



UNIVERSITAS INDONESIA

MAX CHART: CHART GABUNGAN \bar{X} DAN S

SKRIPSI

RIFZA PUTRA KURNIAWAN
0606028930

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2010



UNIVERSITAS INDONESIA

MAX CHART: CHART GABUNGAN \bar{X} DAN S

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

**RIFZA PUTRA KURNIAWAN
0606028930**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2010**

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Rifza Putra Kurniawan
NPM : 0606028930
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Max Chart: Chart Gabungan \bar{X} dan S

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Dian Lestari	()
Pembimbing	: Dra. Saskya Mary, M.Si.	()
Penguji	: Dr. Dian Lestari	()
Penguji	: Dra. Saskya Mary, M.Si.	()
Penguji	: Dhian Widya, S.Si., M.Kom.	()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 20 Desember 2010

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dalam waktu 10 bulan terhitung dari Februari 2010. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar – besarnya kepada:

- (1) Ibu Dian Lestari, selaku dosen pembimbing pertama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
- (2) Ibu Saskya Mary, M.Si., selaku dosen pembimbing kedua yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
- (3) Ibu Suarsih Utama, selaku pembimbing akademik yang selalu memberikan semangat kepada penulis selama masa penyusunan skripsi;
- (4) Seluruh dosen Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan bimbingan dan membantu penulis dalam menimba ilmu di Universitas Indonesia;
- (5) Seluruh pengurus Departemen Matematika FMIPA UI atas kerja samanya selama ini;
- (6) Pihak – pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang dihubungi oleh penulis via telepon, email, maupun pesan singkat (SMS) yaitu Prof. Gemai Chen (Kanada), Kak Bong (Belanda), Pak Arief Gusnanto (Inggris), Mbak Lenny (Indonesia), staf Universitas Manitoba (Kanada), Prof. Smiley W. Cheng (Kanada), Mbak Desti (Indonesia), dan Mbak Wina (Amerika Serikat)
- (7) Bapak dan Mama yang senantiasa memberikan bantuan dukungan material dan moral serta kakak yang saat ini sedang menempuh S1 ekstensi yang senantiasa memberikan semangat;

(8) Nita, terima kasih untuk dukungannya selama ini, selama proses penyusunan skripsi ini. Terima kasih untuk semua waktu, dukungan, semangat, masukan, dan saran yang telah diberikan;

(9) Kru Bogor: Ita, Nita, dan staf perpustakaan pusat IPB , terima kasih telah membantu penulis mencari referensi di IPB;

(10) Kru Bandung: Ardhesa, Nita, Farah, Tisna, Dicky, dan staf perpustakaan pusat ITB, terima kasih telah membantu penulis mencari referensi di ITB;

(11) Teman – teman seperjuangan, angkatan 2006, pada umumnya, khususnya Ali, Bekti, Farah, Rafly, Reza, Teguh, Tisna, serta Arif (2007), Adit (2007) dan Adhi (2008), terima kasih untuk dukungannya;

(12) Dedy, Devi, Dicky (FISIP), Erma, Femo (FE), Firdi, Gezag, Ghafur (Fasilkom), Ita, Maya, Nia, terima kasih untuk dukungannya meskipun kita tidak sering bertemu.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun senantiasa penulis terima dengan tangan terbuka.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rifza Putra Kurniawan
NPM : 0606028930.
Program Studi : S1
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Max Chart: Chart Gabungan \bar{X} dan S.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 20 Desember 2010
Yang menyatakan



(Rifza Putra Kurniawan)

ABSTRAK

Nama : Rifza Putra Kurniawan
Program Studi : Matematika
Judul : Max Chart: Chart Gabungan \bar{X} dan S

Teknik *control chart* telah digunakan secara luas dalam bidang industri untuk memantau proses produksi dalam rangka peningkatan kualitas. Metode yang masih digunakan untuk mendeteksi adanya sebab terusut adalah metode Shewart. *Control chart* yang biasa digunakan adalah bagan kendali \bar{X} untuk memantau pusat proses dan bagan kendali S atau R untuk memantau variabilitas proses. *Chart* gabungan dirancang agar dapat memantau *mean* dan standar deviasi proses secara bersamaan. Dalam skripsi ini metode yang digunakan untuk merancang *chart* gabungan adalah metode Max Chart. Metode ini menggunakan fungsi maksimum untuk dua statistik.

Kata kunci : chart gabungan, *Max Chart*, metode Shewart.
ix+63 halaman ; 4 gambar, 4 tabel
Daftar Pustaka : 15 (1931-2009)

ABSTRACT

Name : Rifza Putra Kurniawan
Program Study : Mathematics
Title : Max Chart: Combined Chart \bar{X} and S

Control chart techniques have been widely used in industries to monitor a process in quality improvement. The method which has been used to detect assignable cause is Shewart's method. Control chart that usually used is \bar{X} chart to monitor process mean and S or R chart to monitor process variability. Combined chart constructed in order to monitor mean and standard deviation simultaneously. In this *skripsi*, the method that used to construct combined chart is Max Chart. This method applies maximum function of two statistics.

Key Words : combined chart, Max Chart, Shewart's method.
ix+63 pages ; 4 figures, 4 tables
Bibliography : 15 (1931-2009)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	v
ABSTRAK	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR LAMPIRAN.....	ix
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Pembatasan Masalah	2
1.5 Sistematika Penulisan.....	3
2. LANDASAN TEORI	4
2.1 Distribusi Normal	4
2.1.1 Distribusi \bar{X}	5
2.2 Distribusi Chi Square	6
2.3 Independensi Variabel Acak.....	10
2.3.1 Distribusi $(n - 1)S^2/\sigma^2$	18
2.4. Estimasi Parameter.....	21
2.5. Bagan Kendali Shewart.....	25
3. MAX CHART	29
3.1 Transformasi Variabel untuk Max Chart.....	29
3.2 Distribusi $M(n_i)$	32
3.3 Konstruksi Max Chart.....	35
4. CONTOH APLIKASI.....	41
4.1 Sumber Data.....	41
4.2 Data	41
4.3 Analisis Data.....	41
4.3.1 Metode Shewart.....	41
4.3.2 Metode Max Chart.....	43
5. KESIMPULAN DAN SARAN	53
5.1 Kesimpulan	53
5.2 Saran.....	53
DAFTAR PUSTAKA.....	54
LAMPIRAN.....	55

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1.	Output Minitab.....	42
Gambar 4.2.	Bagan Kendali Max Chart.....	45
Gambar 4.3.	Bagan Kendali Max Chart.....	48
Gambar 4.4.	Bagan Kendali Max Chart.....	51

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1.	<i>center line</i> (CL) dan <i>upper control limits</i> (UCL) untuk <i>Max Chart</i> untuk beberapa nilai probabilitas kesalahan jenis pertama (α)....	37
Tabel 4.1.	Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart.....	44
Tabel 4.2.	Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart.....	47
Tabel 4.3.	Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart.....	50

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.....	55
Lampiran 2.....	57
Lampiran 3.....	58
Lampiran 4.....	61
Lampiran 5.....	63

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep mengenai *Statistical Process Control* (SPC) telah diperkenalkan oleh Shewart sejak tahun 1942. Dalam hal ini Shewart memperkenalkan suatu bagan yang dinamakan *control chart* atau bagan kendali. Bagan kendali ini membuat proses pengendalian mutu berjalan efektif. (Kreyszig, 1976:228).

Hingga saat ini, metode Shewart masih digunakan untuk mendeteksi adanya sebab terusut dengan memanfaatkan informasi mengenai pusat dan variabilitas proses. Adapun teknik *control chart* yang biasa digunakan adalah bagan kendali \bar{X} untuk mengawasi pusat proses dan bagan kendali *S* atau *R* untuk mengawasi variabilitas proses.

Untuk mengawasi pusat proses, *mean* ditaksir dengan rata – rata, sedangkan standar deviasi dapat digunakan untuk mengawasi variabilitas proses.

Namun, dalam *Statistical Process Control* (SPC), tidaklah cukup hanya mengawasi rata-rata atau standar deviasi (atau *range*) dari subgrup rasional yang ada secara sendiri - sendiri. Sehingga, diperlukan suatu bagan kendali yang dapat digunakan untuk memantau pusat dan variabilitas proses secara bersamaan.

Bagan kendali yang digunakan untuk mengawasi rata – rata adalah bagan \bar{X} dan bagan kendali untuk mengawasi standar deviasi adalah bagan *S*.

Agar lebih efisien, para ahli merancang suatu bagan kendali yang dibentuk dari pasangan bagan kendali Shewhart atau biasa dilambangkan sebagai bagan kendali \bar{X}/S (Hawkins and Deng, 2009:415).

Beberapa ahli yang pernah merancang *chart* gabungan antara lain Chan, Cheng, dan Spiring (1990), Domangue dan Patch (1991) serta Chao dan Cheng (1996).

Chart yang dihasilkan oleh Chan, Cheng, dan Spiring dapat mendeteksi perubahan pusat proses dan atau variabilitas proses yang terjadi tetapi, plotnya tidak sederhana. Sedangkan, Domangue dan Patch berhasil merancang *chart* yang sensitif terhadap perubahan pusat dan atau variabilitas proses, tetapi tidak dapat

mengindikasikan perubahan apakah yang terjadi. Chao dan Cheng juga belum berhasil merancang *chart* gabungan yang optimal.

Oleh karena itu, tugas akhir ini akan membahas tentang *chart* gabungan yang sederhana namun mampu mendeteksi dengan jelas apakah pusat proses tidak terkendali, variabilitas proses tidak terkendali, atau kedua – duanya tidak terkendali.

Ada tiga metode yang dapat digunakan untuk merancang bagan kendali tersebut. Tiga metode tersebut adalah Metode *Max Chart*, Metode *Generalized Likelihood Ratio* (GLR), dan Metode Pendekatan *Fisher*.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini dirumuskan sebagai berikut:

Bagaimana cara menggabungkan dua bagan kendali yaitu bagan \bar{X} dan bagan S dengan menggunakan metode *Max Chart* untuk memperoleh informasi mengenai *mean* dan standar deviasi dari suatu proses produksi?

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

Mempelajari bagaimana cara menggabungkan dua bagan kendali yaitu bagan \bar{X} dan bagan S dengan menggunakan metode *Max Chart*

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

Karakteristik mutu yang diperhatikan hanya terdiri dari satu variabel.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab. Bab I merupakan pendahuluan. Bab ini terdiri dari Latar Belakang Masalah, Perumusan Masalah, Tujuan Penulisan, Pembatasan Masalah, dan Sistematika Penulisan. Bab II merupakan landasan teori. Bab III membahas mengenai cara penggabungan bagan kendali \bar{X} dan bagan kendali S dengan menggunakan metode *Max Chart*. Bab IV berisi contoh aplikasi. Bab V merupakan penutup yang meliputi kesimpulan dan saran.



BAB 2 LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi Normal

Suatu variabel acak X yang mempunyai bentuk p.d.f. sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

dikatakan mempunyai distribusi normal dan p.d.f. nya disebut p.d.f. normal.

Distribusi normal mempunyai dua parameter yaitu mean dan variansi yang biasa dinotasikan oleh μ dan σ^2 . Fungsi densitas (p.d.f.) dari distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 biasa dinotasikan dengan $N(\mu, \sigma^2)$.

Sedangkan, fungsi pembangkit momen (M.G.F.) dari distribusi normal yaitu:

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad (2.2)$$

Variabel acak X dikatakan berdistribusi normal standar bila $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ atau $X \sim N(0,1)$, fungsi densitas (p.d.f)-nya adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

dan fungsi pembangkit momen (M.G.F) adalah

$$M(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad (2.4)$$

(Hogg and Craig, 1995:139-140)

Teorema 2.1

Jika variabel acak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ di mana $\sigma^2 > 0$, maka variabel acak $W = \frac{X-\mu}{\sigma}$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Bukti:

$$\begin{aligned}
 G(w) &= \Pr(W \leq w) = \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq w\right) = \Pr(X \leq w\sigma + \mu) \\
 &= \int_{-\infty}^{w\sigma + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Misal $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma}$ dan batas –batasnya menjadi sebagai berikut:

- Jika x menuju $-\infty$, maka $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ menuju $-\infty$
- Jika $x = w\sigma + \mu$, maka $y = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{w\sigma + \mu - \mu}{\sigma} = \frac{w\sigma}{\sigma} = w$

Sehingga persamaan (2.5) menjadi:

$$\begin{aligned}
 G(w) &= \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \cdot \sigma dy \\
 &= \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy
 \end{aligned}$$

p.d.f dari W adalah $g(w)$ di mana $g(w) = G'(w)$.

$$\begin{aligned}
 g(w) &= G'(w) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right], \quad -\infty < w < \infty
 \end{aligned}$$

Bentuk p.d.f. di atas merupakan bentuk p.d.f. untuk distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Jadi, $W \sim N(0,1)$.

(Hogg and Craig, 1995:141)

2.1.1 Distribusi \bar{X}

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak berukuran n dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$.

Kemudian didefinisikan suatu variabel acak baru yaitu Y di mana $Y = \bar{X}$.

