UNIVERSITAS INDONESIA

METODE *SPREADING GAINS AND LOSSES* PADA PENDANAAN PROGRAM PENSIUN MANFAAT PASTI

SKRIPSI

FARAH IRHAMNI
0706163092

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

METODE *SPREADING GAINS AND LOSSES* PADA PENDANAAN PROGRAM PENSIUN MANFAAT PASTI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

FARAH IRHAMI
0706163092

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Farah Irhamni
NPM	: 0706163092
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 8 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Farah Irhamni
NPM	:	0706163092
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Metode *Spreading Gains and Losses* Pada Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dra. Netty Sunandi, M.Si.	(Netty S)
Pembimbing	:	Mila Novita, M.Si.	( )
Penguji	:	Dra. Ida Fithriani, M.Si.	( )
Penguji	:	Sarini Abdullah, M.Stat.	( )
Penguji	:	Fevi Novkaniza, M.Si.	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	13 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah SWT. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Karena sesungguhnya walau sekeras apapun saya berusaha, bila tidak ada izin dari Allah SWT. saya tidak akan dapat menyelesaikan karya tulis ini tepat pada waktunya. Saya sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama saya kuliah. Ucapan terima kasih tersebut terhatur kepada:

(1) Dra. Netty Sunandi, M.Si. selaku pembimbing I dan Mila Novita, M.Si. selaku pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu, tenaga dan pikiran serta memberikan masukan-masukan dalam proses pembuatan tugas akhir ini.

(2) Dra. Yahma Wisnani, M.Kom. selaku pembimbing akademik selama menjalani masa kuliah.

(3) Seluruh staf pengajar dan karyawan di departemen Matematika UI atas ilmu pengetahuan dan bantuan yang telah diberikan.

(4) Ayah dan ibu tercinta, adik-adik (Nisa, Daru, Dinal, dan Ii), dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungannya.

(5) Nana dan Yoan, sahabat setia yang telah memberikan semangat dan dukungan yang tak henti-hentinya kepada saya, terutama selama penyusunan tugas akhir ini.

(6) Riyan, Dita, Nora, Winda, Lois, Widi, Manta, Iki, dan Bapet untuk waktu dan kenangan selama masa kuliah ini, semoga kebersamaan kita dapat terus berlanjut.

(7) Teman-teman seperjuangan peminatan aktuaria (Riski, Nedia, dan Misda), terima kasih atas kerja sama dan dukungannya.

(8) Seluruh teman-teman angkatan 2007 yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.

(9) Teman-teman dan senior-senior dari angkatan 2005-2009 yang juga telah memberikan dukungan dalam pengerjaan tugas akhir ini;

Saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan tugas akhir ini, yang mohon maaf tidak dapat disebutkan satu per satu. Saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang membantu.

Saya berharap mudah-mudahan dengan dibuatnya tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan pengembangan ilmu. Akhir kata, saya mohon maaf ika dalam tugas akhir ini masih terdapat banyak kekurangan ataupun kesalahan, baik dalam hal penulisan maupun isi materi. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa memberikan taufik hidayah-Nya kepada kita semua.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Farah Irhamni
NPM	: 0706163092
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Metode *Spreading Gains and Losses* Pada Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 8 Juli 2011
Yang menyatakan

(Farah Irhamni)

ABSTRAK

Nama : Farah Irhamni
Program Studi : Matematika

Judul : Metode *Spreading Gains and Losses* Pada Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

Suatu asumsi berkaitan dengan tingkat pengembalian jangka panjang pada aset program pensiun dibuat oleh aktuaris ketika dilakukan perhitungan program pensiun manfaat pasti. Terdapat perbedaan antara asumsi tersebut dengan asumsi tingkat diskonto yang dikenakan atas kewajiban pensiun, dikarenakan pada program pensiun manfaat pasti besarnya kewajiban pensiun tidak bergantung pada aset program pensiun. Ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi akan mengakibatkan timbulnya laba ataupun rugi pada dana program pensiun. *Supplementary contribution* yang ditentukan dengan menggunakan metode *spreading gains and losses* dibuat untuk menutupi laba ataupun rugi yang terjadi. Asumsi tingkat pengembalian investasi yang konservatif (lebih kecil daripada tingkat pengembalian investasi aktual) akan mengakibatkan terjadinya surplus jangka panjang pada dana program pensiun. Sedangkan, asumsi tingkat pengembalian investasi yang optimis (lebih besar daripada tingkat pengembalian investasi aktual) akan mengakibatkan terjadinya defisit jangka panjang.

Kata Kunci : valuasi aktuaria, metode pendanaan, metode *spreading gains and losses*
xiv+95 halaman : 11 gambar; 9 tabel
Daftar Pustaka : 16 (1952-2010)

ABSTRACT

Name : Farah Irhamni
Study Program : Mathematics
Title : Spreading Gains and Losses Method in Defined-Benefit Pension Funding

An assumption concerning the long term-rate of return on assets is made by actuaries when they value defined-benefit pension plans. There is a distinction between this assumption and the discount rate used to value pension liabilities, as the value placed on liabilities does not depend on asset location in the pension fund. The inappropriate investment return assumption will lead to the occurrence of gains or losses on the pension fund. Supplementary contribution, which is determined by spreding gains and losses method, is made to cover these gains or losses. A conservative investment return assumption leads to long-term surpluses in the plan. In the other hand, long-term deficits result from an optimistic assumption.

Keywords : actuarial valuation, funding method, spreading gains and losses method.
xiv+95 pages : 11 pictures; 9 tables
Bibliography : 16 (1952-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap orang akan selalu berusaha memenuhi kebutuhan serta menjaga kelangsungan hidupnya. Karena tujuan tersebutlah, seseorang harus selalu dapat menjaga kesinambungan penghasilannya. Pada usia produktif, penghasilan tersebut didapatkan dengan cara bekerja. Namun, bagaimana dengan pada masa tua? Pada masa ini kesempatan kerja amat terbatas dan produktivitas kerja menurun, sementara tuntutan akan pemenuhan kebutuhan hidupnya tidak berubah, sehingga dapat menimbulkan turunnya taraf hidup seseorang. Untuk mengantisipasi hal tersebut, harus dibuat rencana kehidupan di masa mendatang dengan memanfaatkan suatu sistem yang dapat menjamin kesinambungan penghasilan apabila seseorang sudah mencapai usia tertentu, yang mengakibatkan dia tidak dapat bekerja lagi. Sistem yang relevan seperti yang dimaksudkan di atas adalah program pensiun.

Berdasarkan UU Republik Indonesia Nomor 11 tahun 1992 tentang Dana Pensiun, program pensiun adalah suatu program yang mengupayakan tersedianya uang pensiun (atau disebut juga manfaat pensiun) bagi pesertanya. Program tersebut dibuat dengan tujuan untuk mempersiapkan kesinambungan penghasilan di hari tua bagi seseorang yang sudah tidak bekerja, sehingga kesejahteraan hidupnya masih dapat terjamin.

Secara umum, program pensiun terbagi menjadi dua jenis, yaitu program pensiun iuran pasti dan program pensiun manfaat pasti. Program pensiun iuran pasti adalah program pensiun yang besarnya iuran telah ditetapkan di awal sementara besarnya manfaat pensiun yang diterima peserta merupakan jumlah keseluruhan iuran peserta tersebut beserta hasil pengembangannya. Sedangkan program pensiun manfaat pasti adalah program pensiun dimana besarnya manfaat pensiun telah ditetapkan di awal sementara besarnya iuran yang harus dibayarkan dari waktu ke waktu tidak pasti jumlahnya, bergantung pada kecukupan dana yang telah terkumpul untuk memenuhi kewajiban manfaat pensiun. Pada program pensiun manfaat pasti, seorang aktuaris harus melakukan perhitungan (valuasi) secara berkala untuk menentukan besarnya total iuran (*contribution*) yang sesuai setiap periodenya (biasanya tahunan), sehingga dana yang terkumpul akan mencukupi untuk membayar manfaat pensiun yang telah dijanjikan kepada peserta.

Untuk tujuan perhitungan seperti yang telah disebutkan sebelumnya, dibuatlah sejumlah asumsi berkaitan dengan berbagai macam faktor tidak pasti yang mempengaruhi kewajiban manfaat pensiun dan pendanaan untuk membiayai kewajiban tersebut (hal ini dilihat dari sudut perusahaan asuransi). Asumsi-asumsi tersebut disebut dengan asumsi aktuaria dan dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu asumsi yang berkaitan dengan faktor demografi dan asumsi yang berkaitan dengan faktor ekonomi. Salah satu asumsi yang berkaitan dengan faktor demografi adalah tingkat mortalitas (kematian). Sedangkan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan faktor ekonomi adalah tingkat kenaikan gaji (termasuk didalamnya inflasi) dan tingkat bunga [Winklevoss, 1977]. Asumsi tingkat bunga sendiri dibedakan menjadi dua macam, yaitu asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun dan asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas aset program pensiun. Asumsi tingkat bunga atas aset program pensiun disebut juga dengan asumsi tingkat pengembalian investasi.

Pada kenyataannya, asumsi tingkat pengembalian investasi yang digunakan aktuaris mungkin saja berbeda dengan tingkat pengembalian investasi aktual. Ketidaksesuaian tersebut akan mengakibatkan munculnya suatu laba ataupun rugi pada dana program pensiun, yang tentu saja diluar ekspektasi awal. Agar besarnya dana yang terkumpul tetap berjalan sesuai dengan rencana dan mencukupi untuk membayar manfaat yang telah dijanjikan, laba atau rugi yang terjadi perlu ditutupi dengan *supplementary contribution*. *Supplementary contribution* dapat diartikan sebagai faktor kontribusi tambahan yang timbul karena adanya laba atau rugi pada dana program pensiun, perubahan manfaat pensiun, ataupun perubahan pada asumsi yang digunakan. Terdapat beberapa metode yang telah dikembangkan untuk menentukan besarnya *supplementary contribution,*dan pembahasan pada tugas akhir ini akan difokuskan pada salah satu metode, yaitu metode *spreading gains and losses.* Prinsip dasar dari metode ini adalah pembayaran *loss* yang terjadi pada waktu t, didistribusikan pada waktu t, $t + 1$, $t + 2$ dan seterusnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada subbab sebelumnya, maka permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

- Bagaimanakah penyesuaian pendanaan program pensiun manfaat pasti jika terjadi perbedaan antara tingkat pengembalian investasi aktual dengan asumsi tingkat pengembalian investasi?
- Apakah dampak jangka panjang yang ditimbulkan pada pendanaan program pensiun manfaat pasti akibat ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi yang digunakan?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

- Menjelaskan serta memberikan ilustrasi mengenai pendanaan program pensiun manfaat pasti jika terjadi perbedaan antara tingkat pengembalian investasi aktual dengan asumsi tingkat pengembalian investasi, dimana *supplementary contribution*-nya ditentukan dengan menggunakan metode *spreading gains and losses*.
- Menganalisa dampak jangka panjang yang ditimbulkan pada pendanaan program pensiun manfaat pasti akibat ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi yang digunakan.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam tugas akhir ini dibatasi oleh hal-hal berikut:

- Diasumsikan semua peserta pensiun pada usia normal dan populasi peserta program pensiun stasioner.
- Analisa yang dilakukan hanya untuk ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi, sedangkan asumsi aktuaria yang lain dianggap telah sesuai dengan realita.
- Metode pendanaan program pensiun yang digunakan adalah metode *entry age normal*.
- Cara menentukan nilai parameter metode *spreading gains and losses* yang optimal tidak akan dijelaskan pada tugas akhir ini.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Pengukuran Bunga

Berbagai istilah dan notasi penting yang digunakan dalam pengukuran bunga adalah:

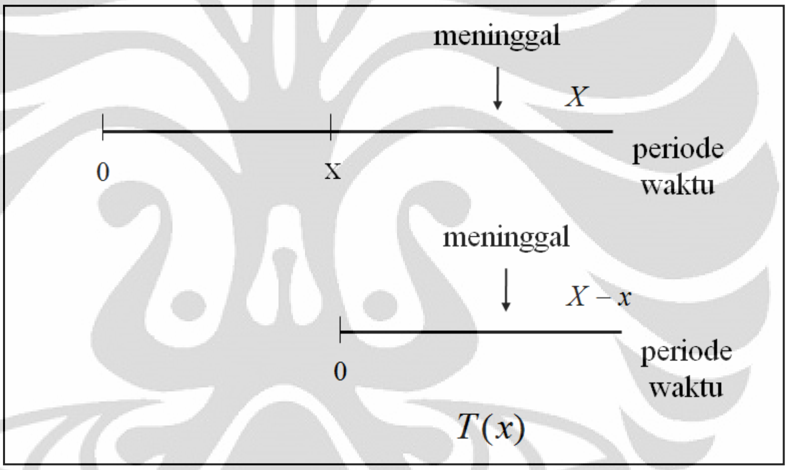
- *Time value of money* adalah timbulnya faktor bunga akibat perbedaan waktu, yang mengakibatkan uang yang kita miliki saat ini akan memberikan nilai yang berbeda pada waktu mendatang. Besarnya perubahan jumlah uang tersebut bergantung pada besarnya tingkat bunga dan waktu.
- Bunga adalah kompensasi pembayaran dari peminjaman suatu modal kepada yang meminjamkan modal tersebut.
- Besar bunga dalam suatu periode adalah selisih antara jumlah total uang yang diterima sesudah suatu periode waktu dengan sejumlah uang yang diinvestasikan pada saat awal.
- Tingkat bunga (dinotasikan dengan i) adalah besar bunga yang diperoleh dalam suatu periode per jumlah uang yang diinvestasikan pada awal periode tersebut (dimana bunga dibayarkan pada akhir periode).
- Tingkat diskonto (dinotasikan dengan d) adalah ukuran bunga yang dibayarkan pada awal periode (besar bunga yang diperoleh dalam suatu periode per jumlah uang yang dihasilkan pada akhir periode tersebut).
- *Present value* adalah nilai kini dari sejumlah uang pada masa mendatang. *Present value* (pada saat sekarang) dari uang sejumlah X (pada n periode mendatang) adalah $(1+i)^{-n}X$.
- $v=(1+i)^{-1}$ adalah notasi untuk faktor diskonto.
- *Future value* adalah nilai akumulasi dari sejumlah uang pada masa sebelumnya. *Future value* (pada n periode mendatang) dari uang sejumlah A (pada saat sekarang) adalah $(1+i)^n A$.
- $u=(1+i)$ adalah notasi untuk faktor akumulasi.

2.2 Dasar-Dasar Aktuaria

Sebagai dasar dari pembahasan-pembahasan selanjutnya, didefinisikan dua buah variabel random, yaitu:

- Variabel random kontinu X didefinisikan sebagai usia saat kematian yang diukur dari saat lahir (*age-of-death*), sedangkan x adalah nilai usia yang diberikan.
- Variabel random kontinu $T(x)$ didefinisikan sebagai sisa usia dari seseorang yang saat ini berusia x (*future life time* atau *time until death*)

$$T(x) = \left(X - x \middle| X > x\right), \qquad x \geq 0. \tag{2.1}$$



Gambar 2.1 Diagram waktu untuk $T(x)$

2.2.1 Fungsi Survival

Fungsi distribusi dari variabel random X adalah

$$F_X(x) = \Pr\left(X \leq x\right), \qquad x \geq 0. \tag{2.2}$$

Fungsi distribusi tersebut menyatakan probabilitas seseorang yang berusia 0 (bayi) akan meninggal x tahun kemudian. Fungsi survival dari variabel random X $\left(s_X(x)\right)$ adalah probabilitas seseorang yang berusia 0 (bayi) masih hidup x tahun kemudian dan dirumuskan sebagai berikut

$$s_X(x) = \Pr\left(X > x\right), \qquad x \geq 0. \tag{2.3}$$

Fungsi survival dari variabel random $T(x)$ $\left(s_{T(x)}(t)\right)$ adalah probabilitas seseorang yang berusia *x* masih hidup *t* tahun kemudian dan dirumuskan sebagai berikut

$$s_{T(x)}(t) = \Pr\left(T(x) > t\right), \qquad t \geq 0,\ x \geq 0. \tag{2.4}$$

Fungsi survival pada persamaan (2.4) biasa dinotasikan sebagai ${}_t p_x$. Sedangkan, fungsi distribusi dari variabel random $T(x)$ biasa dinotasikan dengan ${}_t q_x$ (menyatakan probabilitas seseorang yang berusia *x* akan meninggal *t* tahun kemudian), dimana

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x . \tag{2.5}$$

Hubungan antara ${}_t p_x$ dengan $s_X(x)$ adalah

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \Pr\left(T(x) > t\right), \qquad t \geq 0,\ x \geq 0 \\ &= \Pr\left(X - x > t \middle| X > x\right) \\ &= \Pr\left(X > x + t \middle| X > x\right) \\ &= \frac{\Pr\left(X > x + t\right)}{\Pr\left(X > x\right)} \\ &= \frac{s_X\left(x+t\right)}{s_X\left(x\right)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sedangkan hubungan antara ${}_t q_x$ dengan $s_X(x)$ adalah

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= 1 - {}_t p_x \\ &= 1 - \frac{s_X\left(x+t\right)}{s_X\left(x\right)} \\ &= \frac{s_X\left(x\right) - s_X\left(x+t\right)}{s_X\left(x\right)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.2 Curtate Future Life Time

Variabel random diskrit $W(x)$ didefinisikan sebagai banyaknya tahun di masa depan yang akan dijalani oleh seseorang yang berusia *x*, sebelum dia meninggal. Nilai dari variabel random diskrit $W(x)$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari nilai dari variabel random kontinu $T(x)$, yaitu

$$W(x) = \lfloor T(x) \rfloor . \tag{2.8}$$

Fungsi probabilitas dari variabel random diskrit $W(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
\Pr\big(W(x) = w\big) &= \Pr\big(w \le T(x) < w+1\big) \\
&= \Pr\big(T(x) < w+1\big) - \Pr\big(T(x) < w\big) \\
&= \Pr\big(T(x) \le w+1\big) - \Pr\big(T(x) \le w\big) \\
&= {}_{w+1}q_x - {}_w q_x \\
&= \big(1 - {}_{w+1}p_x\big) - \big(1 - {}_w p_x\big) \\
&= {}_w p_x - {}_{w+1}p_x && (2.9) \\
&= {}_w p_x - \left[\frac{s(x+w+1)}{s(x)}\right] \\
&= {}_w p_x - \left[\frac{s(x+w)}{s(x)} \; \frac{s(x+w+1)}{s(x+w)}\right] \\
&= {}_w p_x - \big({}_w p_x \; {}_1 p_{x+w}\big) \\
&= {}_w p_x \big(1 - p_{x+w}\big) \\
&= {}_w p_x \; q_{x+w} . && (2.10)
\end{aligned}$$

dimana:

$p_x \quad = \quad {}_1 p_x$

$q_x \quad = \quad {}_1 q_x$

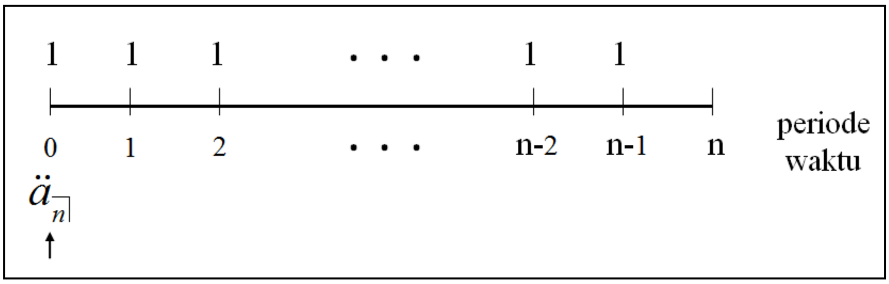
2.3 Anuitas

Anuitas adalah serangkaian pembayaran (ataupun penerimaan) yang sifatnya periodik (dilakukan pada interval-interval waktu yang sama), contohnya adalah cicilan kendaraan bermotor ataupun rumah dan premi asuransi. Berdasarkan jenisnya, anuitas dapat dibagi menjadi dua, yaitu:

- anuitas pasti (*annuity certain*)
  Anuitas pasti adalah anuitas yang pembayarannya pasti dilakukan pada suatu periode waktu yang ditentukan (periode waktu pembayaran ditentukan dengan jelas kapan mulai dan berakhirnya). Salah satu jenis anuitas pasti adalah anuitas dimuka.
- anuitas tidak pasti (*annuity contingent*)
  Anuitas tidak pasti adalah anuitas yang periode waktu pembayarannya tidak pasti. Salah satu contoh anuitas tidak pasti adalah anuitas hidup. Anuitas hidup adalah anuitas yang setiap pembayarannya hanya akan dilakukan jika seorang peserta program pensiun masih hidup atau dalam jangka waktu yang ditentukan sesuai dengan kontrak program pensiun. Salah satu jenis anuitas hidup adalah anuitas hidup diskrit.

