UNIVERSITAS INDONESIA

KONSTRUKSI PERSEGI-PANJANG-AJAIB

SKRIPSI

BILLY BIONDI
0606067313

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

KONSTRUKSI PERSEGI-PANJANG-AJAIB

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

BILLY BIONDI
0606067313

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Billy Biondi

NPM : 0606067313

Tanda Tangan :

Tanggal : Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh
Nama : Billy Biondi
NPM : 0606067313
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Konstruksi Persegi-panjang-ajaib

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Kiki Ariyanti S ( )
Pembimbing II : Dra. Nora Hariadi, M.Si. ( )
Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami ( )
Penguji : Dra. Siti Aminah, M.Kom ( )
Penguji : Dr. Hengki Tasman, M.Si. ( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 27 Mei 2011

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan rahmat yang dilimpahakn sehingga skripsi ini dapat selesai tepat waktu. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada

(1) Dr. Kiki Ariyanti S. selaku pembimbing I dan Dra. Nora Hariadi, M.Si selaku pembimbing II yang telah bersedia meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

(2) Dra. Suarsih Utama selaku pembimbing akademis yang telah memberikan semangat dan motivasi sehingga penulis dapat melewati periode sulit selama perkuliahan.

(3) Yudi Satria, MT. selaku ketua departemen, Rahmi Rusin,S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.

(4) Seluruh dosen pada Departemen Matematika UI yang telah memberikan pengetahuan dalam bidang matematika.

(5) Seluruh staf pada departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan pada penulis selama menjalani periode perkuliahan.

(6) Rico Panggabean dan Tutty Rico sebagai orang tua yang selalu memberikan kasih sayang yang tulus kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi pada Departemen Matematika.

(7) Wendy Adriani yang sedang menjalani kuliah di *Dusseldorf*, Jerman. Cepat pulang ya kak.

(8) Raisa Ornella yang sedang menjalani tugas akhir di departemen menejemen UI. Terima kasih atas segala semangat yang ditularkan sehingga penulis merasa tertantang untuk mengerjakan skripsi dengan lebih serius.

(9) Maria Cherish Nathasya Lumban Tobing yang telah meraih gelar Sarjana Sains. Terima kasih atas segala hal yang akan selalu penulis kenang.

(10) Rita Yuliana, Lidya Christie Caroline, Yuridunis Saidah, dan Shafira Ramadhan atas seluruh kenangan manis selama perkuliahan, terutama pada foto kenangan ber-$(14 - 2)$ saat kegiatan Ekskursi dan Wisata Kawah Putih tahun ajaran 2007-2008. Tanpa bantuan anda semua, penulis tidak akan mengerti arti sahabat.

(11) Muhardani, Teguh Setriono, Putri Yuli, Merysa Amanda, Rendy Ahmad, Budyono Saputro, Try Sutrisno, Sutisna, Rama Sukaton, Yosep Pangky, Kristina Intan, Roni Tua, Nur Ali dan Dhanardi Riansyah yang telah berjuang bersama selama penyusunan skripsi ini.

(12) Seluruh teman-teman angkatan 2006 yang telah memberikan kesan yang sangat mendalam selama penulis menjalani perkuliahan.

(13) Seluruh teman-teman departemen Matematika UI yang belum lulus maupun yang sedang menjalani skripsi. Semoga teman-teman semua bisa meraih impian untuk menjadi seorang sarjana matematika seperti penulis.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis
2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Billy Biondi
NPM	: 0606067313
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Konstruksi Persegi-panjang-ajaib

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : Juli 2011
Yang menyatakan

(Billy Biondi)

ABSTRAK

Nama : Billy Biondi
Program Studi : Matematika
Judul : Konstruksi Persegi-panjang-ajaib

Misalkan terdapat suatu matriks H berukuran $m \times n$. Maka matriks H dikatakan sebagai persegi-panjang-ajaib jika nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada kolom yang sama adalah k dan nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada baris yang sama ialah l, dengan entri-entri dari matriks H ialah himpunan bilangan berurut $\{1,2,\dots,mn\}$. Dalam *skripsi* ini diberikan metode untuk mengkonstruksi persegi-panjang-ajaib untuk $m = 3, n$ ganjil menggunakan metode blok-pembangun dan metode permutasi-himpunan, dan m, n genap menggunakan aturan Kronecker.

Kata Kunci : Persegi-panjang-ajaib, konstruksi persegi-panjang-ajaib, blok-pembangun, permutasi-himpunan, aturan Kronecker.

xii+83 halaman ; 6 gambar; 15 tabel
Daftar Pustaka : 10 (1988-2011)

ABSTRACT

Name : Billy Biondi
Study Program : Mathematics
Title : Construction of Magic-rectangle

Let H a matrix with orde $m \times n$. H is a magic-rectangle if the sum of every entry in the same column equal to k and the sum of every entry in the same row equal to l, where each entries of H is a distinguish consecutive number $\{1,2,\dots,mn\}$. This *skripsi* gives some methods to construct a magic-rectangle for $m = 3$ with n as odd number using building blocks and set permutation method, and m, n as even number using Kronecker rule.

Keywords :Magic-rectangle, construction of magic-rectangle, building block, set permutation, Kronecker rule.
xii+83 pages ; 6 pictures; 15 tables
Bibliography : 10 (1988-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

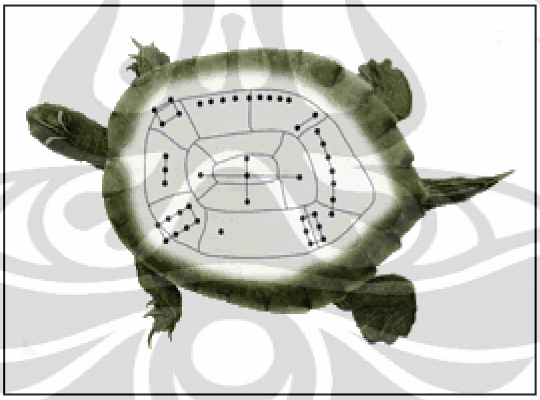
DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

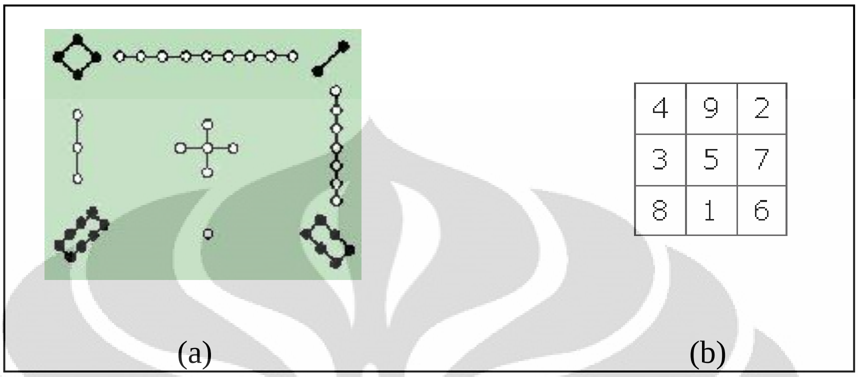
Sejak jaman dahulu kala, konfigurasi-ajaib dari bilangan bulat telah menarik perhatian para ahli matematika. Konfigurasi-ajaib meliputi persegi-ajaib, persegi-panjang-ajaib, kubus-ajaib, dan lain sebagainya. Namun, yang paling diketahui dan paling menarik dari konfigurasi-ajaib ialah persegi-ajaib.

Sejarah mencatat bahwa persegi-ajaib pertama kali ditemukan pada tahun 2800 SM. Mitologi Cina mengatakan bahwa kaisar Yu menemukan seekor kura-kura dengan pola pada tempurung kura-kura tersebut saat sedang berjalan sepanjang sungai kuning (*Yellow River*). Kaisar Yu menamai diagram unik ini sebagai Loh-Shu,sedangkan kura-kura tersebut diberi nama kura-kura Loh-Shu (Anderson,2001).



Gambar 1.1 Kura-kura Loh-Shu

Persegi-ajaib pertama kali tercatat pada Gulungan Surat dari Sungai Loh (*Scroll of the River Loh*) oleh Fuh-Hi (Farrar, 1997 & Grogono, 2004). Gulungan surat tersebut ialah suatu persegi-ajaib berukuran 3x3 yang berisikan simbol, bukan bilangan (lihat gambar 1.2). Setiap jumlah dari titik pada setiap simbol merepresentasikan suatu ketentuan (lihat gambar 1.2). Bilangan genap direpresentasikan sebagai asas-asas wanita (Yin) dan bilangan ganjil sebagai asas-asas pria (Yang). Bilangan 5, yang terletak ditengah, merupakan Bumi, yang dikelilingi 4 elemen lain: besi (4 dan 9), api (2 dan 7), air (1 dan 6), dan kayu (3 dan 8) (Gardner, 1988).



4	9	2
3	5	7
8	1	6

(a) (b)

Gambar 1.2 (a) Bentuk pola pada tempurung kura-kura Loh-Shu, dan (b) representasi bilangan pada Loh-Shu.

Selain itu, terdapat pula penulisan Yunani yang berelasi dengan persegi-ajaib yang berasal dari tahun 1300 (Farrar, 1997). Diperkirakan pula, Cina memperkenalkan persegi-ajaib kedalam kebudayaan India, sehingga persegi-ajaib berukuran 4x4 dapat ditemukan di India (Swaney, 2000). Di India, persegi-ajaib tidak hanya digunakan pada konteks matematika tradisional, tetapi juga pada aplikasi lain seperti pada campuran untuk membuat parfum dan juga pada bidang kedokteran, dengan persegi-ajaib berukuran 3×3 muncul sebagai suatu alat untuk mengurangi tingkat kelahiran (Anderson, 2001).

Ahli matematika dari Arab telah sadar akan keberadaan dari persegi-ajaib sejak abad ke-4 SM. Seringkali para ahli matematika tersebut menghubungkan persegi-ajaib dalam ilmu perbintangan dan beragam prediksi. Persegi-ajaib yang ditemukan oleh ahli matematika tersebut ialah persegi-ajaib dengan ukuran yang lebih besar dan para ahli matematika tersebut menyusun suatu daftar dari persegi-ajaib sampai berukuran 9×9 (Ballew, 2006). Pada tahun 1300-an, seorang Byzantin,Manual Moschopoulos, menulis suatu buku yang berdasarkan pada pencarian oleh Al-Buni,seorang matematikawan Arab, tentang persegi-ajaib. Moschopoulos juga merupakan ahli matematika yang memperkenalkan persegi-ajaib ke Eropa, dimana persegi-ajaib tersebut dihubungkan dengan divinasi, alkimis, dan astrologi. Sejak saat itu, persegi-ajaib telah memiliki hubungan antara planet-planet dan matahari, seni, dan agama. Pada masa lampau, persegi-ajaib merupakan hal yang penting pada kebudayaan Afrika. Persegi-ajaib tersebut memegang peranan penting pada agama di Afrika dan seringkali digoreskan pada topeng-topeng, pakaian-pakaian, dan artefak keagamaan dan juga memiliki pengaruh pada bentuk rumah dan bangunan (Anderson, 2001).

Persegi-ajaib berukuran $n \times n$ ialah suatu persegi berukuran $n \times n$yang entrinya ialah susunan dari $\{1,2,3, \dots, n^2\}$, dimana setiap bilangan muncul sekali, dengan penjumlahan elemen dari setiap baris dan penjumlahan elemen dari setiap kolom akan memiliki nilai yang sama (Wallis,1999).

Para ahli matematika juga telah membuat berbagai pengembangan dari persegi-ajaib, antara lain lingkaran-ajaib yang ditemukan oleh Yang Hui pada tahun 1275, segitiga-ajaib dan persegi-enam-ajaib yang ditemukan oleh Frenicle pada tahun 1640, kubus-ajaib yang ditemukan oleh Fermat pada tahun 1640, persegi-pan-ajaib yang ditemukan oleh Henry Dudeley pada tahun 1917, persegi-alfa-ajaib oleh Sallows pada tahun 1986, dan juga persegi-panjang-ajaib yang ditemukan oleh TR. Hagedorn pada tahun 1999 (Magic Rectangle s Revisited, 1999, halaman 65-72).

Suatu persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$ didefinisikan sebagai persegi panjang dengan jumlah baris yaitu m dan jumlah kolom yaitu n, dimana penjumlahan elemen dari setiap baris akan memiliki nilai yang sama (misalkan k), dan penjumlahan elemen dari setiap kolom akan memiliki nilai yang sama (misalkan l) (Wallis,1999). Suatu persegi-panjang-ajaib dikatakan normal jika persegi-panjang tersebut terdiri dari bilangan yang berurutan, yaitu $\{1, 2, \dots, mn\}$, dan disebut tidak-normal jika bilangan tersebut tidak berurutan (sumber: http://homepage2.nifty.com/googol/magcube/en/rectangles.htm).

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Perumusan masalah dari skripsi ini adalah bagaimana konstruksi pembentukan dari persegi-panjang-ajaib.

Ruang lingkup dari masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah persegi-panjang ajaib yang bersifat normal.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah, penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengkaji beberapa konstruksi dari persegi-panjang-ajaib.

1.4 Metode Penulisan yang digunakan

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terbagi menjadi empat bab. Pada Bab 2 diberikan teori dasar persegi-panjang-ajaib dan penjelasan tentang aturan-aturan dasar yang mendukung konstruksi persegi-panjang-ajaib. Pada Bab 3 diberikan konstruksi persegi-panjang-ajaib. Bab 4 merupakan kesimpulan yang memberikan jawaban dari pencapaian tujuan penelitian.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, diberikan landasan teori yang akan digunakan untuk pembahasan dalam skripsi, yaitu mengenai teori pada persegi-panjang-ajaib, permutasihimpunan, dan aturan Kronecker.

2.1 Persegi-ajaib

Persegi-ajaib merupakan suatu konfigurasi-ajaib yang paling terkenal pada bidang matematika. Suatu persegi-ajaib dengan sisi n ialah suatu *array* berukuran $n \times n$ yang entri-entri dari *array* tersebut merupakan suatu susunan dari bilangan bulat $\{1,2,\dots,n^2\}$, dimana setiap elemen pada setiap baris, setiap kolom maupun diagonal-utama dan diagonal lainnya akan memiliki nilai penjumlahan yang sama (Wallis, 2001). Gambar 2.1 memberikan contoh dari persegi-ajaib berukuran 4×4.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 15 & 8 & 10 \\ 12 & 6 & 13 & 3 \\ 14 & 4 & 11 & 5 \\ 7 & 9 & 2 & 16 \end{pmatrix}}$$

Gambar 2.1 Contoh dari persegi-ajaib berukuran 4×4

Pada Gambar 2.1, terlihat bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada kolom yang sama maupun baris yang sama adalah 34. Terlihat pula bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada diagonal-utama maupun diagonal lainnya juga akan berjumlah 34.

Dengan menggunakan ide yang serupa, persegi-ajaib dapat dikembangkan menjadi konfigurasi yang lain, seperti persegi-panjang-ajaib dan sebagainya.

2.2 Permutasi-Himpunan

Dalam kombinatorial, suatu permutasi dari suatu himpunan S dengan n elemen ialah suatu daftar dari elemen dari himpunan S berdasarkan suatu urutan, dimana setiap elemen muncul tepat satu kali. Hal ini bisa didefinisikan secara formal sebagai pemetaan bijeksi dari himpunan $\{1,2,\dots,n\}$ ke himpunan S. Lebih lanjut, karena komposisi dari 2 fungsi bijektif akan selalu memberikan fungsi bijektif, maka produk dari dua permutasi tersebut juga merupakan suatu permutasi. Selain itu, karena komposisi fungsi bersifat asosiatif, maka operasi produk pada permutasi juga bersifat asosiatif. Karena pemetaan bijektif memiliki invers, begitu pula dengan permutasi.

Pada notasi matriks, invers dapat diperoleh dengan menukar 2 baris, dan kemudian mengurutkan kolom – kolom yang ada. Permutasi dapat ditulis dalam notasi matriks.Gambar 2.2 memberikan contoh notasi matriks

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Gambar 2.2 Contoh penulisan permutasi dalam matriks

Gambar 2.3 memberi contoh untuk invers permutasi pada Gambar 2.2

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Gambar 2.3 Contoh invers permutasi

2.3 Aturan Kronecker pada Matriks

Dalam matematika, produk Kronecker, yang dinotasikan dengan $\otimes$, ialah suatu operasi pada dua matriks dengan ukuran yang belum tentu sama, yang menghasilkan suatu matriks baru.

Misalkan terdapat suatu matriks A berukuran $i \times j$ dan matriks B berukuran $k \times m$, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} \end{pmatrix} \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,m} \end{pmatrix}$$

maka produk Kronecker dari $A \otimes B$ ialah matriks berukuran $(i * k) \times (j * m)$, yaitu

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,m} \end{pmatrix} & \cdots & a_{1,j} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,m} \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,m} \end{pmatrix} & \cdots & a_{i,j} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,m} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

BAB 3

KONSTRUKSI PERSEGI-PANJANG-AJAIB

Pada bab ini, akan diberikan konstruksi persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$, dengan dua kasus, yaitu untuk $m = 3$ dengan n ganjil, dan m, n genap.

3.1. Persegi-panjang-ajaib Berukuran $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ dengan $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$ dan $\boldsymbol{n}$ Bilangan Ganjil

Pada bagian ini, konstruksi persegi-panjang-ajaib untuk m dan n ganjil akan dibatasi hanya untuk $m = 3$ dengan $n > 3$. Ada dua jenis konstruksi yang akan dibahas, yaitu dengan menggunakan metode blok-pembangun dan metode pemutasi-himpunan.

3.1.1 Metode blok-pembangun

Pandang suatu persegi-panjang-ajaib$A$ berukuran $3 \times n, n$ ganjil.

Teorema 3.1 (Wallis, 2001)

Terdapat suatu persegi-panjang-ajaib $3 \times n$ dimana n ganjil.

Bukti

Misalkan $C(i)$ dan $D(j)$ ialah blok-pembangun berupa matriks berukuran 3×2, yaitu

$$C(i) = (c_{ij})(i) = \begin{pmatrix} i+1 & n+1-i \\ \frac{1}{2}(3n+1)+i & \frac{1}{2}(3n+1)-i \\ 3n-2i & 2n+2i \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$D(j) = (d_{ij})(j) = \begin{pmatrix} 3n-2j & 2n+2j \\ \frac{1}{2}(3n+1)+j & \frac{1}{2}(3n+1)-j \\ j+1 & n+1-j \end{pmatrix}$$

Pembuktian dari teorema ini akan dibagi menjadi 2 kasus, yaitu untuk $n \equiv 1(mod\ 4)$ dan $n \equiv 3(mod\ 4)$.

Secara garis besar, ide dari pembuktian teorema ini ialah dengan mendefinisikan suatu matriks berukuran 3×3 sebagai blok-pembangun untuk kasus pertama, dan berukuran 3×2 sebagai blok-pembangun untuk kasus kedua. Kemudian, dengan aturan tertentu, blok-pembangun tersebut akan digabungkan dengan blok-pembangun $C(i)$ dan $D(j)$. Setelah itu, akan dilihat bahwa penggabungan tersebut menghasilkan suatu persegi-panjang yang memiliki sifat bahwa dimana setiap elemen yang terdapat pada persegi-panjang tersebut berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2, \dots ,3n\}$ muncul tepat satu kali, dan penjumlahan dari setiap elemen pada baris maupun kolom yang sama akan memberikan nilai yang sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa persegi-panjang tersebut ialah persegi-panjang-ajaib.