Variabel acak Y dapat ditulis dalam bentuk lain seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 Y = \bar{X} &= \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \\
 &= \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}
 \end{aligned}$$

dan M.G.F. untuk Y adalah:

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t\left(\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}\right)}\right) \\
 &= E\left(e^{t\frac{X_1}{n} + t\frac{X_2}{n} + \dots + t\frac{X_n}{n}}\right) \\
 &= E\left(e^{\frac{t}{n}X_1} \cdot e^{\frac{t}{n}X_2} \dots e^{\frac{t}{n}X_n}\right) \\
 &= E\left(e^{\frac{t}{n}X_1}\right) \cdot E\left(e^{\frac{t}{n}X_2}\right) \dots E\left(e^{\frac{t}{n}X_n}\right) \\
 &= \exp\left(\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2 t^2/n^2}{2}\right) \cdot \exp\left(\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2 t^2/n^2}{2}\right) \dots \exp\left(\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2 t^2/n^2}{2}\right) \\
 &= \exp\left[n\left(\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2 t^2}{2n^2}\right)\right] \\
 &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right) \\
 M_Y(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)
 \end{aligned}$$

Bentuk M.G.F. di atas menunjukkan bahwa $Y = \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

2.2 Distribusi Chi Square

Diketahui bahwa X variabel acak dengan p.d.f. gamma adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp\left[-\frac{x}{\beta}\right], \quad 0 < x < \infty$$

$$\text{dengan M.G.F. : } M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta}$$

di mana α dan β adalah parameter untuk distribusi Gamma.

Salah satu kasus khusus pada distribusi Gamma yaitu $\alpha = \frac{r}{2}$, dengan r bilangan bulat positif dan $\beta = 2$.

Berarti, p.d.f. dari variabel acak kontinu X adalah:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2^{r/2}} \cdot x^{r/2-1} \cdot \exp\left[-\frac{x}{2}\right], \quad 0 < x < \infty \\
 &= 0, \quad \text{lainnya}
 \end{aligned}$$

(2.6)

dan fungsi pembangkit momen (M.G.F.) – nya adalah:

$$M(t) = (1 - 2t)^{-r/2}, \quad t < \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Variabel acak kontinu X yang mempunyai p.d.f. seperti di atas dikatakan berdistribusi Chi-Square dengan r sebagai parameter dan sering disebut sebagai derajat bebas.

Apabila X berdistribusi Chi-Square dengan derajat bebas r , maka ditulis: $X \sim \chi^2(r)$.
(Hogg and Craig, 1995:134)

Teorema 2.2

Jika variabel acak W berdistribusi normal standar atau $N(0,1)$, maka variabel acak $V = W^2$ berdistribusi χ^2_1 .

Bukti:

$V = W^2$ di mana $W \sim N(0,1)$.

Fungsi distribusi dari V yaitu:

$$\begin{aligned} G(v) &= \Pr(V \leq v) \\ &= \Pr(W^2 \leq v) \\ &= \Pr(-\sqrt{v} \leq w \leq \sqrt{v}) \\ &= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right] dw \\ G(v) &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right] dw, \quad 0 \leq v \\ &= 0, \quad v < 0 \end{aligned}$$

Misalkan $w = \sqrt{y}$ maka $\frac{dw}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ dan batas – batasnya menjadi sebagai berikut:

- Jika w menuju 0, maka $y = w^2$ menuju 0
- Jika $w = \sqrt{v}$, maka $y = w^2 = (\sqrt{v})^2 = v$

Sehingga, persamaan di atas menjadi:

$$G(v) = 2 \cdot \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{y}{2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$$G(v) = \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left[-\frac{y}{2}\right] dy \quad , 0 \leq v$$

p.d.f. nya adalah:

$$g(v) = G'(v) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \quad , 0 < v < \infty$$

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \quad , 0 < v < \infty \\ = 0 \quad , \quad \text{lainnya}$$

Karena $\int_0^\infty g(v)dv = 1$, maka

$$\int_0^\infty g(v)dv = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv$$

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv$$

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} dv$$

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

dan $g(v)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$g(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \quad , 0 < v < \infty \\ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \quad , 0 < v < \infty$$

Bentuk p.d.f. tersebut merupakan bentuk p.d.f. dari χ_1^2 .

Jadi, $V \sim \chi_1^2$ atau dengan kata lain V berdistribusi Chi Square berderajat bebas 1.

(Hogg and Craig, 1995:144)

Teorema 2.3

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah n variabel acak yang independen yang masing – masing berdistribusi $\chi^2_{(r_1)}, \chi^2_{(r_2)}, \dots, \chi^2_{(r_n)}$. Maka variabel acak

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ berdistribusi Chi Square dengan derajat bebas

$r_1 + r_2 + \dots + r_n$ atau dapat ditulis $Y \sim \chi^2_{(r_1+r_2+\dots+r_n)}$.

Bukti:

$$\begin{aligned} M_i(t) &= E(e^{tX_i}) \\ &= (1 - 2t)^{-r_i/2}, \quad t < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\ &= E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) \\ &= E(e^{tX_1+tX_2+\dots+tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1}) \cdot E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) \\ &= (1 - 2t)^{-r_1/2} \cdot (1 - 2t)^{-r_2/2} \dots (1 - 2t)^{-r_n/2} \\ &= (1 - 2t)^{-r_1/2 - r_2/2 - \dots - r_n/2} \\ M_Y(t) &= (1 - 2t)^{-(r_1+r_2+\dots+r_n)/2}, \quad t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bentuk m.g.f. di atas merupakan m.g.f. untuk distribusi Chi Square dengan derajat bebas $r_1 + r_2 + \dots + r_n$.

Jadi, $Y \sim \chi^2_{(r_1+r_2+\dots+r_n)}$.

(Hogg and Craig, 1995:210)

Teorema 2.4

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak berukuran n dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$.

Variabel acak

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

berdistribusi Chi-Square dengan derajat bebas n .

Bukti:

karena X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak berukuran n dari distribusi identik $N(\mu, \sigma^2)$, maka berdasarkan teorema 2.2, setiap variabel acak

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jika didefinisikan suatu variabel acak baru, misalkan Y di mana Y merupakan penjumlahan dari variabel acak $\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(X_1 - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - \mu)^2}{\sigma^2} + \dots + \frac{(X_n - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \dots + (X_n - \mu)^2}{\sigma^2} \\ Y &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.3, maka $Y \sim \chi_{(1+1+\dots+1)}^2$ atau dengan kata lain $Y \sim \chi_n^2$.
(Hogg and Craig, 1995:211)

2.3 Independensi Variabel Acak

Misalkan X_1 dan X_2 suatu variabel acak baik diskret atau kontinu yang mempunyai p.d.f. bersama $f(x_1, x_2)$ dan p.d.f. marginal $f_1(x_1)$ dan $f_2(x_2)$. Jika dikaitkan dengan definisi p.d.f. bersyarat $f_{2|1}(x_2|x_1)$, maka p.d.f. bersama $f(x_1, x_2)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2) = f_{2|1}(x_2|x_1)f_1(x_1)$$

Misalkan diberikan contoh di mana $f_{2|1}(x_2|x_1)$ tidak bergantung pada x_1 , maka p.d.f. marginal dari X_2 untuk variabel acak kontinu adalah:

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(x_2|x_1)f_1(x_1) dx_1 \\ &= f_{2|1}(x_2|x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

$$= f_{2|1}(x_2|x_1)$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_{2|1}(x_2|x_1)f_1(x_1) \\ &= f_1(x_1)f_2(x_2) \end{aligned}$$

Jadi, X_1 independen terhadap X_2 .

Teorema 2.5

Misalkan variabel acak X_1 dan X_2 mempunyai p.d.f. bersama $f(x_1, x_2)$. Maka, X_1 dan X_2 independen jika dan hanya jika $f(x_1, x_2)$ dapat ditulis sebagai perkalian dari fungsi nonnegatif dari x_1 saja dan fungsi nonnegatif dari x_2 saja. Atau dapat ditulis

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$$

di mana $g(x_1) > 0$, $x_1 \in \mathcal{A}_1$ dan $g(x_1) = 0$ untuk lainnya, serta $h(x_2) > 0$, $x_2 \in \mathcal{A}_2$ dan $h(x_2) = 0$ untuk lainnya.

Bukti:

- Jika X_1 dan X_2 independen, maka $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$
Berdasarkan pembahasan sebelumnya, jika X_1 dan X_2 independen, maka $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Kemudian, syarat $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$ terpenuhi.
- Jika $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$, maka X_1 dan X_2 independen
Didefinisikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) dx_1 = c$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x_2) dx_2 = d$$

di mana c dan d adalah konstanta.

P.d.f. marginal untuk masing – masing variabel acak X_1 dan X_2 , di mana dalam pembuktian ini digunakan variabel random kontinu, adalah:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)h(x_2) dx_2 \\ &= g(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(x_2) dx_2 \\ &= g(x_1)d \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)h(x_2) dx_1 \\ &= h(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) dx_1 \\ &= h(x_2)c \end{aligned}$$

konstanta c dan d memenuhi

$$\begin{aligned} cd &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x_2) dx_2 \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)h(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

dengan menggunakan p.d.f. marginal dari masing – masing variabel acak dan $cd = 1$, diperoleh

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= g(x_1)h(x_2)cd \\
&= [g(x_1)d][h(x_2)c] \\
&= f_1(x_1)f_2(x_2)
\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa X_1 dan X_2 independen. Untuk pembuktian di mana variabel acaknya diskret dapat ditunjukkan dengan mengganti integral dengan somasi.

(Hogg and Craig, 1995:100-103)

Teorema 2.6

Misalkan X_1 dan X_2 adalah variabel acak yang independen. Misalkan $g(x_1)$ merupakan fungsi yang hanya terdiri dari variabel x_1 dan $h(x_2)$ merupakan fungsi yang hanya terdiri dari variabel x_2 . Maka, variabel acak $U = g(X_1)$ dan $V = h(X_2)$ independen.

Bukti:

Diasumsikan U dan V adalah variabel acak kontinu. Untuk sembarang $u \in \mathfrak{R}$ dan $v \in \mathfrak{R}$, didefinisikan

$$A_u = \{x_1: g(x_1) \leq u\} \text{ dan } B_v = \{x_2: h(x_2) \leq v\}$$

Maka c.d.f. bersama dari (U, V) adalah:

$$\begin{aligned}
F_{U,V}(u, v) &= Pr(U \leq u, V \leq v) \\
&= Pr(X_1 \in A_u, X_2 \in B_v) \\
&= Pr(X_1 \in A_u) \cdot Pr(X_2 \in B_v)
\end{aligned}$$

p.d.f. bersama dari (U, V) adalah:

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u, v) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} F_{U,V}(u, v) \right) \\
&= \left(\frac{d}{du} Pr(X_1 \in A_u) \right) \left(\frac{d}{dv} Pr(X_2 \in B_v) \right)
\end{aligned}$$

Notasi di atas mengindikasikan bahwa faktor pertama adalah fungsi yang hanya terdiri dari variabel u dan faktor kedua adalah fungsi yang hanya terdiri dari variabel v .

Jadi, U dan V independen.

(Casella and Berger, 1990:150)

Sebelum membahas mengenai distribusi dari $(n-1)S^2/\sigma^2$, akan dijelaskan terlebih dahulu independensi \bar{X} dan S^2 .

Jika diketahui $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$, $j = 1, 2, \dots, n$

Perhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \\ n\bar{X} &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \\ n\bar{X} - n\bar{X} + \bar{X} &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n - n\bar{X} + \bar{X} \\ \bar{X} &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n - (n-1)\bar{X} \\ \bar{X} &= X_1 + X_2 - \bar{X} + X_3 - \bar{X} + X_4 - \bar{X} \dots + X_n - \bar{X}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Dari (2.8) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}Y_1 &= \bar{X} \\ Y_2 &= X_2 - \bar{X} \\ Y_3 &= X_3 - \bar{X} \\ &\vdots \\ Y_n &= X_n - \bar{X}\end{aligned}$$

p.d.f bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n adalah:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \dots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left[-\frac{[(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]}{2\sigma^2}\right] \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left[-\frac{[\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2]}{2\sigma^2}\right] ; -\infty < x_j < \infty, \\ & j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (2.9)$$

dengan transformasi $Y_1 = \bar{X}$; $Y_2 = X_2 - \bar{X}$; ... ; $Y_n = X_n - \bar{X}$ merupakan transformasi yang memetakan satu-satu dari

$\mathcal{A} = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) | -\infty < X_j < \infty\}$ ke $\mathcal{B} = \{(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) | -\infty < Y_j < \infty\}$ di mana $j = 1, 2, \dots, n$.

sedangkan inversnya adalah:

$$X_1 = Y_1 - Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n$$

$$X_2 = Y_1 + Y_2$$

$$X_3 = Y_1 + Y_3$$

⋮

$$X_n = Y_1 + Y_n$$

dan *Jacobian*-nya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks J berukuran $n \times n$, maka untuk menghitung determinannya digunakan eliminasi Gauss-Jordan dan aturan Cramer.

Pertama – tama matriks J akan disederhanakan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1+B_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_1+B_3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots \xrightarrow{B_1+B_n} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$J = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh sebagai berikut:

$$|J| = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$|J| = n \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}_{(n-1) \times (n-1)}, \text{ matriks yang berukuran } (n-1) \times (n-1) \text{ merupakan}$$

matriks identitas, sehingga $|J| = n \cdot I = n$.

Jadi, nilai determinan matriks J adalah n.