2.2.1 Anuitas Dimuka (*Annuity Due*)

Anuitas dimuka adalah anuitas yang dibayarkan pada setiap awal periode. Seperti telah disebutkan sebelumnya, anuitas dimuka adalah salah satu jenis anuitas pasti.



Gambar 2.2 Diagram waktu untuk anuitas dimuka sebesar satu

Gambar 2.2 adalah diagram waktu untuk anuitas dimuka sebesar satu selama *n* periode. *Present value* dari anuitas dimuka sebesar satu selama *n* periode dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ dan dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1+v+v^2+...+v^{n-1}\\ &= \frac{1-v^n}{1-v}\\ &= \frac{1-v^n}{1-\frac{1}{1+i}}\\ &= \frac{1-v^n}{\frac{(1+i)-1}{1+i}}\\ &= \frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}}\\ &= \frac{1-v^n}{d}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

dimana:

i = tingkat bunga

v = faktor diskonto

d = tingkat diskonto

2.3.2 Anuitas Hidup Diskrit

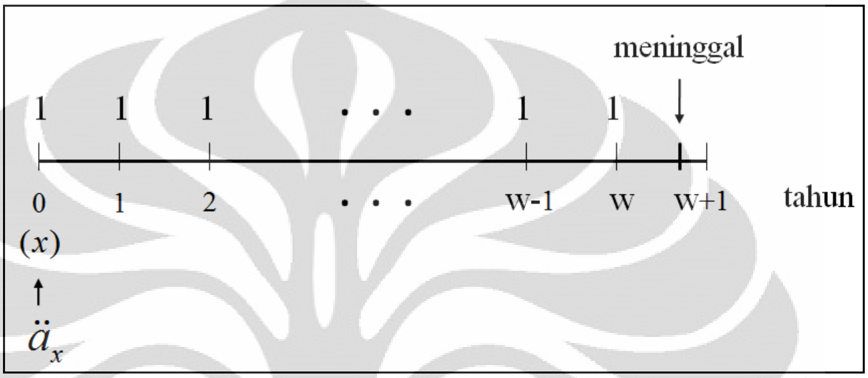
Anuitas hidup diskrit adalah anuitas hidup yang dibayarkan kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun secara berkala setiap periodenya.[1] Berdasarkan sistem pembayaran yang dilakukan, anuitas hidup diskrit dapat dibagi lagi menjadi dua bagian, yaitu anuitas hidup diskrit dimuka dan anuitas hidup diskrit biasa. Anuitas hidup diskrit dimuka adalah anuitas hidup yang dibayarkan setiap awal periode, sedangkan anuitas hidup diskrit biasa adalah anuitas hidup yang dibayarkan setiap akhir periode. Pada pembahasan selanjutnya, hanya akan dibahas anuitas hidup diskrit dimuka.

---

[1] Periode waktu yang digunakan bisa tahunan, semesteran, bulanan, ataupun satuan waktu lainnya. Namun, periode waktu yang biasa digunakan pada perhitungan pendanaan program pensiun adalah tahunan, oleh karena itu pada tugas akhir ini penggunaan kata periode mengacu pada tahun.

1. <u>anuitas seumur hidup diskrit dimuka</u>

   Anuitas seumur hidup diskrit dimuka merupakan sederetan pembayaran yang dibayarkan setiap awal periode kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun sampai ia meninggal dunia. *Actuarial present value* dari anuitas seumur hidup diskrit dimuka sebesar satu, yang dimulai dari usia x dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$.



Gambar 2.3 Diagram waktu untuk anuitas seumur hidup diskrit dimuka

Misalkan Y adalah variabel random yang menyatakan *present value* dari anuitas diskrit dimuka sebesar satu selama seorang peserta program pensiun masih hidup dan W adalah variabel random untuk sisa usia diskrit (*curtate future life time*), secara matematis Y dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Y = \ddot{a}_{\overline{W+1}|} \qquad ,W = 0, 1, 2,...$$

Ekspektasi dari variabel random Y dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$ dan dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= E[Y] \\ &= E[\ddot{a}_{\overline{W+1}|}] \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \Pr(W = w) \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1}|}\ {}_w p_x\, q_{x+w}\end{aligned}$$

misalkan $g(w) = \ddot{a}_{\overline{w+1}|}$ dan $\Delta f(w) = {}_{w}p_x\, q_{x+w}$, maka

$$\begin{aligned}
\Delta g(w) &= \Delta \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \\
&= \ddot{a}_{\overline{w+2}|} - \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \\
&= \frac{1-v^{w+2}}{d} - \frac{1-v^{w+1}}{d} \\
&= \frac{\left(1-v^{w+2}\right)-\left(1-v^{w+1}\right)}{d} \\
&= \frac{v^{w+1}-v^{w+2}}{d} \\
&= \frac{v^{w+1}(1-v)}{d} \\
&= v^{w+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(w) &= {}_{w}p_x\, q_{x+w} \\
&= {}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x \\
&= -({}_{w+1}p_x - {}_{w}p_x) \\
&= -\Delta({}_{w}p_x)
\end{aligned}$$

$$f(w) = -{}_{w}p_x$$

dengan menggunakan sumasi parsial,[2] akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= g(w)\, f(w)\Big|_0^{\infty} - \sum_{w=0}^{\infty} f(w+1)\ \Delta\left[g(w)\right] \\
&= \ddot{a}_{\overline{w+1}|}(-{}_{w}p_x)\Big|_0^{\infty} + \sum_{w=0}^{\infty} {}_{w+1}p_x\, v^{w+1} \\
&= \left[\ddot{a}_{\overline{\infty}|}(-{}_{\infty}p_x) - \ddot{a}_{\overline{1}|}(-{}_{0}p_x)\right] + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}\ {}_{w+1}p_x \\
&= \left[0-1(-1)\right] + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}\ {}_{w+1}p_x \\
&= 1 + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}\ {}_{w+1}p_x
\end{aligned}$$

ambil $s = w+1 \quad \rightarrow \ w = s-1$, sehingga

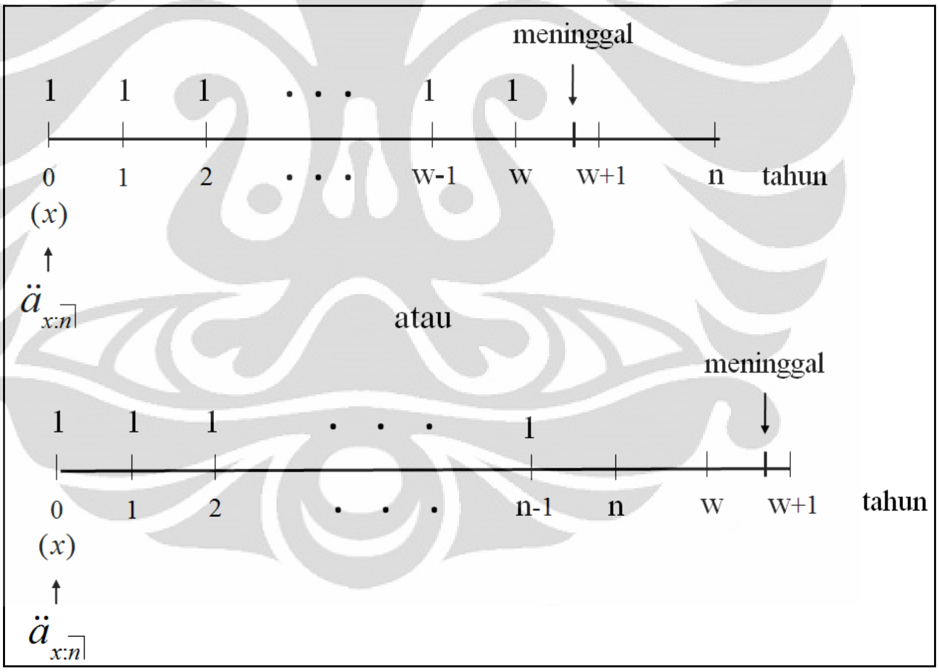
$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} v^s\ {}_{s}p_x \\
&= v^0\ {}_{0}p_x + \sum_{s=1}^{\infty} v^s\ {}_{s}p_x \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} v^s\ {}_{s}p_x \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

[2] Penjelasan lebih lanjut mengenai sumasi parsial ada pada Lampiran 2.

Persamaan (2.12) menyatakan bentuk umum pembayaran (yang dilihat pada masa kini) untuk *actuarial present value* dari anuitas seumur hidup diskrit dimuka dimana suku ${}_s p_x$ menyatakan probabilitas suatu pembayaran sebesar satu dapat dilakukan pada saat s.

2. <u>anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun</u>

   Anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun merupakan sederetan pembayaran yang dibayarkan setiap awal periode kepada (ataupun oleh) seorang peserta program pensiun selama *n* tahun ataupun hingga ia meninggal dunia, bergantung pada kondisi mana yang lebih dahulu tercapai. *Actuarial present value* dari anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun sebesar satu, yang dimulai dari usia *x* dinotasikan dengan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.



Gambar 2.4 Diagram waktu untuk anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun

Misalkan *Y* adalah variabel random yang menyatakan *present value* dari anuitas diskrit dimuka berjangka *n*-tahun sebesar satu dan *W* adalah variabel random untuk sisa usia diskrit (*curtate future life time*), secara matematis *Y* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{W+1}|} & ,W = 0, 1, ..., n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & ,W = n, n+1, ... \end{cases}$$

Ekspektasi dari variabel random Y dinotasikan dengan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dan dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\ &= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \Pr(W = w) + \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} \Pr(W = w) \\ &= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \, {}_w p_x \, q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \sum_{w=n}^{\infty} ({}_w p_x - {}_{w+1} p_x) \\ &= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \, {}_w p_x \, q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \left[\left({}_n p_x - {}_{n+1} p_x \right) + \left({}_{n+1} p_x - {}_{n+2} p_x \right) + ... \right] \\ &= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1}|} \, {}_w p_x \, q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \end{aligned}$$

sama seperti pada *whole-life* anuitas diskrit dimuka, dengan menggunakan sumasi parsial, akan diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{\overline{w+1}|} (-{}_w p_x) \Big|_0^n + \sum_{w=0}^{n-1} {}_{w+1} p_x \, v^{w+1} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\ &= \left[\ddot{a}_{\overline{n+1}|} (-{}_n p_x) - \ddot{a}_{\overline{1}|} (-{}_0 p_x) \right] + \sum_{w=0}^{n-1} {}_{w+1} p_x \, v^{w+1} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\ &= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|} \, {}_n p_x + 1 + \sum_{w=0}^{n-1} v^{w+1} \, {}_{w+1} p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \end{aligned}$$

ambil $s = w+1 \quad \rightarrow \quad w = s-1$, sehingga

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|} \, {}_n p_x + 1 + \sum_{s=1}^{n} v^s \, {}_s p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\ &= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|} \, {}_n p_x + v^0 \, {}_0 p_x + \sum_{s=1}^{n} v^s \, {}_s p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\ &= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|} \, {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n} v^s \, {}_s p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\ &= -\ddot{a}_{\overline{n+1}|} \, {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x + v^n \, {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= -\left(\sum_{t=0}^{n} v^t\right) {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x + v^n \, {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\
&= -\left(\sum_{t=0}^{n-1} v^t + v^n\right) {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x + v^n \, {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\
&= -\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n\right) {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x + v^n \, {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\
&= -\ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x - v^n \, {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x + v^n \, {}_n p_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x \\
&= \sum_{s=0}^{n-1} v^s \, {}_s p_x \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Persamaan (2.13) menyatakan bentuk umum pembayaran (yang dilihat pada masa kini) untuk *actuarial present value* dari anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun dimana suku ${}_s p_x$ menyatakan probabilitas suatu pembayaran sebesar satu dapat dilakukan pada saat *s*.

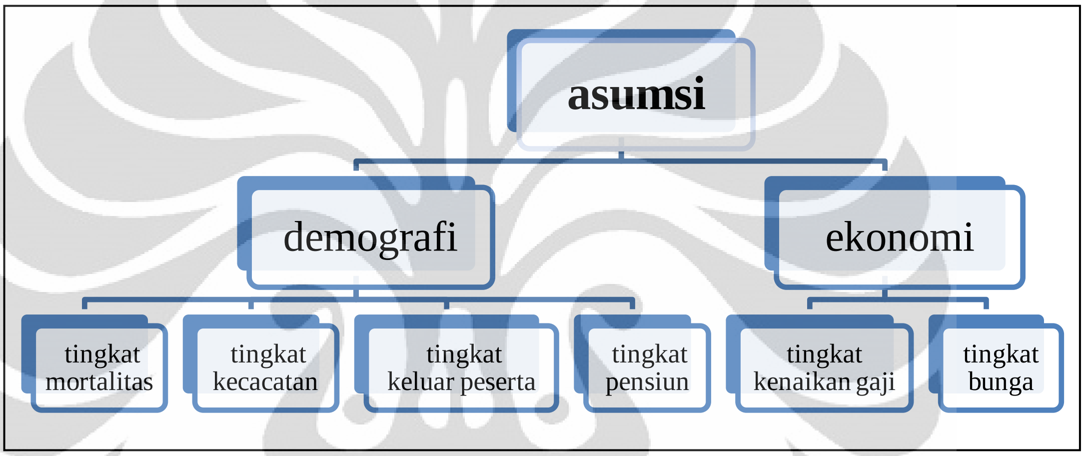
2.4 Asumsi Aktuaria

Asumsi merupakan harapan berdasarkan pengalaman masa lalu yang diperkirakan sesuai dengan keadaan sekarang atau masa depan. Pada program pensiun dibuatlah sejumlah asumsi berkaitan dengan berbagai macam faktor tidak pasti yang mempengaruhi kewajiban pensiun (berupa pembayaran manfaat pensiun) dan pendanaan untuk membiayai kewajiban tersebut. Asumsi-asumsi tersebut biasa disebut dengan asumsi aktuaria.

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai berbagai asumsi aktuaria yang dibutuhkan untuk menganalisa pendanaan program pensiun. Asumsi aktuaria ini biasanya dibuat aktuaris berdasarkan pengalaman di masa lalu maupun keahlian dan pengetahuan aktuaris tersebut. Asumsi aktuaria yang ada secara umum dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu:[3]

[3] Asumsi aktuaria yang ada pada tugas akhir ini, maupun pengelompokannya mengacu pada Winklevoss (1977). Asumsi-asumsi tersebut merupakan asumsi standar yang digunakan pada berbagai perhitungan teori program pensiun dan dipercaya merupakan tipikal asumsi yang kurang-lebih digunakan pada lembaga pensiun.

- asumsi yang berkaitan dengan faktor demografi (asumsi penurunan jumlah peserta)
  yang termasuk di dalam asumsi yang berkaitan dengan faktor demografi adalah tingkat mortalitas (kematian), tingkat kecacatan, tingkat keluar peserta, dan tingkat pensiun
- asumsi yang berkaitan dengan faktor ekonomi
  yang termasuk di dalam asumsi yang berkaitan dengan faktor ekonomi adalah tingkat kenaikan gaji dan tingkat bunga.



Gambar 2.5 Bagan asumsi aktuaria

2.4.1 Asumsi Tingkat Kenaikan Gaji

Seringkali besar manfaat pensiun dan iuran peserta pensiun merupakan fungsi dari gaji, karena itu harus dilakukan estimasi terhadap berapa besar kenaikan gaji peserta pensiun di masa depan. Estimasi tersebut mempertimbangkan tiga komponen, yaitu:

- peningkatan gaji karena peningkatan jasa
  Peningkatan gaji karena peningkatan jasa adalah peningkatan gaji yang akan diterima seorang pekerja karena kemajuan dalam karirnya dan kemampuan yang semakin meningkat seiring dengan bertambahnya usia dan masa kerja.

- peningkatan gaji karena peningkatan produktivitas perusahaan
  Peningkatan gaji karena peningkatan produktivitas perusahaan adalah peningkatan gaji yang akan diterima seorang pekerja karena perusahaan tempatnya bekerja memperoleh laba akibat peningkatan produktivitas. Besarnya peningkatan gaji dikarenakan alasan ini bergantung pada laba yang diperoleh perusahaan tempatnya bekerja dan seberapa besar andil pekerja tersebut dalam laba yang diperoleh.
- peningkatan gaji karena adanya inflasi

2.4.2 Asumsi Tingkat Bunga

Asumsi tingkat bunga memberi pengaruh yang kuat dalam pendanaan program pensiun, karena asumsi ini digunakan untuk mencari *present value* dari nilai uang (yang berupa aset program pensiun, manfaat pensiun, iuran peserta program pensiun, dan sebagainya) dimasa depan. Asumsi tingkat bunga dibedakan menjadi dua macam, yaitu asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun (dinotasikan dengan i_L) dan yang dikenakan atas aset program pensiun (dinotasikan dengan i_A). Asumsi tingkat bunga atas aset program pensiun disebut juga dengan asumsi tingkat pengembalian investasi.

2.5 Populasi Stasioner

Suatu populasi dikatakan stasioner jika besarnya populasi dan distribusi usia dalam populasi tersebut tetap konstan dari tahun ke tahun [Winklevoss, 1977]. Suatu populasi program pensiun dapat mencapai kondisi stasioner jika laju penurunan peserta program pensiun konstan dan jumlah peserta baru yang masuk ke dalam program pensiun juga konstan setiap tahunnya. Untuk memudahkan pemahaman, berikut ini akan diberikan contoh ilustrasi populasi stasioner pada program pensiun.