Pertama, akan diberikan formula pembentukan persegi-panjang-ajaib untuk kasus I yaitu $n \equiv 1(mod\ 4)$.

Misalkan B_{odd} adalah blok-pembangun berupa matriks berukuran 3×3, yaitu

$$B_{odd} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & \frac{1}{2}(n+3) \\ 3n & \frac{1}{2}(n+1) & n+1 \\ \frac{1}{2}(3n+1) & 2n+1 & 3n-1 \end{pmatrix}$$

Maka persegi-panjang A berukuran $3 \times n$ diperoleh dengan menggabungkan $\frac{1}{4}(n-5)$ buah blok-pembangun $C(i)$ dengan $1 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-5)$ dan $\frac{1}{4}(n-1)$ buah blok-pembangun $D(j)$ dengan $\frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)$, yaitu

$$A = \left(B_{odd} \ \vdots \ C(1) \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ C\left(\frac{1}{4}(n-5)\right) \ \vdots \ D\left(\frac{1}{4}(n-1)\right) \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ D\left(\frac{1}{2}(n-3)\right) \right)$$

Selanjutnya, akan diberikan formula pembentukan persegi-panjang-ajaib untuk kasus II, yaitu $n \equiv 3(mod\ 4)$.

Pada kasus II, dibutuhkan suatu nilai $h \in W$ sedemikian sehingga nilai dari $n - 3h$ ialah $1, 0,$ atau -1.

Definisikan matriks 3×2 sebagai blok-pembangun bernama B_{even} dan $D(1)$, yaitu

$$B_{even} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(n+3) \\ 3n & n+1 \\ \frac{1}{2}(3n+1) & 3n-1 \end{pmatrix} \text{ dan } D(1) = \begin{pmatrix} 3n-2 & 2n+2 \\ \frac{1}{2}(3n+1)+1 & \frac{1}{2}(3n+1)-1 \\ 2 & n \end{pmatrix}$$

Kemudian bentuk suatu matriks F yang dipilih berdasarkan nilai dari $n - 3h$.

Untuk $n - 3h = 1$, misalkan

$$F = \begin{pmatrix} h+1 & 2n+1 & 2n+2h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(n+1)+h \\ 3n-2h & 2n & n+1-h \end{pmatrix}$$

Untuk $n - 3h = 0$, misalkan

$$F = \begin{pmatrix} h+1 & 2n & 2n+2h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(n+1)+h \\ 3n-2h & 2n+1 & n+1-h \end{pmatrix}$$

Untuk $n - 3h = -1$, misalkan

$$F = \begin{pmatrix} 3n-2h & 2n+1 & n+1-h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(n+1)+h \\ h+1 & 2n & 2n+2h \end{pmatrix}$$

Maka persegi-panjang A diperoleh dengan menggabungkan B_{even}, F, dan $D(1)$ dengan $\frac{1}{4}(n-7)$ buah blok-pembangun $C(i)$ dimana $2 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-3)$ dan $\frac{1}{4}(n-7)$ buah blok-pembangun $D(j)$ dengan $\frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3), j \neq h$, yaitu

$$A=\left(B_{even} \;\vdots\; F \;\vdots\; D(1) \;\vdots\; C(2) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; C\left(\frac{1}{4}(n-3)\right) \;\vdots\; D\left(\frac{1}{4}(n+1)\right) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; D\left(\frac{1}{2}(n-3)\right)\right)$$

Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa persegi-panjang yang dibentuk pada kasus I dan kasus II merupakan persegi-panjang-ajaib.

Pada pembentukan persegi-panjang-ajaib tersebut, dibutuhkan 3 jenis blok-pembangun untuk $n \equiv 1(mod\ 4)$ dan 4 jenis blok-pembangun untuk $n \equiv 3(mod\ 4)$. Dengan demikian, pembuktian akan dilakukan dengan cara menunjukkan bahwa penggabungan dari blok-pembangun tersebut akan membentuk persegi-panjang-ajaib.

Kasus I. Untuk $n \equiv 1(mod\ 4)$.

Pembuktian pada kasus I dibagi menjadi 4 bagian, yaitu pembuktian bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun B_{odd}, $C(i)$ dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain, bilangan $\{1, 2, \dots, 3n\}$ muncul tepat satu sekali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus I.a.

Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun B_{odd}, $C(i)$ dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain.

Perhatikan blok-pembangun $C(i)$, dengan $1 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-5)$.

$$C(i)=(c_{ij})(i)=\begin{pmatrix} i+1 & n+1-i \\ \frac{1}{2}(3n+1)+i & \frac{1}{2}(3n+1)-i \\ 3n-2i & 2n+2i \end{pmatrix}$$

Sekarang, perhatikan blok-pembangun $D(j)$, dengan $\frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)$.

$$D(j) = (d_{ij})(i) = \begin{pmatrix} 3n-2j & 2n+2j \\ \frac{1}{2}(3n+1)+j & \frac{1}{2}(3n+1)-j \\ j+1 & n+1-j \end{pmatrix}$$

Terakhir, perhatikan blok-pembangun B_{odd}

$$B_{odd} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & \frac{1}{2}(n+3) \\ 3n & \frac{1}{2}(n+1) & n+1 \\ \frac{1}{2}(3n+1) & 2n+1 & 3n-1 \end{pmatrix}$$

Dengan mengurutkan elemen yang terbentuk pada pemaparan di atas, diperoleh

$$\{(B_{odd})_{1,1}\} = \{1\}$$

$$\left\{c_{1,1}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{2,3, \dots, \frac{1}{4}(n-1)\right\}$$

$$\left\{d_{3,1}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(n+3), \frac{1}{4}(n+7), \dots, \frac{1}{2}(n-1)\right\}$$

$$\{(B_{odd})_{2,2}\} = \left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}$$

$$\{(B_{odd})_{1,3}\} = \left\{\frac{1}{2}(n+3)\right\}$$

$$\left\{d_{3,2}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(n+5), \frac{1}{2}(n+7), \dots, \frac{1}{4}(3n+5)\right\}$$

$$\left\{c_{1,2}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(3n+9), \frac{1}{4}(3n+13), \dots, n\right\}$$

$$\left\{(B_{odd})_{2,3}\right\} = \{n+1\}$$

$$\left\{d_{2,2}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{n+2, n+3, \dots, \frac{1}{4}(5n+3)\right\}$$

$$\left\{c_{2,2}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(5n+7), \frac{1}{4}(5n+11), \dots, \frac{1}{2}(3n-1)\right\}$$

$$\{(B_{odd})_{3.1}\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+1)\right\}$$

$$\left\{c_{2,1}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+3), \frac{1}{2}(3n+5), \dots, \frac{1}{4}(7n-3)\right\}$$

$$\left\{d_{2,1}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(7n+1), \frac{1}{4}(7n+5), \dots, 2n-1\right\}$$

$$\left\{(B_{odd})_{1,2}\right\} = \{2n\}$$

$$\left\{(B_{odd})_{3,2}\right\} = \{2n+1\}$$

$$\left\{c_{3,2}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{2n+2, 2n+4, \dots, \frac{1}{2}(5n-5)\right\}$$

$$\left\{d_{1,1}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{2n+3, 2n+5, \dots, \frac{1}{2}(5n-3), \frac{1}{2}(5n+1)\right\}$$

$$\left\{c_{3,1}(i) | i = 1, \dots, \frac{1}{4}(n-5)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(5n+5), \frac{1}{2}(5n+9), \dots, 3n-4, 3n-2\right\}$$

$$\left\{d_{1,2}(j) | \frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(5n-1), \frac{1}{2}(5n+3), \dots, 3n-3\right\}$$

$$\left\{(B_{odd})_{3,3}\right\} = \{3n-1\}$$

$$\left\{(B_{odd})_{2,1}\right\} = \{3n\}$$

Maka, untuk $p = 1,2,3; p' = 1,2,3; p'' = 1,2,3;\ q = 1,2; q' = 1,2; q'' = 1,2; 1 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-5)$dan $\frac{1}{4}(n-1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)$; diperoleh

$$C_{p,q}(i) \cap (B_{odd})_{p',q'} \cap D_{p'',q''}(j) = \emptyset$$

Dengan demikian, terbukti bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun $C(i), B_{odd}$, dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain.

Kasus I.b.

Akan ditunjukkan bahwa bilangan pada $\{1,2,\dots,3n\}$ muncul tepat satu sekali.

Berdasarkan pemaparan pada Kasus I.a, terlihat bahwa untuk $p, p', p'', q, q', q'', i$, dan j yang bersesuaian, diperoleh

$$C_{p,q}(i) \cup (B_{odd})_{p',q'} \cup D_{p'',q''}(j) = \{1,2,\dots,3n\}.$$

Kasus I.c.

Akan ditunjukkan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama untuk blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$, maupun $D(j)$ akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Untuk pembuktian berdasarkan kolom–kolom dari persegi-panjang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka agar persegi-panjang tersebut memiliki sifat persegi-panjang-ajaib, nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada kolom yang sama harus berjumlah

$$k = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \frac{3}{2}(3n+1); \forall j$$

Karena setiap kolom dari $B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$ tidak saling bergantung, maka dapat dibuktikan secara terpisah bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

Berikut ini akan diberikan tabel 3.1 yang merepresentasikan penjumlahan setiap elemen yang berada pada kolom yang sama, baik pada blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$.

Tabel 3.1

Nilai penjumlahan dari setiap kolom yang terdapat pada blok-pembangun$B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$

Blok-pembangun	kolom ke-	Formula	Nilai
B_{odd}	1	$1+3n+\frac{1}{2}(3n+1)$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
	2	$2n+\frac{1}{2}(n+1)+2n+1$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
	3	$\frac{1}{2}(n+3)+n+1+3n-1$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
$C(i)$	1	$i+1+\left(\frac{1}{2}(3n+1)+i\right)+3n-2i$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
	2	$n+1-i+\left(\frac{1}{2}(3n+1)-i\right)+2n+2i$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
$D(j)$	1	$3n-2j+\left(\frac{1}{2}(3n+1)+j\right)+j+1$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
	2	$2n+2j+\left(\frac{1}{2}(3n+1)-j\right)+n+1-j$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$

Dengan demikian, terbukti bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama dari persegi-panjang yang dibentuk dari penggabungan blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$memiliki sifat persegi-panjang-ajaib.

Kasus I.d.

Akan ditunjukkan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama pada blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$, maupun $D(j)$ akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Agar persegi-panjang tersebut memiliki sifat persegi-panjang-ajaib, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama harus berjumlah

$$l = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{n}{2}(3n+1); \forall i$$

Dengan demikian akan dibuktikan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama dari persegi panjang yang dibentuk dari penggabungan blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$ dan $D(j)$ ialah l.

Untuk membuktikan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama pada persegi-panjang-ajaib yang terbentuk oleh penggabungan blok-pembangun$B, C(i)$dan $D(j)$, maka didefinisikan beberapa hal berikut, yaitu

- Bilangan B_{odd_1}, B_{odd_2} dan B_{odd_3} berturut–turut merepresentasikan nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun B_{odd}
- Bilangan $C_1(i), C_2(i)$ dan $C_3(i)$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga blok-pembangun $C(i)$
- Bilangan $D_1(j), D_2(j)$,dan $D_3(j)$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun $D(j)$
- Bilangan A_{sum_1}, A_{sum_2}dan A_{sum_3} sebagai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama pada matriks A, yaitu berturut – turut $B_{odd_1} + C_1(i) + D_1(j)$, $B_{odd_2} + C_2(i) + D_2(j)$ dan $B_{odd_3} + C_3(i) + D_3(j)$.

Berikut ini diberikan Tabel 3.2 yang merupakan representasi dari penjumlahan setiap elemen yang berada pada baris yang sama pada blok-pembangun $B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$.

Tabel 3.2

Nilai penjumlahan dari setiap baris yang terdapat pada blok-pembangun$B_{odd}, C(i)$, dan $D(j)$.

Blok-pembangun	Baris ke-	Formula	Nilai

B_{odd}	1	$1 + 2n + \frac{1}{2}(n + 3)$	$\frac{1}{2}(5n + 5)$
	2	$3n + \frac{1}{2}(n + 1) + n + 1$	$\frac{1}{2}(9n + 3)$
	3	$\frac{1}{2}(3n + 1) + 2n + 1 + 3n - 1$	$\frac{1}{2}(13n + 1)$
$C(i)$	1	$(i + 1 + n + 1 - i)\left(\frac{1}{4}(n - 5)\right)$	$\frac{1}{4}(n^2 - 3n - 10)$
	2	$\left(\frac{1}{2}(3n + 1) + i + \frac{1}{2}(3n + 1) - i\right)\left(\frac{1}{4}(n - 5)\right)$	$\frac{1}{4}(3n^2 - 14n - 5)$
	3	$(3n - 2i + 2n + 2i)\left(\frac{1}{4}(n - 5)\right)$	$\frac{1}{4}(5n^2 - 25n)$
$D(j)$	1	$(3n - 2j + 2n + 2j)\left(\frac{1}{4}(n - 1)\right)$	$\frac{1}{4}(5n^2 - 5n)$
	2	$\left(\frac{1}{2}(3n + 1) + j + \frac{1}{2}(3n + 1) - j\right)\left(\frac{1}{4}(n - 1)\right)$	$\frac{1}{4}(3n^2 - 2n - 1)$
	3	$(j + 1 + n + 1 - j)\left(\frac{1}{4}(n - 1)\right)$	$\frac{1}{4}(n^2 + n - 2)$

Dengan menggunakan hasil di atas, diperoleh nilai dari A_{sum_1}, A_{sum_2}, dan A_{sum_3}, yang direpresentasikan oleh tabel 3.3 berikut

Tabel 3.3

Nilai penjumlahan dari setiap baris yang terdapat pada blok-pembangun A

Baris ke	Formula	Nilai
1	$\frac{1}{2}(5n + 5) + \frac{1}{4}(n^2 - 3n - 10) + \frac{1}{4}(5n^2 - 5n)$	$\frac{n}{2}(3n + 1) = l$
2	$\frac{1}{2}(9n + 3) + \frac{1}{4}(3n^2 - 14n - 5) + \frac{1}{4}(3n^2 - 2n - 1)$	$\frac{n}{2}(3n + 1) = l$
3	$\frac{1}{2}(13n + 1) + \frac{1}{4}(5n^2 - 25n) + \frac{1}{4}(n^2 + n - 2)$	$\frac{n}{2}(3n + 1) = l$

Berdasarkan tabel 3.3, terlihat bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama dari persegi-panjang yang terbentuk dari penggabungan blok-pembangun $B_{odd}, C(i),$ dan $D(j)$ merupakan penjumlahan-ajaib.

Dengan demikian, berdasarkan pemaparan pada kasus I.a, kasus I.b, kasus I.c, dan kasus I.d, dapat disimpulkan bahwa persegi-panjang A yang terbentuk pada kasus I merupakan persegi-panjang-ajaib.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa persegi-panjang A yang terbentuk pada kasus II yaitu$n \equiv 3(mod\ 4)$ merupakan persegi-panjang-ajaib.

Kasus II. Untuk $n \equiv 3(mod\ 4)$

Pembuktian ini akan dibagi 4 bagian, yaitu pembuktian bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$ dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1, 2, \dots, 3n\}$ muncul tepat satu sekali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus II.a.

Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$ dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain.

Blok pembangun $C(i), D(1)$ dan $D(j)$ menggunakan konstruksi yang sama dengan kasus I dengan $2 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-3)$ dan $\frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3)$.

Selain itu, pandang pula

$$B_{even} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(n+3) \\ 3n & n+1 \\ \frac{1}{2}(3n+1) & 3n-1 \end{pmatrix}$$

dan juga

$$D(1)=\begin{pmatrix} 3n-2 & 2n+2 \\ \frac{1}{2}(3n+1)+1 & \frac{1}{2}(3n+1)-1 \\ 2 & n \end{pmatrix}$$

Untuk $n - 3h = 1$, blok-pembangun F ialah

$$F=\begin{pmatrix} h+1 & 2n+1 & 2n+2h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(3n+1)-h \\ 3n-2h & 2n & n+1-h \end{pmatrix}$$

Karena$n - 3h = 1$, maka diperoleh $h = \frac{1}{3}(n-1)$, sehingga blok-pembangun F menjadi

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(n+2) & 2n+1 & \frac{1}{3}(8n-2) \\ \frac{1}{6}(11n+1) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+5) \\ \frac{1}{3}(7n+2) & 2n & \frac{1}{3}(2n+4) \end{pmatrix}$$

Untuk $n - 3h = 0$, blok-pembangun F ialah

$$F=\begin{pmatrix} h+1 & 2n & 2n+2h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(3n+1)-h \\ 3n-2h & 2n+1 & n+1-h \end{pmatrix}$$

Karena$n - 3h = 0$,maka diperoleh $h = \frac{n}{3}$, sehingga blok-pembangun F menjadi

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(n+3) & 2n & \frac{8n}{3} \\ \frac{1}{6}(11n+3) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+3) \\ \frac{7n}{3} & 2n+1 & \frac{1}{3}(2n+3) \end{pmatrix}$$

Untuk $n - 3h = -1$, blok-pembangun F ialah

$$F = \begin{pmatrix} 3n-2h & 2n+1 & n+1-h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{2}(3n+1)-h \\ h+1 & 2n & 2n+2h \end{pmatrix}$$

karena$n - 3h = -1$, maka diperoleh $h = \frac{1}{3}(n+1)$, sehingga blok-pembangun F menjadi

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(8n-1) & 2n+1 & \frac{2}{3}(n+1) \\ \frac{1}{6}(11n+5) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+1) \\ \frac{1}{3}(n+4) & 2n & \frac{1}{3}(8n+1) \end{pmatrix}$$

Terdapat syarat bahwa $j \neq h$. Andaikan $j = h$, didapat

$$D(h) = \begin{pmatrix} 3n-2h & 2n+2h \\ \frac{1}{2}(3n+1)+h & \frac{1}{2}(3n+1)-h \\ h+1 & n+1-j \end{pmatrix}$$

Akan ditunjukan bahwa baik untuk $n - 3h = 1, n - 3h = 0$, maupun $n - 3h = -1$, elemen pada blok-pembangun $D(h)$ sudah terdapat pada blok-pembangun F.