Pada persamaan (2.9) terdapat bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n [(x_j - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)]^2 \\ &= \sum_{j=1}^n [(x_j - \bar{x})^2 + 2 \cdot (x_j - \bar{x}) \cdot (\bar{x} - \mu) + (\bar{x} - \mu)^2] \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + 2 \cdot (\bar{x} - \mu) \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + 2 \cdot (\bar{x} - \mu) \cdot \left[\sum_{j=1}^n x_j - n\bar{x} \right] + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + 2 \cdot (\bar{x} - \mu) \cdot [n\bar{x} - n\bar{x}] + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \quad (2.10)$$

Substitusi persamaan (2.10) ke persamaan (2.9):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{[\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2]}{2\sigma^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - \mu)^2]}{2\sigma^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2]}{2\sigma^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Dengan $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ dan $-\infty < X_j < \infty, j = 1, 2, \dots, n$

Karena $Y_1 = \bar{X}$ dan $X_1 = Y_1 - Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n$ maka

$$X_1 - Y_1 = -Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n.$$

Sehingga p.d.f. bersama dari Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= f(y_1 - y_2 - y_3 - \dots - y_n, y_1 + y_2, y_1 + y_3, \dots, y_1 + y_n) \cdot |J| \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{[(-y_2 - y_3 - \dots - y_n)^2 + (y_1 + y_2 - y_1)^2 + \dots + (y_1 + y_n - y_1)^2]}{2\sigma^2} - \frac{n(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \cdot n \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot \exp \left[- \frac{(-y_2 - y_3 - \dots - y_n)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{j=2}^n y_j^2}{2\sigma^2} - \frac{n(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \cdot n \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot \exp \left[- \frac{(-y_2 - y_3 - \dots - y_n)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{j=2}^n y_j^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[- \frac{n(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot \exp \left[- \frac{(-y_2 - y_3 - \dots - y_n)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{j=2}^n y_j^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[- \frac{n(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= g_2(y_2, y_3, \dots, y_n) \times g_1(y_1) \text{ di mana,} \end{aligned}$$

$$g_1(y_1) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[-\frac{n(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \text{ dan}$$

$$g_2(y_2, y_3, \dots, y_n) = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot \exp \left[-\frac{(-y_2 - y_3 - \dots - y_n)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{j=2}^n y_j^2}{2\sigma^2} \right]$$

Karena $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ merupakan perkalian dari $g_2(y_2, y_3, \dots, y_n)$ dan $g_1(y_1)$, maka berdasarkan teorema 2.5 Y_1 independen terhadap Y_2, Y_3, \dots, Y_n .

Diketahui $Y_1 = \bar{X}$ dan

$$(-Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n)^2 + \sum_{j=2}^n Y_j^2 = (X_1 - Y_1)^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2$$

Substitusi $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ akan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (X_1 - Y_1)^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2 \\ = (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \\ = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

Jika $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, maka

$$\begin{aligned} (-Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n)^2 + \sum_{j=2}^n Y_j^2 &= (X_1 - Y_1)^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= (n-1)S^2 \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= g_2(y_2, y_3, \dots, y_n) \times g_1(y_1) \\ &= g_2((n-1)S^2) \times g_1(\bar{X}) \end{aligned}$$

Karena S^2 dapat ditulis dalam fungsi yang hanya terdiri dari $(X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$, maka, \bar{X} dan S^2 independen.

2.3.1 Distribusi $(n-1)S^2/\sigma^2$

Pada subbab ini akan dibahas mengenai distribusi dari $(n-1)S^2/\sigma^2$.

Didefinisikan

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

maka,

$$\begin{aligned}
 (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [X_i - \mu - (\bar{X} - \mu)]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2] \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (\bar{X} - \mu) \cdot \left[\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right] + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (\bar{X} - \mu) \cdot [n\bar{X} - n\mu] + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n \cdot (\bar{X} - \mu) \cdot (\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2
 \end{aligned}$$

(2.11)

Dari persamaan (2.11), kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\sigma^2}$, maka diperoleh

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right]$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

atau

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

(2.11)

misalkan

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = W$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = W_1$$

dan

$$\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} = W_2$$

maka, persamaan (2.12) menjadi

$$W = W_1 + W_2 \quad (2.12)$$

Berdasarkan teorema 2.4, variabel W berdistribusi Chi Square dengan derajat bebas n . Sedangkan, dengan menggunakan informasi pada subbab 2.1.1 dan teorema 2.2, variabel W_1 berdistribusi Chi Square dengan derajat bebas 1.

Kemudian, berdasarkan pada independensi \bar{X} dan S^2 disimpulkan bahwa variabel W_1 dan W_2 independen.

Berdasarkan persamaan (2.12) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(e^{tW}) &= E(e^{t(W_1+W_2)}) \\ &= E(e^{tW_1}).E(e^{tW_2}) \end{aligned}$$

$$(1-2t)^{-n/2} = E(e^{tW_1}).(1-2t)^{-1/2} \quad , t < \frac{1}{2}$$

$$E(e^{tW_1}) = \frac{(1-2t)^{-n/2}}{(1-2t)^{-1/2}}$$

$$E(e^{tW_1}) = (1 - 2t)^{-(n-1)/2}, \quad t < \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

Bentuk m.g.f. pada persamaan (2.14) merupakan m.g.f. untuk distribusi Chi Square dengan derajat bebas $n - 1$.

Karena $W_1 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, maka berdasarkan teorema 2.3, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

Jadi, distribusi dari $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ adalah Chi Square dengan derajat bebas $n - 1$.

(Hogg and Craig, 1995:216)

2.4 Estimasi Parameter

Setiap distribusi mempunyai parameter yang spesifik. Parameter untuk distribusi normal yaitu μ dan σ . Sehingga, estimasi parameter yang akan dibahas dalam subbab ini adalah estimasi parameter untuk μ dan σ . Kedua parameter tersebut memegang peranan penting pada saat pembuatan bagan kendali Shewart. Jika parameter – parameter tersebut tidak diketahui, maka perlu dilakukan estimasi parameter. Metode untuk menaksir parameter – parameter tersebut ada beberapa cara, antara lain metode momen, metode *Maximum Likelihood*, dan metode *Least Square*. Pada subbab ini metode yang akan digunakan adalah metode *Maximum Likelihood*.

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak dari distribusi

$$N(\theta_1, \theta_2), \quad -\infty < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \infty$$

akan dicari $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$, *maximum likelihood estimators* (MLE) dari θ_1 dan θ_2 .

$$L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \right)^n \cdot \exp \left[-\frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 \right]}{2\theta_2} \right]$$

; $-\infty < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \infty$

dan

$$\ln L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(\theta_2) - \frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 \right]}{2\theta_2}$$

Kemudian, differensialkan $\ln L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \dots, x_n)$ terhadap θ_1 dan θ_2 .

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \theta_1} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)}{\theta_2}$$

dan

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 \right]}{2\theta_2^2}$$

Lalu, diperoleh

$$\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)}{\theta_2} = 0 \quad (2.15)$$

dan

$$-\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 \right]}{2\theta_2^2} = 0 \quad (2.16)$$

Jika persamaan (2.15) dan (2.16) di atas diselesaikan, maka akan diperoleh sebagai berikut:

- persamaan (2.15)

$$\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)}{\theta_2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_j - n\theta_1 = 0$$

$$n\theta_1 = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\theta_1 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}$$

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad (2.17)$$

- persamaan (2.16)

$$-\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 \right]}{2\theta_2^2} = 0$$

substitusi $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$ ke persamaan (2.16)

$$\begin{aligned}
 -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2\right]}{2\theta_2^2} &= 0 \\
 -\frac{n\theta_2}{2\theta_2^2} + \frac{\left[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2\right]}{2\theta_2^2} &= 0 \\
 -n\theta_2 + \left[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2\right] &= 0 \\
 n\theta_2 &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \\
 \theta_2 &= \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n} \\
 \hat{\theta}_2 &= S^2
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

(Hogg and Craig, 1995:264-265)

Berdasarkan persamaan (2.17)

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = E\left(\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}\right) = \frac{n\theta_1}{n} = \theta_1 = \mu_X$$

Karena $E(\bar{X}) = \mu_X$, maka \bar{X} merupakan penaksir tak bias untuk parameter μ .

Jika terdapat m buah subgrup dengan ukuran sampel n , maka penaksir tak bias yang digunakan adalah $\bar{\bar{X}}$.

Selanjutnya akan dicari penaksir tak bias untuk σ . Berdasarkan (2.18), penaksir untuk σ_X^2 adalah S^2 . S^2 bukan penaksir tak bias untuk σ_X^2 tetapi, S^2 konvergen dalam probabilitas ke σ_X^2 . Sedangkan, penaksir tak bias untuk σ^2 adalah S^2 di mana $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Akan tetapi, standar deviasi sampel S bukan penaksir tak bias untuk σ_X . Untuk lebih jelas, perhatikan

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \bar{X})^2}{(n_i - 1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

diketahui bahwa $U_i = \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 E[S_i] &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E[\sqrt{U_i}] \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \int_0^{\infty} \sqrt{u_i} \cdot f(u_i) du_i \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \int_0^{\infty} u_i^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot u_i^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u_i}{2}} du_i \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot u_i^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u_i}{2}} du_i \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot u_i^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u_i}{2}} du_i \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \cdot u_i^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u_i}{2}} du_i
 \end{aligned}$$

Integral di ruas kanan berharga 1 karena integrannya berupa p.d.f. dari distribusi Chi Square berderajat bebas n.

Akibatnya,

$$E[S_i] = c_4 \sigma \text{ di mana } c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (2.19)$$

σ ditaksir dengan menggunakan rata – rata dari m buah standar deviasi,

$$\bar{S} = \frac{\sum S_i}{m}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\frac{\bar{S}}{c_4}$ adalah penaksir tak bias untuk σ .

Bukti:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{\bar{S}}{c_4}\right] &= E\left[\frac{\frac{1}{m} \sum S_i}{c_4}\right] \\
 &= E\left[\frac{\sum S_i}{m c_4}\right] \\
 &= \frac{E[\sum S_i]}{m c_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E[S_1 + S_2 + \dots + S_m]}{mc_4} \\
&= \frac{E[S_1] + E[S_2] + \dots + E[S_m]}{mc_4} \\
&= \frac{1}{mc_4} [c_4\sigma + c_4\sigma + \dots + c_4\sigma] \\
&= \frac{1}{mc_4} mc_4\sigma \\
E\left[\frac{\bar{S}}{c_4}\right] &= \sigma
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\frac{\bar{S}}{c_4}$ adalah penaksir tak bias untuk σ .

Nilai $c_4 = c_4(\bar{n})$, di mana $\bar{n} = [(n_1 + n_2 + \dots + n_m)/m]$ didapat dari tabel pada lampiran 2. Misalkan $\lfloor y \rfloor$ adalah notasi fungsi *floor* dari y , maka $\lfloor y \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan y .

Jadi, penaksir tak bias untuk parameter σ adalah \bar{S}/c_4 .

2.5 Bagan Kendali Shewart

Proses pengendalian mutu statistik memiliki peranan penting dalam pemantauan proses produksi. Tujuan dari pemantauan ini adalah untuk memperoleh produk yang bermutu dengan biaya produksi minimum.

Salah satu elemen penting dalam proses pengendalian mutu adalah bagan kendali yang diperkenalkan oleh Shewart sejak tahun 1942. Bagan kendali tersebut dikenal sebagai bagan kendali Shewart. Ide dasar dari bagan kendali adalah melakukan analisis dengan mengambil sampel dari proses produksi secara periodik. Sampel dari proses produksi yang diambil secara periodik lazim disebut dengan istilah subgroup. Hasil pengukuran pada subgroup diplot pada bagan kendali untuk diperiksa apakah terdapat sampel yang jatuh pada atau di luar batas kendali. Berdasarkan informasi hasil pengukuran tersebut yang diperoleh dari bagan kendali, para pengambil keputusan dapat menentukan tindakan setelah penyebab terjadinya masalah diketahui. Bagan kendali umumnya digunakan untuk mendeteksi pergeseran pusat proses dan atau variabilitas proses yang mungkin

terjadi saat memantau pengamatan. Adanya bagan kendali membuat proses pengendalian mutu berjalan efektif.

Pada bagan kendali ditampilkan dua buah garis yaitu batas kendali atas (UCL= Upper Control Limit) dan batas kendali bawah (LCL = Lower Control Limit). Jika nilai – nilai dari pengukuran berada di antara kedua batas kendali tersebut, berarti proses berada dalam keadaan terkendali. Tetapi, jika terdapat nilai – nilai dari pengukuran yang terletak pada atau di luar batas kendali, diinterpretasikan bahwa proses tidak terkendali dan diperlukan tindakan penyelidikan serta perbaikan terhadap penyebab terjadinya hal tersebut.

Terdapat hubungan antara bagan kendali dengan uji hipotesis. Semua nilai – nilai dari pengukuran berada dalam batas kendali adalah sama dengan tak cukup alasan untuk menolak hipotesis bahwa proses terkendali secara statistik dan satu nilai dari pengukuran terletak pada atau di luar batas kendali sama dengan menolak hipotesis bahwa proses terkendali secara statistik.

Jika variabel yang digunakan numerik, maka istilah yang digunakan adalah subgroup rasional. Salah satu bagan kendali yang biasa digunakan adalah bagan \bar{X} untuk memantau pusat proses di mana \bar{X} mengukur *mean* proses. Variabilitas proses dilihat melalui bagan S di mana S mengukur simpangan terhadap *mean* proses. Kedua bagan ini memberikan informasi mengenai mean dan standar deviasi suatu proses.

Rumus yang digunakan untuk menghitung batas kendali pada bagan \bar{X} dan bagan S adalah:

a. Jika μ dan σ diketahui

- batas kendali untuk bagan \bar{X}

$$CL = E[\bar{X}] = \mu$$

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma$$

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma$$

Dengan demikian, batas kendali untuk bagan \bar{X} dapat ditulis sebagai berikut:

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - A\sigma$$

$$UCL = \mu + A\sigma$$

$$\text{di mana } A = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

- batas kendali untuk bagan S

Berdasarkan subbab 2.4, diketahui bahwa $E[S^2] = \sigma^2$ dan

$E[S] = c_4\sigma$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \text{var}[S] &= E[S^2] - (E[S])^2 \\ &= \sigma^2 - (c_4\sigma)^2 \\ &= \sigma^2 - c_4^2\sigma^2 \\ &= (1 - c_4^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

Karena $\text{var}[S] = (1 - c_4^2)\sigma^2$, maka $\sigma_S = \sigma\sqrt{(1 - c_4^2)}$ atau dapat ditulis $\sigma_S = c_5\sigma$, di mana $c_5 = \sqrt{(1 - c_4^2)}$.