Contoh 2.1:

Misalkan suatu program pensiun memiliki peserta aktif yang terdiri dari empat kategori usia, yaitu $y,\ y+1,\ y+2,$ dan $y+3$ (dimana $y+3$ adalah usia pensiun)[4], dengan laju penurunan peserta masing-masing usia secara berurutan adalah $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ dan terdapat 100 peserta baru, yang seluruhnya berusia *y*, mengikuti program pensiun setiap tahunnya. Distribusi usia dan perubahan dalam populasi program pensiun tersebut dikarenakan adanya peserta yang masuk, pensiun, maupun keluar karena faktor-faktor lain dapat dilihat pada Tabel 2.1 berikut ini:

Tabel 2.1 Ilustrasi populasi peserta program pensiun stasioner

tahun	Usia					Total
	y	$y+1$	$y+2$	$y+3$	$y+4$	
0	100					100
1	100	75				175
2	100	75	50			225
3	100	75	50	25		250
4	100	75	50	25	0	250
5	100	75	50	25	0	250
6	100	75	50	25	0	250
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
distribusi usia setiap tahunnya setelah 3 tahun	40%	30%	20%	10%	0%	100%

Dapat dilihat dari Tabel 2.1 bahwa mula-mula populasi peserta program pensiun hanya terdiri dari 100 orang peserta yang berusia *y* tahun. Setelah satu tahun, ke-100 orang peserta tersebut telah berusia $y+1$ tahun dan jumlahnya tinggal 75 orang. Di samping itu, terdapat penambahan peserta baru sejumlah 100 orang yang berusia *y* tahun, sehingga total populasi setelah tahun pertama berjumlah 175 orang. Satu tahun berikutnya, dari 75 orang peserta yang sebelumnya berusia $y+1$ tahun, tersisa 50 orang yang berusia $y+2$ tahun dan dari 100 orang peserta yang sebelumnya berusia *y* tahun, tersisa 75 orang yang berusia $y+1$ tahun. Dengan penambahan sebesar 100 orang peserta baru yang berusia *y* tahun, maka

[4] Peserta aktif adalah peserta yang masih belum pensiun.

total populasi setelah tahun kedua berjumlah 225 orang. Demikian seterusnya, hingga setelah tiga tahun besarnya populasi peserta program pensiun tersebut menjadi konstan, yaitu sebesar 250 orang peserta setiap tahunnya. Di samping itu, distribusi usia pada populasi peserta program pensiun juga menjadi konstan setiap tahunnya setelah tahun ke-tiga, seperti terlihat pada Tabel 2.1. Setelah tahun ketiga, total banyaknya peserta yang keluar setiap tahunnya berjumlah 100 orang, dengan rincian masing-masing 25 orang yang berusia y, $y+1$, $y+2$, dan $y+3$ tahun. Perlu diperhatikan bahwa jumlah tersebut sama dengan jumlah peserta yang masuk setiap tahunnya.

Pada kenyataannya, peserta baru yang masuk ke dalam suatu program pensiun memiliki usia yang beragam (*multiple entry age*), tidak seperti ilustrasi pada Contoh 2.1. Pada dasarnya, populasi dengan *multiple entry age* adalah serangkaian subpopulasi dengan *single entry age*, dengan setiap subpopulasi mewakili suatu usia masuk tertentu, sehingga masing-masing subpopulasi akan mencapai kondisi stasioner setelah beberapa tahun dan tentu saja pada akhirnya populasi tersebut juga akan menjadi stasioner.

Dalam suatu populasi yang stasioner, setelah mencapai suatu tahun tertentu, akan diperoleh pola sebagai berikut:

- total populasi untuk setiap tahun konstan,
- distribusi usia dalam populasi setiap tahun adalah konstan, dan
- banyak peserta yang masuk akan sama dengan peserta yang keluar pada suatu tahun.

2.6 Persamaan Beda

Bagi suatu fungsi numerik $(a_0, a_1, a_2, ..., a_r, ...)$ dengan sembarang bilangan bulat non-negatif r, suatu persamaan yang mengaitkan a_r dengan a_i, $i < r$, dinamakan persamaan beda (*difference equation*) [Liu, 1995]. Persamaan beda juga biasa disebut relasi rekurensi, karena menyatakan bagaimana suatu persamaan beda dapat ditentukan secara rekursif. Dengan menggunakan persamaan beda, kita dapat mengerjakan perhitungan suatu fungsi numerik setahap demi setahap, menentukan a_r dari a_{r-1}, a_{r-2}, ..., menentukan a_{r+1} dari a_r, a_{r-1}, ..., dan begitu seterusnya, asalkan nilai fungsi di satu atau lebih titik (nilai awal) diketahui. Suatu fungsi numerik disebut solusi dari persamaan beda, jika fungsi tersebut memenuhi persamaan beda yang bersangkutan. Penentuan rumus umum bagi solusi dari suatu persamaan beda merupakan permasalahan yang cukup sulit, dan belum diketahui adanya suatu cara pemecahan yang berlaku umum untuk menangani semua persamaan beda yang ada.

Persamaan beda yang berbentuk

$$c_0\, a_r + c_1\, a_{r-1} + c_2\, a_{r-2} + ... + c_k\, a_{r-k} = b_r \tag{2.14}$$

dikenal sebagai persamaan beda linear orde ke-*k*, asalkan c_0 dan c_k tidak nol. Secara umum, untuk suatu persamaan beda linear orde ke-*k*, nilai k buah a_i yang berurutan selalu dapat digunakan untuk menentukan suatu solusi secara tunggal dan disebut dengan nilai awal.

Solusi (total) bagi suatu persamaan beda linear merupakan penjumlahan dari:

- solusi homogen, yang memenuhi persamaan beda tersebut bila ruas kanannya disamakan dengan 0
- solusi khusus, yang memenuhi persamaan beda tersebut bila ruas kanannya adalah b_r

Dengan kata lain, fungsi numerik yang menjadi solusi dari persamaan beda pada persamaan (2.14) merupakan jumlah dua fungsi numerik, yang satu merupakan solusi homogen dan yang satu lagi merupakan solusi khusus.

<u>Bukti:</u>

Misalkan $\mathrm{a}^{(k)} = (\mathrm{a}_0^{(k)}, \mathrm{a}_1^{(k)}, ..., \mathrm{a}_r^{(k)}, ...)$ menyatakan solusi khusus dari suatu persamaan beda linear orde ke-*k*, maka $\mathrm{a}^{(k)}$ akan memenuhi persamaan beda tersebut.

$$c_0\, \mathrm{a}_r^{(k)} + c_1\, \mathrm{a}_{r-1}^{(k)} + c_2\, \mathrm{a}_{r-2}^{(k)} + ... + c_k\, \mathrm{a}_{r-k}^{(k)} = b_r \tag{a}$$

Misalkan terdapat solusi lain yang memenuhi persamaan beda tersebut, yaitu $\mathrm{a} = (\mathrm{a}_0,\ \mathrm{a}_1,\ ...,\ \mathrm{a}_r,\ ...)$, maka

$$c_0\,\mathrm{a}_r + c_1\,\mathrm{a}_{r-1} + c_2\,\mathrm{a}_{r-2} + ... + c_k\,\mathrm{a}_{r-k} = b_r \qquad \text{(b)}$$

dari (b) – (a) akan diperoleh

$$c_0\left(\mathrm{a}_r - \mathrm{a}_r^{(k)}\right) + c_1\left(\mathrm{a}_{r-1} - \mathrm{a}_{r-1}^{(k)}\right) + ... + c_k\left(\mathrm{a}_{r-k} - \mathrm{a}_{r-k}^{(k)}\right) = 0 \qquad \text{(c)}$$

ambil $\mathrm{a}^{(h)} = \mathrm{a} - \mathrm{a}^{(k)}$, $\mathrm{a}^{(h)} = (\mathrm{a}_0^{(h)},\ \mathrm{a}_1^{(h)},\ ...,\ \mathrm{a}_r^{(h)},\ ...)$, dengan mensubstitusikan $\mathrm{a}^{(h)}$ ke dalam persamaan (c) diperoleh

$$c_0\,\mathrm{a}_r^{(h)} + c_1\,\mathrm{a}_{r-1}^{(h)} + c_2\,\mathrm{a}_{r-2}^{(h)} + ... + c_k\,\mathrm{a}_{r-k}^{(h)} = 0 \qquad \text{(d)}$$

berdasarkan persamaan (d) terlihat bahwa $\mathrm{a}^{(h)}$ merupakan solusi homogen dari persamaan beda tersebut. Dapat disimpulkan bahwa solusi total dari suatu persamaan beda linear adalah penjumlahan dari solusi homogen dan solusi khususnya.

$$\therefore\ \mathrm{a} = \mathrm{a}_r^{(h)} + \mathrm{a}_r^{(k)} \qquad \text{(Terbukti)}$$

BAB 3
METODE *SPREADING GAINS AND LOSESS* PADA PENDANAAN PROGRAM PENSIUN MANFAAT PASTI

Pada bab ini akan dijelaskan dan dilakukan analisa mengenai pendanaan program pensiun manfaat pasti ketika terjadi ketidaksesuaian antara asumsi tingkat pengembalian investasi dengan tingkat pengembalian investasi aktual. Pertama-tama, pada subbab 3.1 akan dijelaskan mengenai berbagai macam tingkat bunga yang akan digunakan pada pendanaan program pensiun manfaat pasti yang selanjutnya akan dibahas. Konsep dasar pendanaan program pensiun manfaat pasti akan dijelaskan pada subbab 3.2. Pada subbab 3.3 akan dijelaskan mengenai salah satu metode pendanaan program pensiun manfaat pasti, yaitu metode *entry age normal*. Model sederhana pada pendanaan program pensiun manfaat pasti ketika terjadi ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi akan dijelaskan pada subbab 3.4. Selanjutnya, *supplementary contribution* yang ditentukan melalui metode *spreading gains and losses* akan dibahas pada subbab 3.5. Terakhir, pada subbab 3.6 akan dilakukan analisa pendanaan program pensiun manfaat pasti ketika terjadi ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi.

3.1 Tingkat Bunga pada Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

Pada model pendanaan program pensiun manfaat pasti yang akan dijelaskan pada tugas akhir ini, terdapat tiga buah tingkat bunga yang digunakan, yaitu asumsi tingkat pengembalian investasi (dinotasikan dengan i_A), asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun (dinotasikan dengan i_L), dan yang terakhir adalah tingkat pengembalian investasi aktual (dinotasikan dengan i').

Asumsi tingkat pengembalian investasi (i_A) adalah asumsi yang berkaitan dengan tingkat pengembalian jangka panjang yang dikenakan atas aset program pensiun [Owadally, 2003]. Asumsi tersebut sangat penting, dikarenakan pendanaan program pensiun berkaitan erat dengan menginvestasikan aset program pensiun yang berupa akumulasi dana yang dikumpulkan dari peserta maupun sponsor program pensiun (berupa perusahaan rekanan, yang para karyawannya mengikuti program pensiun). Semakin optimis asumsi tingkat pengembalian investasi yang digunakan, semakin besar hasil investasi aset program pensiun yang diasumsikan akan didapatkan setiap periodenya. Sebaliknya, semakin konservatif asumsi tingkat pengembalian investasi yang digunakan, semakin kecil hasil investasi aset program pensiun yang diasumsikan akan didapatkan setiap periodenya.

Asumsi tingkat bunga lain yang digunakan pada model pendanaan program pensiun adalah i_L, yaitu asumsi tingkat bunga untuk mendiskonto kewajiban pensiun (dengan kata lain menentukan nilai kini dari manfaat pensiun yang diterima di masa yang akan datang). Karena kewajiban pensiun pada umumnya tidak diperdagangkan, maka nilai i_L ditentukan berdasarkan nilai tingkat bunga yang dikenakan atas aset yang sifatnya serupa dengan kewajiban pensiun. Dalam praktiknya, pemilihan i_L bergantung pada preferensi aktuaris dan biasanya ditentukan dengan menggunakan:

- tingkat bunga yang dikenakan atas obligasi yang diterbitkan oleh sponsor program pensiun (jika ada) atau obligasi yang dikeluarkan oleh pemerintah dengan jangka waktu yang sesuai dengan kewajiban pensiun, ataupun
- tingkat bunga yang dikenakan atas aset yang bebas resiko, ataupun
- sesuai dengan peraturan yang berlaku pada negara tempat lembaga pensiun berada (biasanya sekitar 3% - 6,5%).[5]

Tingkat bunga terakhir yang akan digunakan pada model pendanaan program pensiun adalah tingkat pengembalian investasi aktual (i'). Tingkat pengembalian investasi aktual adalah penghasilan yang diperoleh selama satu periode investasi per jumlah dana (aset program pensiun) yang diinvestasikan (biasanya tingkat pengembalian investasi dinyatakan dalam bentuk persentase). Jadi, tingkat pengembalian investasi aktual merupakan tingkat bunga yang pada

[5] Berdasarkan *Accounting Standards Board.*

kenyataannya dikenakan atas aset program pensiun dan nilainya baru diketahui setelah program pensiun berjalan (di akhir suatu periode waktu).

Pada tugas akhir ini, digunakan asumsi tingkat bunga yang berbeda untuk tingkat pengembalian investasi (i_A) dan tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun (i_L). Di samping itu, model dibangun berdasarkan kemungkinan adanya perbedaan antara asumsi tingkat pengembalian investasi (i_A) dengan tingkat pegembalian investasi aktual (i').

3.2 Konsep Dasar Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai konsep dasar pendanaan program pensiun manfaat pasti yang penting untuk diketahui sebelum pembahasan lebih lanjut pada subbab-subbab selanjutnya.

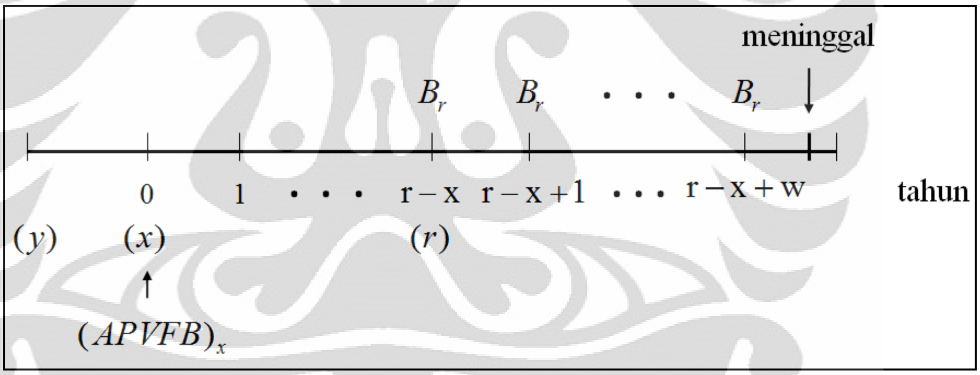
3.2.1 *Benefit* (B)

Benefit adalah total manfaat yang harus dibayarkan oleh lembaga pensiun setiap periodenya. Besarnya *benefit* (B) untuk suatu program pensiun adalah penjumlahan atas manfaat pensiun untuk semua peserta program pensiun pada periode tersebut. Pada program pensiun manfaat pasti, besarnya manfaat yang akan diterima oleh setiap peserta telah ditentukan di awal program pensiun. Oleh karena manfaat pensiun merupakan besaran yamg sudah diketahui nilainya, maka besaran tersebut menjadi dasar bagi berbagai perhitungan yang dilakukan oleh aktuaris pada pendanaan program pensiun manfaat pasti.

3.2.2 *Actuarial Present Value of Future Benefits* (*APVFB*)

Actuarial present value of future benefits secara bahasa adalah *present value* dari manfaat pensiun, yang harus dibayarkan di masa yang akan datang sampai seorang peserta program pensiun meninggal dunia. Winklevoss (1977) menyatakan bahwa *actuarial present value of future benefits* adalah kewajiban yang berkaitan dengan manfaat pensiun di masa yang akan datang dari seluruh peserta program pensiun yang ada. *Actuarial present value* dari pembayaran manfaat pensiun secara berkala sebesar B_r yang dibayarkan setiap awal periode untuk seorang peserta program pensiun yang saat ini berusia *x* dan akan pensiun pada usia *r* dinotasikan dengan $(APVFB)_x$. Perhitungan $(APVFB)_x$ adalah:

- dilihat sebelum usia pensiun *r* $(y \le x < r)$



Gambar 3.1 Diagram waktu untuk $(APVFB)_x$ dengan $y \le x < r$

Misalkan *Y* adalah variabel random yang menyatakan *present value* dari anuitas diskrit dimuka sebesar B_r yang baru dibayarkan setelah usia pensiun *r* selama seorang peserta program pensiun masih hidup, dilihat pada usia *x*, dan *W* adalah variabel random untuk sisa usia diskrit (*curtate future life time*), maka secara matematis *Y* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Y = \begin{cases} 0 & ,W = 0, 1, \ldots, \; r - x - 1 \\ B_r \, v_L^{\,r-x} \, \ddot{a}_{\overline{W+1-(r-x)}|} & ,W = r - x, \; r - x + 1, \ldots \end{cases}$$

(selanjutnya, untuk penyederhanaan ambil $n = r - x$). Ekspektasi dari variabel random *Y* dinotasikan dengan $(APVFB)_x$ dan secara prospektif dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(APVFB)_x &= E[Y]\\ &= \sum_{w=n}^{\infty} B_r\, v_L^{\,n}\, \ddot{a}_{\overline{w+1-n}|}\, \Pr(W = w)\\ &= \sum_{w=n}^{\infty} B_r\, v_L^{\,n}\, \ddot{a}_{\overline{w+1-n}|}\; {}_w p_x\, q_{x+w}\\ &= B_r\, v_L^{\,n} \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1-n}|}\; {}_w p_x\, q_{x+w}\end{aligned}$$

ambil $j = w - n \quad \to \quad w = j + n$, sehingga

$$\begin{aligned}(APVFB)_x &= B_r\, v_L^{\,n} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|}\; {}_{j+n} p_x\, q_{x+(j+n)}\\ &= B_r\, v_L^{\,n} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|} \left[\frac{s(x+j+n)}{s(x)}\right] q_{x+(j+n)}\\ &= B_r\, v_L^{\,n} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|} \left[\frac{s(x+n)}{s(x)}\;\frac{s(x+j+n)}{s(x+n)}\right] q_{x+(j+n)}\\ &= B_r\, v_L^{\,n} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|}\; {}_n p_x\; {}_j p_{x+n}\, q_{x+(j+n)}\\ &= B_r\, v_L^{\,n}\; {}_n p_x \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|}\; {}_j p_{x+n}\, q_{(x+n)+j}\\ &= B_r\, v_L^{\,n}\; {}_n p_x\, \ddot{a}_{x+n}\end{aligned}$$

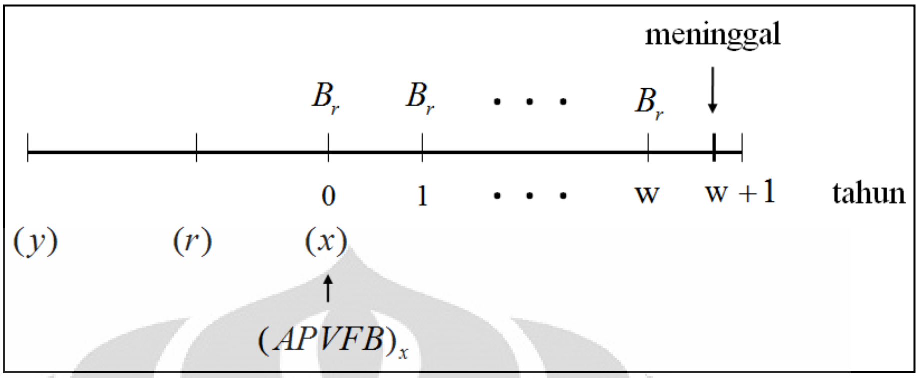
karena $n = r - x$, maka

$$(APVFB)_x = B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x} p_x\, \ddot{a}_r \tag{3.1}$$

dimana:

B_r	=	manfaat pensiun berkala yang dibayarkan kepada seorang peserta setelah peserta tersebut pensiun pada usia *r*
${}_{r-x} p_x$	=	probabilitas bahwa seorang peserta berusia *x* tetap bertahan hidup sampai usia pensiun *r*
v_L	=	asumsi tingkat diskonto yang dikenakan atas kewajiban pensiun
$\ddot{a}_r$	=	anuitas seumur hidup diskrit dimuka, yang dibayarkan mulai dari usia pensiun *r*

- dilihat setelah usia pensiun r $(x \geq r)$



Gambar 3.2 Diagram waktu untuk $(APVFB)_x$ dengan $x \geq r$

Misalkan Y adalah variabel random yang menyatakan *present value* dari anuitas diskrit dimuka sebesar B_r yang baru dibayarkan setelah usia pensiun r selama seorang peserta program pensiun masih hidup, dilihat pada usia x, dan W adalah variabel random untuk sisa usia diskrit (*curtate future life time*), maka secara matematis Y dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Y = B_r\, \ddot{a}_{\overline{W+1|}}, \quad W = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekspektasi dari variabel random Y dinotasikan dengan $(APVFB)_x$ dan secara prospektif dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(APVFB)_x &= E[Y] \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} B_r\, \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \Pr(W = w) \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} B_r\, \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\; {}_w p_x\, q_{x+w} \\
&= B_r \sum_{w=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\; {}_w p_x\, q_{x+w} \\
&= B_r\, \ddot{a}_x
\end{aligned} \tag{3.2}$$

dimana:

B_r = manfaat pensiun berkala yang dibayarkan kepada seorang peserta setelah peserta tersebut pensiun pada usia r.