Pertama, untuk $n - 3h = 1$, diperoleh $h = \frac{1}{3}(n-1)$, sehingga

$$D\left(\frac{1}{3}(n-1)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7n+2) & \frac{1}{3}(8n-2) \\ \frac{1}{6}(11n+1) & \frac{1}{6}(7n+5) \\ \frac{1}{3}(n+2) & \frac{1}{3}(2n+4) \end{pmatrix}$$

Entri – entri di $D\left(\frac{1}{3}(n-1)\right)$ sudah terdapat dalam

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(n+2) & 2n+1 & \frac{1}{3}(8n-2) \\ \frac{1}{6}(11n+1) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+5) \\ \frac{1}{3}(7n+2) & 2n & \frac{1}{3}(2n+4) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, untuk $n-3h=0$, diperoleh $h=\frac{n}{3}$, sehingga

$$D\left(\frac{n}{3}\right)=\begin{pmatrix} \frac{7n}{3} & \frac{8n}{3} \\ \frac{1}{6}(11n+3) & \frac{1}{6}(7n+3) \\ \frac{1}{3}(n+3) & \frac{1}{3}(2n+3) \end{pmatrix}$$

Entri – entri di $D\left(\frac{n}{3}\right)$ sudah terdapat dalam

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(n+3) & 2n & \frac{8n}{3} \\ \frac{1}{6}(11n+3) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+3) \\ \frac{7n}{3} & 2n+1 & \frac{1}{3}(2n+3) \end{pmatrix}$$

Terakhir, untuk $n-3h=-1$, diperoleh $h=\frac{1}{3}(n+1)$, sehingga

$$D\left(\frac{1}{3}(n+1)\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7n-2) & \frac{1}{3}(8n+2) \\ \frac{1}{6}(11n+5) & \frac{1}{6}(7n+1) \\ \frac{1}{3}(n+4) & \frac{2}{3}(n+1) \end{pmatrix}$$

Entri – entri di $D\left(\frac{1}{3}(n+1)\right)$ sudah terdapat dalam

$$F=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7n-2) & 2n+1 & \frac{2}{3}(n+1) \\ \frac{1}{6}(11n+5) & \frac{1}{2}(n+1) & \frac{1}{6}(7n+1) \\ \frac{1}{3}(n+4) & 2n & \frac{1}{3}(8n+2) \end{pmatrix}$$

Hasil diatas kontradiksi dengan persyaratan blok-pembangun D dan F harus berbeda. Sehingga haruslah $j \neq h$.

Karena untuk kasus $n-3h=1, n-3h=0$, maupun $n-3h=-1$, entri-entri dari F memiliki nilai yang sama, maka tanpa mengurangi keumuman, akan ditunjukan untuk $n-3h=1$.

Dengan mengurutkan elemen yang terbentuk pada pemaparan diatas, diperoleh

$$\left\{(B_{even})_{1,1}\right\}=\{1\}$$

$$\left\{d_{3,1}(1)\right\}=\{2\}$$

$$\left\{c_{1,1}(i)|i=2,3,\dots,\frac{1}{4}(n-3)\right\}=\left\{3,4,\dots,\frac{1}{4}(n+1)\right\}$$

$$\left\{d_{3,1}(j)\cup f_{1,1}|\,\tfrac{1}{4}(n+1)\le j\le \tfrac{1}{2}(n-3); j\neq h\right\}=\left\{\tfrac{1}{4}(n+5),\tfrac{1}{4}(n+9),\dots,\tfrac{1}{2}(n-1)\right\}$$

$$\left\{f_{2,2}\right\}=\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}$$

$$\left\{(B_{even})_{1,2}\right\}=\left\{\frac{1}{2}(n+3)\right\}$$

$$\left\{d_{3,2}(j)\cup f_{3,3}|\,\tfrac{1}{4}(n+1)\le j\le \tfrac{1}{2}(n-3); j\neq h\right\}=\left\{\tfrac{1}{2}(n+5),\tfrac{1}{2}(n+7),\dots,\tfrac{1}{4}(3n+3)\right\}$$

$$\left\{c_{1,2}(i)|i=2,3,\dots,\frac{1}{4}(n-3)\right\}=\left\{\frac{1}{4}(3n+7),\frac{1}{4}(3n+11),\dots,n-1\right\}$$

$$\left\{d_{3,2}(1)\right\}=\{n\}$$

$$\left\{(B_{even})_{2,2}\right\}=\{n+1\}$$

$$\left\{d_{2,2}(j) \cup f_{2,3} \middle| \frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3); j \neq h\right\} = \left\{n+2, n+3, \dots, \frac{1}{4}(5n+1)\right\}$$

$$\left\{c_{2,2}(i) \middle| i = 2,3, \dots, \frac{1}{4}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(5n+5), \frac{1}{4}(5n+9), \dots, \frac{1}{2}(3n-3)\right\}$$

$$\left\{d_{2,2}(1)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(3n-1)\right\}$$

$$\{(B_{even})_{3.1}\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+1)\right\}$$

$$\left\{d_{2,1}(1)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+3)\right\}$$

$$\left\{c_{2,1}(i) \middle| i = 2,3, \dots, \frac{1}{4}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+5), \frac{1}{2}(3n+7), \dots, \frac{1}{4}(7n-1)\right\}$$

$$\left\{d_{2,1}(j) \cup f_{2,1} \middle| \frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3); j \neq h\right\} = \left\{\frac{1}{4}(7n+3), \frac{1}{4}(7n+7), \dots, 2n-1\right\}$$

$$\left\{f_{3,2}\right\} = \{2n\}$$

$$\left\{f_{1,2}\right\} = \{2n+1\}$$

$$\left\{d_{1,2}(1)\right\} = \{2n+2\}$$

$$\left\{d_{1,1}(j) \cup f_{3,1} \middle| \frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3); j \neq h\right\} = \left\{2n+3, 2n+5, \dots, \frac{1}{2}(5n-1)\right\}$$

$$\left\{c_{3,2}(i) \middle| i = 2,3, \dots, \frac{1}{4}(n-3)\right\} = \left\{2n+4, 2n+6, \dots, \frac{1}{2}(5n-3)\right\}$$

$$\left\{d_{1,2}(j) \cup f_{1,3} \middle| \frac{1}{4}(n+1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n-3); j \neq h\right\} = \left\{\frac{1}{2}(5n+1), \frac{1}{2}(5n+5), \dots, 3n-3\right\}$$

$$\left\{c_{3,1}(i) \middle| i = 2,3, \dots, \frac{1}{4}(n-3)\right\} = \left\{\frac{1}{2}(5n+3), \frac{1}{2}(5n+7), \dots, 3n-4\right\}$$

$$\left\{d_{1,1}(1)\right\} = \{3n-2\}$$

$$\left\{(B_{even})_{3,2}\right\} = \{3n-1\}.$$

$\{(B_{even})_{2,1}\} = \{3n\}$

Maka, baik untuk $n - 3h = 1; n - 3h = 0$; maupun $n - 3h = -1$; dengan $p = 1, 2, 3;\ p' = 1, 2, 3;\ p'' = 1, 2, 3;\ p''' = 1, 2, 3;\ q = 1, 2; q' = 1, 2; q'' = 1, 2; q''' = 1, 2, 3;\ r = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3;\ 2 \leq i \leq \frac{1}{4}(n - 3)$ dan $\frac{1}{4}(n + 1) \leq j \leq \frac{1}{2}(n - 3)$; diperoleh

$$C_{p,q}(i) \cap (B_{even})_{p',q'} \cap D_{p'',q''}(1) \cap D_{p''',q'''}(j) \cap F_{r,s} = \emptyset$$

Dengan demikian, terbukti bahwa setiap elemen yang terdapat pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$ dan $D(j)$ saling berbeda satu sama lain.

Kasus II.b.

Akan ditunjukkan bahwa bilangan pada $\{1, 2, \dots, 3n\}$ muncul tepat satu sekali.

berdasarkan pemaparan pada kasus II.a, terlihat bahwa baik untuk $n - 3h = 1, n - 3h = 0$, maupun $n - 3h = -1$, dengan $p = 1, 2, 3; p' = 1, 2, 3; p'' = 1, 2, 3; p''' = 1, 2, 3;\ q = 1, 2; q' = 1, 2; q'' = 1, 2; q''' = 1, 2, 3;\ r = 1, 2, 3$; dan $s = 1, 2, 3$; diperoleh

$$C_{p,q}(i) \cup (B_{even})_{p',q'} \cup D_{p'',q''}(1) \cup D_{p''',q'''}(j) \cup F_{r,s} = \{1,2, \dots ,3n\}$$

Kasus II.c.

Akan ditunjukkan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$, maupun $D(j)$ akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Untuk pembuktian berdasarkan kolom–kolom dari persegi-panjang A, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada kolom yang sama harus berjumlah

$$k = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \frac{3}{2}(3n + 1); \forall j$$

Karena tiap–tiap kolom dari $B_{even}, F, D(1), C(i)$, dan $D(j)$ tidak saling bergantung, maka dapat dibuktikan secara terpisah bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

Berikut ini akan diberikan Tabel 3.4 yang merepresentasikan nilai penjumlahan dari elemen yang terdapat pada kolom yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$, dan $D(j)$.

Tabel 3.4

Nilai penjumlahan dari elemen yang terdapat pada kolom yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i)$, dan $D(j)$.

Blok-pembangun	Kolom ke-	Formula	Nilai
B_{even}	1	$1 + 3n + \frac{1}{2}(3n+1)$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
	2	$\frac{1}{2}(n+3) + n + 1 + 3n - 1$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
F	1	$h + 1 + \frac{1}{2}(3n+1) + h + 3n - 2h$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
	2	$2n + 1 + \frac{1}{2}(n+1) + 2n$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
	3	$2n + 2h + \frac{1}{2}(3n+1) - h + n + 1 - h$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
$D(1)$	1	$3n - 2 + \frac{1}{2}(3n+1) + 1 + 2$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
	2	$2n + 2 + \frac{1}{2}(3n+1) - 1 + n$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
$C(i)$	1	$i + 1 + \left(\frac{1}{2}(3n+1) + i\right) + 3n - 2i$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$
	2	$n + 1 - i + \left(\frac{1}{2}(3n+1) - i\right) + 2n + 2i$	$\frac{3}{2}(3n+1) = k$

$D(j)$	1	$3n-2j+\left(\frac{1}{2}(3n+1)+j\right)+j+1$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$
	2	$2n+2j+\left(\frac{1}{2}(3n+1)-j\right)+n+1-j$	$\frac{3}{2}(3n+1)=k$

Dengan demikian, terbukti bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama dari persegi-panjang A yang dibentuk dari penggabungan blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i),$ dan $D(j)$ membentuk sifat persegi-panjang-ajaib.

Kasus II.d.

Akan ditunjukkan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i),$ maupun $D(j)$ akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Untuk membuktikan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama pada persegi-panjang yang terbentuk oleh penggabungan blok-pembangun $B_{even}, F, D(1),\ C(i)$ dan $D(j)$, maka didefinisikan beberapa hal berikut,yaitu

- Bilangan B_{even_1}, B_{even_2} dan B_{even_3} berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun B_{even};
- Bilangan $F_1, F_2,$ dan F_3 berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun F;
- Bilangan $D_1(1), D_2(1),$ dan $D_3(1)$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun $D(1)$;

- Bilangan $C_1(i), C_2(i)$ dan $C_3(i)$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun $C(i)$;
- Bilangan $D_1(j), D_2(j)$,dan $D_3(j)$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga dari blok-pembangun $D(j)$; dan
- Bilangan A_{sum_1}, A_{sum_2}dan A_{sum_3} sebagai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama, yaitu berturut – turut $B_{even_1} + F_1 + D_1(1) + C_1(i) + D_1(j)$, $B_{even_2} + F_2 + D_2(1) + C_2(i) + D_2(j)$ dan $B_{even_3} + F_3 + D_3(1) + C_3(i) + D_3(j)$.

Dengan demikian, diperoleh Tabel 3.5 yang merepresentasikan nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, D(1), C(i)$, dan $D(j)$.

Tabel 3.5

Nilai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada baris yang sama pada blok-pembangun $B_{even}, D(1), C(i)$, dan $D(j)$

Blok-pembangun	Baris ke-	Formula	Nilai
B_{even}	1	$1 + \frac{1}{2}(n + 3)$	$\frac{1}{2}(n + 5)$
	2	$3n + n + 1$	$4n + 1$
	3	$\frac{1}{2}(3n + 1) + 3n - 1$	$\frac{1}{2}(9n - 1)$
$D(1)$	1	$3n - 2 + 2n + 2$	$5n$
	2	$\frac{1}{2}(3n + 1) + 1 + \frac{1}{2}(3n + 1) - 1$	$3n + 1$
	3	$2 + n$	$n + 2$
$C(i)$	1	$(i + 1 + n + 1 - i)\left(\frac{1}{4}(n - 7)\right)$	$\frac{1}{4}(n^2 - 5n - 14)$
	2	$\left(\frac{1}{2}(3n + 1) + i + \frac{1}{2}(3n + 1) -\right.$	$\frac{1}{4}(3n^2 - 20n - 7)$

		$i)\Big(\frac{1}{4}(n-7)\Big)$	
	3	$(3n-2i+2n+2i)\Big(\frac{1}{4}(n-7)\Big)$	$\frac{1}{4}(5n^2-35n)$
$D(j)$	1	$(3n-2j+2n+2j)\Big(\frac{1}{4}(n-7)\Big)$	$\frac{1}{4}(5n^2-35n)$
	2	$\Big(\frac{1}{2}(3n+1)+j+\frac{1}{2}(3n+1)-$ $j\Big)\Big(\frac{1}{4}(n-7)\Big)$	$\frac{1}{4}(3n^2-20n-7)$
	3	$(j+1+n+1-j)\Big(\frac{1}{4}(n-7)\Big)$	$\frac{1}{4}(n^2-5n-14)$

Selanjutnya, diberikan Tabel 3.6 yang memberikan nilai penjumlahan dari blok-pembangun F untuk kasus $n-3h=1, n-3h=0$, dan $n-3h=-1$.

Tabel 3.6

Nilai penjumlahan dari blok-pembangun F untuk kasus $n-3h=1, n-3h=0$, dan $n-3h=-1$

kasus	Baris ke-	Formula	Nilai
$n-3h=1$	1	$h+1+2n+1+2n+2h$	$4n+3h+2$
	2	$\frac{1}{2}(3n+1)+h+\frac{1}{2}(n+1)+$ $\frac{1}{2}(3n+1)-h$	$\frac{1}{2}(7n+3)$
	3	$3n-2h+2n+n+1-h$	$6n-3h+1$
$n-3h=0$	1	$h+1+2n+2n+2h$	$4n+3h+2$
	2	$\frac{1}{2}(3n+1)+h+\frac{1}{2}(n+1)+$ $\frac{1}{2}(3n+1)-h$	$\frac{1}{2}(7n+3)$
	3	$3n-2h+2n+1+n+1-h$	$6n-3h+2$
$n-3h=-1$	1	$3n-2h+2n+1+n+1-h$	$6n-3h+2$
	2	$\frac{1}{2}(3n+1)+h+\frac{1}{2}(n+1)+$	$\frac{1}{2}(7n+3)$

		$\frac{1}{2}(3n+1)-h$	
	3	$h+1+2n+2n+2h$	$4n+3h+1$

Telah diketahui bahwa

$$A_{sum_1} = B_{even_1} + F_1 + D_1(1) + C_1(i) + D_1(j)$$

$$A_{sum_2} = B_{even_2} + F_2 + D_2(1) + C_2(i) + D_2(j)$$

$$A_{sum_3} = B_{even_3} + F_3 + D_3(1) + C_3(i) + D_3(j)$$

Maka dengan bantuan tabel 3.5 dan tabel 3.6, diperoleh tabel 3.7 yang merepresentasikan nilai dari A_{sum_1}, A_{sum_2}, dan A_{sum_3}.

Tabel 3.7

Nilai dari A_{sum_1}, A_{sum_2}, dan A_{sum_3}

Kasus	Nilai dari	Formula	Nilai
$n-3h=1$	A_{sum_1}	$\frac{1}{2}(\mathrm{n}+5)+4\mathrm{n}+3\mathrm{h}+2+5\mathrm{n}+\frac{1}{4}(\mathrm{n}^2-5\mathrm{n}-14)+\frac{1}{4}(5\mathrm{n}^2-35\mathrm{n})$	$\frac{1}{4}(6\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+4+12\mathrm{h})$
	A_{sum_2}	$4n+1+\frac{1}{2}(7n+3)+3n+1+\frac{1}{4}(3n^2-20n-7)+\frac{1}{4}(3n^2-20n-7)$	$\frac{n}{2}(3n+1)$
	A_{sum_3}	$\frac{1}{2}(9n-1)+6n-3h+1+n+2+\frac{1}{4}(5n^2-35n)+\frac{1}{4}(n^2-5n-14)$	$\frac{1}{4}(6n^2+6n-4-12h)$
$n-3h=0$	A_{sum_1}	$\frac{1}{2}(n+5)+4n+3h+1+5n+\frac{1}{4}(n^2-5n-14)+\frac{1}{4}(5n^2-35n)$	$\frac{1}{4}(6n^2-2n+12h)$
	A_{sum_2}	$4n+1+\frac{1}{2}(7n+3)+3n+1+\frac{1}{4}(3n^2-20n-7)+\frac{1}{4}(3n^2-$	$\frac{n}{2}(3n+1)$

		$20n-7)$	
	A_{sum_3}	$\frac{1}{2}(9n-1)+6n-3h+2+n+2+\frac{1}{4}(5n^2-35n)+\frac{1}{4}(n^2-5n-14)$	$\frac{1}{4}(6n^2+6n-12h)$
$n-3h=-1$	A_{sum_1}	$\frac{1}{2}(n+5)+6n-3h+2+5n+\frac{1}{4}(n^2-5n-14)\ +\ \frac{1}{4}(5n^2-35n)$	$\frac{1}{4}(6n^2+6n+4-12h)$
	A_{sum_2}	$\frac{1}{4}(6n^2+2n)$	$\frac{n}{2}(3n+1)$
	A_{sum_3}	$\frac{1}{2}(9n-1)+4n+3h+1+n+2+\frac{1}{4}(5n^2-35n)+\frac{1}{4}(n^2-5n-14)$	$\frac{1}{4}(6n^2-2n-4+12h)$

Karena pada kasus $n-3h=1$ diperoleh $3h=n-1$, kasus $n-3h=1$ diperoleh $3h=n-1$, dan kasus $n-3h=-1$ diperoleh $3h=n+1$, maka dengan mensubstitusikan nilai h untuk setiap kasus yang ada, akan diperoleh Tabel 3.8 yang merepresentasikan nilai A_{sum_1}, A_{sum_2}, dan A_{sum_3} setelah menukar nilai dari $3h$ untuk kasus yang bersesuaian.

Tabel 3.8

Nilai A_{sum_1}, A_{sum_2}, dan A_{sum_3} setelah menukar nilai dari $3h$ untuk kasus yang bersesuaian

Kasus	Nilai dari	Nilai	penukaran	Nilai akhir
$n-3h=1$	A_{sum_1}	$\frac{1}{4}(6n^2-2n+4+12h)$	$3h=n-1$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
	A_{sum_2}	$\frac{n}{2}(3n+1)$	$-$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
	A_{sum_3}	$\frac{1}{4}(6n^2+6n-4-12h)$	$3h=n-1$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
$n-3h=0$	A_{sum_1}	$\frac{1}{4}(6n^2-2n+12h)$	$3h=n$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
	A_{sum_2}	$\frac{n}{2}(3n+1)$	$-$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$

	A_{sum_3}	$\frac{1}{4}(6n^2+6n-12h)$	$3h=n$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
$n-3h=-1$	A_{sum_1}	$\frac{1}{4}(6n^2+6n+4-12h)$	$3h=n+1$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
	A_{sum_2}	$\frac{n}{2}(3n+1)$	$-$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$
	A_{sum_3}	$\frac{1}{4}(6n^2-2n-4+12h)$	$3h=n+1$	$\frac{n}{2}(3n+1)=l$

Berdasarkan Tabel 3.8, terlihat bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama dari persegi-panjang A yang terbentuk dari penggabungan blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(i),$ dan $D(j)$ membentuk sifat persegi-panjang-ajaib.

Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa konstruksi yang sudah dipaparkan pada kasus II akan menghasilkan persegi-panjang-ajaib.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa konstruksi yang sudah dipaparkan baik untuk kasus I maupun kasus II akan menghasilkan persegi-panjang-ajaib. ■

CONTOH

Akan dibuat suatu persegi-panjang-ajaib berukuran 3 × 13. Karena $n = 13$, maka $n \equiv 1(mod\ 4)$, sehingga

=

$$B_{odd} = \begin{pmatrix} 1 & 2(13) & \frac{1}{2}(13+3) \\ 3(13) & \frac{1}{2}(13+1) & 13+1 \\ \frac{1}{2}(3(13)+1) & 2(13)+1 & 3(13)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 8 \\ 39 & 7 & 14 \\ 20 & 27 & 38 \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, karena $1 \le i \le 2$, dan $3 \le j \le 5$, maka diperoleh blok-pembangun $C(1), C(2), D(3), D(4),$ dan $D(5)$, yaitu

$$C(1)=\begin{pmatrix} (1)+1 & (13)+1-(1) \\ \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)+(1) & \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)-(1) \\ 3(13)-2(1) & 2(13)+2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 21 & 19 \\ 37 & 28 \end{pmatrix}$$

$$C(2)=\begin{pmatrix} (2)+1 & 13+1-(2) \\ \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)+(2) & \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)-(2) \\ 3(13)-2(2) & 2(13)+2(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 22 & 18 \\ 35 & 30 \end{pmatrix}$$

$$D(3)=\begin{pmatrix} 3(13)-2(3) & 2(13)+2(3) \\ \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)+(3) & \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)-(3) \\ (3)+1 & (13)+1-(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & 32 \\ 23 & 17 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D(4)=\begin{pmatrix} 3(13)-2(4) & 2(13)+2(4) \\ \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)+(4) & \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)-(4) \\ (4)+1 & (13)+1-(4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31 & 34 \\ 24 & 16 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D(5)=\begin{pmatrix} 3(13)-2(5) & 2(13)+2(5) \\ \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)+(5) & \frac{1}{2}\big(3(13)+1\big)-(5) \\ (5)+1 & (13)+1-(5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29 & 36 \\ 25 & 15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, persegi-panjang ajaib A diperoleh dengan menggabungkan blok-pembangun $B_{odd}, C(1), C(2), D(3), D(4),$ dan $D(5)$, yaitu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 26 & 8 & \vdots & 2 & 13 & \vdots & 3 & 12 & \vdots & 33 & 32 & \vdots & 31 & 34 & \vdots & 29 & 36 \\ 39 & 7 & 14 & \vdots & 21 & 19 & \vdots & 22 & 18 & \vdots & 23 & 17 & \vdots & 24 & 16 & \vdots & 25 & 15 \\ 20 & 27 & 38 & \vdots & 37 & 28 & \vdots & 35 & 30 & \vdots & 4 & 11 & \vdots & 5 & 10 & \vdots & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Dari entri-entri matriks di atas dapat terlihat bahwa hasil penjumlahan entri setiap baris ialah $l = 260$ dan hasil penjumlahan entri setiap kolom ialah $k = 60$.

CONTOH

Akan dibuat suatu persegi-panjang-ajaib berukuran 3×15. Karena $n = 15$, maka $n \equiv 3(mod\ 4)$, sehingga diperoleh

$$B_{even} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(\left(15\right)+3\right) \\ 3\left(15\right) & \left(15\right)+1 \\ \frac{1}{2}\left(3\left(15\right)+1\right) & 3\left(15\right)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 45 & 16 \\ 23 & 44 \end{pmatrix}$$

Kemudian, diperoleh matriks $D(1)$, yaitu

$$D(1) = \begin{pmatrix} 3(15)-2(1) & \frac{1}{2}(15+3) \\ \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)+1 & \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)-1 \\ 1+1 & 15+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 32 \\ 24 & 22 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Karena untuk $h = 5$ berlaku $n - 3h = 0$, pilih matriks F dengan ketentuan $n - 3h = 0$, yaitu

$$F = \begin{pmatrix} 5+1 & 2\left(15\right) & 2\left(15\right)+2\left(5\right) \\ \frac{1}{2}\left(3\left(15\right)+1\right)+5 & \frac{1}{2}\left(15+1\right) & \frac{1}{2}\left(3\left(15\right)+1\right)-+5 \\ 3\left(15\right)-2\left(5\right) & 2\left(15\right)+1 & 15+1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 & 40 \\ 28 & 8 & 18 \\ 35 & 31 & 11 \end{pmatrix}$$

lebih lanjut, karena $2 \leq i \leq 3$, dan $4 \leq j \leq 6$, dengan $j \neq h = 5$, maka diperoleh blok-pembangun $C(2), C(3), D(4)$, dan $D(6)$, yaitu

$$C\left(2\right) = \begin{pmatrix} 2+1 & 15+1-2 \\ \frac{1}{2}\left(3\left(15\right)+1\right)+2 & \frac{1}{2}\left(3\left(15\right)+1\right)-2 \\ 3\left(15\right)-2\left(2\right) & 2\left(15\right)+2\left(2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 25 & 21 \\ 41 & 34 \end{pmatrix}$$

$$C(3)=\begin{pmatrix} 3+1 & 15+1-3 \\ \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)+3 & \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)-3 \\ 3(15)-2(3) & 2(15)+2(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 26 & 20 \\ 39 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D(4)=\begin{pmatrix} 3(15)-2(4) & 2(15)+2(4) \\ \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)+4 & \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)-4 \\ 4+1 & 15+1-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 38 \\ 27 & 19 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D(6)=\begin{pmatrix} 3(15)-2(6) & 2(15)+2(6) \\ \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)+6 & \frac{1}{2}\left(3(15)+1\right)+6 \\ 6+1 & 15+1-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & 42 \\ 29 & 17 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, persegi-panjang-ajaib A diperoleh dengan menggabungkan blok-pembangun $B_{even}, F, D(1), C(2), C(3), D(4)$,dan $D(6)$, yaitu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & \vdots & 6 & 30 & 40 & \vdots & 43 & 32 & \vdots & 3 & 14 & \vdots & 4 & 13 & \vdots & 37 & 38 & \vdots & 33 & 42 \\ 45 & 16 & \vdots & 28 & 8 & 18 & \vdots & 24 & 22 & \vdots & 25 & 21 & \vdots & 26 & 20 & \vdots & 27 & 19 & \vdots & 29 & 17 \\ 23 & 44 & \vdots & 35 & 31 & 11 & \vdots & 2 & 15 & \vdots & 41 & 34 & \vdots & 39 & 36 & \vdots & 5 & 12 & \vdots & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Dari entri-entri matriks di atas dapat terlihat bahwa hasil penjumlahan entri setiap baris ialah $l = 345$ dan hasil penjumlahan entri setiap kolom ialah $k = 69$.

3.1.2 Metode permutasi-himpunan

Pada subbagian ini akan dibahas mengenai pembentukan persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$ dengan $m = 3$ dan $n \neq 0(mod3)$.

Pertama, didefinisikan terlebih dahulu matriks S sebagai berikut

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n' & n'+1 & n'+2 & n'+3 & \dots & n \\ n' & n'+1 & n'+2 & \dots & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n'-1 \\ n & n-2 & n-4 & \dots & 1 & n-1 & n-3 & n-5 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

dimana $n' = \frac{1}{2}(n+1)$.

Terlihat bahwa baris-baris dari matriks S merupakan permutasi dari himpunan $\{1,2,3,\dots,n\}$ dan penjumlahan entri-entri kolom pada matriks S ialah $\frac{3}{2}(n+1)$.

Selanjutnya, akan diberikan konstruksi untuk mendapatkan persegi-panjang-ajaib H.

Teorema 3.1.2 (Barui, 2006)

Terdapat persegi-panjang-ajaib H berukuran $3 \times n$ dengan $n \neq 0 \ (mod\ 3)$.

Bukti

Definisikan matriks $H = (h_{ij})$ dimana $h_{ij} = (s_{ij} - 1) * m + i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, S = (s_{ij})$, dengan S didefinisikan seperti di atas.

Lakukan pertukaran entri-entri pada H seperti yang diberikan pada Tabel 3.9.

Tabel 3.9

Aturan penukaran untuk kasus yang ada

Kasus awal	Kasus tambahan	Penukaran
$n \equiv 1(mod\ 6)$	$n \equiv 1(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(n-1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n-1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(n+5)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+5)}{3}}$
	$n \equiv 3(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(n-1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n-1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(n+5)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+5)}{3}}$

		$h_{1,\frac{(n+2)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{2(n+2)}{3}}$
	$n \equiv 5(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}$
	$n \equiv 7(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(n+2)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+2)}{3}}$
$n \equiv 5(mod\ 6)$	$n \equiv 1(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(2n-1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n-1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(2n+5)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+5)}{3}}$
	$n \equiv 3(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(2n-1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n-1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{(2n+5)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(2n+5)}{3}}$
		$h_{1,\frac{2(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{2(n+1)}{3}}$
	$n \equiv 5(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{3}}$
	$n \equiv 7(mod\ 8)$	$h_{1,\frac{(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{3}}$
		$h_{1,\frac{2(n+1)}{3}}$ dengan $h_{3,\frac{2(n+1)}{3}}$

Untuk persegi-panjang H dengan nilai n yang cukup besar, diperlukan suatu penukaran tambahan. Oleh karena itu, didefinisikan suatu bilangan bulat y dengan formula tertentu, sehingga diperoleh persegi-panjang-ajaib yang diinginkan. Tabel 3.10 memberikan penukaran yang dibutuhkan sesuai dengan formula dari y untuk kasus $n \equiv 1(mod\ 6)$ dan $n \equiv 5(mod\ 6)$.

Tabel 3.10

Penukaran tambahan untuk suatu bilangan bulat n

kasus	Formula y	Aturan penukaran (dengan $1 \leq j \leq y$)
$n \equiv 1(mod\ 6)$	$y = \frac{n-1}{8}$	$h_{1,j}$ dengan $h_{3,j}$
	$y = \frac{n-3}{8}$	$h_{1,\frac{(n+1)}{2}+j}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{2}+j}$
	$y = \frac{n-5}{8}$	$h_{1,\frac{(5n+7)}{6}-j}$ dengan $h_{3,\frac{(5n+7)}{6}-j}$

	$y = \frac{n-7}{8}$	$h_{1,(n+1)-j}$ dengan $h_{3,(n+1)-j}$
$n \equiv 5(mod\ 6)$	$y = \frac{n-1}{8}$	$h_{1,j}$ dengan $h_{3,j}$
	$y = \frac{n-3}{8}$	$h_{1,\frac{(n+1)}{6}+j}$ dengan $h_{3,\frac{(n+1)}{6}+j}$
	$y = \frac{n-5}{8}$	$h_{1,\frac{(n+3)}{2}-j}$ dengan $h_{3,\frac{(n+3)}{2}}$
	$y = \frac{n-7}{8}$	$h_{1,(n+1)-j}$ dengan $h_{3,(n+1)-j}$

Pembuktian Teorema 3.2 akan dibagi menjadi 4 bagian, yaitu pembuktian bahwa setiap elemen yang terdapat pada h_{ij} saling berbeda satu sama lain, setiap bilangan yang terdapat pada himpunan $\{1,2,\ldots,3n\}$ akan muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

a. Akan ditunjukan bahwa setiap elemen yang terdapat pada h_{ij} saling berbeda satu sama lain.

   Misalkan S adalah sebagai berikut

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n' & n'+1 & \ldots & n-1 & n \\ n' & n'+1 & \ldots & n & 1 & \ldots & n'-2 & n'-1 \\ n & n-2 & \ldots & 1 & n-1 & \ldots & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{ij} = \left(\left(g_{ij}\right) - (1)_{(3\times n)}\right) * m + i$$

$$H = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n' & n'+1 & \ldots & n-1 & n \\ n' & n'+1 & \ldots & n & 1 & \ldots & n'-2 & n'-1 \\ n & n-2 & \ldots & 1 & n-1 & \ldots & 4 & 2 \end{pmatrix} - (1)_{(3\times n)} \right) * 3$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & \ldots & 3 & 3 & \ldots & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \ldots & 3n'-2 & 3n'+1 & \ldots & 3n-5 & 3n-2 \\ 3n'-1 & 3n'+2 & \ldots & 3n-1 & 2 & \ldots & 3n'-7 & 3n'-4 \\ 3n & 3n-6 & \ldots & 3 & 3n-3 & \ldots & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa ketiga baris pada matriks H membentuk barisan-barisan, yaitu

$$\left\{h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{1,n}\right\} = \{1,4,\dots,3n-2\}$$

$$\left\{h_{2,\frac{1}{2}(n+3)}, h_{2,\frac{1}{2}(n+5)}, \dots, h_{2,n}\right\} = \left\{2,5,\dots,\frac{1}{2}(3n-5)\right\}$$

$$\left\{h_{2,1}, h_{2,2}, \dots, h_{2,\frac{1}{2}(n+1)}\right\} = \left\{\frac{1}{2}(3n+1), \frac{1}{2}(3n+7), \dots, 3n-1\right\}$$

$$\left\{h_{3,\frac{1}{2}(n+1)}, h_{3,\frac{1}{2}(n-1)}, \dots, h_{3,1}\right\} = \{3,9,\dots,3n\}$$

$$\left\{h_{3,n}, h_{3,n-1}, \dots, h_{3,\frac{1}{2}(n+3)}\right\} = \{6,12,\dots,3n-3\}$$

Maka terlihat bahwa irisan dari ketiga baris tersebut ialah $\emptyset$, sehingga terbukti bahwa setiap bilangan pada h_{ij} akan saling berbeda satu sama lain.

b. Setiap bilangan yang terdapat pada himpunan $\{1,2,\dots,3n\}$ akan muncul tepat satu kali.

Berdasarkan pemaparan pada butir a, terlihat bahwa gabungan dari ketiga baris tersebut merupakan himpunan $\{1,2,\dots,3n\}$.

c. Nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

Agar persegi-panjang H memiliki sifat persegi-panjang-ajaib, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama harus bernilai

$$k = \frac{3}{2}(1+3n)$$

Definisikan $\sum k_i$ sebagai penjumlahan setiap elemen yang terdapat pada kolom ke-i. Maka, nilai dari $\sum k_i$ harus sama dengan k, yaitu $\sum k_i = k = \frac{3}{2}(1+3n)$.

Perhatikan matriks H berikut

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \dots & 3n'-2 & 3n'+1 & \dots & 3n-5 & 3n-2 \\ 3n'-1 & 3n'+2 & \dots & 3n-1 & 2 & \dots & 3n'-7 & 3n'-4 \\ 3n & 3n-6 & \dots & 3 & 3n-3 & \dots & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Pada matriks di atas, terlihat bahwa elemen pada baris pertama, baris kedua, maupun baris ketiga akan membentuk dua barisan aritmatika, yaitu pada entri kolom pertamasampai entri kolom ke-$\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)$, dan entri kolom ke-$\left(\frac{1}{2}(n+3)\right)$ sampai entri kolom ke-n.

Berikut ini diberikan Tabel 3.11 yang merepresentasikan elemen pada h_{ij} dengan $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1)$.

Tabel 3.11

Representasi dari elemen pada matriks H

		Kolom ke-						
		1	2	3	$\cdots$	$\frac{1}{2}(n-3)$	$\frac{1}{2}(n-1)$	$\frac{1}{2}(n+1)$
Baris ke-	1	1	4	7	$\cdots$	$\frac{1}{2}(3n-13)$	$\frac{1}{2}(3n-7)$	$\frac{1}{2}(3n-1)$
	2	$\frac{1}{2}(3n+1)$	$\frac{1}{2}(3n+7)$	$\frac{1}{2}(3n+13)$	$\cdots$	$3n-7$	$3n-4$	$3n-1$
	3	$3n$	$3n-6$	$3n-12$	...	15	9	3

- Untuk kolom ke-i dengan $1 \leq i \leq \frac{1}{2}(n+1)$, diperoleh

  $h_{1,1} = 1$, dan $h_{1,i} = h_{1,(i-1)} + 3$

  $h_{2,1} = 3n' - 1$, dan $h_{2,i} = h_{2,(i-1)} + 3$

  $h_{3,1} = 3n$, dan $h_{3,i} = h_{3,(i-1)} - 6$

Lebih lanjut

$$\sum k_i = h_{1,(i-1)} + 3 + h_{2,(i-1)} + 3 + h_{3,(i-1)} - 6$$

$$= h_{1,(i-1)} + h_{2,(i-1)} + h_{3,(i-1)}$$

$$= h_{1,1} + h_{2,1} + h_{3,1}$$

$$= 1 + 3n' - 1 + 3n$$

$$= 3n' + 3n$$

$$= \frac{3}{2}(1+3n)$$

$$= k$$

Berikut ini diberikan Tabel 3.12 yang merepresentasikan elemen pada H dengan $i = 1, 2, 3$ dan $j = \frac{1}{2}(n+3), \frac{1}{2}(n+5), \dots, n$.

Tabel 3.12

Representasi elemen pada H untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = \frac{1}{2}(n+3),\ \frac{1}{2}(n+5), \dots, n$

		Kolom ke-						
		$\frac{1}{2}(n+3)$	$\frac{1}{2}(n+5)$	$\frac{1}{2}(n+7)$	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$
Baris ke-	1	$\frac{1}{2}(3n+5)$	$\frac{1}{2}(3n+11)$	$\frac{1}{2}(3n+17)$	…	$3n-8$	$3n-5$	$3n-2$
	2	$\frac{1}{2}(3n+1)$	$\frac{1}{2}(3n+7)$	$\frac{1}{2}(3n+13)$	…	$\frac{1}{2}(3n-17)$	$\frac{1}{2}(3n-11)$	$\frac{1}{2}(3n-5)$
	3	$3n-3$	$3n-9$	$3n-15$	…	18	12	6

- Untuk kolom ke-i dengan $\frac{1}{2}(n+3) \leq i \leq n$, diperoleh

  $h_{1,(n'+1)} = 3n' + 1$, dan $h_{1,i} = h_{1,(i-1)} + 3$

  $h_{2,(n'+1)} = 2$, dan $h_{2,i} = h_{2,(i-1)} + 3$

  $h_{3,(n'+1)} = 3n - 3$, dan $h_{3,i} = h_{3,(i-1)} - 6$

  Lebih lanjut

  $$\sum k_i = h_{1,i} + h_{2,i} + h_{3,i}$$

  $$= h_{1,(i-1)} + 3 + h_{2,(i-1)} + 3 + h_{3,(i-1)} - 6$$

  $$= h_{1,(i-1)} + h_{2,(i-1\,)} + h_{3,(i-1)}$$

  $$= h_{1,(n'+1)} + h_{2,(n'+1)} + h_{3,(n'+1)}$$

$$= 3n' + 1 + 2 + 3n - 3$$

$$= 3n' + 3n$$

$$= \frac{3}{2}(1 + 3n)$$

$$= k$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

d. Nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Misalkan $\sum b_1, \sum b_2$, dan $\sum b_3$ berturut – turut merepresentasikan penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga. Karena baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga membentuk barisan aritmatika, maka

$$\sum b_1 = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2) = \frac{n}{2}(1 + 3n) - n$$

$$\sum b_2 = \frac{n}{2}(2 + 3n - 1) = \frac{n}{2}(1 + 3n)$$

$$\sum b_3 = \frac{n}{2}(3 + 3n) = \frac{n}{2}(1 + 3n) + n$$

Dengan demikian , terlihat bahwa diperlukan suatu penukaran elemen pada baris pertama dengan elemen pada baris ketiga.

Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa pertukaran elemen yang dipaparkan akan memberikan persegi-panjang-ajaib yang diinginkan.

Dengan mengunakan cara yang serupa dan tanpa mengurangi keumuman, akan dibuktikan bahwa untuk $n \equiv 1(mod\ 6)$ dengan kasus $n \equiv 7(mod\ 8)$, maka pertukaran elemen yang dipaparkan akan memberikan persegi-panjang-ajaib yang diinginkan.

Berdasarkan matriks H terlihat bahwa

Nilai dari $h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}$ ialah $2n-1$

Nilai dari $h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}$ ialah $2n+4$

Nilai dari $h_{1,\frac{(n+2)}{3}}$ ialah n

Nilai dari $h_{3,\frac{(n+2)}{3}}$ ialah $n+2$

Lalu, dengan $y=\frac{n-7}{8}$ dan $1\leq j\leq y$, terlihat pula bahwa

Nilai dari $h_{1,j}$ ialah $\frac{1}{128}(3n^2-50n+203)$

Nilai dari $h_{3,j}$ ialah $\frac{1}{64}(21n^2-102n-187)$

Nilai dari $h_{1,\frac{(n+1)}{2}+j}$ ialah $\frac{1}{128}(27n^2-194n+35)$

Nilai dari $h_{3,\frac{(n+1)}{2}+j}$ ialah $\frac{1}{64}(21n^2-126n-147)$

Nilai dari $h_{1,\frac{(5n+7)}{6}-j}$ ialah $\frac{1}{128}(37n^2-238n-147)$

Nilai dari $h_{3,\frac{(5n+7)}{6}-j}$ ialah $\frac{1}{64}(11n^2-82n+35)$

Nilai dari $h_{1,(n+1)-j}$ ialah $\frac{1}{128}(45n^2-302n-91)$

Nilai dari $h_{3,(n+1)-j}$ ialah $\frac{1}{64}(3n^2-18n-21)$

Dengan demikian, nilai penjumlahan elemen pada baris pertama menjadi

$$\sum b_1=\frac{n}{2}(1+3n)-n-\left(h_{1,\frac{(2n+1)}{3}}+h_{1,\frac{(n+2)}{3}}+h_{1,j}+h_{1,\frac{(n+1)}{2}+j}+\right.$$
$$\left.h_{1,\frac{(5n+7)}{6}-j}+h_{1,(n+1)-j}\right)+\left(h_{3,\frac{(2n+1)}{3}}+h_{3,\frac{(n+2)}{3}}+h_{3,j}+h_{3,\frac{(n+1)}{2}+j}+\right.$$
$$\left.h_{3,\frac{(5n+7)}{6}-j}+h_{3,(n+1)-j}\right)$$

$$= \frac{n}{2}(1+3n) - n - \Big(2n - 1 + n + \frac{1}{128}(3n^2 - 50n + 203) +$$
$$\frac{1}{128}(3n^2 - 50n + 203) + \frac{1}{128}(37n^2 - 238n - 147) +$$
$$\frac{1}{128}(45n^2 - 302n - 91)\Big) + \Big(2n + 4 + n + 2 + \frac{1}{64}(21n^2 -$$
$$102n - 135) + \frac{1}{64}(21n^2 - 126n - 147) + \frac{1}{64}(11n^2 - 82n +$$
$$35) + \frac{1}{64}(3n^2 - 18n - 21)\Big)$$
$$= \frac{n}{2}(1+3n)$$

Dengan demikian , terlihat bahwa nilai penjumlahan dari elemen yang terdapat pada baris pertama akan berjumlah $\frac{n}{2}(1+3n) = k$.

Lebih lanjut, nilai penjumlahan elemen pada baris ketiga menjadi

$$\sum b_3 = \frac{n}{2}(1+3n) + n + \Big(h_{1,\frac{(2n+1)}{3}} + h_{1,\frac{(n+2)}{3}} + h_{1,j} + h_{1,\frac{(n+1)}{2}+j} +$$
$$h_{1,\frac{(5n+7)}{6}-j} + h_{1,(n+1)-j}\Big) - \Big(h_{3,\frac{(2n+1)}{3}} + h_{3,\frac{(n+2)}{3}} + h_{3,j} + h_{3,\frac{(n+1)}{2}+j} +$$
$$h_{3,\frac{(5n+7)}{6}-j} + h_{3,(n+1)-j}\Big)$$
$$= \frac{n}{2}(1+3n) + n + \Big(2n - 1 + n + \frac{1}{128}(3n^2 - 50n + 203) +$$
$$\frac{1}{128}(3n^2 - 50n + 203) + \frac{1}{128}(37n^2 - 238n - 147) +$$
$$\frac{1}{128}(45n^2 - 302n - 91)\Big) - \Big(2n + 4 + n + 2 + \frac{1}{64}(21n^2 -$$
$$102n - 135) + \frac{1}{64}(21n^2 - 126n - 147) + \frac{1}{64}(11n^2 - 82n +$$
$$35) + \frac{1}{64}(3n^2 - 18n - 21)\Big)$$
$$= \frac{n}{2}(1+3n)$$

Dengan demikian, terlihat bahwa nilai penjumlahan dari elemen yang terdapat pada baris ketiga akan berjumlah $\frac{n}{2}(1+3n) = k$.

Maka, terlihat bahwa setelah penukaran elemen pada baris pertama dan ketiga, maka penjumlahan dari setiap eleman yang berada pada baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga akan memenuhi sifat persegi-panjang-ajaib.

Berdasarkan pemaparan pada butir a, b, c, dan d, maka dapat disimpulkan bahwa persegi-panjang H akan membentuk persegi-panjang-ajaib yang diinginkan. ■

Sebagai contoh, misalkan ingin dibentuk persegi-panjang-ajaib berukuran 3×13. Menurut konstruksi yang sudah dipaparkan pada subbagian ini, diperoleh

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

dan

$$H = \begin{pmatrix} 39 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 36 & 30 & 28 & 18 & 34 & 6 \\ 20 & 23 & 26 & 29 & 32 & 35 & 38 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 1 & 33 & 27 & 21 & 15 & 9 & 3 & 22 & 25 & 24 & 31 & 12 & 37 \end{pmatrix}$$

Maka, berdasarkan Teorema 3.2, pertukaran yang diperlukan ialah

$h_{1,11}$ dengan $h_{3,11}$;

$h_{1,21}$ dengan $h_{3,21}$.

Karena $n = 31$, diperoleh $y = 3$, sehingga $j = 1, 2, 3$. maka diperlukan pertukaran tambahan, yaitu

$h_{1,1}$ dengan $h_{3,1}$; $h_{1,2}$ dengan $h_{3,2}$; $h_{1,3}$ dengan $h_{3,3}$.

$h_{1,17}$ dengan $h_{3,17}$; $h_{1,18}$ dengan $h_{3,18}$; $h_{1,19}$ dengan $h_{3,19}$.

$h_{1,24}$ dengan $h_{3,24}$; $h_{1,25}$ dengan $h_{3,25}$; $h_{1,26}$ dengan $h_{3,26}$.

$h_{1,29}$ dengan $h_{3,29}$; $h_{1,30}$ dengan $h_{3,30}$; $h_{1,31}$ dengan $h_{3,31}$.

Dengan demikian, diperoleh persegi-panjang-ajaib h_{ij} berukuran 3×13 yang diinginkan, yaitu

$$H = \begin{pmatrix} 39 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 36 & 30 & 28 & 18 & 34 & 6 \\ 20 & 23 & 26 & 29 & 32 & 35 & 38 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 1 & 33 & 27 & 21 & 15 & 9 & 3 & 22 & 25 & 24 & 31 & 12 & 37 \end{pmatrix}$$

Dari entri-entri matriks di atas dapat terlihat bahwa hasil penjumlahan entri setiap baris ialah $l = 260$ dan hasil penjumlahan entri setiap kolom ialah $k = 60$.

3.2. Persegi-panjang-ajaib Berukuran $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ dengan $\boldsymbol{m}$ dan $\boldsymbol{n}$ Bilangan Genap

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai pembentukan persegi-panjang-ajaib dengan jumlah baris m dan jumlah kolom n, dimana $2p = m \leq n = 2q$.

Untuk bilangan bulat positif m dan n dengan $m \leq n$, didefinisikan matriks – matriks seperti berikut:

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\ Q_a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ Q_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & q-1 \\ q & q+1 & q+2 & \dots & 2q-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1)q & (p-1)q+1 & (p-1)q+2 & \dots & pq-1 \end{pmatrix}$$

Matriks A juga dapat diekspresikan sebagai:

$$A = 1_p \otimes s'_q + 1'_q \otimes q s_p$$

dimana $\otimes$ merepresentasikan Produk-Kronecker, $1'_t$ merepresentasikan vektor baris berukuran $1 \times t$ yang berisi bilangan 1, dan $s'_t = (0,1,2,\dots,t-1)$ merupakan vektor baris berorder t dengan elemen yang merupakan barisan bilangan dari 0 sampai $t - 1$.

Misalkan I_t merupakan matriks identitas dengan order t dan K_t merupakan matriks-persegi dengan order t yang diberikan oleh

$K_t = \left((k_{ij})\right)$ dengan

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j = t + 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Maka

$$X = A \otimes \binom{1}{0} + (A.K_q) \otimes \binom{0}{1}$$

Dan

$$Y = 4(X \otimes 1'_2) + 1_{2p} \otimes 1'_{2q} = (Y_1|Y_2)$$

Untuk $j = 1,2$, matriks Y_j akan memiliki order $2m \times n$.

Selanjutnya didefinisikan matriks B dan C sedemikian sehingga penjumlahannya merupakan persegi-panjang-ajaib yang dibutuhkan.

Misalkan C merupakan matriks berukuran $2p \times 2q$ yang diberikan oleh

$$C = \left(Y_1 \middle| (K_p \otimes I_2) Y_2\right)$$

dan B merupakan matriks berukuran $2p \times 2q$ yang diberikan oleh

$$B = \begin{cases} 1_p \otimes \left(Q_e | Q_a | \, 1'_{\frac{q-3}{2}} \otimes (Q_b|Q_a) \middle| \, Q_e \right), & \text{Untuk } q \text{ ganjil} \\ \left(1_p \otimes 1'_{\frac{q}{2}}\right) \otimes Q, & \text{Untuk } q \text{ genap} \end{cases}$$

Perlu dicatat bahwa ketika $q = 3$, B tereduksi menjadi $1_p \otimes (Q_e|Q_a|Q_e)$.

Teorema berikut akan memberikan formula persegi-panjang-ajaib yang akan dicari dengan menggunakan matriks – matriks B dan C yang sudah dijelaskan sebelumnya.

Teorema 3.2. (Barui, 2006)

Misalkan R merupakan persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$ atau $2p \times 2q$, maka $R = B + C$.

Bukti

Pembuktian Teorema 3.2. akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk q ganjil dan untuk q genap.

Pertama–tama, akan diberikan pembuktian untuk q ganjil. Pada pembuktian ini, terdapat dua kasus yaitu $q = 3$ dan $q > 3$.

Kasus I untuk $q = 3$.

untuk $q = 3$, maka diperoleh

$$B = 1_p \otimes (Q_e | Q_a | Q_e)$$

$$= 1_p \otimes \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Telah diketahui bahwa $X = A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (A.K_3) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots \\ 3p-3 & 3p-2 & 3p-1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots \\ 3p-3 & 3p-2 & 3p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 3p-3 & 3p-2 & 3p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 3p-1 & 3p-2 & 3p-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 3p-3 & 3p-2 & 3p-1 \\ 3p-1 & 3p-2 & 3p-3 \end{pmatrix}$$

Karena $= 4(X \otimes 1'_2) + 1_{2p} \otimes 1'_6$, maka dengan mensubstitusikan formula untuk X ke dalam formula untuk Y, diperoleh

$$Y = 4\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 3p-3 & 3p-2 & 3p-1 \\ 3p-1 & 3p-2 & 3p-3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(2p\times 1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(1\times 6)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 13 & 13 & 17 & 17 & 21 & 21 \\ 21 & 21 & 17 & 17 & 13 & 13 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-11 & 12p-11 & 12p-7 & 12p-7 & 12p-3 & 12p-3 \\ 12p-3 & 12p-3 & 12p-7 & 12p-7 & 12p-11 & 12p-11 \end{pmatrix}$$

dengan

$Y_1 = (y_{ij})$ dengan $i = 1, \ldots, 2p$ dan $j = 1, \ldots, \frac{q}{2}$

$Y_2 = (y_{ij})$ dengan $i = 1, \ldots, 2p$ dan $j = \frac{q}{2} + 1, \ldots, q$, sehingga

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 5 \\ 13 & 13 & 17 \\ 21 & 21 & 17 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-11 & 12p-11 & 12p-7 \\ 12p-3 & 12p-3 & 12p-7 \end{pmatrix} \text{ dan } Y_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \\ 17 & 21 & 21 \\ 17 & 13 & 13 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-7 & 12p-3 & 12p-3 \\ 12p-7 & 12p-11 & 12p-11 \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan formula Y_1 dan Y_2ke dalam persamaan $C = \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)$, diperoleh

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 5 \\ 13 & 13 & 17 \\ 21 & 21 & 17 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-11 & 12p-11 & 12p-7 \\ 12p-3 & 12p-3 & 12p-7 \end{matrix}}_{Y_1} & \underbrace{\begin{matrix} 12p-7 & 12p-3 & 12p-3 \\ 12p-7 & 12p-11 & 12p-11 \\ 12p-19 & 12p-15 & 12p-15 \\ 12p-19 & 12p-23 & 12p-23 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 9 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \end{matrix}}_{(K_P \otimes I_2)Y_2} \end{array}\right)$$

Lebih lanjut, berdasarkan konstruksi di atas, diperoleh

$$R = B + C$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 12p-7 & 12p-3 & 12p-3 \\ 9 & 9 & 5 & 12p-7 & 12p-11 & 12p-11 \\ 13 & 13 & 17 & 12p-19 & 12p-15 & 12p-15 \\ 21 & 21 & 17 & 12p-19 & 12p-23 & 12p-23 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-11 & 12p-11 & 12p-7 & 5 & 9 & 9 \\ 12p-3 & 12p-3 & 12p-7 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 12p-4 & 12p-3 & 12p-1 \\ 12 & 10 & 6 & 12p-7 & 12p-8 & 12p-10 \\ 13 & 15 & 19 & 12p-16 & 12p-15 & 12p-13 \\ 24 & 22 & 18 & 12p-19 & 12p-20 & 12p-22 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 12p-11 & 12p-9 & 12p-5 & 8 & 9 & 11 \\ 12p & 12p-2 & 12p-6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan di atas, akan dibuktikan empat hal berikut, yaitu bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2,\ldots,mn\}$ muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus I.a.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Untuk $p = \frac{m}{2}$, maka dengan berdasarkan pemaparan sebelumnya, terlihat bahwa kolom pada matriks R membentuk barisan, yaitu

$$\{r_{1,1}, r_{3,1}, \dots, r_{2p-1,1}\} = \{1, 13, 25, \dots, 12p - 11\}$$

$$\{r_{2,6}, r_{4,6}, \dots, r_{2p,6}\} = \{2, 14, 26, \dots, 12p - 10\}$$

$$\{r_{1,2}, r_{3,2}, \dots, r_{2p-1,2}\} = \{3, 15, 27, \dots, 12p - 9\}$$

$$\{r_{2,5}, r_{4,5}, \dots, r_{2p,5}\} = \{4, 16, 28, \dots, 12p - 8\}$$

$$\{r_{2,4}, r_{4,4}, \dots, r_{2p,4}\} = \{5, 17, 29, \dots, 12p - 7\}$$

$$\{r_{2,3}, r_{4,3}, \dots, r_{2p,3}\} = \{6, 18, 30, \dots, 12p - 6\}$$

$$\{r_{1,3}, r_{3,3}, \dots, r_{2p-1,3}\} = \{7, 19, 31, \dots, 12p - 5\}$$

$$\{r_{1,4}, r_{3,4}, \dots, r_{2p-1.4}\} = \{8, 20, 32, \dots, 12p - 4\}$$

$$\{r_{1,5}, r_{3,5}, \dots, r_{2p-1,5}\} = \{9, 21, 33, \dots, 12p - 3\}$$

$$\{r_{2,2}, r_{4,2}, \dots, r_{2p,2}\} = \{10, 22, 34, \dots, 12p - 2\}$$

$$\{r_{1,6}, r_{3,6}, \dots, r_{2p-1,6}\} = \{11, 23, 35, \dots, 12p - 1\}$$

$$\{r_{2,1}, r_{4,1}, \dots, r_{2p,1}\} = \{12, 24, 36, \dots, 12p\}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa irisan dari seluruh barisan diatas ialah $\emptyset$, sehingga terbukti bahwa Setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Kasus I.b.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa bilangan pada $\{1,2,\dots,mn\}$ muncul tepat satu kali.

Berdasarkan pemaparan pada kasus I.a, diperoleh bahwa gabungan dari seluruh barisan tersebut ialah himpunan $\{1,2,\dots,mn\}$.

Kasus I.c.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k

Agar persegi-panjang R yang terbentuk merupakan persegi-panjang-ajaib, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama harus bernilai k, dengan

$$k = \frac{n}{2}(1 + mn)$$

Pertama, didefinisikan $\sum K_R$, $\sum K_B$, dan $\sum K_C$ berturut – turut sebagai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama pada R, B, dan C.

Lebih lanjut, karena $\sum K_B = \frac{3m}{2}$ dan $q = 3$, maka diperoleh $\sum K_B = 3p$.

Didefinisikan pula $\sum K_Y$, $\sum K_{Y_1}$, dan $\sum K_{Y_2}$ berturut – turut merupakan penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama pada Y, Y_1, dan Y_2, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum K_Y = \sum K_{Y_1} &= \sum K_{Y_2} \\ &= 1 + 9 + 13 + 21 + \cdots + 12p - 11 + 12p - 3 \\ &= \tfrac{p}{2}(12p - 10) + \tfrac{p}{2}(12p + 6) \\ &= \tfrac{p}{2}(24p - 4) \\ &= 2p(6p - 1) \end{aligned}$$

Misalkan $\sum K_C$ merupakan penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama pada C, maka $\sum K_C = \sum Y_1$ sehingga diperoleh $\sum K_C = 2p(6p-1)$

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, diperoleh

$$\sum K_R = \sum K_B + \sum K_C = 3p + 2p(6p-1) = p(1+12p)$$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$ dimana $q = 3$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum K_R &= \frac{m}{2}\left(1 + 12\left(\frac{m}{2}\right)\right)\\ &= \frac{m}{2}(1+6m)\\ &= \frac{m}{2}(1+(3.2)m)\\ &= \frac{m}{2}(1+(2q)m)\\ &= \frac{m}{2}(1+mn)\\ &= k\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap kolom yang berada pada matriks R yang terbentuk berdasarkan konstruksi diatas akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Kasus I.d.