Oleh karena itu,

$$CL = E[S] = c_4\sigma$$

$$LCL = c_4\sigma - 3\sigma_S = c_4\sigma - 3c_5\sigma = (c_4 - 3c_5)\sigma$$

$$UCL = c_4\sigma + 3\sigma_S = c_4\sigma + 3c_5\sigma = (c_4 + 3c_5)\sigma$$

Dengan demikian, batas kendali untuk bagan S dapat ditulis sebagai berikut:

$$CL = c_4\sigma$$

$$LCL = B_5\sigma$$

$$UCL = B_6\sigma$$

$$\text{di mana } B_5 = (c_4 - 3c_5) \text{ dan } B_6 = (c_4 + 3c_5)$$

- b. Jika μ dan σ tidak diketahui

Jika μ dan σ tidak diketahui, maka perlu dilakukan estimasi parameter.

Berdasarkan subbab 2.4, penaksir tak bias untuk μ dalam pembuatan

bagan kendali Shewart adalah $\bar{\bar{X}}$. Sedangkan, penaksir tak bias untuk σ

adalah \bar{s}/c_4 .

- batas kendali untuk bagan \bar{X}

$$CL = \hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{\sqrt{n}}\frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\bar{s}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{\sqrt{n}}\frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\bar{s}$$

Dengan demikian, batas kendali untuk bagan \bar{X} dapat ditulis sebagai berikut:

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{s}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{s}$$

$$\text{di mana } A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$$

- batas kendali untuk bagan S

$$CL = c_4 \hat{\sigma} = c_4 \frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s}$$

$$LCL = \bar{s} - 3\sigma_S = \bar{s} - 3c_5 \hat{\sigma} = \bar{s} - 3c_5 \frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s} - 3 \frac{c_5}{c_4} \bar{s}$$

$$= \left(1 - 3 \frac{c_5}{c_4}\right) \bar{s}$$

$$= \left(\frac{c_4 - 3c_5}{c_4}\right) \bar{s}$$

$$= \frac{B_5}{c_4} \bar{s}$$

$$UCL = \bar{s} + 3\sigma_S = \bar{s} + 3c_5 \hat{\sigma} = \bar{s} + 3c_5 \frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s} + 3 \frac{c_5}{c_4} \bar{s}$$

$$= \left(1 + 3 \frac{c_5}{c_4}\right) \bar{s}$$

$$= \left(\frac{c_4 + 3c_5}{c_4}\right) \bar{s}$$

$$= \frac{B_6}{c_4} \bar{s}$$

Dengan demikian, batas kendali untuk bagan S dapat ditulis sebagai berikut:

$$CL = \bar{s}$$

$$LCL = B_3 \bar{s}$$

$$UCL = B_4 \bar{s}$$

$$\text{di mana } B_3 = \frac{B_5}{c_4} \text{ dan } B_4 = \frac{B_6}{c_4}$$

BAB 3

MAX CHART

Max Chart adalah salah satu jenis chart gabungan yang diusulkan oleh Chen dan Cheng (1998). Prinsip kerja Max Chart secara umum yaitu dengan *rescaling* \bar{X} ke $N(0,1)$ dan mentransformasi standar deviasi S ke $N(0,1)$. Hasil *rescaling* \bar{X} dinamakan variabel U dan hasil transformasi standar deviasi S dinamakan variabel V . Jika nilai U atau V lebih besar dari UCL, maka hal tersebut mengindikasikan bahwa proses tidak terkendali. Asumsi yang harus terpenuhi untuk dapat menggunakan Max Chart adalah sampel yang diamati berasal dari populasi yang mengikuti distribusi normal.

Hal pertama yang harus dilakukan dalam merancang Max Chart adalah mendefinisikan variabel yang akan digunakan.

3.1 Transformasi Variabel untuk Max Chart

Pada subbab ini akan dibahas mengenai variabel yang akan digunakan dalam merancang Max Chart.

Misalkan variabel acak X menunjukkan karakteristik mutu dari suatu proses, μ adalah mean proses, dan σ adalah standar deviasi proses. Misalkan X_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n_i$, adalah pengukuran karakteristik mutu untuk sampel ke j untuk subgroup ke i . Untuk setiap i , $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ merupakan sampel acak yang diambil dari subgroup yang berdistribusi normal, maka $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ independen dan mengikuti distribusi normal dengan mean $\mu + a\sigma$ dan standar deviasi $b\sigma$. Nilai $a = 0$ dan $b = 1$ mengindikasikan bahwa sampel yang diamati berasal dari distribusi normal dengan mean μ dan standar deviasi σ .

Misalkan $\bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i})/n$ adalah rata-rata subgroup ke i dan $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$ adalah variansi subgroup ke i .

Berikut ini adalah variabel U yang digunakan dalam Max Chart. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa sampel acak untuk setiap subgroup mengikuti

distribusi normal, dinotasikan, $X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$ di mana $j = 1, 2, \dots, n_i$. Jika terdapat m buah subgrup rasional, maka $\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n_i)$ di mana $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Jika diketahui $\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n_i)$ maka, berdasarkan teorema 2.1 diperoleh

sebagai berikut:

$$\frac{\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}_i}}{\sigma_{\bar{X}_i}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_i}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n_i}} \sim N(0,1)$$

Jika bentuk $\frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n_i}}$ dinyatakan sebagai U_i , maka $U_i \sim N(0,1)$

atau

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n_i}} \sim N(0,1)$$

(3.1)

di mana $i = 1, 2, \dots, m$.

Variabel lain yang juga diperlukan dalam merancang Max Chart adalah variabel V . Diketahui bahwa $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$ adalah variansi subgrup ke i dan berdasarkan subbab 2.2.1 $\frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_i-1}^2$.

Berdasarkan lampiran 3, maka variabel V dapat ditulis sebagai berikut:

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1 \right) \right\}$$

(3.2)

di mana

- $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ untuk $Z \sim N(0,1)$, distribusi normal standar.
- $\Phi^{-1}(\cdot)$ adalah fungsi invers dari $\Phi(\cdot)$
- $H(w; v) = P(W \leq w|v)$ untuk $W \sim \chi_v^2$ atau distribusi Chi Square dengan derajat bebas v .

Berdasarkan lampiran 3 maka $V_i \sim N(0,1)$ atau dengan kata lain V_i berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Sifat dari kedua variabel yang telah dijelaskan sebelumnya adalah independen karena \bar{X}_i dan S_i^2 independen dan menurut teorema 2.6, U_i dan V_i independen.

Transformasi dari \bar{X}_i ke U_i dan S_i^2 ke V_i ini memiliki dua keuntungan. Pertama, distribusi dari U_i dan V_i independen terhadap ukuran sampel n_i karena distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1 tidak bergantung pada ukuran sampel, sehingga masalah ukuran sampel dari variabel dapat dengan mudah ditangani.

Kedua, U_i dan V_i mempunyai distribusi yang sama dengan ukuran pusat dan sebaran yang sama yaitu $N(0,1)$ sehingga dapat dibentuk sebuah bagan kendali untuk memantau pusat proses dan persebaran proses. Secara spesifik, didefinisikan statistik $M(n_i)$ yaitu

$$M(n_i) = \max\{|U_i|, |V_i|\} \quad (3.3)$$

Statistik $M(n_i)$ pada persamaan (3.3) mengindikasikan bahwa nilai dari $M(n_i)$ selalu nonnegatif dan penggunaan fungsi maksimum dimaksudkan agar bagan kendali gabungan yang terbentuk dapat digunakan untuk mengawasi pusat proses dan persebaran proses secara bersamaan. Penggunaan fungsi maksimum dapat memberikan informasi mengenai nilai – nilai dari pengukuran yang berada di luar batas kendali. Pada bagan kendali Shewart, nilai – nilai dari pengukuran dapat terletak di atas UCL atau di bawah LCL. Penggunaan harga mutlak pada $M(n_i)$ mengakibatkan semua nilai terletak di atas UCL dari Max Chart. Sehingga, fungsi yang harus digunakan adalah fungsi maksimum. Dalam hal ini, nilai LCL dari Max Chart diabaikan.

Nilai $M(n_i)$ akan besar jika harga mutlak U_i atau V_i lebih besar dari UCL untuk Max Chart yang menunjukkan bahwa nilai rata – rata atau simpangan berada di luar UCL. Nilai - nilai dari $M(n_i)$ dapat menunjukkan pergeseran mean proses atau perubahan variabilitas proses berdasarkan syarat – syarat tertentu. Sedangkan, nilai $M(n_i)$ akan kecil jika harga mutlak U_i dan V_i lebih kecil dari UCL untuk Max Chart.

3.2 Distribusi $M(n_i)$

Misalkan $\chi_{\gamma, v}^2$ memenuhi $Pr(\chi_v^2 \leq \chi_{\gamma, v}^2) = \gamma$, di mana $\gamma \in (0,1)$ dan

$X_j \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2)$ di mana $j = 1, 2, \dots, n_i$. Maka, distribusi dari $M(n_i)$ untuk sembarang $y > 0$, secara umum adalah:

$$\begin{aligned}
 F(y; n_i, a, b) &= Pr(M(n_i) \leq y) \\
 &= Pr(\max\{|U_i|, |V_i|\} \leq y) \\
 &= Pr(|U_i| \leq y, |V_i| \leq y) \\
 &= Pr(|U_i| \leq y) \cdot Pr(|V_i| \leq y) \\
 &= Pr(-y \leq U_i \leq y) \cdot Pr(-y \leq V_i \leq y) \\
 &= Pr\left(-y \leq \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n_i}} \leq y\right) \cdot Pr\left(-y \leq \Phi^{-1}\left\{H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right)\right\} \leq y\right) \\
 &= \underbrace{Pr\left(\mu - y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right) \leq \bar{X}_i \leq \mu + y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right)\right)}_{(*)} \\
 &\quad \cdot \underbrace{Pr\left\{\Phi(-y) \leq H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq \Phi(y)\right\}}_{(**)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pada persamaan (3.4) terdapat dua bagian yaitu (*) dan (**).

Pertama, perhatikan bagian (*).

Diketahui $X_j \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2)$, maka

$$\bar{X}_i \sim N\left(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2/n_i\right)$$

(3.5)

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 &Pr\left(\mu - y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right) \leq \bar{X}_i \leq \mu + y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right)\right) \\
 &= Pr\left(\bar{X}_i \leq \mu + y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right)\right) - Pr\left(\bar{X}_i \leq \mu - y\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Pr \left(\frac{\bar{X}_i - \mu + a\sigma}{b\sigma/n_i} \leq \frac{\mu + y \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \right) - \mu + a\sigma}{b\sigma/\sqrt{n_i}} \right) \\
&\quad - Pr \left(\frac{\bar{X}_i - \mu + a\sigma}{b\sigma/n_i} \leq \frac{\mu - y \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \right) - \mu + a\sigma}{b\sigma/\sqrt{n_i}} \right) \\
&= Pr \left(\frac{\bar{X}_i - \mu + a\sigma}{b\sigma/n_i} \leq \frac{y \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \right) + a\sigma}{b\sigma/\sqrt{n_i}} \right) - Pr \left(\frac{\bar{X}_i - \mu + a\sigma}{b\sigma/n_i} \leq \frac{-y \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \right) + a\sigma}{b\sigma/\sqrt{n_i}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{y}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{n_i} \right) - \Phi \left(-\frac{y}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{n_i} \right) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, bagian (**).

$$\begin{aligned}
&Pr \left\{ \Phi(-y) \leq H \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1 \right) \leq \Phi(y) \right\} \\
&= Pr \left\{ H \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1 \right) \leq \Phi(y) \right\} \\
&\quad - Pr \left\{ H \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1 \right) \leq \Phi(-y) \right\} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

perhatikan pertidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned}
&H \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1 \right) \leq \Phi(y) \\
&= Pr \left(\chi_{n_i-1}^2 \leq \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \mid n_i - 1 \right) \leq \Phi(y) \\
&= Pr \left(\chi_{n_i-1}^2 \leq \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \mid n_i - 1 \right) \leq Pr(\chi_v^2 \leq \chi_{\Phi(y),v}^2) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (3.8) diperoleh bahwa

$$v = n_i - 1 \text{ dan } \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma^2} = \chi_{\Phi(y), n_i-1}^2$$

jika diketahui variansi dari X_j adalah $[b\sigma]^2$, maka

$$\frac{(n_i - 1)S_i^2}{[b\sigma]^2} = \frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}$$

secara umum berlaku,

$$\begin{aligned} & H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq \Phi(y) \\ & = Pr\left(\chi_{n_i-1}^2 \leq \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \mid n_i - 1\right) \leq Pr\left(\chi_{n_i-1}^2 \leq \frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}\right) \\ & = H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

berdasarkan persamaan (3.9), $\Phi(y) = H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)$.

substitusi $\Phi(y)$ ke persamaan (3.7)

$$\begin{aligned} & Pr\left\{\Phi(-y) \leq H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq \Phi(y)\right\} \\ & = Pr\left\{H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq \Phi(y)\right\} - Pr\left\{H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq \Phi(-y)\right\} \\ & = Pr\left\{H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right\} \\ & \quad - Pr\left\{H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right) \leq H\left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right\} \\ & = Pr\left\{\Phi^{-1}\left(H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right)\right) \leq \Phi^{-1}\left(H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right)\right\} \\ & \quad - Pr\left\{\Phi^{-1}\left(H\left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}; n_i - 1\right)\right) \leq \Phi^{-1}\left(H\left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right)\right\} \\ & = \Phi\left[\Phi^{-1}\left(H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right)\right] - \Phi\left[\Phi^{-1}\left(H\left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right)\right)\right] \\ & = H\left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right) - H\left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substitusi persamaan (3.6) dan (3.10) ke dalam persamaan (3.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 F(y; n_i, a, b) &= \left\{ \Phi \left(\frac{y}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{n_i} \right) - \Phi \left(-\frac{y}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{n_i} \right) \right\} \\
 &\times \left\{ H \left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1 \right) - H \left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{b^2}; n_i - 1 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.3 Konstruksi Max Chart

Dalam konstruksi Max Chart ini digunakan statistik $M(n_i)$ karena $M(n_i)$ dibentuk dari fungsi maksimum untuk dua statistik. Oleh karena itu, chart gabungan \bar{X} dan S ini dinamakan Max Chart.