$\ddot{a}_x$ = anuitas seumur hidup diskrit dimuka, yang dibayarkan mulai dari usia x.

$\therefore\ (APVFB)_x$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$(APVFB)_x = \begin{cases} B_r\, {v_L}^{r-x}\, {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r & , y \le x < r \\ B_r\, \ddot{a}_x & , x \ge r \end{cases}$$

Actuarial present value of future benefits untuk suatu program pensiun adalah penjumlahan atas *actuarial present value of future benefits* untuk semua peserta program pensiun.

3.2.3 *Normal Contribution* (*NC*) dan *Actuarial Present Value of Future Normal Contribution* (*APVFNC*)

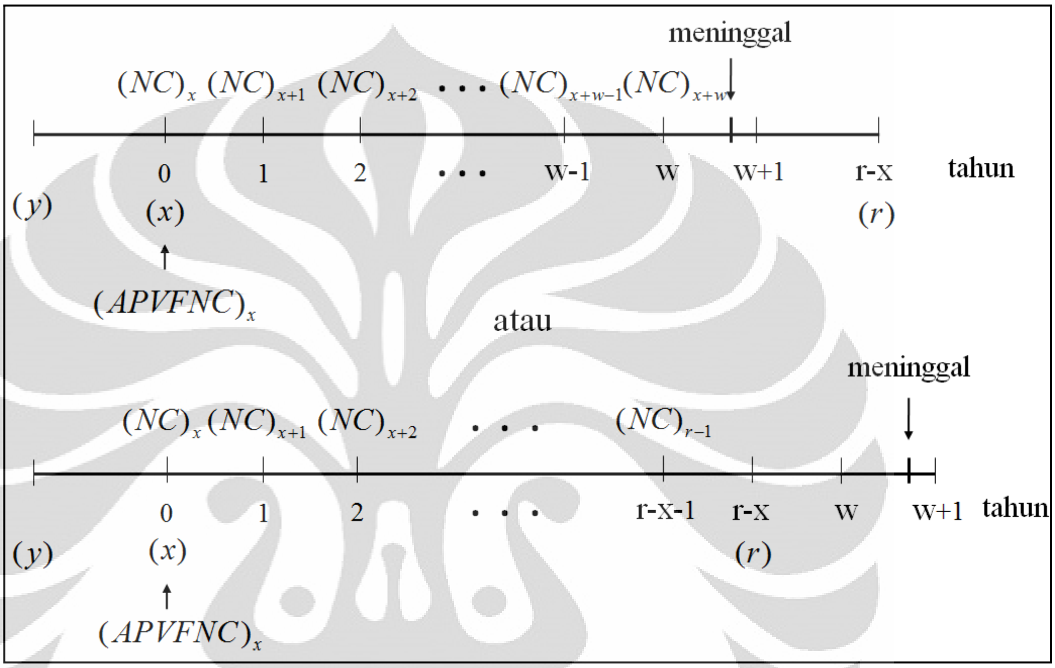
Normal contribution adalah iuran yang diterima secara berkala dari seorang peserta program pensiun selama peserta tersebut aktif mengikuti program pensiun (dari usia masuk y sampai usia pensiun r). Pada prinsipnya, *normal contribution* digunakan untuk mencicil *actuarial present value of future benefits* masing-masing peserta, sehingga dapat dianalogikan seperti premi bersih pada asuransi jiwa. *Normal contribution* yang diterima dari seorang peserta program pensiun pada saat orang tersebut berusia t-tahun dinotasikan dengan $(NC)_t$.

Actuarial present value of future normal contribution secara bahasa adalah *present value* dari total iuran yang akan diterima di masa yang akan datang dari seorang peserta program pensiun berjangka n-tahun.[6] *Actuarial present value* dari *normal contribution* sebesar $(NC)_t$ yang diterima setiap awal periode ke-t dari seorang peserta program pensiun yang saat ini berusia x dan akan pensiun pada usia r, berjangka $(r\text{-}x)$-tahun dinotasikan dengan $(APVFNC)_x$. Jika diasumsikan bahwa *normal contribution* diterima setiap awal periode, maka perhitungan *actuarial present value of future normal contribution* adalah:

[6] Berjangka n-tahun adalah selama n tahun ataupun hingga ia meninggal dunia, bergantung pada kondisi mana yang lebih dahulu tercapai. Lambang n sendiri menyatakan periode penerimaan *normal contribution*, yang berarti apabila kita melihat besarnya *APVFNC* pada usia x, n akan bernilai sama dengan r-x.

- dilihat pada usia x $(y \le x < r)$ (secara prospektif)

  Apabila kita melihat *normal contribution* secara prospektif pada usia x, maka nilainya akan berupa *present value* dari seluruh *normal contribution* yang mulai diterima dari saat x sampai r -1, tanpa memperhitungkan *normal contribution* sebelum saat x (di masa lampau).



Gambar 3.3 Diagram waktu untuk $(APVFNC)_x$

Misalkan Z adalah variabel random yang menyatakan *present value* dari iuran peserta sebesar $(NC)_t$ yang diterima setiap awal periode berjangka (r-x)-tahun, dilihat pada saat seorang peserta program pensiun berusia x, dan W adalah variabel random untuk sisa usia diskrit (*curtate future life time*), maka secara matematis Z dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Z = \begin{cases} \sum_{j=0}^{W} (NC)_{x+j}\, v_L^{\,j} & ,W = 0, 1, \ldots, r-x-1 \\ \sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L^{\,j} & ,W = r-x,\ r-x+1, \ldots \end{cases}$$

Ekspektasi dari variabel random Z dinotasikan dengan $(APVFNC)_x$ dan secara prospektif dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$(APVFNC)_x = E[Z]$$

$$= \underbrace{\sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\right]\Pr(W=w)}_{A} + \underbrace{\sum_{w=r-x}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\right]\Pr(W=w)}_{B}$$

<u>bagian A:</u>

$$A = \sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\right]\Pr(W=w)$$

$$= \sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\right]{}_w p_x\, q_{x+w}$$

dengan menggunakan sumasi parsial,[7] akan diperoleh

$$A = \sum_{j=0}^{c}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}(-{}_c p_x)\Big|_0^{r-x} + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\, v_L{}^{w+1}\; {}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x - \sum_{j=0}^{0}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}(-{}_0 p_x)\right] + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\, v_L{}^{w+1}\; {}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x - (NC)_{x+0}\, v_L{}^{0}(-1)\right] + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\, v_L{}^{w+1}\; {}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + (NC)_x\right] + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\, v_L{}^{w+1}\; {}_{w+1}p_x$$

ambil $n = w+1 \quad \rightarrow \; w = n-1$, sehingga

$$A = -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + (NC)_x + \sum_{n=1}^{r-x}(NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_n p_x$$

$$= -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + (NC)_x + \sum_{n=1}^{r-x-1}(NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_n p_x + (NC)_r\, v_L{}^{r-x}\; {}_{r-x}p_x$$

$$= -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_n p_x + (NC)_r\, v_L{}^{r-x}\; {}_{r-x}p_x$$

$$= -\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_n p_x \qquad (*)$$

[7] Penjelasan lebih lanjut mengenai sumasi parsial ada pada Lampiran 2.

<u>bagian B:</u>

$$B = \sum_{w=r-x}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j} \right] \Pr(W=w)$$

$$= \sum_{w=r-x}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j} \right] \left({}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x \right)$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j} \right] \left[\sum_{w=r-x}^{\infty} \left({}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x \right) \right]$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j} \right] \left[\left({}_{r-x}p_x - {}_{r-x+1}p_x \right) + \left({}_{r-x+1}p_x - {}_{r-x+2}p_x \right) + \ldots \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x \qquad (**)$$

berdasarkan persamaan (*) dan (**), akan diperoleh

$$(APVFNC)_x = -\sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x + \sum_{n=0}^{r-x-1} (NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_{n}p_x + \sum_{j=0}^{r-x-1} (NC)_{x+j}\, v_L{}^{j}\; {}_{r-x}p_x$$

$$= \sum_{n=0}^{r-x-1} (NC)_{x+n}\, v_L{}^{n}\; {}_{n}p_x$$

ambil $t = n + x \quad \rightarrow \; n = t - x$, sehingga

$$(APVFNC)_x = \sum_{t=x}^{r-1} (NC)_t\, v_L{}^{t-x}\; {}_{t-x}p_x \qquad (3.3)$$

dimana:

$(NC)_t$ = *normal contribution* pada saat peserta berusia *t*

${}_{t-x}p_x$ = probabilitas bahwa seorang peserta berusia *x* tetap bertahan dalam program pensiun sampai usia *t*

v_L = asumsi tingkat diskonto yang dikenakan atas kewajiban pensiun

Secara khusus, apabila dilihat pada usia masuk *y*, maka

$$(APVFNC)_y = \sum_{t=y}^{r-1} (NC)_t \, v_L^{\,t-y} \; {}_{t-y}p_y \tag{3.4}$$

dimana:

${}_{t-y}p_y$ = probabilitas bahwa seorang peserta berusia *y* tetap bertahan hidup sampai usia *t*

Pada prinsipnya *normal contribution* digunakan untuk mencicil *actuarial present value of future benefits* masing-masing peserta, sehingga diperoleh hubungan antara ($APVFB$) dan ($APVFNC$), yaitu *actuarial present value of future normal contribution* yang dilihat pada saat seorang peserta berusia *y*, harus sama dengan *actuarial present value of future benefits* peserta tersebut pada usia *y*. Secara matematis, hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut

$$(APVFNC)_y = (APVFB)_y \tag{3.5}$$

dimana:

$(APVFNC)_y$ = *actuarial present value of future normal contribution* untuk seorang peserta program pensiun pada usia masuk *y*

$(APVFB)_y$ = *actuarial present value of future benefits* untuk seorang peserta program pensiun pada usia masuk *y*

$(APVFB)_y$ dihitung menggunakan persamaan (3.1) dengan mensubstitusikan *x* menjadi *y*, sedangkan $(APVFNC)_y$ dihitung menggunakan persamaan (3.4).

Besar *normal contribution* yang diterima dari seorang peserta program pensiun selama peserta tersebut mengikuti program pensiun tidak harus konstan, bergantung pada jenis metode pendanaan yang digunakan pada program pensiun tersebut. *Normal contribution* (dinotasikan dengan NC) untuk suatu program pensiun adalah penjumlahan atas *normal contribution* untuk semua peserta program pensiun

3.2.4 *Actuarial Liability* (AL)

Actuarial liability dapat dianalogikan seperti cadangan manfaat (*benefit reserve*) pada asuransi jiwa. Secara prospektif *actuarial liability* untuk seorang peserta yang berusia x $(x \geq y,\ \text{dimana } y \text{ adalah usia masuk program pensiun})$, setara dengan *actuarial present value of future benefits* dikurangi dengan *actuarial present value of future normal contribution* pada usia tersebut.[8]

$$ {}_{x-y}(AL)_y = (APVFB)_x - (APVFNC)_x \tag{3.6} $$

dimana $(APVFB)_x$ dihitung dengan menggunakan persamaan (3.1), sedangkan $(APVFNC)_x$ dihitung dengan menggunakan persamaan (3.3). Untuk selanjutnya, agar lebih sederhana, ${}_{x-y}(AL)_y$ akan ditulis dengan meggunakan notasi $(AL)_x$.

Actuarial liability (dinotasikan dengan AL) untuk suatu program pensiun adalah penjumlahan atas *actuarial liability* untuk semua peserta program pensiun. Jadi, secara sederhana dapat dikatakan bahwa *actuarial liability* suatu program pensiun pada saat x adalah besarnya dana program pensiun secara teoritis yang seharusnya telah terkumpul pada saat x, untuk pembayaran manfaat pensiun yang akan datang.

3.2.5 Aset Program Pensiun (F)

Aset program pensiun pada tahun ke-t (F_t) adalah besarnya nilai aset suatu program pensiun berdasarkan *market value* pada tahun tersebut. Iuran yang diterima dari peserta program pensiun merupakan salah satu unsur utama dalam aset program pensiun. Idealnya, aset program pensiun merupakan hasil akumulasi dari iuran peserta yang kemudian dicairkan untuk pembayaran manfaat pensiun. Biasanya, iuran yang terkumpul dari seluruh peserta akan diinvestasikan, sehingga terjadi pengembangan dana. Oleh karena itu, hasil investasi juga merupakan salah satu komponen aset program pensiun.

[8] Sebagai analogi sederhana, *present value of future benefits* adalah kewajiban aktuaria keseluruhan, sedangkan *actuarial liability* adalah kewajiban aktuaria bersih (yaitu tanggungan keseluruhan dikurangi dengan *intangible asset* yang ada, berupa *normal contribution*).

Umumnya, di Indonesia, aset program pensiun merupakan akumulasi dari:

- jumlah aset program pensiun mula-mula
- penghimpunan dana yang berasal dari iuran pemberi kerja[9], iuran peserta perorangan, hasil investasi dan pengalihan dana dari lembaga pengelola pensiun lainnya (mengacu pada Undang-Undang Republik Indonesia nomor 11 tahun 1992).

3.2.6 *Unfunded Liability* (UL)

Unfunded liability untuk suatu program pensiun pada tahun ke-t adalah selisih antara *actuarial liability* (dana yang seharusnya terkumpul secara teoritis) dengan aset program pensiun (dana aktual yang terkumpul) pada tahun tersebut.

$$UL_t = AL_t - F_t \tag{3.7}$$

dimana:

UL_t = *unfunded liabiity* suatu program pensiun pada tahun ke-t

AL_t = *actuarial liability* suatu program pensiun pada tahun ke-t

F_t = aset program pensiun pada tahun ke-t

Apabila *unfunded liability* pada suatu tahun bernilai positif, artinya dana yang terkumpul tidak sesuai dengan rencana di awal program pensiun, sehingga dana pada saat tersebut belum mencukupi untuk membayar *benefit* di masa yang akan datang (terjadi defisit).

3.2.7 *Loss* (L)

Loss adalah besarnya laba ataupun rugi yang terjadi pada pendanaaan program pensiun. Secara matematis, *loss* adalah perbedaan antara nilai *unfunded liability* sebenarnya dengan *unfunded liability* yang dihitung dengan asumsi aktuaria.

[9] Pemberi kerja adalah badan usaha atau perusahaan perorangan yang memiliki program pensiun bagi karyawannya.

$$L_t = UL_t - UL_t^A \tag{3.8}$$

dimana:

L_t = total laba/rugi yang terjadi selama tahun $(t-1, t)$

UL_t = *unfunded liabiity* aktual pada tahun ke-*t*

UL_t^A = $AL_t - F_t^A$, yaitu *unfunded liabiity* yang dihitung menggunakan asumsi aktuaria pada tahun ke-*t*[10]

Loss yang bernilai positif disebut dengan rugi, sedangkan *loss* yang bernilai negatif disebut laba.

Apabila timbul *loss* pada suatu pendanaan program pensiun, maka diperlukan adanya penyesuaian pada iuran peserta program pensiun, agar pembayaran kewajiban manfaat pensiun yang telah dijanjikan tetap dapat terpenuhi.

3.2.8 *Contribution* (C)

Contribution adalah total iuran yang diterima dari seluruh peserta program pensiun pada suatu periode. Total iuran tersebut terdiri atas *normal contribution* dan *supplementary contribution*.

$$C_t = NC_t + S_t \tag{3.9}$$

dimana:

C_t = *contribution* yang diterima pada awal tahun $(t, t+1)$

NC_t = *normal contribution* program pensiun pada awal tahun $(t, t+1)$

S_t = *supplementary contribution* yang diterima pada awal tahun $(t, t+1)$

---

[10] F_t^A adalah aset program pensiun yang dihitung dengan menggunakan asumsi aktuaria.

Supplementary contribution dapat diartikan sebagai faktor kontribusi tambahan yang timbul karena adanya laba atau rugi pada dana program pensiun, perubahan manfaat pensiun, ataupun perubahan pada asumsi yang digunakan. Terdapat beberapa metode yang telah dikembangkan untuk menentukan besarnya *supplementary contribution*, salah satunya adalah metode *spreading gains and losses*.

Besarnya *contribution* yang diterima dari seorang peserta program pensiun selama peserta tersebut mengikuti program pensiun tidak harus konstan, bergantung pada jenis metode penentuan *supplementary contribution* serta metode pendanaan program pensiun yang digunakan.

3.3 Metode Pendanaan Program Pensiun

Metode pendanaan program pensiun adalah metode yang digunakan untuk menentukan besarnya iuran (berupa *normal contribution*) yang diperlukan dari seorang peserta program pensiun setiap periodenya.[11] Metode pendanaan program pensiun yang berbeda akan menghasilkan iuran yang berbeda pula. Metode pendanaan program pensiun dirancang untuk menjamin bahwa dana program pensiun yang terkumpul akan mencukupi dan iuran yang diterima dari peserta program pensiun akan relatif stabil. Salah satu metode pendanaan program pensiun adalah metode *entry age normal*. Untuk selanjutnya, metode pendanaan program pensiun yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah metode *entry age normal*.