Pada poin ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Untuk $j = 1, 3, 5, \dots, 2p-1$, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum R_j &= (6j-5) + (6j-3) + (6j+1) + (12p-6j+2) +\\ &\quad (12p-6j+3) + (12p-6j+5)\\ &= 18j - 18j + 36p + 3\\ &= 36p + 3\end{aligned}$$

Untuk $i = 2, 4, 6, \dots, 2p$, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum R_i &= (6j) + (6j-2) + (6j-6) + (12p-6j+5) + (12p-6j+ \\ &\quad 4) + (12p-6j+2) \\ &= 18j - 18j + 36p - 8 + 11 \\ &= 36p + 3\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\sum R_j = \sum R_i = \sum R = 36p + 3 = 3(12p+1) = 3\big((3.2)2p + 1\big)$.

Karena $q = 3$ dengan $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, diperoleh

$$\sum R_i = q\big((2q)2p + 1\big) = \frac{n}{2}(1 + mn)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap baris yang berada pada matriks R yang terbentuk berdasarkan konstruksi diatas akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Berdasarkan pemaparan pada kasus I.a, kasus I.b, kasus I.c, dan kasus I.d, terbukti bahwa persegi-panjang yang terbentuk merupakan persegi-panjang-ajaib untuk $q = 3$.

Kasus II yaitu $q > 3$.

akan diuraikan mengenai konstruksi persegi-panjang-ajaib R untuk $q > 3$.

Karena $q > 3$, maka diperoleh

$$B = 1_p \otimes \left(Q_e \middle| Q_a \middle| 1'_{\frac{q-3}{2}} \otimes \left(Q_b \middle| Q_a \right) \middle| Q_e \right) = 1_p \otimes \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 1 & 1 & 0 & \end{array} 1'_{\frac{q-3}{2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{|cc} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}_{p\times 1} \otimes \left(\begin{array}{cc|cc|} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}_{2q-6} \begin{array}{|cc} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$= 1_p \otimes \left(\begin{array}{cc|cc|} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}_{2q-6} \begin{array}{|cc} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}_{2q-6} \begin{array}{|cc} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

Karena $X = A \otimes \binom{1}{0} + (A.K_q) \otimes \binom{0}{1}$, maka diperoleh

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & q-2 & q-1 \\ q-1 & q-2 & \dots & 1 & 0 \\ q & q+1 & \dots & 2q-2 & 2q-1 \\ 2q-1 & 2q-2 & \dots & q+1 & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1)q & (p-1)q+1 & \dots & pq-2 & pq-1 \\ pq-1 & pq-2 & \dots & (p-1)q+1 & (p-1)q \end{pmatrix}$$

Selain itu, karena $Y = 4(X \otimes 1'_2) + 1_{2p} \otimes 1'_{2q}$, maka dengan mensubstitusikan formula untuk X kedalam formula untuk Y, diperoleh

$$Y = 4\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & q-2 & q-1 \\ q-1 & q-2 & \dots & 1 & 0 \\ q & q+1 & \dots & 2q-2 & 2q-1 \\ 2q-1 & 2q-2 & \dots & q+1 & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1)q & (p-1)q+1 & \dots & pq-2 & pq-1 \\ pq-1 & pq-2 & \dots & (p-1)q+1 & (p-1)q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(2p\times 1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(1\times 2q)}$$

$$=4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & q-2 & q-2 & q-1 & q-1 \\ q-1 & q-1 & q-2 & q-2 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q & q & q+1 & q+1 & \dots & \dots & 2q-2 & 2q-2 & 2q-1 & 2q-1 \\ 2q-1 & 2q-1 & 2q-2 & 2q-2 & \dots & \dots & q+1 & q+1 & q & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1)q & (p-1)q & (p-1)q+1 & (p-1)q+1 & \dots & \dots & pq-2 & pq-2 & pq-1 & pq-1 \\ pq-1 & pq-1 & pq-2 & pq-2 & \dots & \dots & (p-1)q+1 & (p-1)q+1 & (p-1)q & (p-1)q \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & \dots & \dots & 4q-8 & 4q-8 & 4q-4 & 4q-4 \\ 4q-4 & 4q-4 & 4q-8 & 4q-8 & \dots & \dots & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4q & 4q & 4q+4 & 4q+4 & \dots & \dots & 8q-8 & 8q-8 & 8q-4 & 8q-4 \\ 8q-4 & 8q-4 & 8q-8 & 8q-8 & \dots & \dots & 4q+4 & 4q+4 & 4q & 4q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4q(p-1) & 4q(p-1) & 4q(p-1)+4 & 4q(p-1)+4 & \dots & \dots & 4pq-8 & 4pq-8 & 4pq-4 & 4pq-4 \\ 4pq-4 & 4pq-4 & 4pq-8 & 4pq-8 & \dots & \dots & 4q(p-1)+4 & 4q(p-1)+4 & 4q(p-1) & 4q(p-1) \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & \dots & 4q-7 & 4q-7 & 4q-3 & 4q-3 \\ 4q-3 & 4q-3 & 4q-7 & 4q-7 & \dots & \dots & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 4q+1 & 4q+1 & 4q+5 & 4q+5 & \dots & \dots & 8q-7 & 8q-7 & 8q-3 & 8q-3 \\ 8q-3 & 8q-3 & 8q-7 & 8q-7 & \dots & \dots & 4q+5 & 4q+5 & 4q+1 & 4q+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & \dots & \dots & 4pq-7 & 4pq-7 & 4pq-3 & 4pq-3 \\ 4pq-3 & 4pq-3 & 4pq-7 & 4pq-7 & \dots & \dots & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 \end{pmatrix}$$

Dengan

$Y_1 = (y_{i,j})$ dengan $i = 1, \dots, 2p$ dan $j = 1, \dots, q$

$Y_2 = (y_{i,j})$ dengan $i = 1, \dots, 2p$ dan $j = q+1, \dots, 2q$, sehingga

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & \dots & 2q-1 \\ 4q-3 & 4q-3 & 4q-7 & 4q-7 & \dots & \dots & 2q-1 \\ 4q+1 & 4q+1 & 4q+5 & 4q+5 & \dots & \dots & 6q-1 \\ 8q-3 & 8q-3 & 8q-7 & 8q-7 & \dots & \dots & 6q-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & \dots & \dots & 4pq-2q-1 \\ 4pq-3 & 4pq-3 & 4pq-7 & 4pq-7 & \dots & \dots & 4pq-2q-1 \end{pmatrix}$$

dan

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 2q-1 & \dots & \dots & 4q-7 & 4q-7 & 4q-3 & 4q-3 \\ 2q-1 & \dots & \dots & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 6q-1 & \dots & \dots & 8q-7 & 8q-7 & 8q-3 & 8q-3 \\ 6q-1 & \dots & \dots & 4q+5 & 4q+5 & 4q+1 & 4q+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4pq-2q-1 & \dots & \dots & 4pq-7 & 4pq-7 & 4pq-3 & 4pq-3 \\ 4pq-2q-1 & \dots & \dots & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan formula Y_1 dan Y_2 ke persamaan $C = \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)$, diperoleh

$$C = \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & \dots & 2q-3 \\ 4q-3 & 4q-3 & 4q-7 & 4q-7 & \dots & \dots & 2q+1 \\ 4q+1 & 4q+1 & 4q+5 & 4q+5 & \dots & \dots & 6q-3 \\ 8q-3 & 8q-3 & 8q-7 & 8q-7 & \dots & \dots & 6q+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & \dots & \dots & 4pq-2q-3 \\ 4pq-3 & 4pq-3 & 4pq-7 & 4pq-7 & \dots & \dots & 4pq-2q+1 \end{matrix}\right.}_{Y_1}$$

$$\underbrace{\left|\begin{matrix} 4pq-2q+1 & \dots & \dots & 4pq-7 & 4pq-7 & 4pq-3 & 4pq-3 \\ 4pq-2q-3 & \dots & \dots & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 \\ 4pq-6q+1 & \dots & \dots & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-3 & 4q(p-1)-3 \\ 4pq-6q-3 & \dots & \dots & 4q(p-2)+5 & 4p(p-2)+5 & 4q(p-2)+1 & 4q(p-2)+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2q+1 & \dots & \dots & 4q-7 & 4q-7 & 4q-3 & 4q-3 \\ 2q-3 & \dots & \dots & 5 & 5 & 1 & 1 \end{matrix}\right)}_{(K_P \otimes I_2)Y_2}$$

Definisikan $R = B + C$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc|}
0 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 1 & 1 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 1 & 1 & 0
\end{array}\underbrace{\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}}_{2q-6}\begin{array}{|cc}
0 & 2 \\
3 & 1 \\
0 & 2 \\
3 & 1 \\
\dots & \dots \\
\dots & \dots \\
0 & 2 \\
3 & 1
\end{array}\right)+$$

$$\underbrace{\left(\begin{matrix}
1 & 1 & 5 & 5 & \dots & \dots & 2q-3 \\
4q-3 & 4q-3 & 4q-7 & 4q-7 & \dots & \dots & 2q+1 \\
4q+1 & 4q+1 & 4q+5 & 4q+5 & \dots & \dots & 6q-3 \\
8q-3 & 8q-3 & 8q-7 & 8q-7 & \dots & \dots & 6q+1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & \dots & \dots & 4pq-2q-3 \\
4pq-3 & 4pq-3 & 4pq-7 & 4pq-7 & \dots & \dots & 4pq-2q+1
\end{matrix}\right.}_{Y_1}$$

$$\underbrace{\left|\begin{matrix}
4pq-2q+1 & \dots & \dots & 4pq-7 & 4pq-7 & 4pq-3 & 4pq-3 \\
4pq-2q-3 & \dots & \dots & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 \\
4pq-6q+1 & \dots & \dots & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-3 & 4q(p-1)-3 \\
4pq-6q-3 & \dots & \dots & 4q(p-2)+5 & 4p(p-2)+5 & 4q(p-2)+1 & 4q(p-2)+1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
2q+1 & \dots & \dots & 4q-7 & 4q-7 & 4q-3 & 4q-3 \\
2q-3 & \dots & \dots & 5 & 5 & 1 & 1
\end{matrix}\right)}_{(K_P\otimes I_2)Y_2}$$

Dengan menggunakan persamaan diatas, akan dibuktikan empat hal berikut, yaitu setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2,\dots,mn\}$ muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus II.a.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Terlihat bahwa untuk $j = 1, 2, \dots, \frac{q}{8}$, elemen pada R membentuk barisan aritmatika,yaitu

$$\left\{r_{1,4j-3}, r_{3,4j-3}, \dots, r_{2p-1,4j-3}\right\} = \{(8j-7), 4q+(8j-7), \dots, 4(p-1)q+(8j-7)\}$$

$$\left\{r_{2,2q}, r_{4,2q}, \dots, r_{2p,2q}\right\} = \{2, 4q+2, \dots, 4(p-1)q+2\}$$

$$\left\{r_{1,2}, r_{3,2}, \dots, r_{2p-1,2}\right\} = \{3, 4q+3, \dots, 4(p-1)q+3\}$$

$$\left\{r_{2,2q+3-4j}, r_{4,2q+3-4j}, \dots, r_{2p,2q+3-4j}\right\} = \{(8j-4), 4q+(8j-4), \dots, 4(p-1)q+(8j-4)\}$$

$$\left\{r_{2,2q-4j+2}, r_{4,2q-4j+2}, \dots, r_{2p,2q-4j+2}\right\} = \{(8j-3), 4q+(8j-3), \dots, 4(p-1)q+(8j-3)\}$$

$$\left\{r_{2,2q-4j+1}, r_{4,2q-4j+1}, \dots, r_{2p,2q-4j+1}\right\} = \{(8j-2), 4q+(8j-2), \dots, 4(p-1)q+(8j-2)\}$$

$$\left\{r_{1,4j-1}, r_{3,4j-1}, \dots, r_{2p-1,4j-1}\right\} = \{(8j-1), 4q+(8j-1), \dots, 4(p-1)q+(8j-1)\}$$

$$\left\{r_{1,4j}, r_{3,4j}, \dots, r_{2p-1,4j}\right\} = \{8j, 4q+8j, \dots, 4(p-1)q+8j\}$$

$$\left\{r_{1,4j+2}, r_{3,4j+2}, \dots, r_{2p-1,4j+2}\right\} = \{(8j+2), 4q+(8j+2), \dots, 4(p-1)q+(8j+2)\}$$

$$\left\{r_{2,2q-4j}, r_{4,2q-4j}, \dots, r_{2p,2q-4j}\right\} = \{(8j+3), 4q+(8j+3), \dots, 4(p-1)q+(8j+3)\}$$

$$\left\{r_{2,4j-3}, r_{4,4j-3}, \dots, r_{2p,4j-3}\right\} = \{4q-(8j-8), 8q-(8j-8), \dots, 4pq-(8j-8)\}$$

$$\left\{r_{1,2q}, r_{3,2q}, \dots, r_{2p-1,2q}\right\} = \{4q-1, 8q-1, \dots, 4pq-1\}$$

$$\left\{r_{2,2}, r_{4,2}, \dots, r_{2p,2}\right\} = \{4q-2, 8q-2, \dots, 4pq-2\}$$

$$\left\{r_{1,2q+3-4j}, r_{3,2q+3-4j}, \dots, r_{2p-1,2q+3-4j}\right\} = \{4q-(8j-5), 8q-(8j-5), \dots, 4pq-(8j-5)\}$$

$$\left\{r_{1,2q+2-4j}, r_{3,2q+2-4j}, \dots, r_{2p-1,2q+2-4j}\right\} = \{4q-(8j-4), 8q-(8j-4), \dots, 4pq-(8j-4)\}$$

$$\{r_{1,2q+1-4j}, r_{3,2q+1-4j}, \dots, r_{2p-1,2q+1-4j}\} = \{4q-(8j-3), 8q-(8j-3), \dots, 4pq-(8j-3)\}$$

$$\{r_{2,4j-1}, r_{4,4j-1}, \dots, r_{2p,4j-1}\} = \{4q-(8j-2), 8q-(8j-2), \dots, 4pq-(8j-2)\}$$

$$\{r_{2,4j}, r_{4,4j}, \dots, r_{2p,4j}\} = \{4q-(8j-1), 8q-(8j-1), \dots, 4pq-(8j-1)\}$$

$$\{r_{2,4j+2}, r_{4,4j+2}, \dots, r_{2p,4j+2}\} = \{4q-(8j+1), 8q-(8j+1), \dots, 4pq-(8j+1)\}$$

$$\{r_{1,2q-4j}, r_{3,2q-4j}, \dots, r_{2p-1,2q-4j}\} = \{4q-(8j+2), 8q-(8j+2), \dots, 4pq-(8j+2)\}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa irisan dari seluruh barisan diatas ialah $\emptyset$, sehingga terbukti bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Kasus II.b.

Pada butir ini akan ditunjukan bahwa bilangan dalam $\{1,2,\dots,mn\}$ muncul tepat satu kali.

Berdasarkan pemaparan pada Kasus I.a, diperoleh bahwa gabungan dari seluruh barisan tersebut ialah himpunan $\{1,2,\dots,mn\}$.

Kasus II.c.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

Agar persegi-panjang R yang terbentuk pada konstruksi diatas merupakan persegi-panjang-ajaib, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama harus bernilai k, dengan

$$k = \frac{m}{2}(1+mn)$$

Lebih lanjut, berdasarkan pemaparan pada poin a, terlihat bahwa seluruh kolom dari matriks R terbentuk berdasarkan replikasi dari 10 kolom utama, yaitu kolom ke –$(4j-3)$, kolom ke-$(2q)$, kolom ke-2, kolom ke-$(2q+3-4j)$, kolom ke-$(2q+2-4j)$, kolom ke-$(2q+1-4j)$, kolom ke-$(4j-1)$, kolom ke-$(4j)$, kolom ke-$(4j+2)$, dan kolom ke-$(2q-4j)$.

Dengan demikian, akan dibuktikan bahwa pada kesepuluh kolom tersebut, penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada kolom yang sama ialah k.

Berikut ini akan diberikan tabel 3.13 yang merepresentasikan nilai penjumlahan dari kesepuluh kolom tersebut.

Tabel 3.13

Nilai penjumlahan dari kesepuluh kolom utama

Penjumlahan Kolom ke	Formula	Nilai
K_{4j-3}	$\left(r_{1,4j-3}+r_{3,4j-3}+\cdots+r_{2p-1,4j-3}\right)+\left(R_{2,4j-3}+r_{4,4j-3}+\cdots+r_{2p,4j-3}\right)$	$p(4pq+1)$
$2q$	$\left(r_{1,2q}+r_{3,2q}+\cdots+r_{2p-1,2q}\right)+\left(r_{2,2q}+r_{4,2q}+\cdots+r_{2p,2q}\right)$	$p(4pq+1)$
2	$\left(r_{1,2}+r_{3,2}+\cdots+r_{2p-1,2}\right)+\left(r_{2,2}+r_{4,2}+\cdots+r_{2p,2}\right)$	$p(4pq+1)$
$K_{2q+3-4j}$	$\left(r_{2,2q+3-4j}+r_{4,2q+3-4j}+\cdots+r_{2p,2q+3-4j}\right)+\left(r_{1,2q+3-4j}+r_{3,2q+3-4j}+\cdots+r_{2p-1,2q+3-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$2q+2-4j$	$\left(r_{2,2q+2-4j}+r_{4,2q+2-4j}+\cdots+r_{2p,2q+2-4j}\right)+\left(r_{1,2q+2-4j}+r_{3,2q+2-4j}+\cdots+r_{2p-1,2q+2-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$2q+1-4j$	$\left(r_{2,2q+1-4j}+r_{4,2q+1-4j}+\cdots+r_{2p,2q+1-4j}\right)+\left(r_{1,2q+1-4j}+r_{3,2q+1-4j}+\cdots+r_{2p-1,2q+1-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j-1$	$\left(r_{1,4j-1}+r_{3,4j-1}+\cdots+r_{2p-1,4j-1}\right)+\left(r_{2,4j-1}+r_{4,4j-1}+\cdots+r_{2p,4j-1}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j$	$\left(r_{1,4j},r_{3,4j},\dots,r_{2p-1,4j}\right)+\left(r_{2,4j},r_{4,4j},\dots,r_{2p,4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j+2$	$\left(r_{1,4j+2},r_{3,4j+2},\dots,r_{2p-1,4j+2}\right)+\left(r_{2,4j+2},r_{4,4j+2},\dots,r_{2p,4j+2}\right)$	$p(4pq+1)$
$2q-4j$	$\left(r_{1,2q-4j}+r_{3,2q-4j}+\cdots+r_{2p-1,2q-4j}\right)+\left(r_{2,2q-4j}+r_{4,2q-4j}+\cdots+r_{2p,2q-4j}\right)$	$p(4pq+1)$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, diperoleh

$$p(4pq + 1) = \frac{m}{2}\left(4\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right) = \frac{m}{2}(mn + 1) = k$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap kolom yang berada pada matriks R yang akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Kasus II.d.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Agar persegi-panjang R merupakan persegi-panjang-ajaib, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama harus bernilai l, dengan

$$l = \frac{n}{2}(1 + mn)$$

Oleh karena itu, didefinisikan $\sum B_i, \sum C_i, \sum (Y_1)_i, \sum \left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i$, dan $\sum R_i$ berturut–turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada baris ke-i dari matriks $B, C, Y_1, \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2$, dan R.