Untuk nilai $a = 0$ dan $b = 1$ berdasarkan pada asumsi yang digunakan, maka persamaan (3.11) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F(y; n_i, 0, 1) &= \left\{ \Phi \left(\frac{y}{1} - \frac{0}{1} \sqrt{n_i} \right) - \Phi \left(-\frac{y}{1} - \frac{0}{1} \sqrt{n_i} \right) \right\} \\
 &\times \left\{ H \left(\frac{\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2}{1^2}; n_i - 1 \right) - H \left(\frac{\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2}{1^2}; n_i - 1 \right) \right\} \\
 &= \{\Phi(y) - \Phi(-y)\} \\
 &\times \{H(\chi_{\Phi(y), n_i-1}^2; n_i - 1) - H(\chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2; n_i - 1)\} \\
 &= \{\Phi(y) - \Phi(-y)\} \\
 &\times \{Pr(\chi_{n_i-1}^2 \leq \chi_{\Phi(y), n_i-1}^2) - Pr(\chi_{n_i-1}^2 \leq \chi_{\Phi(-y), n_i-1}^2)\} \\
 &= \{\Phi(y) - \Phi(-y)\} \times \{\Phi(y) - \Phi(-y)\}
 \end{aligned}$$

$$F(y; n_i, 0, 1) = \{\Phi(y) - \Phi(-y)\}^2 \tag{3.12}$$

Perhatikan $\Phi(y) - \Phi(-y)$ pada persamaan (3.12). Bentuk tersebut dapat ditulis dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \Phi(y) - \Phi(-y) &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw - \int_{-\infty}^{-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
 &= \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw
 \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \quad (3.13)$$

Misalkan $w = \sqrt{v}$ maka $\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$ dan batas – batasnya menjadi sebagai berikut:

- Jika w menuju 0, maka $v = w^2$ menuju 0
- Jika $w = y$, maka $v = w^2 = (y)^2 = y^2$

Sehingga, persamaan (3.13) menjadi:

$$\begin{aligned} \Phi(y) - \Phi(-y) &= 2 \cdot \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{v}{2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} dv \\ &= \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv \\ &= \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv \\ &= \int_0^{y^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}} v^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv \\ &= \int_0^{y^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{1/2}} v^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv \\ &= \int_0^{y^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{1/2}} v^{\frac{1}{2}-1} \exp\left[-\frac{v}{2}\right] dv \end{aligned}$$

$$\Phi(y) - \Phi(-y) = Pr(\chi_1^2 \leq y^2) \quad (3.14)$$

Substitusi persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.12).

Sehingga, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(y; n_i, 0, 1) &= \{\Phi(y) - \Phi(-y)\}^2 \\ &= \{Pr(\chi_1^2 \leq y^2)\}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agar $F(y; n_i, 0,1) = 1 - \alpha$ terpenuhi, maka nilai $y = \{\chi_{\sqrt{1-\alpha},1}^2\}^{1/2}$.

Bukti:

$$F(y; n_i, 0,1) = 1 - \alpha$$

$$Pr(\chi_1^2 \leq y^2) = \sqrt{1 - \alpha} \quad (3.16)$$

diketahui bahwa $\chi_{\gamma,v}^2$ memenuhi $Pr(\chi_v^2 \leq \chi_{\gamma,v}^2) = \gamma$, maka dari persamaan (3.16) diperoleh,

$$Pr(\chi_1^2 \leq y^2) = Pr(\chi_1^2 \leq \chi_{\sqrt{1-\alpha},1}^2)$$

maka,

$$y^2 = \chi_{\sqrt{1-\alpha},1}^2$$

$$y = \{\chi_{\sqrt{1-\alpha},1}^2\}^{1/2} \quad (3.17)$$

Jadi, nilai y yang memenuhi persamaan $F(y; n_i, 0,1) = 1 - \alpha$ adalah

$$\{\chi_{\sqrt{1-\alpha},1}^2\}^{1/2}.$$

Center line (CL) dan *upper control limits* (UCL) untuk *Max Chart* dapat dicari untuk berbagai nilai dari probabilitas kesalahan jenis pertama yaitu α dengan menggunakan persamaan (3.17). *Center line* (CL) dapat dicari dengan substitusi $\alpha = 0,5$ ke dalam persamaan (3.17). Sedangkan, untuk *upper control limits* (UCL) nilainya bervariasi tergantung pada nilai α yang diberikan seperti ditunjukkan pada tabel 3.1.

Tabel 3.1 center line (CL) dan upper control limits (UCL) untuk Max Chart untuk beberapa nilai probabilitas kesalahan jenis pertama (α).

α	0,5000	α	0,0054	0,0027	0,00135
CL	1,0518	UCL	2,9996	3,2049	3,3994

Nilai α yang biasa digunakan untuk bagan \bar{X} maupun bagan S adalah 0.0027. Bagan \bar{X} dengan batas kendali $\pm 3\sigma$, mempunyai probabilitas kesalahan jenis pertama 0.0027.

Bukti:

$$\begin{aligned}
 & Pr(\mu - 3\sigma_{\bar{X}} < \bar{X} < \mu + 3\sigma_{\bar{X}}) \\
 &= Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\mu + 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) - Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\mu - 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
 &= \Phi(3) - \Phi(-3) \\
 &= 0,998650 - 0,001350 \\
 &= 0,9973
 \end{aligned}$$

Kemudian, probabilitas kesalahan jenis pertama adalah:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1 - Pr(\mu - 3\sigma_{\bar{X}} < \bar{X} < \mu + 3\sigma_{\bar{X}}) \\
 &= 1 - 0,9973 \\
 &= 0,0027
 \end{aligned}$$

Sedangkan bagan S mempunyai probabilitas kesalahan jenis pertama 0,00135 untuk setiap *tail*-nya sehingga nilai α secara keseluruhan juga 0,0027. Dengan demikian, probabilitas kesalahan jenis pertama untuk Max Chart adalah $1 - (1 - 0,0027)^2 = 0,0053927 \approx 0,0054$.

Dalam proses pembentukan *Max Chart* ini terdapat dua kasus. Kasus pertama yaitu jika μ dan σ diketahui. Jika μ dan σ diketahui, maka nilai U_i dan V_i dapat dihitung secara langsung dengan mensubstitusi μ dan σ ke dalam persamaan (3.1) dan (3.2). Sedangkan, kasus kedua yaitu jika paling sedikit ada satu parameter yang tidak diketahui. Jika kasus kedua terjadi, maka hal pertama yang harus dilakukan adalah mengestimasi parameter yang tidak diketahui. Setelah diperoleh taksiran untuk parameter yang tidak diketahui, substitusi hasil taksiran tersebut ke dalam persamaan (3.1) dan (3.2) sehingga didapat nilai U_i atau V_i .

Prosedur yang digunakan dalam membentuk *Max Chart* untuk setiap kasus adalah sebagai berikut:

Kasus 1: μ dan σ diketahui

1. Hitung U_i , V_i , dan $M(n_i)$ untuk setiap sampel.
2. Tentukan CL dan UCL berdasarkan tabel 1 untuk nilai α yang diinginkan.

3. Proses *plotting* titik pada *chart*. Proses *plotting* titik ini melibatkan dua kondisi.
 - Kondisi pertama, saat $M(n_i) \leq UCL$, plot titik terhadap i .
 - Kondisi kedua, saat $M(n_i) > UCL$, hal pertama yang harus dilakukan adalah memeriksa $|U_i|$ dan $|V_i|$ terhadap UCL.
 - Jika $|U_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “m+” terhadap i saat $U_i > 0$ yang mengindikasikan bahwa pusat prosesnya bergeser ke atas dan plot “m-” terhadap i saat $U_i < 0$ yang mengindikasikan bahwa pusat prosesnya bergeser ke bawah.
 - Jika $|V_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “v+” terhadap i saat $V_i > 0$ yang mengindikasikan bahwa variabilitas prosesnya meningkat dan plot “v-” terhadap i saat $V_i < 0$ yang mengindikasikan bahwa variabilitas prosesnya menurun.
 - Jika $|U_i|$ dan $|V_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “++” saat $U_i > 0$ dan $V_i > 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke atas dan variabilitas prosesnya meningkat, plot “+-” saat $U_i > 0$ dan $V_i < 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke atas dan variabilitas prosesnya menurun, plot “-+” saat $U_i < 0$ dan $V_i > 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke bawah dan variabilitas prosesnya meningkat, atau plot “--” saat $U_i < 0$ dan $V_i < 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke bawah dan variabilitas prosesnya menurun.
4. Periksa sebab terusut untuk setiap titik yang berada di luar kendali.

Kasus 2: paling sedikit ada satu parameter yang tidak diketahui

1. Estimasi parameter yang tidak diketahui. Jika parameter yang tidak diketahui adalah μ , maka estimasi μ dengan \bar{x} atau yang dikenal sebagai *grand average* dari data yang ada seperti sudah dijelaskan pada subbab 2.4.1. Jika parameter yang tidak diketahui adalah σ , maka estimasi σ dengan persamaan 2.15 yaitu \bar{S}/c_4 .
2. Hitung U_i , V_i , dan $M(n_i)$ untuk setiap sampel.
3. Tentukan CL dan UCL berdasarkan tabel 1 untuk nilai α yang diinginkan.

4. Proses *plotting* titik pada *chart*. Proses *plotting* titik ini melibatkan dua kondisi.
- Kondisi pertama, saat $M(n_i) \leq UCL$, plot titik terhadap i .
 - Kondisi kedua, saat $M(n_i) > UCL$, hal pertama yang harus dilakukan adalah memeriksa $|U_i|$ dan $|V_i|$ terhadap UCL.
 - Jika $|U_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “m+” terhadap i saat $U_i > 0$ yang mengindikasikan bahwa pusat prosesnya bergeser ke atas dan plot “m-” terhadap i saat $U_i < 0$ yang mengindikasikan bahwa pusat prosesnya bergeser ke bawah.
 - Jika $|V_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “v+” terhadap i saat $V_i > 0$ yang mengindikasikan bahwa variabilitas prosesnya meningkat dan plot “v-” terhadap i saat $V_i < 0$ yang mengindikasikan bahwa variabilitas prosesnya menurun.
 - Jika $|U_i|$ dan $|V_i|$ lebih besar dari UCL, maka plot “++” saat $U_i > 0$ dan $V_i > 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke atas dan variabilitas prosesnya meningkat, plot “+-” saat $U_i > 0$ dan $V_i < 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke atas dan variabilitas prosesnya menurun, plot “-+” saat $U_i < 0$ dan $V_i > 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke bawah dan variabilitas prosesnya meningkat, atau plot “--” saat $U_i < 0$ dan $V_i < 0$ dengan interpretasi pusat proses bergeser ke bawah dan variabilitas prosesnya menurun.
5. Periksa sebab terusut untuk setiap titik yang berada di luar kendali.

BAB 4

CONTOH APLIKASI

4.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah data yang berasal dari buku yang berjudul *Statistical Quality Design and Control* oleh R.E.Devor, T.Chang, dan J.W.Sutherland (1992).

4.2 Data

Data yang digunakan merupakan data mengenai pemboran pada suatu blok mesin. Variabel yang diukur dalam data adalah diameter hasil pemboran pada mesin tersebut dalam satuan inci. Pengukuran dibuat berdasarkan 1/10.000 dari 1 inci. Ukuran sebenarnya adalah dalam bentuk 3,5205 ; 3,5202 ; 3,5204 ; dan seterusnya tetapi, pada saat entri data hanya tiga digit terakhir yang diperhatikan.

Data diambil dari hasil produksi dalam interval waktu yang berdekatan, dalam kasus ini data diambil setiap 30 menit mulai dari pukul 08.00 A.M. sampai dengan pukul 01.00 A.M. Subgrup yang diambil berjumlah 35 dan masing - masing berukuran 5.

4.3 Analisis Data

Analisis data ini menggunakan dua metode yang berbeda. Metode pertama yaitu metode Shewart dan metode yang kedua adalah metode Max Chart. Dalam pemantauan hasil pemboran ini digunakan *Microsoft Excel* dan *software* statistik.

4.3.1 Metode Shewart

Pada metode ini bagan \bar{X} dan S akan dibuat secara terpisah.

Langkah 1: mengestimasi parameter.

