\sum_{q=2,q \text{ genap}}^{n} r_q\right) + \frac{n}{2} + 1\right.$ −busur-berurutan pada graf *hairycycle* $HC(4;2,3,3,2)$ dan $HC(4;2,5,5,2)$.




Gambar 3. 12 (a) PTBA 8 −busur-berurutan pada $HC(4; 2,3,3,2)$ dengan $k = 46$ dan (b) PTBA 10 −busur-berurutan pada $HC(4; 2,3,3,2)$ dengan $k = 58$.

Dengan menggunakan definisi pelabelan pada graf *hairycycle*, bisa didapat PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf korona sesuai dengan Teorema 3.3 dengan nilai $r_i = r$. Pada bab 3 ini telah dibuktikan bahwa graf terhubung yang bukan pohon pada graf *unicycle* memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan. Pada bab selanjutnya akan diberikan kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh.

# BAB 4

# KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah diberikan konstruksi PTBA $b$ −busur-berurutan pada kelas graf *unicycle*, yaitu graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle*. Untuk melabel graf unicycle dengan pelabelan total busur ajaib $b$ −busur-berurutan (PTBA $b$ −busur-berurutan), maka perlu ditambahkan satu simpul terisolasi, sedemikian sehingga banyak simpul terisolasi yang ditambahkan menjadi optimal, yaitu memenuhi $e = v - 1$. Pada hasil-hasil dalam Tabel 4.1 diberikan pelabelan total busur-ajaib $b$ −busur-berurutan dengan $n \equiv 0 \bmod 4$.

Tabel 4. 1. Pelabelan Total Busur-Ajaib $\boldsymbol{b}$-Busur-Berurutan

| Graf | Pelabelan | Hasil |
|---|---|---|
| Lingkaran $(C_n)$ | PTBA $\frac{n}{2}$ −busur-berurutan | Teorema 3.1 |
| | PTBA $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ −busur-berurutan | Akibat 3.1 |
| Matahari $(C_n \odot \overline{K_1})$ | PTBA $n$ −busur-berurutan | Teorema 3.2 |
| | PTBA $(n+1)$ −busur-berurutan | Akibat 3.2 |
| Korona $(C_n \odot \overline{K_r})$ | PTBA $\left(\frac{n}{2}(r+1)\right)$ −busur-berurutan | Teorema 3.3 |
| | PTBA $\left(\frac{n}{2}\ (r+1)+1\right)$ −busur-berurutan | Akibat 3.3 |
| *Hairycycle* $\big(HC(n; r_i, i =$ *1,2,...,ri* dengan $r_i = r_{n-i+1}$ | PTBA $\left(\sum_{p=1,p \text{ ganjil}}^{n-1} r_p + \frac{n}{2}\right)$ −busur-berurutan | Teorema 3.4 |
| | PTBA $\left(\sum_{q=1,q \text{ genap}}^{n} r_q + \frac{n}{2} + 1\right)$ −busur-berurutan | Akibat 3.4 |

Pada hasil PTBA $b$ −busur-berurutan di tabel 4.1, didapatkan bahwa dengan menggunakan definisi pelabelan simpul pada graf korona, dapat diperoleh PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf matahari dengan syarat $r = 1$ dan dengan menggunakan definisi pelabelan simpul pada graf *hairycycle*, dapat diperoleh PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf korona dengan syarat $r$ konstan.

Penelitian lebih lanjut mengenai konstruksi PTBA $b$ −busur-berurutan pada graf lingkaran, graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* yang belum ditemukan diberikan dalam masalah terbuka berikut.

**Masalah terbuka 1.** Apakah graf lingkaran $C_n$ dengan $n \geq 3$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap nilai $n$.

**Masalah terbuka 2.** Apakah graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \geq 3$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap nilai $n$.

**Masalah terbuka 3.** Apakah graf korona $C_n \odot \overline{K_r}$ dengan $n \geq 3$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap nilai $n$.

**Masalah terbuka 4.** Apakah graf *hairycycle* $HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n)$ dengan $n \geq 3$ memiliki PTBA $b$ −busur-berurutan untuk setiap nilai $n$.

# DAFTAR PUSTAKA


Ananda, A. I. (2010). *Algoritma Pelabelan Total Simpul Ajaib pada Graf Lingkaran, Matahari, dan Kecebong.* Depok: Skripsi, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia.

Baca, M., & Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problems and Some Solutions.* Florida: Brown Walker Press.

Chartrand, L., & Lesniak, L. (1986). *Graphs & Digraphs.* California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced book & Software.

Enomoto, H., Llado, A., Nakamigawa, T., & Ringel, G. (1998). Super Edge Magic Graphs. *SUT J. Math vol.34* , 105-109.

Figuerora-Centeno, R. M., Ichisima, R., & Muntaner-Batle, F. A. (2001). The place of super edge magic labeling among other classes of labelings. *Discrete Math (231)* , 153-168.

Kasmawati, V. (2008). *Pelabelan Total a-Simpul Berurutan Busur Ajaib Pada Gabungan Dua Graf Yang Terdiri Dari Graf Bintang dan Graf Yang Mengandung Unicycle.* Depok: Skripsi, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia.

Rosen, K. H. (New York). *Discrete Mathematics and Its Application (3 ed.).* 1995: McGraw-Hill.

Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (2009). Construction of edge consecutive edge magic labeling on a disconnective graph which are not a subclass of forest. *Proccedings of IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applcation (IICMA)* , 907-911.

Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (preprint). Pelabelan Total Busur Berurutan Busur Ajaib pada Graf Terhubung bukan Graf Pohon.

Sugeng, K. A., & Miller, M. (2008). On consecutive edge magic total labeling of graph. *Journal of Discrete Algorithms (6)* , 59-65.

Sugeng, K. A., & Silaban, D. R. (2009). An edge consecutive edge magic total labeling on some classes of tree. *Proccedings of the 5th International Conference on Mathematics, Statistics and Their Applications (ICMSA)* , 966-969.

Wallis, W. (2001). *Magic Graphs.* Birkhauser.

Yero, I. K.-V. (2010, October 7). On the matrix dimension of corona product. *arXiv.org.* Retrieved May 16, 2011, from arXiv.org: http://arxiv.org/abs/1009.2586