Untuk $= 1, 3, 5, \ldots, 2p - 1$, diperoleh

$$\sum B_i = 0 + 2 + 2 + 3 + \left(\frac{(0+1+2+3)(n-6)}{4}\right) + 0 + 2 = 9 + \left(\frac{6(n-6)}{4}\right)$$

$$= 9 + \left(\frac{3n-18}{2}\right) = \frac{18+3n-18}{2} = \frac{3n}{2}$$

Karena $n = 2q$, maka

$$\sum B_i = \frac{3(2q)}{2} = 3q$$

$$\sum (Y_1)_i = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1 + 2q - 3) \times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(2q-2) + \left(4q^2(i-1\ )\right) = q(q-1) + \left(4q^2(i-1\ )\right)$$

$$\sum\left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq-2q+1+4pq-3)\right)\times 2 - \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(8pq-2q-2) - \left(4q^2(i-1\ )\right)$$

$$= q(4pq-q-1) - \left(4q^2(i-1\ )\right)$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 \middle| \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \sum B_i + \sum C_i$$

$$= \sum B_i + \sum (Y_1)_i + \left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i$$

$$= 3q + q(q-1) + \left(4q^2(i-1\ )\right) + q(4pq-q-1) - \left(4q^2(i-1\ )\right)$$

$$= q(q-1+4pq-q-1+3)$$

$$= q(4pq+1)$$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \frac{n}{2}(1+mn) = l$$

Sedangkan untuk $j = 2, 4, 6, \dots, 2p$, diperoleh

$$\sum B_i = 3 + 1 + 1 + 0 + \left(\frac{(3+2+1+0)(n-6)}{4}\right) + 3 + 1$$

$$= 9 + \left(\frac{6(n-6)}{4}\right) = 9 + \left(\frac{3n-18}{2}\right) = \frac{18+3n-18}{2} = \frac{3n}{2}$$

Karena $n = 2q$, maka

$$\sum B_i = \frac{3(2q)}{2} = 3q$$

$$\sum (Y_1)_j = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq-2q+1+4pq-3)\right)\times 2 - \left(\frac{4q(j-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(8pq-2q-2) - \left(4q^2(j-1\ )\right)$$

$$= q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$\sum\left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_1 = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1 + 2q - 3) \times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(2q - 2) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$= q(q - 1) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \sum B_i + \sum C_i$$

$$= \sum B_i + \sum (Y_1)_i + \left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i$$

$$= 3q + q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j - 1\,)\right) + q(q - 1) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$= q(q - 1 + 4pq - q - 1 + 3)$$

$$= q(4pq + 1)$$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \frac{n}{2}(1 + mn) = l$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap baris yang berada pada matriks R akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Berdasarkan pemaparan pada butir kasus I.a, kasus I.b, kasus I.c, dan kasus I.d,, terbukti bahwa persegi-panjang R merupakan persegi-panjang-ajaib untuk q ganjil.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa persegi-panjang R merupakan persegi-panjang-ajaib untuk q genap.

Pertama, pandang

$$B = \left(1_p \otimes 1'_{\frac{q}{2}}\right) \otimes Q$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\\cdots\\1\\1\end{pmatrix}_{(p\times 1)}\otimes\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1&1\end{pmatrix}_{\left(1\times\frac{q}{2}\right)}\right)\otimes\begin{pmatrix}0&3&1&2\\3&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&\cdots&1&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&3&1&2\\3&0&2&1\end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks$B$ dengan order $2p \times 2q$, yaitu

$$B=\begin{pmatrix}0&3&1&2&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&3&1&2\\3&0&2&1&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&3&0&2&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&3&1&2&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&3&1&2\\3&0&2&1&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&3&0&2&1\end{pmatrix}$$

dan matriks C dengan order $2p \times 2q$, yaitu

$$C=\left(\begin{array}{ccccccc}1&1&5&5&\ldots&\ldots&2q-3\\4q-3&4q-3&4q-7&4q-7&\ldots&\ldots&2q+1\\4q+1&4q+1&4q+5&4q+5&\ldots&\ldots&6q-3\\8q-3&8q-3&8q-7&8q-7&\ldots&\ldots&6q+1\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\4q(p-1)+1&4q(p-1)+1&4q(p-1)+5&4q(p-1)+5&\ldots&\ldots&4pq-2q-3\\4pq-3&4pq-3&4pq-7&4pq-7&\ldots&\ldots&4pq-2q+1\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}4pq-2q+1&\ldots&\ldots&4pq-7&4pq-7&4pq-3&4pq-3\\4pq-2q-3&\ldots&\ldots&4q(p-1)+5&4q(p-1)+5&4q(p-1)+1&4q(p-1)+1\\4pq-6q+1&\ldots&\ldots&4q(p-1)-7&4q(p-1)-7&4q(p-1)-3&4q(p-1)-3\\4pq-6q-3&\ldots&\ldots&4q(p-2)+5&4p(p-2)+5&4q(p-2)+1&4q(p-2)+1\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\2q+1&\ldots&\ldots&4q-7&4q-7&4q-3&4q-3\\2q-3&\ldots&\ldots&5&5&1&1\end{array}\right)$$

didefinisikan $R = B + C$, yaitu

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 3 & 0 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 3 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}+$$

$$\left.\begin{matrix} 4pq-2q-3 & \ldots & \ldots & 4pq-7 & 4pq-7 & 4pq-3 & 4pq-3 \\ 4pq-2q-3 & \ldots & \ldots & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+5 & 4q(p-1)+1 & 4q(p-1)+1 \\ 4pq-6q-3 & \ldots & \ldots & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-7 & 4q(p-1)-3 & 4q(p-1)-3 \\ 4pq-6q-3 & \ldots & \ldots & 4q(p-2)+5 & 4p(p-2)+5 & 4q(p-2)+1 & 4q(p-2)+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2q-3 & \ldots & \ldots & 4q-7 & 4q-7 & 4q-3 & 4q-3 \\ 2q-3 & \ldots & \ldots & 5 & 5 & 1 & 1 \end{matrix}\right)$$

Berdasarkan pemaparan diatas, timbul 2 kasus, yaitu untuk $q \equiv 0(mod\ 8)$ dan $q \equiv 4(mod\ 8)$. Baik pada $q \equiv 0(mod\ 8)$ maupun $q \equiv 4(mod\ 8)$, akan dibuktikan empat hal berikut, yaitu pembuktian bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2, \ldots, mn\}$ muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus I yaitu $q \equiv 0(mod\ 8)$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa pada kasus I dimana $q \equiv 0(mod\ 8)$, setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2, \ldots, mn\}$ muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus I.a.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Terlihat bahwa untuk $j = 1, 2, \ldots, \frac{q}{8}$, elemen pada R membentuk barisan aritmatika,yaitu

$$\left\{r_{1,4j-3}, r_{3,4j-3}, \dots, r_{m-1,4j-3}\right\} = \{(8j-7), 4q+(8j-7), 8q+ (8j-7), \dots, 4(p-1)q+(8j-7)\}$$

$$\left\{r_{2,n+4-4j,} r_{4,n+4-4j}, \dots, r_{m,n+4-4j}\right\} = \{(8j-6), 4q+(8j-6), 8q+ (8j-6), \dots, 4(p-1)q+ (8j-6)\}$$

$$\left\{r_{2,n+3-4j}, r_{4,n+3-4j}, \dots, r_{m,n+3-4j}\right\} = \{(8j-5), 4q+(8j-5), 8q+ (8j-5), \dots, 4(p-1)q+ (8j-5)\}$$

$$\left\{r_{1,4j-2}, r_{3,4j-2}, \dots, r_{m-1,4j-2}\right\} = \{(8j-4), 4q+(8j-4), 8q+ (8j-4), \dots, 4(p-1)q+(8j-4)\}$$

$$\left\{r_{2,n+2-4j}, r_{4,n+2-4j}, \dots, r_{m,n+2-4j}\right\} = \{(8j-3), 4q+(8j-3), 8q+ (8j-3), \dots, 4(p-1)q+ (8j-3)\}$$

$$\left\{r_{1,4j-1}, r_{3,4j-1}, \dots, r_{m-1,4j-1}\right\} = \{(8j-2), 4q+(8j-2), 8q+ (8j-2), \dots, 4(p-1)q+(8j-2)\}$$

$$\left\{r_{1,4j}, r_{3,4j}, \dots, r_{m-1,4j}\right\} = \{(8j-1), 4q+(8j-1), 8q+(8j- 1), \dots, 4(p-1)q+(8j-1)\}$$

$$\left\{r_{2,n+1-4j}, r_{4,n+1-4j}, \dots, r_{m,n+1-4j}\right\} = \{(8j), 4q+(8j), 8q+ (8j), \dots, 4(p-1)q+(8j)\}$$

$$\left\{r_{2,4j-3}, r_{4,4j-3}, \dots, r_{m,4j-3}\right\} = \{4q-(8j-8), 8q-(8j-8), 12q- (8j-8), \dots, 4pq-(8j-8)\}$$

$$\left\{r_{1,n+4-4j,} r_{3,n+4-4j}, \dots, r_{m-1,n+4-4j}\right\} = \{4q-(8j-7), 8q- (8j-7), 12q-(8j- 7), \dots, 4pq-(8j-7)\}$$

Universitas Indonesia

$$\{r_{1,n+3-4j}, r_{3,n+3-4j}, \dots, r_{m-1,n+3-4j}\} = \{4q-(8j-6), 8q-(8j-6), 12q-(8j-6), \dots, 4pq-(8j-6)\}$$

$$\{r_{2,4j-2}, r_{4,4j-2}, \dots, r_{m,4j-2}\} = \{4q-(8j-5), 8q-(8j-5), 12q-(8j-5), \dots, 4pq-(8j-5)\}$$

$$\{r_{1,n+2-4j}, r_{3,n+2-4j}, \dots, r_{m-1,n+2-4j}\} = \{4q-(8j-4), 8q-(8j-4), 12q-(8j-4), \dots, 4pq-(8j-4)\}$$

$$\{r_{2,4j-1}, r_{4,4j-1}, \dots, r_{m,4j-1}\} = \{4q-(8j-3), 8q-(8j-3), 12q-(8j-3), \dots, 4pq-(8j-3)\}$$

$$\{r_{2,4j}, r_{4,4j}, \dots, r_{m,4j}\} = \{4q-(8j-2), 8q-(8j-2), 12q-(8j-2), \dots, 4pq-(8j-2)\}$$

$$\{r_{1,n+1-4j}, r_{3,n+1-4j}, \dots, r_{m-1,n+1-4j}\} = \{4q-(8j-1), 8q-(8j-1), 12q-(8j-1), \dots, 4pq-(8j-1)\}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa irisan dari seluruh barisan diatas ialah $\emptyset$, sehingga terbukti bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Kasus I.b.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa bilangan pada $\{1,2,\dots,mn\}$ muncul tepat satu kali.

Berdasarkan pemaparan pada kasus I.a, diperoleh bahwa gabungan dari seluruh barisan tersebut ialah himpunan $\{1,2,\dots,mn\}$.

Kasus I.c.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama pada persegi-panjang R ialah k.

Agar persegi-panjang R yang terbentuk berdasarkan konstruksi diatas merupakan persegi-panjang-ajaib, maka penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama harus bernilai k, dengan

$$k = \frac{m}{2}(1 + mn)$$

Lebih lanjut, karena matriks B diperoleh dengan mengoperasikan matriks satuan yang berorder $p \times \frac{q}{2}$ dengan matriks Q yang beroder 2×4, maka matriks B merupakan matriks dengan susunan kolom yang merupakan replikasi (pengulangan) dari matriks Q, sehingga setiap kolomnya merupakan replikasi dari 8 kolom utama, yaitu kolom ke-$(4j - 3)$kolom ke-$(4j - 2)$, kolom ke-$(4j - 1)$, kolom ke-$(4j)$, kolom ke-$(n + 1 - 4j)$, kolom ke-$(n + 2 - 4j)$, kolom ke-$(n + 3 - 4j)$, dan kolom ke-$(n + 4 - 4j)$.

Dengan demikian, akan dibuktikan bahwa pada kedelapan kolom tersebut, penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada kolom yang sama ialah k.

Selanjutnya, didefinisikan $\sum R_{k_{(4j-3)}}, \sum R_{k_{(4j-2)}}, \sum R_{k_{(4j-1)}}, \sum R_{k_{(4j)}}, \sum R_{k_{(n+1-4j)}}, \sum R_{k_{(n+2-4j)}}, \sum R_{k_{(n+3-4j)}}$ dan $\sum R_{k_{(n+4-4j)}}$ berturut – turut sebagai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada kolom ke-$(4j - 3)$, kolom ke-$(4j - 2)$, kolom ke-$(4j - 1)$, kolom ke-$(4j)$, kolom ke-$(n + 1 - 4j)$, kolom ke-$(n + 2 - 4j)$, kolom ke-$(n + 3 - 4j)$, dan kolom ke-$(n + 4 - 4j)$.

Berikut ini akan diberikan tabel 3.14 yang merepresentasikan nilai penjumlahan dari kedelapan kolom utama tersebut.

Tabel 3.14

Representasi nilai penjumlahan dari delapan kolom utama

Penjumlahan kolom ke	Formula	Nilai
$4j-3$	$\left(r_{1,4j-3}+\ r_{3,4j-3}+\cdots+r_{m-1,4j-3}\right)+$ $\left(r_{2,4j-3},r_{4,4j-3},\dots,r_{m,4j-3}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j-2$	$\left(r_{1,4j-2}+r_{3,4j-2}+\cdots+r_{m-1,4j-2}\right)+$ $\left(R_{2,4j-2}+r_{4,4j-2}+\cdots+r_{m,4j-2}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j-1$	$\left(r_{1,4j-1}+r_{3,4j-1}+\cdots+r_{m-1,4j-1}\right)+$ $\left(r_{2,4j-1}+r_{4,4j-1}+\cdots+r_{m,4j-1}\right)$	$p(4pq+1)$
$4j$	$\left(r_{1,4j}+r_{3,4j}+\cdots+r_{m-1,4j}\right)+\left(r_{2,4j}+r_{4,4j}+\right.$ $\left.\cdots+r_{m,4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$n+1-4j$	$\left(r_{1,n+1-4j}+r_{3,n+1-4j}+\cdots+r_{m-1,n+1-4j}\right)+$ $\left(r_{2,n+1-4j}+r_{4,n+1-4j}+\cdots+r_{m,n+1-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$n+2-4j$	$\left(r_{1,n+2-4j}+r_{3,n+2-4j}+\cdots+r_{m-1,n+2-4j}\right)+$ $\left(r_{2,n+2-4j}+r_{4,n+2-4j}+\cdots+r_{m,n+2-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$n+3-4j$	$\left(r_{1,n+3-4j}+r_{3,n+3-4j}+\cdots+r_{m-1,n+3-4j}\right)+$ $\left(r_{2,n+3-4j}+r_{4,n+3-4j}+\cdots+r_{m,n+3-4j}\right)$	$p(4pq+1)$
$n+4-4j$	$\left(r_{1,n+4-4j}+r_{3,n+4-4j}+\cdots+r_{m-1,n+4-4j}\right)+$ $\left(r_{2,n+4-4j}+r_{4,n+4-4j}+\cdots+r_{m,n+4-4j}\right)$	$p(4pq+1)$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap kolom yang berada pada matriks R akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Kasus I.d.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Agar persegi-panjang R yang terbentuk pada konstruksi diatas merupakan persegi-panjang-ajaib, maka nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama harus bernilai l, dengan

$$l=\frac{n}{2}(1+mn)$$

Pertama, didefinisikan $\sum B_i$, $\sum C_i$, $\sum(Y_1)_i$, $\sum\left(\left(K_p\otimes I_2\right)Y_2\right)_i$, dan $\sum R_i$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada baris ke-i dari matriks $B, C, Y_1, \left(K_p\otimes I_2\right)Y_2$, dan R.

Untuk $= 1, 3, 5, \dots, 2p - 1$, diperoleh

$$\sum B_i = \frac{(0+3+1+2)n}{4} = \frac{6n}{4}$$

Karena $n = 2q$, maka

$$\sum B_i = \frac{6(2q)}{4} = 3q$$

$$\begin{aligned}\sum(Y_1)_i &= \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1+2q-3)\times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)\\ &= \frac{q}{2}(2q-2) + \left(4q^2(i-1\,)\right)\\ &= q(q-1) + \left(4q^2(i-1\,)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum\left(\left(K_p\otimes I_2\right)Y_2\right)_i &= \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq-2q+1+4pq-3)\right)\times 2 - \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)\\ &= \frac{q}{2}(8pq-2q-2) - \left(4q^2(i-1\,)\right)\\ &= q(4pq-q-1) - \left(4q^2(i-1\,)\right)\end{aligned}$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 | \left(K_p\otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum R_i &= \sum B_i + \sum C_i\\ &= \sum B_i + \sum(Y_1)_i + \left(\left(K_p\otimes I_2\right)Y_2\right)_i\\ &= 3q + q(q-1) + \left(4q^2(i-1\,)\right) + q(4pq-q-1) - \left(4q^2(i-1\,)\right)\\ &= q(q-1+4pq-q-1+3)\\ &= q(1+4pq)\\ &= l\end{aligned}$$

Sedangkan untuk $j = 2, 4, 6, \dots, 2p$, diperoleh

$$\sum B_1 = \frac{(0+3+1+2)m}{4} = \frac{6n}{4}$$

Karena $n = 2q,$ maka

$$\sum B_1 = \frac{6(2q)}{4} = 3q$$

$$\sum (Y_1)_j = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq - 2q + 1 + 4pq - 3)\right) \times 2 - \left(\frac{4q(j-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(8pq - 2q - 2) - \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$= q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$\sum \left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_1 = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1 + 2q - 3) \times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(2q - 2) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$= q(q - 1) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \sum B_i + \sum C_i$$

$$= \sum B_i + \sum (Y_1)_i + \left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i$$

$$= 3q + q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j - 1\,)\right) + q(q - 1) + \left(4q^2(j - 1\,)\right)$$

$$= q(q - 1 + 4pq - q - 1 + 3)$$

$$= q(1 + 4pq)$$

$$= l$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap baris yang berada pada matriks R yang terbentuk berdasarkan konstruksi diatas akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Lebih lanjut, berdasarkan pembuktian pada kasus I.a, kasus I.b, kasus I.c, dan kasus I.d, maka diperoleh pembuktian untuk kasus I yaitu $q \equiv 0(mod\ 8)$.

Kasus II yaitu $q \equiv 4(mod\ 8)$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk $q \equiv 4(mod\ 8)$, setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain, bilangan pada $\{1,2, \dots, mn\}$ muncul tepat satu kali, nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k, dan nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Kasus II.a.