Dalam kasus ini μ dan σ tidak diketahui sehingga perlu dicari estimasi dari kedua parameter tersebut. Estimasi yang dihasilkan sama, estimasi untuk μ adalah

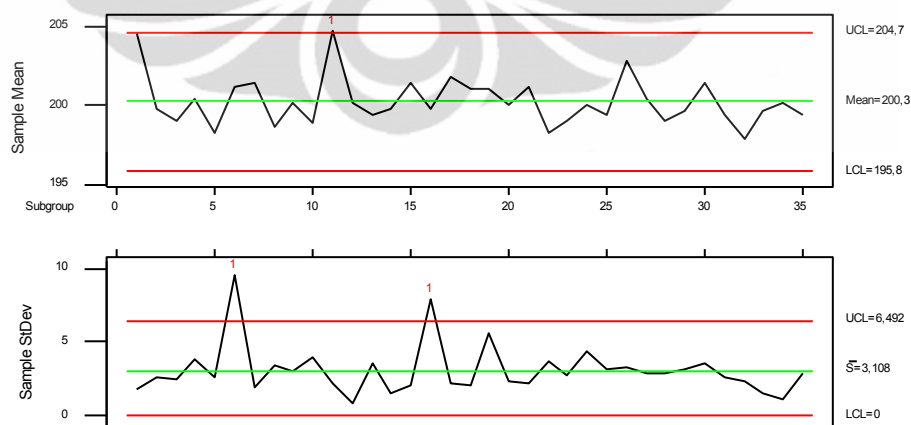
$$\bar{\bar{X}} = 200,2514 \text{ dan estimasi untuk } \sigma \text{ yaitu } \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{3,1076}{0,94} = 3,3060.$$

Langkah 2: menentukan batas kendali untuk bagan \bar{X} dan S .

- batas kendali untuk bagan \bar{X}
 $LCL: \bar{\bar{X}} - 1,43\bar{S} = 200,2514 - 1,43 * 3,1076 = 195,8075$
 $CL: \bar{\bar{X}} = 200,2514$
 $UCL: \bar{\bar{X}} + 1,43\bar{S} = 200,2514 + 1,43 * 3,1076 = 204,6954$
- batas kendali untuk bagan S
 $LCL: 0 * \bar{S} = 0 * 3,1076 = 0$
 $CL: \bar{S} = 3,1076$
 $UCL: 2,09 * \bar{S} = 2,09 * 3,1076 = 6,4950$

Langkah 3: *plotting* bagan \bar{X} dan S .

Proses *plotting* ini menggunakan *software* statistik tertentu. Berikut adalah output dari *software* statistik:



gambar 4.1

Yang pertama kali diperiksa adalah bagan S . Berdasarkan gambar 4.1, bagan S menunjukkan bahwa terdapat 2 sampel yang berada di luar batas kendali yaitu sampel 6 dan 16. Selanjutnya, dari bagan \bar{X} diperoleh informasi bahwa terdapat 1 sampel yang berada di luar batas kendali yaitu sampel 11. Jadi, terdapat tiga sampel yang berada di luar batas kendali.

4.3.2 Metode Max Chart

Langkah 1: mengestimasi parameter.

Langkah ini sama seperti pada langkah awal metode Shewart. Estimasi untuk μ yaitu $\bar{X} = 200,2514$ dan estimasi untuk σ yaitu $\frac{s}{c_4} = \frac{3,1076}{0,94} = 3,3060$.

Langkah 2: menghitung U_i , V_i , dan $M(n_i)$ untuk setiap sampel.

Hasil perhitungan ditunjukkan oleh tabel 4.1.

Langkah 3: menentukan CL dan UCL.

Telah dijelaskan bahwa probabilitas kesalahan jenis pertama untuk Max Chart adalah 0,0054. Sehingga, berdasarkan tabel 3.1, maka diperoleh CL = 1,0518 dan UCL = 2,9996.

Langkah 4: *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$.

Posisi setiap nilai pada *chart* dengan menggunakan *Excel* ditunjukkan pada tabel 4.1.

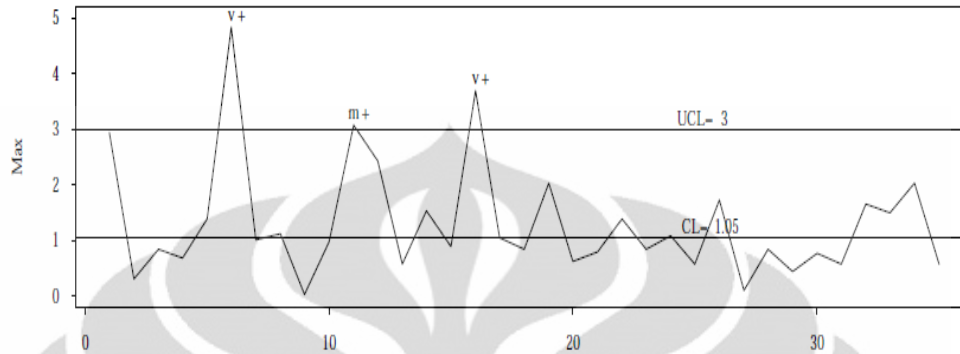
Tabel 4.1

Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart

no. sampel	U_i	V_i	$M(n_i)$	keterangan
1	2,9412	-1,1593	2,941	In
2	-0,3053	-0,3071	0,307	In
3	-0,8464	-0,4301	0,846	In
4	0,1005	0,6834	0,683	In
5	-1,3875	-0,3941	1,388	In
6	0,6416	4,8400	4,840	Out
7	0,7769	-1,0186	1,019	In
8	-1,1170	0,3462	1,117	In
9	-0,0348	0,0040	0,035	In
10	-0,9817	0,7757	0,982	In
11	3,0765	-0,7963	3,077	Out
12	-0,0348	-2,4307	2,431	In
13	-0,5759	0,5211	0,576	In
14	-0,3053	-1,5362	1,536	In
15	0,7769	-0,8909	0,891	In
16	-0,3053	3,6957	3,696	Out
17	1,0474	-0,6858	1,047	In
18	0,5063	-0,8428	0,843	In
19	0,5063	2,0291	2,029	In
20	-0,1701	-0,6231	0,623	In
21	0,6416	-0,7963	0,796	In
22	-1,3875	0,5655	1,388	In
23	-0,8464	-0,2570	0,846	In
24	-0,1701	1,0877	1,088	In
25	-0,5759	0,1558	0,576	In
26	1,7238	0,2083	1,724	In
27	0,1005	-0,0542	0,100	In
28	-0,8464	-0,0991	0,846	In
29	-0,4406	0,1558	0,441	In
30	0,7769	0,5211	0,777	In
31	-0,5759	-0,3763	0,576	In
32	-1,6581	-0,5826	1,658	In
33	-0,4406	-1,4967	1,497	In
34	-0,0348	-2,0364	2,036	In
35	-0,5759	-0,1296	0,576	In

Secara grafik, hasil *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$ untuk setiap sampel adalah sebagai berikut:

(a)



gambar 4.2

[sumber:Chen and Cheng, 1998]

berdasarkan tabel 4.1 dan gambar 4.2, diperoleh bahwa terdapat 3 sampel yang berada di luar batas kendali yaitu sampel 6, 11, dan 16. Selanjutnya, diketahui bahwa sampel 6 dan 16 diberi tanda “v+” dan sampel 11 diberi tanda “m+” yang berarti bahwa variabilitas proses pada sampel 6 dan 16 meningkat dan ada pergeseran pusat proses ke atas pada sampel 11. Jadi, terdapat tiga sampel yang berada di luar batas kendali.

Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 menunjukkan hasil yang sama yaitu terdapat tiga titik yang berada di luar batas kendali. Perbedaan yang sangat jelas adalah pada metode Shewart ketiga titik diperoleh dari dua bagan yang terpisah. Sedangkan, pada metode Max Chart, ketiga titik muncul secara bersama – sama pada satu bagan. Sehingga, pada kasus ini Max Chart lebih baik daripada metode Shewart.

Jika dilakukan revisi, maka ketiga sampel ini akan dikeluarkan dari data.

Langkah 5: estimasi kembali parameter – parameter yang tidak diketahui.

Estimasi parameter pada langkah ini menggunakan 32 data karena 3 data telah dikeluarkan dari keseluruhan data.

Estimasi untuk μ yaitu $\bar{\bar{X}} = 200,0938$ dan estimasi untuk σ yaitu

$$\frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{2,7793}{0,94} = 2,9567.$$

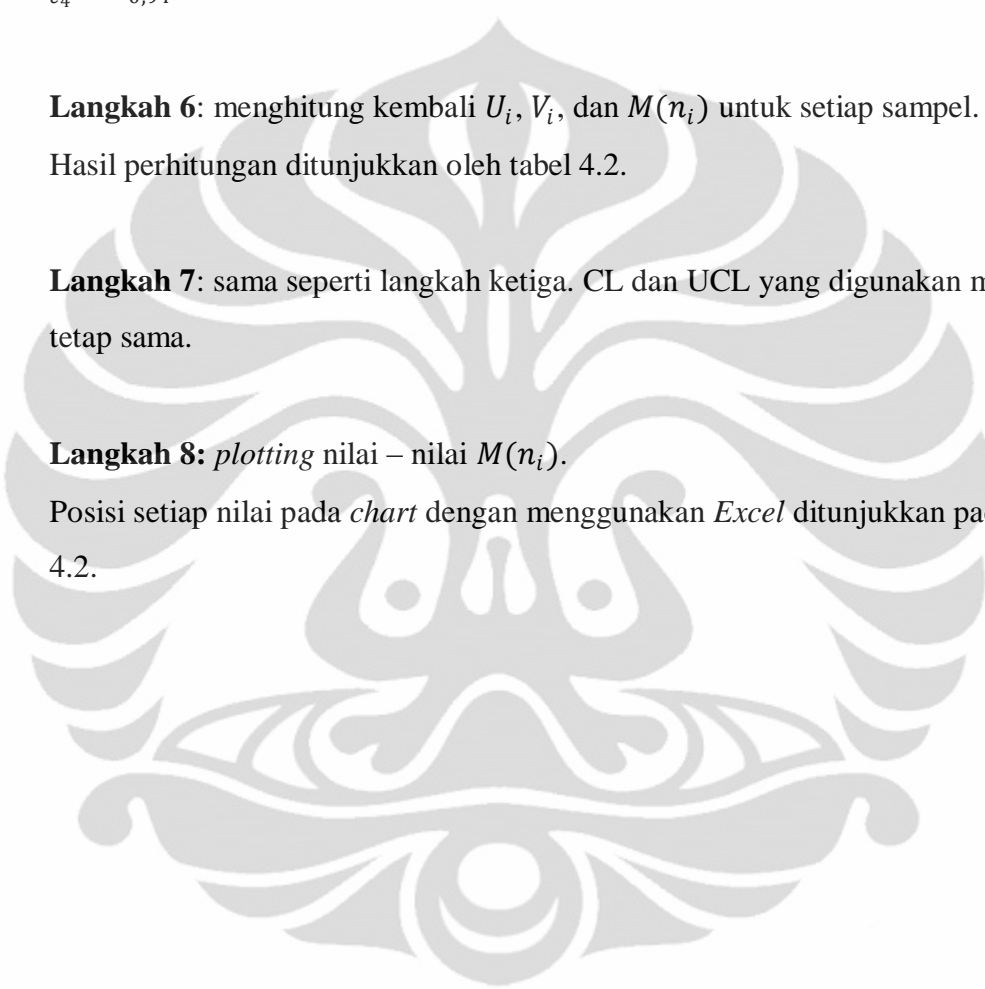
Langkah 6: menghitung kembali U_i , V_i , dan $M(n_i)$ untuk setiap sampel.

Hasil perhitungan ditunjukkan oleh tabel 4.2.

Langkah 7: sama seperti langkah ketiga. CL dan UCL yang digunakan masih tetap sama.

Langkah 8: *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$.

Posisi setiap nilai pada *chart* dengan menggunakan *Excel* ditunjukkan pada tabel 4.2.

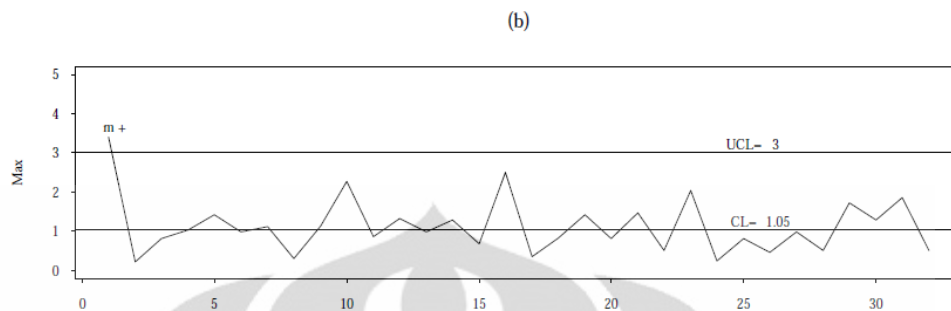


tabel 4.2

Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart

no sampel	U_i	V_i	$M(n_i)$	keterangan
1	3,4079	-0,9341	3,4079	Out
2	-0,2222	-0,0246	0,2222	In
3	-0,8272	-0,1565	0,8272	In
4	0,2316	1,0431	1,0431	In
5	-1,4322	-0,1179	1,4322	In
7	0,9879	-0,7847	0,9879	In
8	-1,1297	0,6784	1,1297	In
9	0,0804	0,3097	0,3097	In
10	-0,9784	1,1431	1,1431	In
12	0,0804	-2,2724	2,2724	In
13	-0,5247	0,8674	0,8674	In
14	-0,2222	-1,3334	1,3334	In
15	0,9879	-0,6487	0,9879	In
17	1,2904	-0,4299	1,2904	In
18	0,6854	-0,5975	0,6854	In
19	0,6854	2,5070	2,5070	In
20	-0,0709	-0,3630	0,3630	In
21	0,8366	-0,5479	0,8366	In
22	-1,4322	0,9154	1,4322	In
23	-0,8272	0,0292	0,8272	In
24	-0,0709	1,4815	1,4815	In
25	-0,5247	0,4731	0,5247	In
26	2,0466	0,5297	2,0466	In
27	0,2316	0,2470	0,2470	In
28	-0,8272	0,1988	0,8272	In
29	-0,3734	0,4731	0,4731	In
30	0,9879	0,8674	0,9879	In
31	-0,5247	-0,0988	0,5247	In
32	-1,7347	-0,3197	1,7347	In
33	-0,3734	-1,2916	1,2916	In
34	0,0804	-1,8599	1,8599	In
35	-0,5247	0,1660	0,5247	In

Secara grafik, hasil *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$ untuk setiap sampel adalah sebagai berikut:



gambar 4.3

[sumber:Chen and Cheng, 1998]

berdasarkan tabel 4.2 dan gambar 4.3, diperoleh bahwa terdapat 1 sampel yang berada di luar batas kendali yaitu sampel 1. Selanjutnya, diketahui bahwa sampel 1 diberi tanda “m+” yang berarti bahwa ada pergeseran pusat proses ke atas pada sampel 1. Pada langkah berikutnya, sampel 1 akan dikeluarkan dari data untuk melihat apakah masih ada sampel yang berada di luar batas kendali.