[11] Penentuan besarnya iuran peserta yang diperlukan, dilakukan pada saat awal seorang peserta masuk program pensiun (pada usia masuk *y*).

3.3.1 Metode *Entry Age Normal*

Dalam metode *entry age normal*:

- Besarnya manfaat pensiun berkala yang akan diterima peserta setelah mencapai usia pensiun didasarkan pada:
  - gaji peserta di masa datang, atau
  - gaji terakhir peserta sebelum pensiun, atau
  - gaji rata-rata peserta selama masa kerja peserta
- *Normal contribution* yang diterima dari peserta program pensiun dimulai dari usia masuk kerja, bukan dari usia masuk program pensiun.
- *Normal contribution* yang diterima dari setiap peserta program pensiun dapat berupa:
  - sejumlah uang yang besarnya tetap setiap tahunnya, atau
  - persentase tetap dari gaji peserta

Untuk selanjutnya, digunakan prinsip besar *normal contribution* merupakan sejumlah uang yang besarnya tetap setiap tahunnya.

➢ <u>*Normal Contribution*</u>

Pada metode *entry age normal*, besar *normal contribution* untuk setiap peserta program pensiun merupakan sejumlah uang yang besarnya tetap setiap tahunnya, yang berarti bahwa $(NC)_t = (NC)$ untuk sembarang *t*. Oleh karena itu, berdasarkan persamaan (3.1), (3.4), dan (3.5) yang dilihat pada usia *y* (usia pada saat masuk kerja), besarnya *normal contribution* untuk seorang peserta program pensiun dapat dihitung sebagai berikut:

$$(APVFNC)_y = (APVFB)_y$$

$$\sum_{t=y}^{r-1}(NC)_t\, v_L^{\,t-y}\; {}_{t-y}p_y = B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r$$

$$\sum_{t=y}^{r-1}(NC)\, v_L^{\,t-y}\; {}_{t-y}p_y = B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r$$

$$(NC)\sum_{t=y}^{r-1} v_L^{\,t-y}\; {}_{t-y}p_y = B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r$$

$$(NC) = \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\sum_{t=y}^{r-1} v_L^{\,t-y}\; {}_{t-y}p_y}$$

$$(NC) = \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}} \tag{3.10}$$

dimana:

B_r = proyeksi manfaat pensiun

${}_{r-y}p_y$ = probabilitas bahwa seorang peserta berusia y tetap bertahan hidup sampai usia pensiun r

v_L = asumsi tingkat diskonto yang dikenakan atas kewajiban pensiun

$\ddot{a}_r$ = anuitas seumur hidup diskrit dimuka, yang dibayarkan mulai dari usia pensiun r

$\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}$ = anuitas hidup diskrit dimuka berjangka (r-y)-tahun, yang dibayarkan mulai dari usia masuk kerja y

- *Actuarial Liability*

  - dilihat sebelum usia pensiun r $(y \le x < r)$

    Berdasarkan persamaan (3.1), (3.3), (3.6), dan (3.10), besar *actuarial liability* untuk seorang peserta berusia x $(y \le x < r)$ dimana besar *normal contribution* untuk setiap peserta program pensiun merupakan sejumlah uang yang besarnya tetap setiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
(AL)_x &= (APVFB)_x - (APVFNC)_x \\
&= B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \sum_{t=x}^{r-1} (NC)_t\, v_L^{\,t-x}\; {}_{t-x}p_x \\
&= B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC) \sum_{t=x}^{r-1} v_L^{\,t-x}\; {}_{t-x}p_x \\
&= B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC)\, \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|} \\
&= B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}}\, \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}
\end{aligned}
$$

- dilihat setelah usia pensiun r $(x \geq r)$

  Berdasarkan persamaan (3.2), (3.6), dan (3.10), besar *actuarial liability* untuk seorang peserta berusia x $(x \geq r)$ dimana besar *normal contribution* untuk setiap peserta program pensiun merupakan sejumlah uang yang besarnya tetap setiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
(AL)_x &= (APVFB)_x - (APVFNC)_x \\
&= B_r\, \ddot{a}_x - 0 \\
&= B_r\, \ddot{a}_x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $(AL)_x$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
(AL)_x = \begin{cases} B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \dfrac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}}\, \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|} & , y \leq x < r \\ B_r\, \ddot{a}_x & , x \geq r \end{cases} \tag{3.11}
$$

3.4 Model Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti

Model sederhana pada program pensiun manfaat pasti akan digunakan pada subbab ini. Agar didapatkan model sederhana tersebut, dibuatlah asumsi-asumsi berikut ini:

1. Populasi peserta program pensiun stasioner dengan tingkat kematian (mortalitas) yang tetap.[12]
2. Manfaat pensiun yang disediakan bergantung pada gaji terakhir dan semua peserta pensiun pada usia pensiun normal.[13]
3. Tidak ada inflasi atas gaji.
4. Asumsi aktuaria yang digunakan tidak berubah sepanjang waktu.[14]
5. Metode pendanaan program pensiun yang digunakan adalah metode *entry age normal*.

Asumsi-asumsi di atas menyebabkan besarnya *benefit* (B) yang harus dibayarkan kepada peserta yang mengalami pensiun, akan tetap tiap tahunnya. Di samping itu, *actuarial liability* (AL) dan *normal contribution* (NC) juga menjadi konstan tiap tahunnya. [15]

<u>Bukti:</u>

- <u>adib. B konstan tiap tahunnya</u>

  Dengan adanya asumsi bahwa populasi peserta program pensiun stasioner dengan tingkat kematian (mortalitas) yang tetap, maka banyaknya peserta yang sudah pensiun pada populasi program pensiun tiap tahunnya akan menjadi konstan. Jika r adalah usia pensiun peserta, t adalah usia terendah yang ada pada populasi program pensiun, dan ω adalah usia tertinggi dalam

[12] Suatu populasi dikatakan stasioner jika besarnya populasi dan distribusi usia dalam populasi tersebut tetap konstan dari tahun ke tahun. Penjelasan lebih lanjut mengenai populasi stasioner dapat dilihat pada subbab 2.4.

[13] Secara sederhana usia pensiun normal didefinisikan sebagai usia terendah dimana pensiun dapat terjadi dan manfaat pensiun tetap diperoleh.

[14] Asumsi aktuaria adalah asumsi yang berkaitan dengan berbagai macam faktor tidak pasti yang mempengaruhi kewajiban pensiun (berupa pembayaran manfaat pensiun) dan pendanaan untuk membiayai kewajiban tersebut. Penjelasan lebih lanjut mengenai asumsi aktuaria dapat dilihat pada subbab 2.3.

[15] Penjelasan lebih lanjut mengenai *B*, *AL*, dan *NC* dapat dilihat pada subbab 3.2.

tabel mortalitas, maka peserta yang sudah pensiun, tiap tahunnya dapat dirinci sebagai berikut:

- peserta yang berusia *r* ada sebanyak n_r
- peserta yang berusia $r+1$ ada sebanyak n_{r+1}

  .

  .

  .
- peserta yang berusia ω ada sebanyak n_ω

Sehingga total peserta aktif akan konstan tiap tahunnya sebesar $\sum_{x=r}^{\omega} n_x$, dimana n_x adalah jumlah peserta yang berusia *x*.

Besarnya manfaat pensiun berkala yang harus dibayarkan kepada seorang peserta program pensiun setiap tahunnya adalah B_r. *B* (*benefit*) tiap tahunnya merupakan penjumlahan atas manfaat pensiun yang dibayarkan kepada semua peserta program pensiun. *Benefit* yang harus dibayarkan setiap tahunnya dapat dirinci sebagai berikut:

Tabel 3.1 Ilustrasi untuk pembayaran *benefit*

usia peserta	jumlah peserta	besarnya manfaat per orang	*benefit* yang harus dibayarkan
r	n_r	B_r	$B_r\, n_r$
$r+1$	n_{r+1}	B_r	$B_r\, n_{r+1}$
$r+2$	n_{r+2}	B_r	$B_r\, n_{r+2}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
ω	n_ω	B_r	$B_r\, n_\omega$

Sehingga *benefit* akan menjadi konstan tiap tahunnya, yaitu sebesar

$$\begin{aligned} B &= B_r\, n_r + B_r\, n_{r+1} + B_r\, n_{r+2} + \ldots + B_r\, n_\omega \\ &= B_r\left(n_r + n_{r+1} + n_{r+2} + \ldots + n_\omega\right) \\ &= B_r \sum_{x=r}^{\omega} n_x \end{aligned}$$

- <u>adib. *NC* konstan tiap tahunnya</u>

  Dengan adanya asumsi bahwa populasi peserta program pensiun stasioner dengan tingkat kematian (mortalitas) yang tetap, maka banyaknya peserta aktif program pensiun tiap tahunnya akan menjadi konstan.[16] Jika *t* adalah usia terendah yang ada pada populasi program pensiun dan *r* adalah usia pensiun peserta, maka peserta aktif program pensiun tiap tahunnya dapat dirinci sebagai berikut:

  - peserta yang berusia *t* ada sebanyak n_t
  - peserta yang berusia $t+1$ ada sebanyak n_{t+1}

    .
    .
    .
  - peserta yang berusia $r-1$ ada sebanyak n_{r-1}

  Sehingga total peserta yang sudah pensiun akan konstan tiap tahunnya sebesar $\sum_{x=t}^{r-1} n_x$, dimana n_x adalah jumlah peserta yang berusia *x*.

  Dengan menggunakan metode *entry age normal*, besarnya *normal contribution* yang akan diterima dari seorang peserta program pensiun setiap tahunnya adalah (NC), dimana (NC) dapat dihitung berdasarkan persamaan (3.10). *NC* (*normal contribution* untuk suatu program pensiun) tiap tahunnya merupakan penjumlahan atas *normal contribution* semua peserta program pensiun. *Normal contribution* yang diterima setiap tahunnya dapat dirinci sebagai berikut:

[16] Peserta aktif adalah peserta yang masih belum pensiun (masih membayar *normal contribution*).

Tabel 3.2 Ilustrasi untuk *normal contribution*

usia peserta	jumlah peserta	besarnya *normal contribution* per orang	*normal contribution* yang diterima
t	n_t	(NC)	$(NC)\ n_t$
$t+1$	n_{t+1}	(NC)	$(NC)\ n_{t+1}$
$t+2$	n_{t+2}	(NC)	$(NC)\ n_{t+2}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
r - 1	n_{r-1}	(NC)	$(NC)\ n_{r-1}$

Sehingga *normal contribution* akan menjadi konstan tiap tahunnya, yaitu sebesar

$$\begin{aligned} NC &= (NC)n_t + (NC)n_{t+1} + (NC)n_{t+2} + \ldots + (NC)n_{r-1} \\ &= (NC)\left(n_t + n_{t+1} + n_{t+2} + \ldots + n_{r-1}\right) \\ &= (NC)\sum_{x=t}^{r-1} n_x \end{aligned}$$

- <u>adib. *AL* konstan tiap tahunnya</u>

Misalkan t adalah usia terendah yang ada pada populasi program pensiun, r adalah usia pensiun peserta, dan ω adalah usia tertinggi dalam tabel mortalitas, dengan adanya asumsi bahwa populasi peserta program pensiun stasioner dengan tingkat kematian (mortalitas) yang tetap, maka banyaknya peserta aktif program pensiun tiap tahunnya akan menjadi konstan sebesar $\sum_{x=t}^{r-1} n_x$ (penjelasannya sama seperti pada *NC*), sedangkan banyaknya peserta yang sudah pensiun juga konstan sebesar $\sum_{x=r}^{\omega} n_x$ (penjelasannya sama seperti pada *B*), dimana n_x adalah jumlah peserta yang berusia x. Dengan menggunakan metode *entry age normal*, besarnya *actuarial liability* untuk seorang peserta program pensiun yang berusia x (dinotasikan dengan $(AL)_x$), dimana $(AL)_x$ dapat dihitung berdasarkan persamaan (3.11). *Actuarial liability* (AL) untuk suatu program pensiun) tiap tahunnya merupakan

penjumlahan atas *actuarial liability* semua peserta program pensiun.
Actuarial Liability yang diterima setiap tahunnya dapat dirinci sebagai berikut:

Tabel 3.3 Ilustrasi untuk *actuarial liability*

usia peserta	jumlah peserta	besarnya *actuarial liability* per orang	total *actuarial liability*
t	n_t	$(AL)_t$	$(AL)_t\ n_t$
$t+1$	n_{t+1}	$(AL)_{t+1}$	$(AL)_{t+1}\ n_{t+1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
r - 1	n_{r-1}	$(AL)_{r-1}$	$(AL)_{r-1}\ n_{r-1}$
r	n_r	$(AL)_r$	$(AL)_r\ n_r$
$r+1$	n_{r+1}	$(AL)_{r+1}$	$(AL)_{r+1}\ n_{r+1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
ω	n_ω	$(AL)_\omega$	$(AL)_\omega\ n_\omega$

Oleh karena total peserta program pensiun tiap tahunnya konstan, maka *AL* juga akan menjadi konstan tiap tahunnya, yaitu sebesar

$$\begin{aligned}
AL &= (AL)_t\, n_t + (AL)_{t+1}\, n_{t+1} + \ldots + (AL)_{r-1}\, n_{r-1} + (AL)_r\, n_r + (AL)_{r+1}\, n_{r+1} \\
&\quad + \ldots + (AL)_\omega\, n_\omega \\
&= \left(B_r\, {v_L}^{r-t}\; {}_{r-t}p_t\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-t}|}\right) n_t + \left(B_r\, {v_L}^{r-(t+1)}\; {}_{r-(t+1)}p_{(t+1)}\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-(t+1)}|}\right) n_{t+1} \\
&\quad + \ldots + \left(B_r\, {v_L}^{r-(r-1)}\; {}_{r-(r-1)}p_{(r-1)}\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-(r-1)}|}\right) n_{r-1} + B_r\, \ddot{a}_r\, n_r + B_r\, \ddot{a}_{r+1}\, n_{r+1} \\
&\quad + \ldots + B_r\, \ddot{a}_\omega\, n_\omega \\
&= \sum_{x=t}^{r-1} \left(B_r\, {v_L}^{r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right) n_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, n_x
\end{aligned}$$

(Terbukti)

Pada kewajiban pensiun akan terpenuhi persamaan equilibrium berikut

$$AL = (1+i_L)(AL + NC - B) \tag{3.12}$$

dimana:

i_L = asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun

Bukti:

Misalkan *normal contribution* diterima tiap awal tahun $(t,\ t+1)$, demikian pula dengan pembayaran *benefit* kepada peserta yang telah pensiun. Berdasarkan prinsip *time value of money*, setiap tahunnya akan terdapat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun. Hal ini menyebabkan perubahan *actuarial liability* dalam setahun disebabkan adanya pemasukan berupa *normal contribution* dan pendapatan bunga serta pengeluaran berupa pembayaran *benefit*. Oleh karena itu, apabila dilihat pada saat *t*, persamaan berikut akan berlaku

$$v_L\ \Delta AL_t = NC_t + d_L\ AL_{t+1} - B_t$$

dimana:

$v_L \quad = (1+i_L)^{-1}$

ΔAL_t = perubahan *actuarial liability* antara tahun $(t,\ t+1)$

d_L = tingkat diskonto yang dikenakan atas kewajiban pensiun

AL konstan, maka $AL_{t+1} = AL_t = AL$ dan $\Delta AL_t = 0$, demikian pula dengan *NC* dan *B*, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} NC + d_L\ AL - B &= 0 \\ d_L\ AL &= B - NC \\ (1-v_L)\ AL &= B - NC \\ AL - v_L\ AL &= B - NC \\ v_L\ AL &= AL + NC - B \\ AL &= (1+i_L)(AL + NC - B) \end{aligned}$$

(Terbukti)

Diasumsikan *contribution* (C_t) diterima tiap awal tahun $(t,\ t+1)$, demikian pula dengan pembayaran *benefit* kepada peserta yang telah pensiun. Aset program pensiun dalam satu tahun merupakan aset program pensiun tahun sebelumnya ditambah dengan adanya pemasukan berupa *contribution* serta pengeluaran berupa pembayaran *benefit* yang nilainya diakumulasikan dengan tingkat pengembaian investasi aktual (i'). Maka aset program pensiun sampai waktu *t* (F_t)[17] memenuhi hubungan rekursif berikut

$$\begin{aligned} F_t &= (1+i')(F_{t-1}+C_{t-1}-B_{t-1}) \\ &= (1+i')(F_{t-1}+C_{t-1}-B) \end{aligned} \tag{3.13}$$

dimana:

i' = tingkat pengembalian investasi aktual.

Persamaan (3.13) didasari kenyataan bahwa *contribution* akan menambah aset program pensiun, sedangkan pembayaran *benefit* akan mengurangi aset program pensiun.

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa pada populasi program pensiun yang stasioner, besarnya *AL* dan *NC* akan mejadi konstan tiap tahunnya. Oleh karena itu, persamaan (3.7) untuk menentukan *unfunded liability*[18] dan persamaan (3.9) untuk menentukan *contribution* akan mengalami perubahan menjadi

$$UL_t = AL - F_t \tag{3.14}$$

dan

$$C_t = NC + S_t \tag{3.15}$$

Supplementary contribution (S_t) pada persamaan (3.15) digunakan untuk menutupi terjadinya *loss* serta memperhitungkan penyesuaian pada *contribution* yang ditimbulkan karena adanya perbedaan asumsi tingkat bunga untuk kewajiban pensiun dan aset program pensiun (tingkat pengembalian investasi).

---

[17] Penjelasan lebih lanjut mengenai aset pogram pensiun dapat dilihat pada subbab 3.2.5.
[18] Penjelasan lebih lanjut mengenai *unfunded liability* dapat dilihat pada subbab 3.2.6.