Pada butir ini akan dibuktikan bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Terlihat bahwa untuk $j = 1, 2, \dots, \frac{q-2}{4}$ dan $i = 1, 2, \dots, \frac{q+2}{4}$, elemen pada R membentuk barisan aritmatika,yaitu

$$\begin{aligned}\{r_{1,4i-3}, r_{3,4i-3}, \cdots, r_{m-1,4i-3}\} = \{&(8i-7), 4q + (8i-7), 8q + \\ &(8i-7), \dots, 4(p-1)q + (8i-7)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r_{2,n+4-4i,} r_{4,n+4-4i}, \cdots, r_{m,n+4-4i}\} = \{&(8i-6), 4q + (8i-6), 8q + \\ &(8i-6) \dots, 4(p-1)q + (8i-6)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r_{2,n+3-4i}, r_{4,n+3-4i}, \cdots, r_{m,n+3-4i}\} = \{&(8i-5), 4q + (8i-5), 8q + \\ &(8i-5), \dots, 4(p-1)q + \\ &(8i-5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r_{1,4i-2}, r_{3,4i-2}, \cdots, r_{m-1,4i-2}\} = \{&(8i-4), 4q + (8i-4), 8q + \\ &(8i-4), \dots, 4(p-1)q + (8i-4)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r_{2,n+2-4j}, r_{4,n+2-4j}, \cdots, r_{m,n+2-4j}\} = \{&(8j-3), 4q + (8j-3), 8q + \\ &(8j-3), \dots, 4(p-1)q + \\ &(8j-3)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r_{1,4j-1}, r_{3,4j-1}, \cdots, r_{m-1,4j-1}\} = \{&(8j-2), 4q + (8j-2), 8q + \\ &(8j-2), \dots, 4(p-1)q + (8j-2)\}\end{aligned}$$

$$\{r_{1,4j}, r_{3,4j}, \dots, r_{m-1,4j}\} = \{(8j-1), 4q+(8j-1), 8q+(8j-1), \dots, 4(p-1)q+(8j-1)\}$$

$$\{r_{2,n+1-4j}, r_{4,n+1-4j}, \dots, r_{m,n+1-4j}\} = \{(8j), 4q+(8j), 8q+(8j), \dots, 4(p-1)q+(8j)\}$$

$$\{r_{2,4i-3}, r_{4,4i-3}, \dots, r_{m,4i-3}\} = \{4q-(8i-8), 8q-(8i-8), 12q-(8i-8), \dots, 4pq-(8i-8)\}$$

$$\{r_{1,n+4-4i,} r_{3,n+4-4i}, \dots, r_{m-1,n+4-4i}\} = \{4q-(8j-i), 8q-(8j-i), 12q-(8j-i), \dots, 4pq-(8i-7)\}$$

$$\{r_{1,n+3-4i}, r_{3,n+3-4i}, \dots, r_{m-1,n+3-4i}\} = \{4q-(8i-6), 8q-(8i-6), 12q-(8i-6), \dots, 4pq-(8i-6)\}$$

$$\{r_{2,4i-2}, r_{4,4i-2}, \dots, r_{m,4i-2}\} = \{4q-(8i-5), 8q-(8i-5), 12q-(8i-5), \dots, 4pq-(8i-5)\}$$

$$\{r_{1,n+2-4j}, r_{3,n+2-4j}, \dots, r_{m-1,n+2-4j}\} = \{4q-(8j-4), 8q-(8j-4), 12q-(8j-4), \dots, 4pq-(8j-4)\}$$

$$\{r_{2,4j-1}, r_{4,4j-1}, \dots, r_{m,4j-1}\} = \{4q-(8j-3), 8q-(8j-3), 12q-(8j-3), \dots, 4pq-(8j-3)\}$$

$$\{r_{2,4j}, r_{4,4j}, \dots, r_{m,4j}\} = \{4q-(8j-2), 8q-(8j-2), 12q-(8j-2), \dots, 4pq-(8j-2)\}$$

$$\{r_{1,n+1-4j}, r_{3,n+1-4j}, \dots, r_{m-1,n+1-4j}\} = \{4q-(8j-1), 8q-(8j-1), 12q-(8j-1), \dots, 4pq-(8j-1)\}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa irisan dari seluruh barisan diatas ialah $\emptyset$, sehingga terbukti bahwa setiap elemen yang terdapat pada R saling berbeda satu sama lain.

Kasus II.b.

Pada butir ini akan ditunjukan bahwa bilangan pada $\{1,2,\ldots,mn\}$ muncul tepat satu kali.

Berdasarkan pemaparan pada kasus II.a, diperoleh bahwa gabungan dari seluruh barisan tersebut ialah himpunan $\{1,2,\ldots,mn\}$.

Kasus II.c.

Pada butir ini akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama ialah k.

Agar persegi-panjang R merupakan persegi-panjang-ajaib, maka penjumlahan dari setiap elemen pada kolom yang sama harus bernilai k, dengan

$$k = \frac{m}{2}(1 + mn)$$

Lebih lanjut, karena matriks B diperoleh dengan mengoperasikan matriks satuan yang berorder $p \times \frac{q}{2}$ dengan matriks Q yang beroder 2×4, maka matriks B merupakan matriks dengan susunan kolom yang merupakan replikasi (pengulangan) dari matriks Q, sehingga setiap kolomnya merupakan replikasi dari 8 kolom utama, yaitu kolom pertama, kolom kedua, kolom ketiga, kolom keempat, kolom ke-$(n-3)$, kolom ke-$(n-2)$, kolom ke-$(n-1)$, dan kolom ke-n .

Dengan demikian, akan dibuktikan bahwa pada kedelapan kolom tersebut, penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada kolom yang sama ialah k.

Selanjutnya, didefinisikan $\sum R_{k_1}, \sum R_{k_2}, \sum R_{k_3}, \sum R_{k_4}, \sum R_{k_{(n-3)}}, \sum R_{k_{(n-2)}},$

$\sum R_{k_{(n-1)}}$ dan $\sum R_{k_n}$ berturut – turut sebagai penjumlahan dari setiap elemen yang terdapat pada kolom pertama, kolom kedua, kolom ketiga, kolom keempat, kolom ke-$(n-3)$, kolom ke-$(n-2)$, kolom ke-$(n-1)$, dan kolom ke-n.

Berikut ini akan diberikan tabel nilai penjumlahan dari kedelapan kolom utama tersebut .

Tabel 3.15

Nilai penjumlahan kedelapan kolom utama

Penjumlahan kolom ke	Formula	Nilai
$4i-3$	$(r_{1,4i-3} + r_{3,4i-3}, \ldots + r_{m-1,4i-3}) + (r_{2,4i-3} + r_{4,4i-3} + \cdots + r_{m,4i-3})$	$p(4pq+1)$
$4i-2$	$(r_{1,4i-2} + r_{3,4i-2} + \cdots + r_{m-1,4i-2}) + (r_{2,4i-2} + r_{4,4i-2} + \cdots + r_{m,4i-2})$	$p(4pq+1)$
$4j-1$	$(r_{1,4j-1} + r_{3,4j-1} + \cdots + r_{m-1,4j-1}) + (r_{2,4j-1} + r_{4,4j-1} + \cdots + r_{m,4j-1})$	$p(4pq+1)$
$4j$	$(r_{1,4j} + r_{3,4j} + \cdots + r_{m-1,4j}) + (r_{2,4j} + r_{4,4j} + \cdots + r_{m,4j})$	$p(4pq+1)$
$n+4-4i$	$(r_{1,n+1-4i} + r_{3,n+1-4i} + \cdots + r_{m-1,n+1-4i}) + (r_{2,n+1-4i} + r_{4,n+1-4i} + \cdots + r_{m,n+1-4i})$	$p(4pq+1)$
$n+3-4i$	$(r_{1,n+2-4i} + r_{3,n+2-4i} + \cdots + r_{m-1,n+2-4i}) + (r_{2,n+2-4i} + r_{4,n+2-4i} + \cdots + r_{m,n+2-4i})$	$p(4pq+1)$
$n+2-4j$	$(r_{1,n+3-4j} + r_{3,n+3-4j} + \cdots + r_{m-1,n+3-4j}) + (r_{2,n+3-4j} + r_{4,n+3-4j} + \cdots + r_{m,n+3-4j})$	$p(4pq+1)$
$n+1-4j$	$(r_{1,n+4-4j} + r_{3,n+4-4j} + \cdots + r_{m-1,n+4-4j}) + (r_{2,n+4-4j} + r_{4,n+4-4j} + \cdots + r_{m,n+4-4j})$	$p(4pq+1)$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap kolom yang berada pada matriks R akan memiliki nilai yang sama yaitu k.

Kasus II.d.

Pada butir ini, akan ditunjukan bahwa nilai penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama ialah l.

Agar persegi-panjang R merupakan persegi-panjang-ajaib, maka penjumlahan dari setiap elemen pada baris yang sama harus bernilai l, dengan

$$l = \frac{n}{2}(1 + mn)$$

Pertama, didefinisikan $\sum B_i$, $\sum C_i$, $\sum(Y_1)_i$, $\sum\left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i$, dan $\sum R_i$ berturut – turut sebagai nilai penjumlahan dari setiap elemen yang berada pada baris ke-i dari matriks $B, C, Y_1, \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2$, dan R.

Untuk $= 1, 3, 5, \dots, 2p - 1$, diperoleh

$$\sum B_i = \frac{(0+3+1+2)m}{4} = \frac{6n}{4}$$

Karena $n = 2q$, maka

$$\sum B_i = \frac{6(2q)}{4} = 3q$$

$$\sum(Y_1)_i = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1 + 2q - 3) \times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(2q - 2) + \left(4q^2(i - 1\,)\right)$$

$$= q(q - 1) + \left(4q^2(i - 1\,)\right)$$

$$\sum\left(\left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)_i = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq - 2q + 1 + 4pq - 3)\right) \times 2 - \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(8pq - 2q - 2) - \left(4q^2(i - 1\,)\right)$$

$$= q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(i - 1\,)\right)$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \sum B_i + \sum C_i$$

$$= \sum B_i + \sum (Y_1)_i + \left(\left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)_i$$

$$= 3q + q(q-1) + \left(4q^2(i-1\,)\right) + q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(i-1\,)\right)$$

$$= q(q - 1 + 4pq - q - 1 + 3)$$

$$= q(4pq + 1)$$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \frac{n}{2}(1 + mn) = l$$

Sedangkan untuk $j = 2, 4, 6, \dots, 2p$, diperoleh

$$\sum B_j = \frac{(0+3+1+2)m}{4} = \frac{6n}{4}$$

Karena $n = 2q$, maka

$$\sum B_j = \frac{6(2q)}{4} = 3q$$

$$\sum (Y_1)_j = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(4pq - 2q + 1 + 4pq - 3)\right) \times 2 - \left(\frac{4q(j-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(8pq - 2q - 2) - \left(4q^2(j-1\,)\right)$$

$$= q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j-1\,)\right)$$

$$\sum \left(\left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)_1 = \left(\frac{\frac{q}{2}}{2}(1 + 2q - 3) \times 2\right) + \left(\frac{4q(i-1)2q}{2}\right)$$

$$= \frac{q}{2}(2q - 2) + \left(4q^2(j-1\,)\right)$$

$$= q(q-1) + \left(4q^2(j-1\,)\right)$$

Karena $R = B + C$ dimana $C = \left(Y_1 \middle| \left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \sum B_i + \sum C_i$$

$$= \sum B_i + \sum (Y_1)_i + \left(\left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)_i$$

$$= 3q + q(4pq - q - 1) - \left(4q^2(j-1\,)\right) + q(q-1) + \left(4q^2(j-1\,)\right)$$

$$= q(q - 1 + 4pq - q - 1 + 3)$$

$$= q(4pq + 1)$$

Karena $p = \frac{m}{2}$ dan $q = \frac{n}{2}$, maka diperoleh

$$\sum R_i = \frac{n}{2}(1 + mn) = l$$

Dengan demikian, terbukti bahwa penjumlahan dari setiap elemen dari setiap baris yang berada pada matriks R akan memiliki nilai yang sama yaitu l.

Lebih lanjut, berdasarkan pembuktian pada kasus II.a, kasus II.b, kasus II.c, dan kasus II.d, dan pembuktian pada kasus I, maka diperoleh pembuktian yang diinginkan. ■

Selanjutnya, akan diberikan contoh dari persegi-panjang-ajaib berdasarkan teorema 3.2 untuk q ganjil dan q genap.

Contoh untuk q ganjil.

Misalkan ingin dibentuk persegi-panjang-ajaib R dengan order 6×8. Maka diperoleh $p = 3$ dan $q = 4$, sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Karena $X = A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (A.K_q) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka diperoleh

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, karena $Y = 4(X \otimes 1'_2) + 1_{2p} \otimes 1'_{2q} = (Y_1 | Y_2)$, maka diperoleh

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 9 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 9 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 17 & 17 & 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 29 \\ 29 & 29 & 25 & 25 & 21 & 1 & 17 & 17 \\ 33 & 33 & 37 & 37 & 41 & 41 & 45 & 45 \\ 41 & 41 & 45 & 45 & 37 & 37 & 33 & 33 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, karena $= \left(Y_1 | \left(K_p \otimes I_2\right) Y_2\right)$, maka diperoleh

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 41 & 41 & 45 & 45 \\ 13 & 13 & 9 & 9 & 37 & 37 & 33 & 33 \\ 17 & 17 & 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 29 \\ 29 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 & 17 & 17 \\ 33 & 33 & 37 & 37 & 9 & 9 & 13 & 13 \\ 45 & 45 & 41 & 41 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dan karena $B = 1_p \otimes \left(Q_e | Q_a | \, 1'_{\frac{q-3}{2}} \otimes (Q_b | Q_a) \middle| \, Q_e \right)$, didapat

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Akhirnya, dengan menggunakan teorema 3.2, diperoleh persegi-panjang- ajaib R yaitu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 41 & 44 & 46 & 47 \\ 16 & 13 & 11 & 10 & 40 & 37 & 35 & 34 \\ 17 & 20 & 22 & 23 & 25 & 28 & 30 & 31 \\ 32 & 29 & 27 & 26 & 24 & 21 & 19 & 18 \\ 33 & 36 & 38 & 39 & 9 & 12 & 14 & 15 \\ 48 & 45 & 43 & 42 & 8 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh untuk q genap

misalkan ingin dibentuk persegi-panjang-ajaib R dengan order 8×8. Maka diperoleh $p = 4$ dan $q = 4$, sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Karena $X = A\otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (A.K_q)\otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, maka diperoleh

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 18 & 17 & 16 & 15 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, karena $Y = 4(X \otimes 1'_2) + 1_{2p}\otimes 1'_{2q} = (Y_1|Y_2)$, maka diperoleh

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 9 & 13 & 13 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 13 & 13 & 9 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 29 & 33 & 33 & 37 & 37 \\ 37 & 37 & 33 & 33 & 29 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 \\ 41 & 41 & 45 & 45 & 49 & 49 & 53 & 53 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 53 & 53 & 49 & 49 & 45 & 45 & 41 & 41 \\ 61 & 61 & 65 & 65 & 69 & 69 & 73 & 73 & 77 & 77 \\ 77 & 77 & 73 & 73 & 69 & 69 & 65 & 65 & 61 & 61 \\ 81 & 81 & 85 & 85 & 89 & 89 & 93 & 93 & 97 & 97 \\ 97 & 97 & 93 & 93 & 89 & 89 & 85 & 85 & 81 & 81 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, karena $= \left(Y_1\middle|\left(K_p\otimes I_2\right)Y_2\right)$, maka diperoleh

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 89 & 93 & 93 & 97 & 97 \\ 17 & 17 & 13 & 13 & 9 & 89 & 85 & 85 & 81 & 81 \\ 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 69 & 73 & 73 & 77 & 77 \\ 37 & 37 & 33 & 33 & 29 & 69 & 65 & 65 & 61 & 61 \\ 41 & 41 & 45 & 45 & 49 & 49 & 53 & 53 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 53 & 53 & 49 & 49 & 45 & 45 & 41 & 41 \\ 61 & 61 & 65 & 65 & 69 & 29 & 33 & 33 & 37 & 37 \\ 77 & 77 & 73 & 73 & 69 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 \\ 81 & 81 & 85 & 85 & 89 & 9 & 13 & 13 & 17 & 17 \\ 97 & 97 & 93 & 93 & 89 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan karena $B = \left(1_p \otimes 1'_{\frac{n}{2}}\right) \otimes Q$, didapat

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Akhirnya, dengan menggunakan teorema 3.2, diperoleh persegi-panjang- ajaib R yaitu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 90 & 95 & 96 & 97 & 99 \\ 20 & 18 & 14 & 13 & 12 & 91 & 86 & 85 & 84 & 82 \\ 21 & 23 & 27 & 28 & 30 & 70 & 75 & 76 & 77 & 79 \\ 40 & 38 & 34 & 33 & 32 & 70 & 66 & 65 & 64 & 62 \\ 41 & 43 & 47 & 48 & 49 & 50 & 55 & 56 & 57 & 59 \\ 60 & 58 & 54 & 53 & 52 & 51 & 46 & 45 & 44 & 42 \\ 61 & 63 & 67 & 68 & 69 & 30 & 35 & 36 & 37 & 39 \\ 80 & 78 & 74 & 73 & 72 & 31 & 26 & 25 & 24 & 22 \\ 81 & 83 & 87 & 88 & 89 & 10 & 15 & 16 & 17 & 19 \\ 100 & 98 & 94 & 93 & 92 & 11 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

BAB 4
KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dibahas beberapa metode untuk mengkonstruksi persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$. Hasil yang telah diperoleh dapat disimpulkan sebagai berikut

- Persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$ dengan entri bilangan bulat $\{1, 2, \dots, mn\}$ tidak dapat dibentuk untuk nilai m genap dengan n ganjil, dan m ganjil dengan n genap.
- Persegi-panjang-ajaib berukuran $3 \times n$ dapat diperoleh untuk n ganjil dengan menggunakan dua metode, yaitu metode blok-pembangun dan metode permutasi-himpunan.
- Persegi-panjang-ajaib berukuran $m \times n$ dengan m dan n genap dapat diperoleh dengan menggunakan aturan Kronecker.

Masih diperlukan penelitian lebih lanjut untuk memperoleh bentuk umum dari persegi-panjang-ajaib $m \times n$ dengan m dan n ganjil.

DAFTAR PUSTAKA

(n.d.). Retrieved Februari 6, 2011, from http://homepage2.nifty.com/googol/magcube/en/rectangles/htm

Anderson, D. (2001). Retrieved December 6, 2006, from http://illuminations.ntcm.org/LessonDetail.aspx?id=L263

Ballew, P. (n.d.). Retrieved December 7, 2006, from http://www.pballew.net/magsquar.html

Barui, S. (2006). *On Construction Of Magic Rectangles.* Bombay: Indian Institute Of Technology.

Farrar, M. (n.d.). Retrieved December 6, 2006, from http://www.markfarrar.co.uk/msqhst01.htm

Gardner, M. (1988). *Time travel and other mathematical bewilderments* .

Grogono, A. (2004). Retrieved December 6, 2006, from http://www/grgono.com/magic/history.ph

Hagedorn, T. (1999). Discrete Mathematics 207. *Magic rectangles revisited* , 65-72.

Swaney, M. (2000). *Mark Swaney on the history of magic*. Retrieved December 7, 2006, from http://www.ismaili.net/mirrors/ikhwan_08/magic_squares/html

Wallis, W. (2001). *Magic Graphs.* Boston, Basel, Berlin: Birkhauser.