Langkah 9: estimasi kembali parameter – parameter yang tidak diketahui.

Estimasi parameter pada langkah ini menggunakan 31 data karena 4 data telah dikeluarkan dari keseluruhan data.

Estimasi untuk μ yaitu $\bar{\bar{X}} = 199,9484$ dan estimasi untuk σ yaitu

$$\frac{S}{c_4} = \frac{2,8104}{0,94} = 2,9898.$$

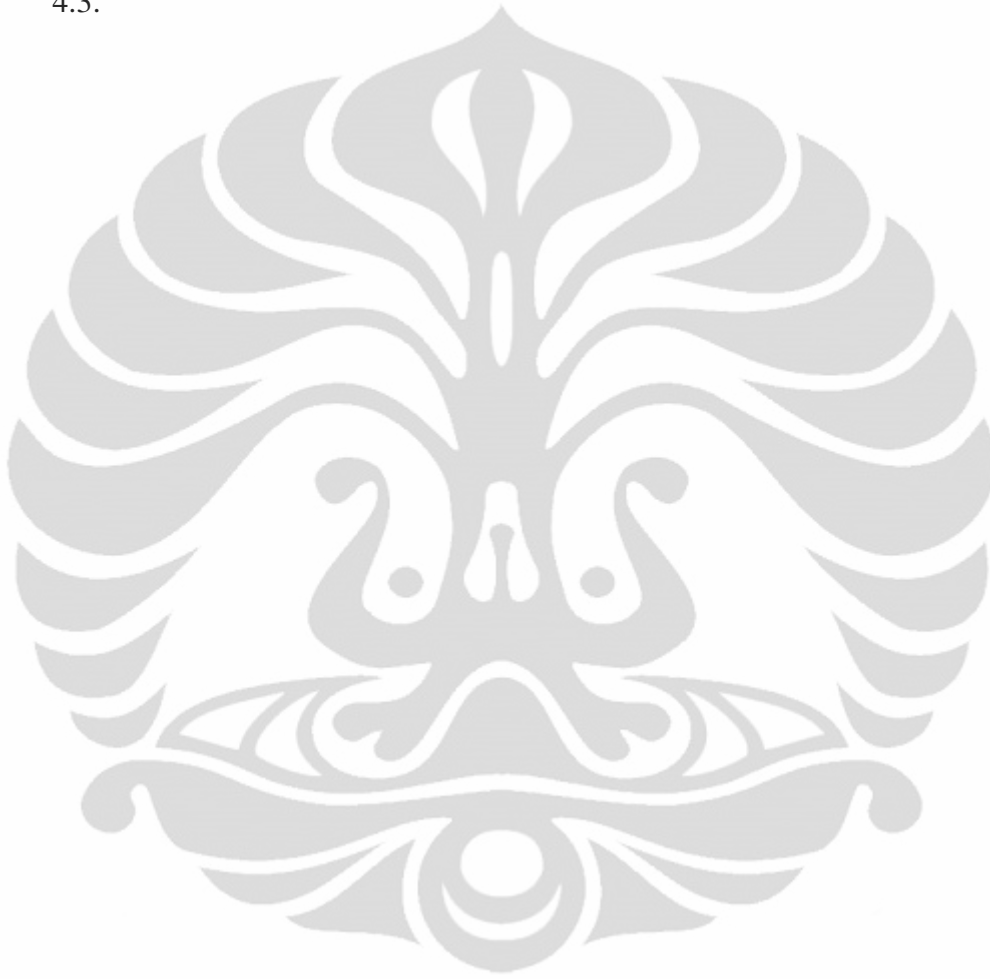
Langkah 10: menghitung kembali U_i , V_i , dan $M(n_i)$ untuk setiap sampel.

Hasil perhitungan ditunjukkan oleh tabel 4.3.

Langkah 11: sama seperti langkah ketiga. CL dan UCL yang digunakan masih tetap sama.

Langkah 12: *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$.

Posisi setiap nilai pada *chart* dengan menggunakan *Excel* ditunjukkan pada tabel 4.3.

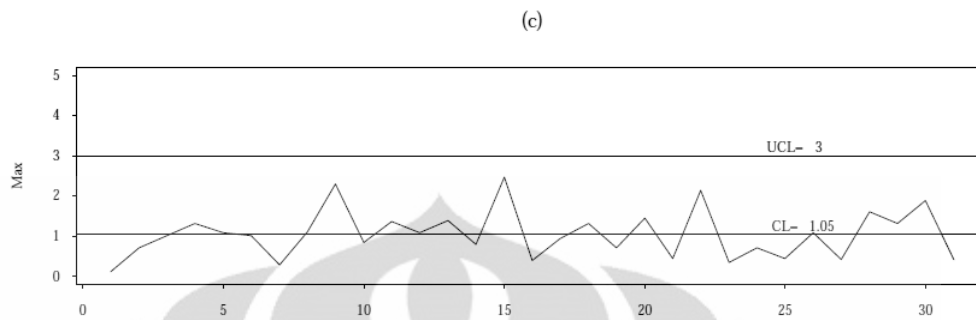


tabel 4.3

Nilai U_i , V_i , $M(n_i)$, dan Posisi Nilai $M(n_i)$ pada Max Chart

no. sampel	U_i	V_i	$M(n_i)$	keterangan
2	-0,1110	-0,0536	0,1110	In
3	-0,7093	-0,1846	0,7093	In
4	0,3378	1,0060	1,0060	In
5	-1,3076	-0,1462	1,3076	In
7	1,0857	-0,8086	1,0857	In
8	-1,0085	0,6442	1,0085	In
9	0,1882	0,2782	0,2782	In
10	-0,8589	1,1052	1,1052	In
12	0,1882	-2,2884	2,2884	In
13	-0,4101	0,8317	0,8317	In
14	-0,1110	-1,3540	1,3540	In
15	1,0857	-0,6735	1,0857	In
17	1,3848	-0,4562	1,3848	In
18	0,7865	-0,6226	0,7865	In
19	0,7865	2,4575	2,4575	In
20	0,0386	-0,3896	0,3896	In
21	0,9361	-0,5733	0,9361	In
22	-1,3076	0,8794	1,3076	In
23	-0,7093	-0,0002	0,7093	In
24	0,0386	1,4408	1,4408	In
25	-0,4101	0,4405	0,4405	In
26	2,1327	0,4966	2,1327	In
27	0,3378	0,2161	0,3378	In
28	-0,7093	0,1682	0,7093	In
29	-0,2606	0,4405	0,4405	In
30	1,0857	0,8317	1,0857	In
31	-0,4101	-0,1273	0,4101	In
32	-1,6068	-0,3467	1,6068	In
33	-0,2606	-1,3125	1,3125	In
34	0,1882	-1,8779	1,8779	In
35	-0,4101	0,1356	0,4101	In

Secara grafik, hasil *plotting* nilai – nilai $M(n_i)$ untuk setiap sampel adalah sebagai berikut:



gambar 4.4

[sumber:Chen and Cheng, 1998]

berdasarkan tabel 4.3 dan gambar 4.4, diperoleh bahwa terdapat semua sampel berada di dalam batas kendali. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa prosesnya sudah terkendali. Kemudian, akan dicari sebab terusut untuk sampel 1, 6, 11, dan 16 serta akan dilakukan tindakan setelah penyebabnya diketahui.

Hasil dari dua kali revisi di mana pada revisi pertama hanya melibatkan 32 dari 35 sampel dan pada revisi kedua hanya melibatkan 31 dari 32 sampel sebelumnya, diperoleh bahwa terdapat empat sampel yang bermasalah. Sampel – sampel tersebut adalah sampel 1, 6, 11, dan 16. Berdasarkan DeVor, Chang and Sutherland (1992), penyebab meningkatnya variabilitas proses pada sampel 6 dan 16 adalah operator yang biasa bekerja pada jam tersebut absen dan digantikan dengan operator yang kurang berpengalaman. Sedangkan, pergeseran pusat proses yang terjadi pada sampel 11 disebabkan oleh pengaruh mesin yang panas karena sudah digunakan dalam waktu yang lama. Sampel 1 diambil sekitar pukul 08.00 A.M. dan pada jam tersebut mesin masih dalam keadaan dingin sehingga pada sampel 1 muncul masalah yaitu pusat proses bergeser ke atas.

Berdasarkan studi kasus yang telah dijelaskan, kelebihan dari Max Chart adalah memberikan informasi yang sama efektif dengan metode Shewart, seperti ditunjukkan pada gambar 1 dan gambar 2. Kelebihan yang lainnya adalah proses revisi lebih mudah dilakukan karena saat melakukan revisi tidak perlu menghitung ulang batas kendali yang akan digunakan seperti halnya yang terjadi pada metode Shewart. Selain itu, salah satu perbedaan yang juga merupakan kelebihan Max

Chart adalah penggunaan probabilitas kesalahan jenis pertama (α). Pada Max Chart, nilai α digunakan untuk menghitung CL dan UCL. Penggunaan nilai α ini menjadikan proses lebih efektif karena nilai α tetap. Kekurangan dari metode Max Chart ini adalah rumus yang digunakan lebih rumit daripada metode Shewart, sehingga proses perhitungannya juga lebih rumit.



BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Bagan kendali gabungan merupakan bentuk lain dari bagan kendali Shewart yang selama ini dikenal. Salah satu contoh bagan kendali ini adalah Max Chart yang dapat memberikan informasi mengenai *mean* dan standar deviasi proses secara bersamaan.
2. Max Chart menggunakan fungsi maksimum untuk dua buah statistik dengan mendefinisikan variabel baru.
3. Probabilitas kesalahan jenis pertama digunakan untuk menghitung batas kendali pada Max Chart.

5.2 Saran

1. Jika sampel diambil dari populasi yang tidak berdistribusi normal, maka Max Chart tidak dapat digunakan dan diperlukan metode yang lain untuk merancang bagan kendali gabungan.

DAFTAR PUSTAKA

- Blom, Gunnar, *Transformations of the Binomial, Negative Binomial, Poisson and χ^2 Distributions*, (Biometrika: 1954), vol.41, pp.302-316.
- Burr, Irving W., *Statistical Quality Control Methods*, (USA: Marcel Dekker, Inc., 1976).
- Canal, Luisa, *A Normal Approximation for the Chi-Square Distribution*, (Computational Statistics & Data Analysis: 2005), vol.48, pp. 803-808.
- Casella, George and Roger L. Berger, *Statistical Inference*, (Brooks/Cole Publishing Company, 1990), *International Student Edition*.
- Chao, M.T., and S.W. Cheng, *Semicircle Control Chart for Variables Data*, (Quality Engineering 8: 1996), pp. 441-446.
- Chen, Gemai, and Smiley W. Cheng, *Max Chart: Combining X-Bar Chart and S Chart*, (Statistica Sinica 8: 1998), pp. 263-271.
- Devor, R.E., T. Chang, dan J.W. Sutherland, *Statistical Quality Design and Control*, (Macmillan, 1992).
- Domangue R., and S.C. Patch, *Some Omnibus Exponentially Weighted Moving Average Statistical Process Monitoring Schemes*, (Technometrics 33), pp. 299-313.
- Grant, Eugenel, and, Richard S. Leavenworth, *Statistical Quality Control*, (Singapore: McGraw Hill, 1996), edisi ke 7.
- Hawkins, Douglas M. and Qiqi Deng, *Combined Charts for Mean and Variance Information*, (Journal of Quality Technology: 2009), vol.41, pp.415-425
- Hawkins, Douglas M. and R.A.J. Wixley, *A Note on the Transformation of Chi-Squared Variables to Normality*, (The American Statistician: 1986), vol.40, pp.296-298.
- Hogg, Robert V. and Allen T. Craig, *Introduction To Mathematical Statistics*, (Prentice Hall, 1995), edisi ke 5.
- Kreyszig, Erwin, *Introductory Mathematical Statistic: Principles and Methods*, (USA: Wiley Internatonal Edition, 1976).
- Taylor, Jeremy M.G., *Power Transformation to Symmetry*, (Biometrika, 1985), pp.145-152.
- Wilson, Edwin B. and Margaret M. Hilferty, *The Distribution of Chi Square*, (Proceedings of The National Academy of Science of The United States of America: 1931), vol.17, pp.684-688.

Lampiran 1

Jika terdapat m buah subgrup dengan ukuran sampel n , maka penaksir tak bias yang digunakan adalah \bar{X} .