Diasumsikan bahwa asumsi aktuaria yang digunakan telah sesuai dengan kenyataan, kecuali untuk asumsi tingkat pengembalian investasi (i_A) yang dimungkinkan berbeda dengan tingkat pengembalian ivestasi aktual (i') . Oleh karena itu, hanya faktor tersebut (perbedaan antara i_A dan i') yang menyebabkan timbulnya laba atau rugi pada aset program pensiun. Misalkan asumsi tingkat pengembalian investasi yang dihasilkan oleh aset program pensiun adalah i_A, maka *unfunded liability* yang dihitung dengan menggunakan asumsi tingkat pengembalian investasi tersebut dinotasikan dengan UL_t^A, maka berdasarkan persamaan (3.8), *loss* selama tahun $(t-1,\, t)$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$L_t = UL_t - UL_t^A$$

Agar didapatkan persamaan baru untuk *loss* apabila terjadi ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi, akan dicari terlebih dahulu persamaan lain untuk *unfunded liability* dengan cara mensubstitusikan persamaan (3.12), (3.13) dan (3.15) pada persamaan (3.14), yaitu

$$\begin{aligned} UL_t &= AL - (1+i')(F_{t-1} + C_{t-1} - B) \\ &= AL - (1+i')[(AL - UL_{t-1}) + C_{t-1} - B] \\ &= AL - (1+i')[AL - UL_{t-1} + (NC + S_{t-1}) - B] \\ &= AL - (1+i')[(AL + NC - B) - UL_{t-1} + S_{t-1}] \\ &= AL - (1+i')[(1+i_L)^{-1} AL - UL_{t-1} + S_{t-1}] \\ &= AL + (1+i')[UL_{t-1} - S_{t-1} - (1+i_L)^{-1} AL] \\ &= AL + (1+i')(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\, AL) \end{aligned} \tag{3.16}$$

dimana:

$v_L = (1+i_L)^{-1}$

Sedangkan $UL_t^A = AL + (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\, AL)$ (didapat dengan mengganti *i'* dengan i_A pada persamaan (3.16)). Sehingga *loss* selama tahun $(t-1,\, t)$ adalah

$$\begin{aligned}
L_t &= UL_t - UL_t^A \\
&= UL_t - [AL + (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL)] \\
&= UL_t - AL - (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) && (3.17) \\
&= [AL + (1+i')(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL)] - AL - (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= (1+i')(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) - (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= [(1+i') - (1+i_A)](UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= (1+i'-1-i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= (i'-i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) && (3.18)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.17) dapat dimodifikasi sehingga dihasilkan persamaan baru bagi *unfunded liability* apabila terjadi ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi, yaitu

$$\begin{aligned}
UL_t &= L_t + AL + (1+i_A)(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= L_t + AL + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1} - v_L\ AL) \\
&= L_t + AL + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1}) - u_A v_L\ AL \\
&= L_t + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1}) + u_A v_A\ AL - u_A v_L\ AL \\
&= L_t + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1}) + u_A(v_A\ AL - v_L\ AL) \\
&= L_t + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1}) + u_A(v_A - v_L)AL && (3.19)
\end{aligned}$$

dimana:

$v_A = (1+i_A)^{-1}$

$u_A = (1+i_A)$

Persamaan (3.19) menunjukkan bahwa *unfunded liability* pada tahun t terdiri dari:

- *loss* selama tahun $(t-1,\ t)$, ditambah dengan
- akumulasi dari *unfunded liability* tahun sebelumnya yang sudah dikurangi dengan *supplementary contribution,* dan ditambah pula dengan
- akumulasi dari selisih *AL* yang dihitung dengan tingkat bunga i_A dan i_L.

Untuk selanjutnya, diasumsikan bahwa $L_t = 0$ dan $UL_t = 0$ untuk $t \leq 0$.

3.5 Metode *Spreading Gains and Losses*

Metode *spreading gains and losses* adalah metode penentuan *supplementary contribution* yang biasa digunakan di Inggris (United Kingdom). Dufresne (1988) menyatakan bahwa prinsip dasar dari metode ini adalah *supplementary contribution* pada tahun ke-*t* setara dengan suatu proporsi tertentu dari *unfunded liability*, yaitu

$$S_t = k\,UL_t \tag{3.20}$$

dimana $k = \dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$, dengan *m* adalah periode untuk mencicil *unfunded liability* dan $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ dihitung dengan menggunakan asumsi tingkat pegembalian investasi (i_A). Owadally dan Haberman (2004) menyatakan bahwa dalam kondisi ekonomi modern, pemilihan *m* yang efisien adalah antara 1 sampai dengan 10 tahun.

Apabila tidak terdapat perbedaan antara asumsi tingkat pengembalian investasi (i_A) dengan asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun (i_L), maka berdasarkan persamaan (3.19) dapat disimpulkan bahwa akumulasi dari selisih antara *unfunded liability* dengan *supplementary contribution* pada suatu tahun akan sama dengan *unfunded libility* dikurangi *loss* yang terjadi pada tahun selanjutnya, yaitu

$$u_A\left(UL_{t-1} - S_{t-1}\right) = UL_t - L_t \tag{3.21}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) ke dalam persamaan (3.21) akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_A\left(UL_{t-1} - k\,UL_{t-1}\right) &= UL_t - L_t \\ u_A\left(1-k\right) UL_{t-1} &= UL_t - L_t \\ UL_t - u_A\left(1-k\right) UL_{t-1} &= L_t \end{aligned} \tag{3.22}$$

Selanjutnya akan dicari nilai UL_t yang memenuhi persamaan (3.22). Persamaan (3.22) merupakan suatu persamaan beda linear,[19] solusi dari persamaan beda tersebut dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

---

[19] Penjelasan lebih lanjut mengenai persamaan beda dapat dilihat pada subbab 2.6.

- <u>solusi homogen</u>

  Akan dicari nilai UL_t yang memenuhi persamaan $UL_t - u_A(1-k)\,UL_{t-1} = 0$.

  Misalkan solusi homogen yang memenuhi persamaan tersebut memiliki bentuk

  $$UL_t^H = A\,\alpha^t$$

  maka persamaan karakteristik untuk $UL_t - u_A(1-k)\,UL_{t-1} = 0$ adalah

  $$A\alpha^t - u_A(1-k)\,A\alpha^{t-1} = 0$$
  $$A\alpha^{t-1}\left(\alpha - u_A(1-k)\right) = 0$$

  solusi untuk persamaan karakteristik diatas adalah $\alpha = u_A(1-k)$, sehingga solusi homogen untuk persamaan (3.22) adalah

  $$UL_t^H = A\,u_A^{\,t}(1-k)^t$$

  dengan menggunakan nilai awal $UL_0 = 0$ dapat dicari nilai dari A, yaitu

  $$UL_0 = A\,u_A^{\,0}(1-k)^0$$
  $$A = 0$$

  sehingga

  $$UL_t^H = 0$$

- <u>solusi khusus</u>

  Misalkan solusi khusus yang memenuhi persamaan (3.22) memiliki bentuk

  $$UL_t^K = \sum_{j\geq 0}\lambda_j\,L_{t-j}\,.$$

  maka

  $$\begin{aligned}
  &UL_t - u_A(1-k)\,UL_{t-1}\\
  &= \sum_{j\geq 0}\lambda_j\,L_{t-j} - u_A(1-k)\sum_{j\geq 0}\lambda_j\,L_{(t-1)-j}\\
  &= (\lambda_0\,L_t + \lambda_1\,L_{t-1} + \lambda_2\,L_{t-2} + \ldots) - u_A(1-k)(\lambda_0\,L_{t-1} + \lambda_1\,L_{t-2} + \lambda_2\,L_{t-3} + \ldots)\\
  &= \lambda_0\,L_t + [\lambda_1\,L_{t-1} - u_A(1-k)\,\lambda_0\,L_{t-1}] + [\lambda_2\,L_{t-2} - u_A(1-k)\,\lambda_1\,L_{t-2}] + \ldots\\
  &= \lambda_0\,L_t + [\lambda_1 - u_A(1-k)\,\lambda_0]L_{t-1} + [\lambda_2 - u_A(1-k)\,\lambda_1]L_{t-2} + \ldots
  \end{aligned}$$

  dengan menyamakan koefisien persamaan diatas dengan persamaan (3.22), diperoleh

$$\lambda_0 = 1$$

$$\lambda_1 - u_A(1-k)\,\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_1 = u_A(1-k)\,\lambda_0$$

$$\lambda_1 = u_A(1-k)$$

$$\lambda_2 - u_A(1-k)\,\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = u_A(1-k)\,\lambda_1$$

$$\lambda_2 = u_A^{\;2}(1-k)^2$$

.

.

.

$$\lambda_j - u_A(1-k)\,\lambda_{j-1} = 0$$

$$\lambda_j = u_A(1-k)\,\lambda_{j-1}$$

$$\lambda_j = u_A^{\;j}(1-k)^j$$

$$\therefore\; UL_t^K = \sum_{j=0}^{\infty}(1-k)^j\,u_A^{\;j}\,L_{t-j}$$

$\therefore$ nilai UL_t yang memenuhi persamaan (3.22) adalah

$$\begin{aligned} UL_t &= UL_t^H + UL_t^K \\ &= 0 + \sum_{j=0}^{\infty}(1-k)^j\,u_A^{\;j}\,L_{t-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(1-k)^j\,u_A^{\;j}\,L_{t-j} \end{aligned}$$

dengan mengambil , $K = 1-k$ maka diperoleh

$$UL_t = \sum_{j=0}^{\infty}K^j\,u_A^{\;j}\,L_{t-j} \tag{3.23}$$

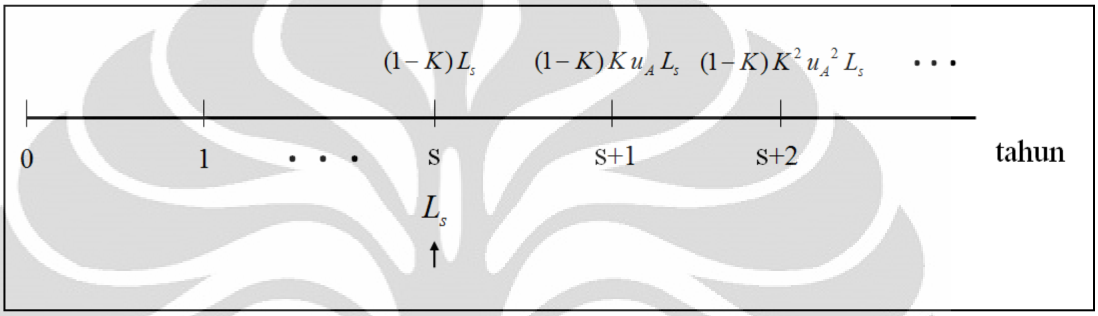
Dengan mensubstitusikan persamaan (3.23) ke dalam persamaan (3.20) akan diperoleh rumus umum untuk *supplementary contribution* yang hanya digunakan untuk menutupi *loss*, yaitu besarnya *supplementary contribution* (S_t) pada tahun ke-*t* setara dengan penjumlahan proporsi tertentu dari *loss* tahun tersebut dan tahun-tahun sebelumnya, yaitu

$$S_t = \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)\,K^j\,u_A^{\;j}\,L_{t-j} \tag{3.24}$$

dimana:

$K = 1 - k$ adalah parameter pada metode *spreading gains and losses*

Berdasarkan persamaan (3.24), *loss* yang terjadi pada tahun ke-*s* dapat ditutupi melalui serangkaian pembayaran yang menurun secara eksponensial seterusnya, $\{(1-K)K^i\, u_A{}^i\, L_s,\ i = 0,1,2,...\}$.



Gambar 3.4 Diagram waktu untuk pembayaran *loss* pada tahun ke-*s*

Penentuan besarnya nilai parameter *K* akan mempengaruhi laju pembayaran untuk menutupi terjadinya *loss*, semakin besar nilai parameter *K* (semakin besar *m*), akan mengakibatkan semakin kecil proporsi *loss* yang langsung dibayarkan pada saat *loss* terjadi (semakin besar proporsi pembayaran loss yang ditunda), sehingga mengakibatkan semakin lambat *loss* ditutupi.

Pembayaran yang dilakukan untuk menutupi terjadinya *loss* pada tahun ke-*s* adalah suatu perpetuitas (cicilan dengan periode waktu selamanya), dimana nilai kini dari pembayaran tersebut akan sama dengan besarnya *loss* yang terjadi. Secara matematis, hal tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$(1-K)L_s + (1-K)K\,u_A\,v_A\,L_s + (1-K)K^2\,u_A{}^2\,v_A{}^2\,L_s + ...$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\,u_A{}^j\,v_A{}^j\,L_s$$

$$= L_s(1-K)\left(\sum_{j=0}^{\infty}K^j\,u_A{}^j\,v_A{}^j\right)$$

$$= L_s(1-K)\left(\sum_{j=0}^{\infty}K^j\right)$$

karena $0 < K < 1$, maka

$$= L_s (1-K)\left(\frac{1}{1-K}\right)$$

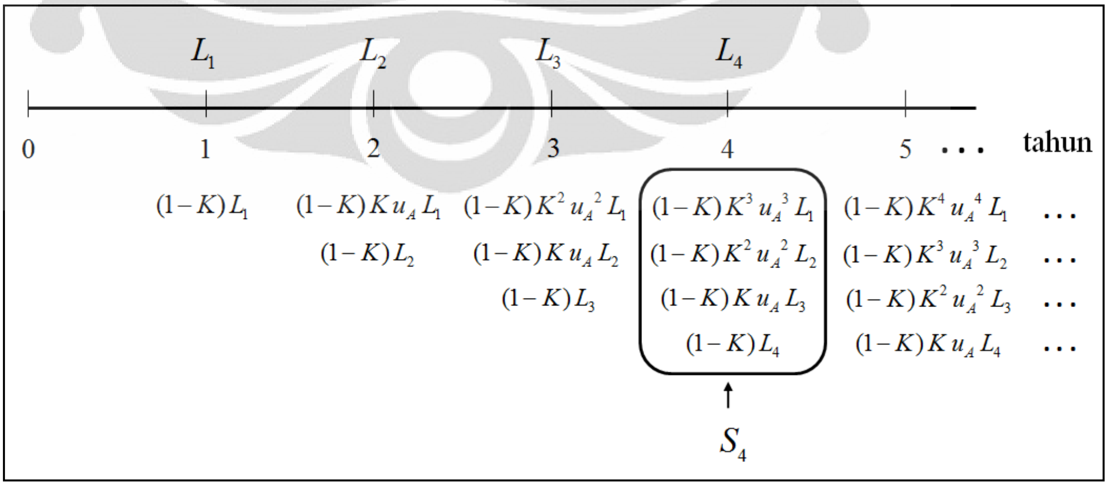
$$= L_s \tag{3.25}$$

Contoh 3.1:

Pada tahun keempat, *loss* yang mungkin telah dialami adalah *loss* pada tahun pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Pembayaran untuk menutupi *loss-loss* tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut:

- *Loss* pada tahun pertama dapat ditutupi melalui serangkaian pembayaran yang menurun, sebesar $(1-K)L_1$, $(1-K)K\,u_A\,L_1$, $(1-K)K^2\,u_A^{\,2}\,L_1$, ...
- *Loss* pada tahun kedua dapat ditutupi melalui serangkaian pembayaran yang menurun, sebesar $(1-K)L_2$, $(1-K)K\,u_A\,L_2$, $(1-K)K^2\,u_A^{\,2}\,L_2$, ...
- *Loss* pada tahun ketiga dapat ditutupi melalui serangkaian pembayaran yang menurun, sebesar $(1-K)L_3$, $(1-K)K\,u_A\,L_3$, $(1-K)K^2\,u_A^{\,2}\,L_3$, ...
- *Loss* pada tahun keempat dapat ditutupi melalui serangkaian pembayaran yang menurun, sebesar $(1-K)L_4$, $(1-K)K\,u_A\,L_4$, $(1-K)K^2\,u_A^{\,2}\,L_4$, ...

Pembayaran untuk menutupi *loss-loss* tersebut dapat dijelaskan melalui diagram waktu berikut:



Gambar 3.5 Diagram waktu untuk S_4

Oleh karena itu, *supplementary contribution* pada tahun keempat adalah

$$S_4 = (1-K)L_4 + (1-K)K\,u_A\,L_3 + (1-K)K^2\,u_A{}^2\,L_2 + (1-K)K^3\,u_A{}^3\,L_1$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\,u_A{}^j\,L_{4-j}$$

Present value dari pembayaran-pembayaran yang akan dilakukan sekarang maupun di masa yang akan datang untuk menutupi *loss* yang telah terjadi di masa lalu maupun masa kini, dilihat pada tahun ke-*s*, dapat dihitung dengan cara berikut:

- Pada tahun ke-*s*, *loss* yang mungkin telah dialami adalah *loss* pada tahun pertama, kedua, dan seterusnya sampai tahun ke-*s*. Masing-masing *loss* tersebut akan ditutupi melalui sederetan pembayaran yang menurun secara eksponensial. Oleh karena itu, pembayaran-pembayaran yang akan dilakukan mulai dari tahun ke-*s* untuk menutupi masing-masing *loss* tersebut, dapat dirinci sebagai berikut:
  - Sisa *loss* pada tahun pertama ditutupi melalui serangkaian pembayaran sebesar $(1-K)\,K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_1,\ (1-K)K^s\,u_A{}^s\,L_1,\ \ldots$
  - Sisa *loss* pada tahun kedua ditutupi melalui serangkaian pembayaran sebesar $(1-K)\,K^{s-2}\,u_A{}^{s-2}\,L_2,\ (1-K)K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_2,\ \ldots$

    .
    .
    .
  - Sisa *loss* pada tahun ke-(*s*-1) ditutupi melalui serangkaian pembayaran sebesar $(1-K)\,K\,u_A\,L_{s-1},\ (1-K)K^2\,u_A{}^2\,L_{s-1},\ \ldots$
  - Sisa *loss* pada tahun ke-*s* ditutupi melalui serangkaian pembayaran sebesar $(1-K)\,L_s,\ (1-K)K\,u_A\,L_s,\ \ldots$

  Untuk kemudahan, perhatikan tabel berikut:

Tabel 3.4 Pembayaran untuk menutupi *loss*

loss	pembayaran pada tahun ke-		
	s	s+1	...
L_1	$(1-K)\,K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_1$	$(1-K)\,K^{s}\,u_A{}^{s}\,L_1$	...
L_2	$(1-K)\,K^{s-2}\,u_A{}^{s-2}\,L_2$	$(1-K)\,K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_2$	...
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
L_{s-1}	$(1-K)\,K\,u_A\,L_{s-1}$	$(1-K)\,K^2\,u_A{}^2\,L_{s-1}$	...
L_s	$(1-K)\,L_s$	$(1-K)\,K\,u_A\,L_s$	...

Jadi, *present value* (pada saat *s*) dari pembayara-pembayaran tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
PV &= \left[(1-K)K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_1 + v_A(1-K)K^s\,u_A{}^s\,L_1 + ...\right] \\
&\quad + \left[(1-K)K^{s-2}\,u_A{}^{s-2}\,L_2 + v_A(1-K)K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_2 + ...\right] \\
&\quad + ... + \left[(1-K)K\,u_A L_{s-1} + v_A(1-K)K^2\,u_A{}^2\,L_{s-1} + ...\right] \\
&\quad + \left[(1-K)L_s + v_A(1-K)K\,u_A\,L_s + ...\right] \\
&= \left[K^{s-1}\,u_A{}^{s-1} + K^s\,u_A{}^{s-1} + ...\right](1-K)L_1 + \left[K^{s-2}\,u_A{}^{s-2} + K^{s-1}\,u_A{}^{s-2} + ...\right](1-K)L_2 \\
&\quad + ... + \left[K\,u_A + K^2\,u_A + ...\right](1-K)L_{s-1} + \left[1 + K + ...\right](1-K)L_s \\
&= \left[\frac{K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}}{1-K}\right](1-K)L_1 + \left[\frac{K^{s-2}\,u_A{}^{s-2}}{1-K}\right](1-K)L_2 + ... + \left[\frac{K\,u_A}{1-K}\right](1-K)L_{s-1} \\
&\quad + \left[\frac{1}{1-K}\right](1-K)L_s \\
&= K^{s-1}\,u_A{}^{s-1}\,L_1 + K^{s-2}\,u_A{}^{s-2}\,L_2 + ... + K\,u_A\,L_{s-1} + L_s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} K^j\,u_A{}^j\,L_{s-j} \\
&= UL_s
\end{aligned}
$$

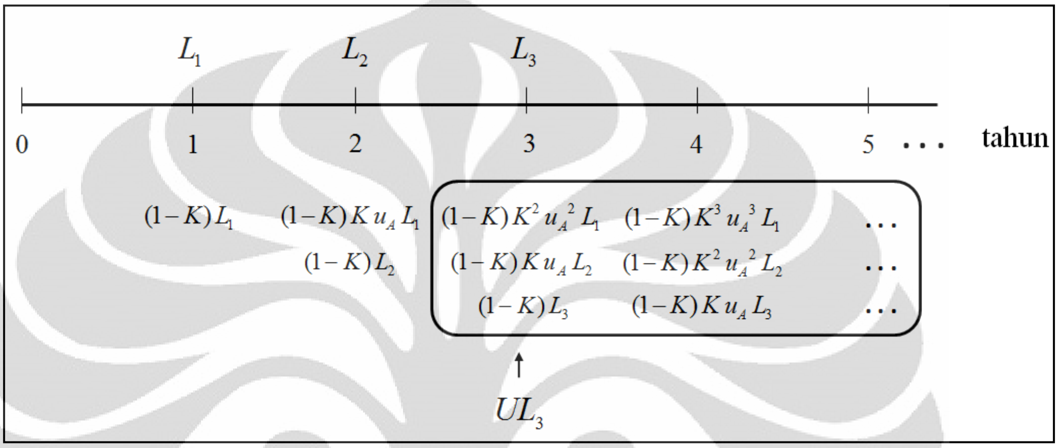
Dapat diambil kesimpulan bahwa *unfunded liability* pada suatu tahun ke-*t* yang dinyatakan pada persamaan (3.23) terdiri dari *present value* (pada tahun ke-*t*) dari pembayaran-pembayaran yang akan dilakukan sekarang maupun di masa yang akan datang untuk menutupi *loss* yang telah terjadi di masa lalu maupun masa kini.