Bukti:

Misalkan Y_1, Y_2, \dots, Y_m , adalah sampel acak berukuran m dari distribusi

$N\left(\theta, \sigma^2/n\right)$, $-\infty < \theta < \infty$ di mana $Y_i = \bar{X}_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ akan dicari

$\hat{\theta}$ maximum likelihood estimators (MLE) dari θ .

$$L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_m) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \right)^m \cdot \exp \left[-\frac{[\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)^2]}{2\sigma^2/n} \right]$$

; $-\infty < \theta < \infty$

dan

$$\ln L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_m) = m \cdot \ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \right) - \frac{[\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)^2]}{2\sigma^2/n}$$

Kemudian, differensialkan $\ln L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_m)$ terhadap θ .

$$\frac{\partial \ln L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial \theta} = 0 + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)}{\sigma^2/n}$$

Lalu, diperoleh

$$\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)}{\sigma^2/n} = 0$$

Jika persamaan di atas diselesaikan, maka akan diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)}{\sigma^2/n} = 0$$

$$\sum_{i=1}^m (y_i - \theta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^m y_i - m\theta = 0$$

$$m\theta = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}$$

$$\theta = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m}$$

$$\theta = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

$$\hat{\theta} = \bar{\bar{X}}$$

Lampiran 2

Tabel konstanta c_4

Jumlah sampel dalam subgroup (n)	Nilai c_4
2	0,7979
3	0,8862
4	0,9213
5	0,9400
6	0,9515
7	0,9594
8	0,9650
9	0,9693
10	0,9727
11	0,9754
12	0,9776
13	0,9794
14	0,9810
15	0,9823
16	0,9835
17	0,9845
18	0,9854
19	0,9862
20	0,9869
25	0,9896
30	0,9914
35	0,9927
40	0,9936
45	0,9943
50	0,9949

Lampiran 3

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengubah distribusi asimetris menjadi distribusi simetris adalah *power transformation* (Taylor, 1985). Beberapa distribusi yang sering ditransformasikan antara lain distribusi Gamma, distribusi Chi Square, distribusi F, dan distribusi Beta.

Metode – metode transformasi yang termasuk ke dalam *power transformation* yaitu *Square Root Transformation* (Fisher, 1922), *Third Root Transformation* (Wilson dan Hilferty, 1931), dan *Fourth Root Transformation* (Hawkins dan Wixley, 1986).

Dari beberapa metode transformasi tersebut, yang terbaik adalah *Square Root Transformation* dan *Third Root Transformation* (Luisa, 2005). *Third Root Transformation* menghasilkan aproksimasi yang lebih mendekati normal daripada *Square Root Transformation* dan jika dibandingkan dengan *Fourth Root Transformation*, *Third Root Transformation* lebih baik dalam mengaproksimasi untuk $v > 2$, di mana v adalah derajat bebas. Sedangkan transformasi yang diusulkan oleh Goria yaitu kombinasi linear dari *square* dan *fourth root transformation*, hanya baik untuk nilai v yang besar. Sehingga, dalam pembuktian ini akan digunakan *Third Root Transformation*.

Formula umum dalam transformasi suatu variabel acak X , di mana X berdistribusi asimetris, menjadi normal standar adalah sebagai berikut:

$$Z(X) = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

di mana $Z(X)$ mempunyai mean 0 dan variansi 1.

Formulasi tersebut di atas berlaku untuk variabel acak X yang memiliki distribusi asimetris.

Wilson dan Hilferty (1931) mengemukakan suatu cara untuk mentransformasikan variabel Chi-Square menjadi normal standar (*Z-scale*) dengan memanfaatkan formulasi umum tersebut.

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa distribusi Chi Square adalah distribusi asimetris sehingga proses transformasinya lebih kompleks.

Tahap pertama yang harus dilakukan adalah mentransformasikan variabel yang berdistribusi Chi Square ke distribusi normal.

Untuk melakukan tahap pertama ini, sebelumnya variabel χ^2 dapat ditulis sebagai berikut:

$\chi^2 = v + e$ di mana $E[e] = 0$ dan $E[e^2] = 2v$. Akan ditunjukkan bahwa pendefinisian variabel tersebut tidak mengubah $E[\chi^2] = v$ dan $var[\chi^2] = 2v$.

Pertama, $E[\chi^2] = E[v + e] = E[v] + E[e] = v + 0 = v$.

Kedua, $var[\chi^2] = E[(\chi^2)^2] - [E(\chi^2)]^2 = E[(v + e)^2] - v^2$

Sebelumnya akan dicari $E[(v + e)^2]$,

$$\begin{aligned} E[(v + e)^2] &= E[v^2 + e^2 + 2ve] \\ &= E[v^2] + E[e^2] + E[2ve] \\ &= v^2 + 2v + 2vE[e] \\ &= v^2 + 2v + 0 \\ &= v^2 + 2v \end{aligned}$$

Sehingga, $var[\chi^2] = E[(v + e)^2] - v^2 = v^2 + 2v - v^2 = 2v$.

Jika menggunakan *power transformation*, maka $\chi^{2/p} = (v + e)^{1/p}$, dengan ekspansi binomial, *mean* dari $\chi^{2/p}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$mean \left(\frac{\chi^2}{v} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{v} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + \frac{4}{3} \frac{1}{v^2} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left(\frac{1}{p} - 2 \right) + \dots$$

Dari persamaan di atas dan ekspansi momen dari $(\chi^2/v)^{1/p}$ untuk *mean* dapat diperoleh:

$$\text{momen ke-2} = \frac{2}{vp^2} + \frac{2}{v^2p^2} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left(\frac{3}{p} - 1 \right) + \dots$$

$$\text{momen ke-3} = \frac{4}{v^2} \left(\frac{3}{p} - 1 \right) + \dots$$

Wilson dan Hilferty menggunakan $p = 3$ dalam proses transformasi, yang kemudian dikenal dengan *Third (Cube) Root Transformation*.

Secara matematis dapat ditulis,

$$X = \left(\frac{\chi^2}{v} \right)^{1/3}$$

dengan mean $\mu_X = 1 - \left(\frac{2}{9v}\right)$ dan variansi $\sigma_X^2 = \left(\frac{2}{9v}\right)$.

Variabel $X = \left(\frac{\chi_v^2}{v}\right)^{1/3}$ ini mendekati distribusi normal karena memiliki koefisien *skewness* mendekati 0 dan koefisien *kurtosis* mendekati 3. Selanjutnya akan dilakukan tahap transformasi berikutnya.

Sebelumnya akan didefinisikan variabel Y , di mana $Y = \chi_v^2$, dengan demikian variabel X dapat ditulis $X = \left(\frac{Y}{v}\right)^{1/3}$.

Tahap selanjutnya adalah mensubstitusi variabel X , μ_X , dan σ_X^2 ke dalam formula umum $Z(X)$ untuk transformasi variabel Chi Square Y . Hasil dari substitusi tersebut adalah:

$$W(Y) = \frac{\left(\frac{Y}{v}\right)^{1/3} - \left[1 - \left(\frac{2}{9v}\right)\right]}{\sqrt{\left(\frac{2}{9v}\right)}}$$

Persamaan $W(Y)$ merupakan bentuk dasar dari transformasi ke normal standar.

Jika Z adalah variabel normal standar, maka $Pr(Z < W(Y))$ mengaproksimasi $Pr(Y < y)$.

Jadi, fungsi distribusi dari variabel Chi Square dengan derajat bebas v dapat diaproksimasi oleh fungsi distribusi dari normal standar. Secara matematis dapat ditulis,

$$Pr(Y < y) \approx \Phi[W(Y)]$$

di mana $Y = \chi_v^2$.

Lampiran 4

Diketahui $X_j \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2)$, maka $\bar{X}_i \sim N\left(\mu + a\sigma, \frac{[b\sigma]^2}{n_i}\right)$.

Bukti:

Diketahui variabel acak $X_j \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2)$ dengan $j = 1, 2, \dots, n$.

Karena variabel acak $X_j \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2)$, maka X mempunyai bentuk M.G.F. sebagai berikut:

$$M(t) = \exp\left((\mu + a\sigma)t + \frac{[b\sigma]^2 t^2}{2}\right)$$

Kemudian didefinisikan suatu variabel acak baru yaitu Y di mana $Y = \bar{X}$.

Variabel acak Y dapat ditulis dalam bentuk lain seperti berikut:

$$\begin{aligned} Y = \bar{X} &= \frac{\sum X_j}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \\ &= \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n} \end{aligned}$$

dan M.G.F. untuk Y adalah:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t\left(\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}\right)}\right) \\ &= E\left(e^{t\frac{X_1}{n} + t\frac{X_2}{n} + \dots + t\frac{X_n}{n}}\right) \\ &= E\left(e^{\frac{t}{n}X_1} \cdot e^{\frac{t}{n}X_2} \dots e^{\frac{t}{n}X_n}\right) \\ &= E\left(e^{\frac{t}{n}X_1}\right) \cdot E\left(e^{\frac{t}{n}X_2}\right) \dots E\left(e^{\frac{t}{n}X_n}\right) \\ &= \exp\left((\mu + a\sigma)\frac{t}{n} + \frac{[b\sigma]^2 t^2/n^2}{2}\right) \cdot \exp\left((\mu + a\sigma)\frac{t}{n} + \frac{[b\sigma]^2 t^2/n^2}{2}\right) \\ &\quad \dots \exp\left((\mu + a\sigma)\frac{t}{n} + \frac{[b\sigma]^2 t^2/n^2}{2}\right) \\ &= \exp\left[n\left(\frac{(\mu + a\sigma)t}{n} + \frac{[b\sigma]^2 t^2}{2n^2}\right)\right] \\ &= \exp\left((\mu + a\sigma)t + \frac{[b\sigma]^2 t^2}{2n}\right) \end{aligned}$$

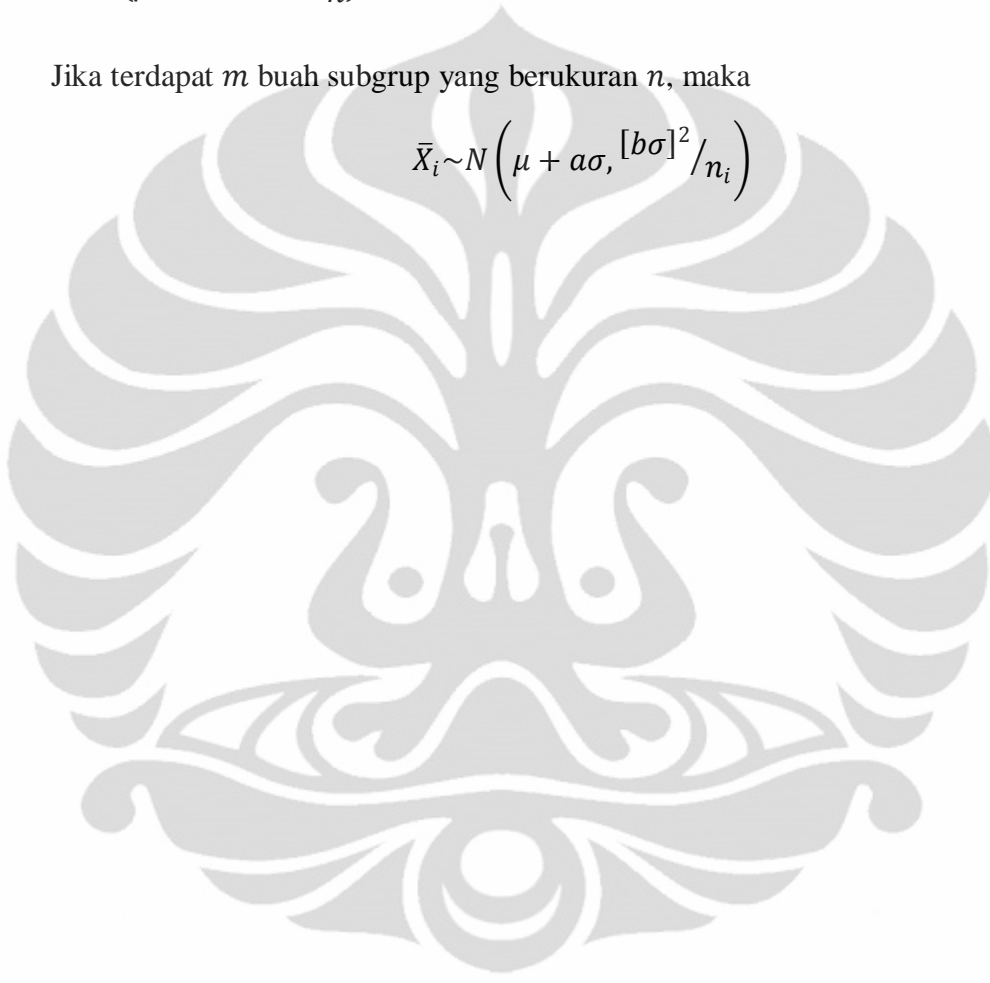
$$M_Y(t) = \exp\left((\mu + a\sigma)t + \frac{[b\sigma]^2 t^2}{2n}\right)$$

Bentuk M.G.F. di atas menunjukkan bahwa $Y \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2/n)$ atau

$$\bar{X} \sim N(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2/n).$$

Jika terdapat m buah subgrup yang berukuran n , maka

$$\bar{X}_i \sim N\left(\mu + a\sigma, [b\sigma]^2/n_i\right)$$



Lampiran 5

Data diameter silinder

Sampel i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	Sampel i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}
1	205	202	204	207	205	19	207	206	194	197	201
2	202	196	201	198	202	20	200	204	198	199	199
3	201	202	199	197	196	21	203	200	204	199	200
4	205	203	196	201	197	22	196	203	197	201	194
5	199	196	201	200	195	23	197	199	203	200	196
6	203	198	192	217	196	24	201	197	196	199	207
7	202	202	198	203	202	25	204	196	201	199	197
8	197	196	196	200	204	26	206	206	199	200	203
9	199	200	204	196	202	27	204	203	199	199	197
10	202	196	204	195	197	28	199	201	201	194	200
11	205	204	202	208	205	29	201	196	197	204	200
12	200	201	199	200	201	30	203	206	201	196	201
13	205	196	201	197	198	31	203	197	199	197	201
14	202	199	200	198	200	32	197	194	199	200	199
15	200	200	201	205	201	33	200	201	200	197	200
16	201	187	209	202	200	34	199	199	201	201	201
17	202	202	204	198	203	35	200	204	197	197	199
18	201	198	204	201	201						