Contoh 3.2:

Unfunded liability pada tahun ketiga dapat dihitung sebagai berikut:

- Pada tahun ketiga, *loss* yang mungkin telah dialami adalah *loss* pada tahun pertama, kedua, dan ketiga. Masing-masing *loss* tersebut akan ditutupi melalui sederetan pembayaran yang menurun secara eksponensial.

Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.6 Diagram waktu untuk UL_3

Oleh karena itu, *unfunded liability* pada tahun ketiga adalah

$$\begin{aligned}
UL_3 &= \left[(1-K)K^2\,u_A^{\;2}\,L_1 + v_A(1-K)K^3\,u_A^{\;3}\,L_1 + \ldots\right] \\
&\quad + \left[(1-K)K\,u_A\,L_2 + v_A(1-K)K^2\,u_A^{\;2}\,L_2 + \ldots\right] \\
&\quad + \left[(1-K)L_3 + v_A(1-K)K\,u_A\,L_3 + \ldots\right] \\
&= \left[K^2\,u_A^{\;2} + K^3\,u_A^{\;2} + \ldots\right](1-K)L_1 \\
&\quad + \left[K\,u_A + K^2\,u_A + \ldots\right](1-K)L_2 + \left[1 + K + \ldots\right](1-K)L_3 \\
&= \left[\frac{K^2\,u_A^{\;2}}{1-K}\right](1-K)L_1 + \left[\frac{K\,u_A}{1-K}\right](1-K)L_2 + \left[\frac{1}{1-K}\right](1-K)L_3 \\
&= K^2\,u_A^{\;2}\,L_1 + K\,u_A\,L_2 + L_3 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} K^j\,u_A^{\;j}\,L_{3-j}
\end{aligned}$$

Seperti telah dijelaskan pada subbab sebelumnya, *supplementary contribution* (S_t) pada tahun ke-*t* tidak hanya digunakan untuk menutupi *loss* yang terjadi tahun tersebut dan tahun-tahun sebelumnya. *Supplementary contribution* juga memperhitungkan penyesuaian yang ditimbulkan karena adanya perbedaan asumsi tingkat bunga untuk kewajiban pensiun dan aset program pensiun (tingkat pengembalian investasi). Oleh karena itu, persamaan umum untuk *supplementary contribution* (S_t) pada tahun ke-*t* dapat dihitung dengan mensubstitusikan persamaan (3.22) ke dalam persamaan (3.19), yaitu

$$UL_t = \left[UL_t - u_A\left(1-k\right) UL_{t-1}\right] + u_A(UL_{t-1} - S_{t-1}) + u_A(v_A - v_L)AL$$
$$UL_t = UL_t - u_A\left(1-k\right) UL_{t-1} + u_A UL_{t-1} - u_A S_{t-1} + u_A(v_A - v_L)AL$$

$$u_A S_{t-1} = u_A k\ UL_{t-1} + u_A(v_A - v_L)AL$$
$$S_{t-1} = k\ UL_{t-1} + (v_A - v_L)AL$$

Dengan menggunakan persamaan (3.23), diperoleh rumus umum untuk *supplementary contribution*, yaitu

$$S_t = \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{t-j} + (v_A - v_L)AL \qquad ,0 < K < 1 \tag{3.26}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.26) dan (3.23) ke dalam persamaan (3.18), akan didapatkan persamaan lain untuk *loss* selama tahun $(t-1, t)$ yang sudah memasukkan faktor *supplementary contribution* yang ditentukan dengan menggunakan metode *spreading gains and losses*, yaitu

$$\begin{aligned}
L_{t+1} &= (i' - i_A)(UL_t - S_t - v_L\ AL) \\
&= (i' - i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^j u_A{}^j L_{t-j} - \left(\sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{t-j} + (v_A - v_L)AL\right) - v_L\ AL\right] \\
&= (i' - i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^j u_A{}^j L_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{t-j} - (v_A - v_L)AL - v_L\ AL\right] \\
&= (i' - i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^j u_A{}^j L_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{t-j} - v_A\ AL\right] \\
&= (i' - i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(K^j u_A{}^j - (1-K)K^j u_A{}^j\right)L_{t-j} - v_A\ AL\right] \\
&= (i' - i_A)\left(\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1} u_A{}^j L_{t-j} - v_A\ AL\right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Berdasarkan persamaan (3.27), dapat disimpulkan bahwa jika pada suatu tahun ke-*t* tidak terjadi perbedaan antara tingkat pengembalian investasi aktual dengan asumsi tingkat pengembalian investasi (yaitu jika $i' = i_A$), maka pada tahun tersebut tidak akan terjadi *loss* ($L_t = 0$).

3.6 Analisa Dampak Jangka Panjang

Suatu metode pendanaan program pensiun manfaat pasti yang baik harus memenuhi dua sifat, yaitu terdapat cukup dana untuk membayar manfaat pensiun yang telah jatuh tempo dan *contribution* yang diperlukan pada akhirnya akan relatif stabil setiap periodenya. Pada model pendanaan program pensiun yang dibangun pada tugas akhir ini, besar *normal contribution* akan konstan setiap periodenya, sehingga agar didapatkan *contribution* yang stabil, besarnya *supplementary contribution* harus stabil. Pada subbab ini, akan dilakukan analisa jangka panjang pada *supplementary contribution* untuk melihat apakah pada akhirnya besar *supplementary cintribution* akan menjadi stabil. Di samping itu, akan dilakukan analisa dampak jangka panjang yang ditimbulkan pada pendanaan program pensiun akibat adanya ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi dengan tingkat pengembalian investasi aktual dengan cara melihat besarnya *unfunded liability* pada saat *t* menuju ∞.

Pertama-tama, akan dianalisa besarnya,*unfunded liability* dan *supplementary contribution* pada saat *t* menuju ∞. Untuk mencari besarnya *unfunded liability* pada saat *t* menuju ∞, maka masing-masing ruas pada persamaan (3.23) dilimitkan.

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} K^j\, u_A{}^j\, L_{t-j}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = \sum_{j=0}^{\infty} K^j\, u_A{}^j\, \left(\lim_{t\to\infty} L_{t-j}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = \sum_{j=0}^{\infty} K^j\, u_A{}^j\, \left(\lim_{t\to\infty} L_t\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = \frac{1}{1-K\,u_A}\left(\lim_{t\to\infty} L_t\right)$$

diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = \frac{1}{1-K\,u_A}\left(\lim_{t\to\infty} L_t\right) \tag{3.28}$$

Agar nilai limit pada persamaan (3.28) dapat ditentukan, maka kita perlu mencari nilai dari $\lim\limits_{t\to\infty} L_t$. Untuk itu, berdasarkan persamaan (3.27) akan diturunkan sebuah persamaan baru untuk menentukan besarnya L_t, yaitu

$$\begin{aligned}
L_{t+1} - u_A\, K\, L_t &= (i'-i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - v_A\, AL\right] \\
&\quad - u_A\, K(i'-i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{(t-1)-j} - v_A\, AL\right] \\
&= (i'-i_A)\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - v_A\, AL\right) - \\ \left(u_A\, K\sum_{k=0}^{\infty} K^{k+1}\, u_A{}^k L_{(t-1)-k} - K\, AL\right)\end{array}\right] \\
&= (i'-i_A)\left[\begin{array}{l}\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - v_A\, AL - \\ u_A\, K\sum_{j=1}^{\infty} K^{j}\, u_A{}^{j-1} L_{(t-1)-(j-1)} + K\, AL\end{array}\right] \\
&= (i'-i_A)\left[\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - v_A\, AL + K\, AL\right] \\
&= (i'-i_A)\left[K\, L_t + \sum_{j=1}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K^{j+1}\, u_A{}^j L_{t-j} - (v_A - K)AL\right] \\
&= (i'-i_A)\left[K\, L_t - (v_A - K)AL\right] \\
&= i'\, K\, L_t - i_A\, K\, L_t + (i'-i_A)\left[-(v_A - K)AL\right] \\
&= i'\, K\, L_t - i_A\, K\, L_t - v_A(i'-i_A)\left[\,(1-u_A\, K\,)AL\right]
\end{aligned}$$

$$L_{t+1} - K\,L_t - i_A\,K\,L_t = i'\,K\,L_t - i_A\,K\,L_t - v_A(i' - i_A)\big[\,(1 - u_A\,K\,)AL\big]$$
$$L_{t+1} - K\,L_t - i'\,K\,L_t = -v_A(i' - i_A)\big[\,(1 - u_A\,K\,)AL\big]$$
$$L_{t+1} - u'\,K\,L_t = -v_A(i' - i_A)(1 - u_A\,K\,)AL \tag{3.29}$$

Untuk mencari besarnya *loss* pada saat *t* menuju ∞, maka masing-masing ruas pada persamaan (3.29) dilimitkan.

$$\lim_{t\to\infty}\left(L_{t+1} - u'\,K\,L_t\right) = \lim_{t\to\infty}\left[-v_A(i' - i_A)(1 - u_A\,K\,)AL\right]$$
$$\lim_{t\to\infty} L_{t+1} - \lim_{t\to\infty} u'\,K\,L_t = -v_A(i' - i_A)(1 - u_A\,K\,)\left(\lim_{t\to\infty} AL\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} L_t - u'\,K\left(\lim_{t\to\infty} L_t\right) = -v_A(i' - i_A)\left(1 - u_A\,K\right)AL$$
$$\left(1 - u'\,K\right)\lim_{t\to\infty} L_t = -v_A(i' - i_A)\left(1 - u_A\,K\right)AL$$

diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} L_t = -\frac{v_A(i' - i_A)\left(1 - u_A\,K\right)AL}{1 - u'\,K} \tag{3.30}$$

Untuk mencari besarnya *supplementary contribution* pada saat *t* menuju ∞, maka masing-masing ruas pada persamaan (3.26) dilimitkan.

$$\lim_{t\to\infty} S_t = \lim_{t\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(1 - K)K^j\,u_A{}^j\,L_{t-j} + (v_A - v_L)AL\right]$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[(1 - K)UL_t + (v_A - v_L)AL\right]$$
$$= (1 - K)\lim_{t\to\infty} UL_t + \lim_{t\to\infty}\left[(v_A - v_L)AL\right]$$
$$= (1 - K)\lim_{t\to\infty} UL_t + (v_A - v_L)AL$$

diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} S_t = (1 - K)\left(\lim_{t\to\infty} UL_t\right) + (v_A - v_L)AL \tag{3.31}$$

<u>Hasil 1</u>

- $$\lim_{t\to\infty} L_t = -\frac{v_A(i'-i_A)\left(1-u_A K\right)AL}{1-u'K}$$
$$= -AL\,(i'-i_A)\,\frac{v_A\left(1-u_A K\right)}{1-u'K}$$
$$= -AL\,(i'-i_A)\,\frac{v_A - K}{1-u'K}$$
$$= -AL\,(i'-i_A)v'\frac{v_A - K}{v'-K} \qquad (3.32)$$

- $$\lim_{t\to\infty} UL_t = \frac{1}{1-K\,u_A}\left(\lim_{t\to\infty} L_t\right)$$
$$= \frac{1}{1-K\,u_A}\left[-AL\,(i'-i_A)v'\frac{v_A-K}{v'-K}\right]$$
$$= \frac{1}{u_A(v_A-K)}\left[-AL\,(i'-i_A)v'\frac{v_A-K}{v'-K}\right]$$
$$= \frac{1}{u_A}\left[-AL\frac{v'\left[(i'+1)-(1+i_A)\right]}{v'-K}\right]$$
$$= \frac{1}{u_A}\left[-AL\frac{1-(1+i_A)v'}{v'-K}\right]$$
$$= v_A\left[-AL\frac{1-(1+i_A)v'}{v'-K}\right]$$
$$= \left[-AL\frac{v_A-v'}{v'-K}\right] \qquad (3.33)$$

- $$\lim_{t\to\infty} S_t = (1-K)\left(\lim_{t\to\infty} UL_t\right) + (v_A - v_L)AL$$
$$= (1-K)\left[AL\frac{v'-v_A}{v'-K}\right] + (v_A - v_L)AL$$
$$= AL\,(1-K)\,\frac{v'-v_A}{v'-K} + (v_A - v_L)AL \qquad (3.34)$$

Berdasarkan persamaan (3.34), terihat bahwa pada akhirnya didapatkan besar *supplementary contribution* yang stabil, sehingga besarnya *contribution* juga stabil.

Selanjutnya, akan dilakukan analisa dampak jangka panjang yang ditimbulkan akibat adanya ketidaksesuaian asumsi tingkat pengembalian investasi dengan tingkat pengembalian investasi aktual (i_A berbeda dengan i'). Berdasarkan persamaan (3.33), diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = AL\frac{v'-v_A}{v'-K}$$

- <u>kasus 1</u> ($i_A = i'$)

  jika $i_A = i'$, maka nilai dari $(v'-v_A)$ adalah

$$\begin{aligned}(v'-v_A) &= (1+i')^{-1} - (1+i_A)^{-1}\\ &= (1+i')^{-1} - (1+i')^{-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

  sehingga

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = AL\frac{0}{v'-K}$$

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = 0 \tag{3.35}$$

- <u>kasus 2</u> ($i_A > i'$)

  jika $i_A > i'$, maka nilai dari $(v'-v_A)$ adalah

$$\begin{aligned}(v'-v_A) &= (1+i')^{-1} - (1+i_A)^{-1}\\ &= \frac{1}{(1+i')} - \frac{1}{(1+i_A)}\\ &= \frac{(1+i_A)-(1+i')}{(1+i')(1+i_A)}\\ &= \frac{i_A - i'}{(1+i')(1+i_A)}\end{aligned}$$

$$(v'-v_A) > 0$$

  $v' > v_A$ dan $v'-K > 0$

  sehingga

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = AL\frac{v'-v_A}{v'-K}$$

$$\lim_{t\to\infty} UL_t > 0 \tag{3.41}$$

- kasus 3 ($i_A < i'$)

  jika $i_A < i'$, maka nilai dari $(v' - v_A)$ adalah

$$(v' - v_A) = \frac{i_A - i'}{(1+i')(1+i_A)}$$

$$(v' - v_A) < 0$$

  $v' < v_A$ dan $v' - K > 0$

  sehingga

$$\lim_{t\to\infty} UL_t = AL\frac{v' - v_A}{v' - K}$$
$$\lim_{t\to\infty} UL_t < 0 \qquad (3.42)$$

Dari persamaan (3.40) sampai (3.42), dapat disimpulkan bahwa:

- jika asumsi tingkat pengembalian investasi sama dengan tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A = i'$), maka tidak akan terjadi surplus ataupun defisit pada pendanaan program pensiun manfaat pasti
- jika asumsi tingkat pengembalian investasi lebih besar daripada tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A > i'$), maka akan memberikan dampak jangka panjang berupa terjadinya defisit pada pendanaan program pensiun manfaat pasti
- jika asumsi tingkat pengembalian investasi lebih kecil daripada tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A < i'$), maka akan memberikan dampak jangka panjang berupa terjadinya surplus pada pendanaan program pensiun manfaat pasti

BAB 4
ILUSTRASI PERHITUNGAN
PENDANAAN PROGRAM PENSIUN MANFAAT PASTI

Pada bab ini akan diberikan ilustrasi perhitungan pendanaan program pensiun manfaat pasti berdasarkan hasil yang telah didapat pada bab sebelumnya. Asumsi dan aturan yang digunakan untuk memudahkan perhitungan tersebut adalah:

- populasi

  Tingkat mortalitas diasumsikan seperti pada *English Life Table No. 12 (males)*. Populasi peserta program pensiun diasumsikan stasioner dengan semua pegawai mulai bekerja pada usia 25 tahun dan usia pensiun normal adalah 56.
- gaji pegawai

  Gaji pegawai sebesar 1 dan diasumsikan mengalami kenaikan sebesar 1% setiap tahunnya.
- manfaat pensiun adalah sebesar 2/3 dari gaji terakhir

  Gaji terakhir seorang peserta program pensiun adalah

$$\begin{aligned} G_{55} &= (1+0,01)^{30}\,(1) \\ &= 1,34785. \end{aligned}$$

  Benefit yang harus dibayarkan tiap tahunnya adalah

$$\begin{aligned} B &= B_r \sum_{x=r}^{\omega} l_x \\ &= \frac{2}{3}(1,348) \sum_{x=56}^{105} l_x \\ &= 0,899(1.559.306) \\ &= 1.401.816,028. \end{aligned}$$

- keadaan ekonomi
  - tidak terjadi inflasi
  - aset menghasilkan tingkat pengembalian investasi (*i'*) yang konstan tiap tahunnya sebesar 4,5%

- metode pendanaan program pensiun yang digunakan adalah metode *entry age normal*
- asumsi aktuaria

  Asumsi aktuaria tidak berubah sepanjang waktu, dengan asumsi yang dikenakan atas kewajiban pensiun (i_L) sebesar 4% dan asumsi tingkat pengembalian investasi (i_A) berturut-turut sebesar 3%, 4,5%, dan 6%.
- valuasi data

  AL dan *NC* diekspresikan sebagai proporsi dari pembayaran manfaat.
- parameter metode pendanaan

  Metode yang digunakan untuk penentuan *supplementary contribution* adalah metode *spreading gains and losses*, dengan nilai $K = 1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$, dimana $m = 5$ dan 7 , $\ddot{a}_{\overline{m|}}$ dihitung dengan menggunakan tingkat bunga i_A.

Pada subbab 4.1 sampai dengan 4.3 akan diberikan ilustrasi perhitungan dengan menggunakan $m = 5$ (ilustrasi perhitungan untuk $m = 7$ dapat dilakukan dengan cara yang similar). Selanjutnya, hasil perhitungan dengan menggunakan $m = 5$ dan $m = 7$ akan dibandingkan pada subbab 4.4.

4.1 Metode *Spreading Gains and Losses* dengan Asumsi Tingkat Pengembalian Investasi Sebesar 3%

- Berdasarkan persamaan (3.10) besar *normal contribution* tiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
NC &= (NC)\sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}} \sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{(0{,}899)\, v_L^{\,56-25}\; {}_{56-25}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{56-25}|}} \sum_{x=25}^{56-1} l_x \\
&= \frac{(0{,}899)\, v_L^{\,31}\; {}_{31}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{31}|}} \sum_{x=25}^{55} l_x \\
&= \frac{(0{,}899)(1+0{,}04)^{-31}(0{,}884)(12{,}564)}{20{,}110}(2.878.104) \\
&= 423.651{,}207
\end{aligned}
$$

Proporsi penerimaan *normal contribution* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\dfrac{423.651{,}207}{1.401.816{,}028} = 0{,}302$

- Berdasarkan persamaan (3.11) besar *actuarial liability* tiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
AL &= \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right) l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right) l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=25}^{55}\left((0{,}899)\, v_L^{\,56-x}\; {}_{56-x}p_x\, \ddot{a}_{56} - \frac{(0{,}899)\, v_L^{\,31}\; {}_{31}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{31}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right) l_x + \sum_{x=56}^{105} (0{,}899)\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=25}^{55}\left((0{,}899)\, v_L^{\,56-x}\; {}_{56-x}p_x\,(12{,}564) - (0{,}147)\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right) l_x + \sum_{x=56}^{105} (0{,}899)\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= 25.463.988{,}154
\end{aligned}
$$

Proporsi *actuarial liability* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\frac{25.463.988,154}{1.401.816,028} = 18,165$

1) untuk tahun ke-0

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14) dan asumsi bahwa $UL_t = 0$ untuk $t \le 0$, yaitu

$$\begin{aligned} UL_0 &= 0 \\ AL - F_0 &= 0 \\ F_0 &= AL \\ &= 18,165 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.31), yaitu

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{0-j} + (v_A - v_L)AL \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{0-j} + \left(\frac{1}{1,03} - \frac{1}{1,04}\right)18,165 \end{aligned}$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 + \left(\frac{1}{1,03} - \frac{1}{1,04}\right)18,165 \\ &= 0,170 \end{aligned}$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.15), yaitu

$$\begin{aligned} C_0 &= NC + S_0 \\ &= 0,302 + 0,170 \\ &= 0,472 \end{aligned}$$

2) untuk tahun ke-1

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.13), yaitu

$$\begin{aligned} F_1 &= (1+i')(F_0 + C_0 - B) \\ &= (1+0,045)(18,165+0,472-1) \\ &= 18,430 \end{aligned}$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14), yaitu

$$\begin{aligned} UL_1 &= AL - F_1 \\ &= 18,165 - 18,430 \\ &= -0,265 \end{aligned}$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.17), yaitu

$$L_1 = UL_1 - UL_1^A$$

  Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$\begin{aligned} UL_1^A &= AL - F_1^A \\ &= 18,165 - (1+i_A)(F_0 + C_0 - B) \\ &= 18,165 - (1,03)(18,165+0,472-1) \\ &= 18,165 - 18,165 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Jadi, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} L_1 &= UL_1 - UL_1^A \\ &= -0,265 - 0 \\ &= -0,265 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-1 adalah

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{1-j} + (v_A - v_L)AL$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{1-j} + \left(\frac{1}{1,03} - \frac{1}{1,04}\right) 18,165$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$S_1 = (1-K)L_1 + 0,170$$
$$= (0,212)(-0,265) + 0,170$$
$$= 0,114$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-1 adalah

$$C_1 = NC + S_1$$
$$= 0,302 + 0,114$$
$$= 0,416$$

3) untuk tahun ke-2

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-2 adalah

$$F_2 = (1+i')(F_1 + C_1 - B)$$
$$= (1+0,045)(18,430 + 0,416 - 1)$$
$$= 18,649$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-2 adalah

$$UL_2 = AL - F_2$$
$$= 18,165 - 18,649$$
$$= -0,484$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-2 adalah

$$L_2 = UL_2 - UL_2^A$$

Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$\begin{aligned} UL_2^A &= AL - F_2^A \\ &= 18{,}165 - (1+i_A)(F_1 + C_1 - B) \\ &= 18{,}165 - (1{,}03)(18{,}430 + 0{,}416 - 1) \\ &= 18{,}165 - 18{,}381 \\ &= -0{,}216 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} L_2 &= UL_2 - UL_2^A \\ &= -0{,}484 - (-0{,}216) \\ &= -0{,}268 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-2 adalah

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{2-j} + (v_A - v_L)AL \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{2-j} + \left(\frac{1}{1{,}03} - \frac{1}{1{,}04}\right)18{,}165 \end{aligned}$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$\begin{aligned} S_2 &= (1-K)L_2 + (1-K)K\, u_A\, L_1 + 0{,}170 \\ &= (0{,}212)(-0{,}268) + (0{,}212)\ (0{,}788)(1+0{,}03)(-0{,}265) + 0{,}170 \\ &= 0{,}067 \end{aligned}$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-2 adalah

$$\begin{aligned} C_2 &= NC + S_2 \\ &= 0{,}302 + 0{,}067 \\ &= 0{,}369 \end{aligned}$$

4) untuk tahun ke-3

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-3 adalah

$$\begin{aligned} F_3 &= (1+i\,')(F_2 + C_2 - B) \\ &= (1+0{,}045)(18{,}649 + 0{,}369 - 1) \\ &= 18{,}829 \end{aligned}$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-3 adalah

$$UL_3 = AL - F_3$$
$$= 18,165 - 18,829$$
$$= -0,664$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-3 adalah

$$L_3 = UL_3 - UL_3^A$$

Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$UL_3^A = AL - F_3^A$$
$$= 18,165 - (1+i_A)(F_2 + C_2 - B)$$
$$= 18,165 - (1,03)(18,649 + 0,369 - 1)$$
$$= 18,165 - 18,559$$
$$= -0,394$$

Jadi, dapat diperoleh

$$L_3 = UL_3 - UL_3^A$$
$$= -0,664 - (-0,394)$$
$$= -0,270$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-3 adalah

$$S_3 = \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{3-j} + (v_A - v_L)AL$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{3-j} + \left(\frac{1}{1,03} - \frac{1}{1,04}\right) 18,165$$

Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$S_3 = (1-K)L_3 + (1-K)K\,u_A\,L_2 + (1-K)K^2\,u_A{}^2\,L_1 + 0,170$$
$$= (0,212)(-0,270) + (0,212)\ (0,788)(1+0,03)(-0,268) +$$
$$(0,212)(0,788)^2\,(1+0,03)^2\,(-0,265) + 0,170$$
$$= 0,029$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-3 adalah

$$C_3 = NC + S_3$$
$$= 0,302 + 0,029$$
$$= 0,331$$

.

.

.

demikian seterusnya

Secara ringkas, hasil perhitungan dengan menggunakan asumsi tingkat pengembalian investasi sebesar 3% ditampilkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.1 Ilustrasi perhitungan dengan i_A sebesar 3%

t	AL	NC	F_t	UL_t	L_t	S_t	C_t
0	18,165	0,302	18,165	0,000	0,000	0,170	0,472
1	18,165	0,302	18,430	-0,265	-0,265	0,114	0,416
2	18,165	0,302	18,649	-0,484	-0,268	0,067	0,369
3	18,165	0,302	18,829	-0,664	-0,270	0,029	0,331
4	18,165	0,302	18,978	-0,813	-0,272	-0,002	0,300
5	18,165	0,302	19,100	-0,935	-0,274	-0,028	0,274
6	18,165	0,302	19,201	-1,036	-0,276	-0,050	0,252
7	18,165	0,302	19,283	-1,118	-0,277	-0,067	0,235
8	18,165	0,302	19,352	-1,187	-0,278	-0,082	0,220
9	18,165	0,302	19,408	-1,243	-0,279	-0,093	0,209
10	18,165	0,302	19,454	-1,289	-0,279	-0,103	0,199
11	18,165	0,302	19,492	-1,327	-0,280	-0,111	0,191
12	18,165	0,302	19,524	-1,359	-0,280	-0,118	0,184
13	18,165	0,302	19,549	-1,384	-0,281	-0,123	0,179
14	18,165	0,302	19,571	-1,406	-0,281	-0,128	0,174
15	18,165	0,302	19,588	-1,423	-0,281	-0,132	0,170
16	18,165	0,302	19,603	-1,438	-0,281	-0,135	0,167
17	18,165	0,302	19,614	-1,449	-0,282	-0,137	0,165
18	18,165	0,302	19,624	-1,459	-0,282	-0,139	0,163
19	18,165	0,302	19,632	-1,467	-0,282	-0,141	0,161
20	18,165	0,302	19,639	-1,474	-0,282	-0,142	0,160
25	18,165	0,302	19,658	-1,493	-0,282	-0,147	0,155
30	18,165	0,302	19,666	-1,501	-0,282	-0,148	0,154
35	18,165	0,302	19,666	-1,501	-0,282	-0,148	0,154
40	18,165	0,302	19,666	-1,501	-0,282	-0,148	0,154
45	18,165	0,302	19,666	-1,501	-0,282	-0,148	0,154
50	18,165	0,302	19,666	-1,501	-0,282	-0,148	0,154

Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa jika i_A = 3% dan i' = 4,5% ($i_A < i'$), maka *unfunded liability* akan bernilai negatif, yang berarti terdapat surplus pada dana program pensiun. Setelah 30 tahun, besarnya surplus akan menjadi stabil, yaitu sebesar 8,26% dari besarnya *actuarial liability*. Di samping itu, pada akhirnya *supplementary contribution* akan menjadi stabil dan diperlukan *contribution* yang relatif kecil (dibandingkan *contribution* yang diperlukan pada awalnya), yaitu sebesar 50,99% dari besarnya *normal contribution*.

4.2 Metode *Spreading Gains and Losses* dengan Asumsi Tingkat Pengembalian Investasi Sebesar 4,5%

- Berdasarkan persamaan (3.10) besar *normal contribution* tiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
NC &= (NC)\sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\ {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}} \sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{(0,899)\, v_L^{\,56-25}\ {}_{56-25}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{56-25}|}} \sum_{x=25}^{56-1} l_x \\
&= \frac{(0,899)\, v_L^{\,31}\ {}_{31}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{31}|}} \sum_{x=25}^{55} l_x \\
&= \frac{(0,899)(1+0,04)^{-31}(0,884)(12,564)}{16,927}(2.878.104) \\
&= 503.312,476
\end{aligned}
$$

Proporsi penerimaan *normal contribution* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\dfrac{503.312,476}{1.401.816,028} = 0,359$

- Berdasarkan persamaan (3.11) besar *actuarial liability* tiap tahunnya adalah

$$AL = \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right)l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x$$

$$= \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\,r-x}\; {}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \frac{B_r\, v_L^{\,r-y}\; {}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right)l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x$$

$$= \sum_{x=25}^{55}\left((0{,}899)\, v_L^{\,56-x}\; {}_{56-x}p_x\, \ddot{a}_{56} - \frac{(0{,}899)\, v_L^{\,56-25}\; {}_{56-25}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{56-25}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right)l_x$$

$$+ \sum_{x=56}^{105}(0{,}899)\,\ddot{a}_x\, l_x$$

$$= \sum_{x=25}^{55}\left((0{,}899)\, v_L^{\,56-x}\; {}_{56-x}p_x\,(12{,}564) - (0{,}175)\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right)l_x + \sum_{x=56}^{105}(0{,}899)\,\ddot{a}_x\, l_x$$

$$= 23.362.665{,}927$$

Proporsi *actuarial liability* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\dfrac{23.362.665{,}927}{1.401.816{,}028} = 16{,}666$

1) untuk tahun ke-0

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14) dan asumsi bahwa $UL_t = 0$ untuk $t \le 0$, yaitu

$$\begin{aligned} UL_0 &= 0 \\ AL - F_0 &= 0 \\ F_0 &= AL \\ &= 16{,}666 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.31), yaitu

$$S_0 = \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\, u_A^{\,j}\, L_{0-j} + (v_A - v_L)AL$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\, u_A^{\,j}\, L_{0-j} + \left(\frac{1}{1{,}045} - \frac{1}{1{,}04}\right)16{,}666$$

Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$S_0 = 0 + \left(\frac{1}{1,045} - \frac{1}{1,04} \right) 16,666$$
$$= -0,077$$

- *contribution*

Contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.15), yaitu

$$C_0 = NC + S_0$$
$$= 0,359 + (-0,077)$$
$$= 0,282$$

2) untuk tahun ke-1

- aset kekayaan

Aset kekayaan pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.13), yaitu

$$F_1 = (1 + i')(F_0 + C_0 - B)$$
$$= (1 + 0,045)(16,666 + 0,282 - 1)$$
$$= 16,666$$

- *unfunded liability*

Unfunded liability pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14), yaitu

$$UL_1 = AL - F_1$$
$$= 16,666 - 16,666$$
$$= 0$$

- *loss*

Loss pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.17), yaitu

$$L_1 = UL_1 - UL_1^A$$

Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$UL_1^A = AL - F_1^A$$
$$= 16,666 - (1 + i_A)(F_0 + C_0 - B)$$
$$= 16,666 - (1,045)(16,666 + 0,282 - 1)$$
$$= 16,666 - 16,666$$
$$= 0$$

Jadi, dapat diperoleh

$$L_1 = UL_1 - UL_1^A$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-1 adalah

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{1-j} + (v_A - v_L)AL$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{1-j} + \left(\frac{1}{1,045} - \frac{1}{1,04}\right)16,666$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$S_1 = (1-K)L_1 + (-0,077)$$
$$= 0 + (-0,077)$$
$$= -0,077$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-1 adalah

$$C_1 = NC + S_1$$
$$= 0,359 + (-0,077)$$
$$= 0,282$$

3) untuk tahun ke-2

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-2 adalah

$$F_2 = (1 + i')(F_1 + C_1 - B)$$
$$= (1 + 0,045)(16,666 + 0,282 - 1)$$
$$= 16,666$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-2 adalah

$$\begin{aligned} UL_2 &= AL - F_2 \\ &= 16,666 - 16,666 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-2 adalah

$$L_2 = UL_2 - UL_2^A$$

  Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$\begin{aligned} UL_2^A &= AL - F_2^A \\ &= 16,666 - (1 + i_A)(F_1 + C_1 - B) \\ &= 16,666 - (1,045)(16,666 + 0,282 - 1) \\ &= 16,666 - 16,666 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Jadi, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} L_2 &= UL_2 - UL_2^A \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-2 adalah

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{2-j} + (v_A - v_L) AL \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{2-j} + \left(\frac{1}{1,045} - \frac{1}{1,04} \right) 16,666 \end{aligned}$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \leq 0$, maka

$$\begin{aligned} S_2 &= (1-K)L_2 + (1-K)K\, u_A\, L_1 + (-0,077) \\ &= 0 + (-0,077) \\ &= -0,077 \end{aligned}$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-2 adala

$$\begin{aligned} C_2 &= NC + S_2 \\ &= 0,359 + (-0,077) \\ &= 0,282 \end{aligned}$$

.

.

.

demikian seterusnya

Secara ringkas, hasil perhitungan dengan menggunakan asumsi tingkat pengembalian investasi sebesar 4,5% ditampilkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.2 Ilustrasi perhitungan dengan i_A sebesar 4,5%

t	AL	NC	F_t	UL_t	L_t	S_t	C_t
0	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
1	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
2	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
3	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
4	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
5	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
6	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
7	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
8	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
9	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
10	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
11	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
12	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
13	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
14	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
15	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
16	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
17	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
18	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
19	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
20	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
25	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
30	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
35	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
40	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
45	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282
50	16,666	0,359	16,666	0	0	-0,077	0,282

Berdasarkan Tabel 4.2, terlihat bahwa jika i_A = 4,5% dan i' = 4,5% ($i_A = i'$), maka *unfunded liability* akan bernilai 0, yang berarti tidak terdapat surplus ataupun defisit pada dana program pensiun. *Supplementary contribution* akan menjadi stabil sepanjang waktu dan setiap tahunnya diperlukan *contribution* sebesar 78,55% dari besarnya *normal contribution*.

4.3 Metode *Spreading Gains and Losses* dengan Asumsi Tingkat Pengembalian Investasi Sebesar 6%

- Berdasarkan persamaan (3.10) besar *normal contribution* tiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
NC &= (NC)\sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{B_r\, v_L^{\;r-y}\;{}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}} \sum_{x=t}^{r-1} l_x \\
&= \frac{(0,899)\, v_L^{\;56-25}\;{}_{56-25}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{56-25}|}} \sum_{x=25}^{56-1} l_x \\
&= \frac{(0,899)\, v_L^{\;31}\;{}_{31}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{31}|}} \sum_{x=25}^{55} l_x \\
&= \frac{(0,899)\,(1+0,04)^{-31}(0,884)\,(12,564)}{14,494}\,(2.878.104) \\
&= 587.810,631
\end{aligned}
$$

Proporsi penerimaan *normal contribution* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\dfrac{587.810,631}{1.401.816,028} = 0,419$

- Berdasarkan persamaan (3.11) besar *actuarial liability* tiap tahunnya adalah

$$
\begin{aligned}
AL &= \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\;r-x}\;{}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - (NC)\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right) l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=t}^{r-1}\left(B_r\, v_L^{\;r-x}\;{}_{r-x}p_x\, \ddot{a}_r - \frac{B_r\, v_L^{\;r-y}\;{}_{r-y}p_y\, \ddot{a}_r}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}\right) l_x + \sum_{x=r}^{\omega} B_r\, \ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=25}^{55}\left((0,899)\, v_L^{\;56-x}\;{}_{56-x}p_x\, \ddot{a}_{56} - \frac{(0,899)\, v_L^{\;56-25}\;{}_{56-25}p_{25}\, \ddot{a}_{56}}{\ddot{a}_{25:\overline{56-25}|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right) l_x \\
&\quad + \sum_{x=56}^{105} (0,899)\,\ddot{a}_x\, l_x \\
&= \sum_{x=25}^{55}\left((0,899)\, v_L^{\;56-x}\;{}_{56-x}p_x\,(12,564) - (0,204)\,\ddot{a}_{x:\overline{56-x}|}\right) l_x + \sum_{x=56}^{105} (0,899)\,\ddot{a}_x\, l_x \\
&= 21.152.002,051
\end{aligned}
$$

Proporsi *actuarial liability* terhadap pembayaran benefit tiap tahunnya (B) adalah sebesar $\frac{21.152.002,051}{1.401.816,028} = 15,089$

1) untuk tahun ke-0

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14) dan asumsi bahwa $UL_t = 0$ untuk $t \leq 0$, yaitu

$$\begin{aligned} UL_0 &= 0 \\ AL - F_0 &= 0 \\ F_0 &= AL \\ &= 15,089 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.31), yaitu

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j \, u_A{}^j \, L_{0-j} + (v_A - v_L)AL \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j \, u_A{}^j \, L_{0-j} + \left(\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,04} \right) 15,089 \end{aligned}$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \leq 0$, maka

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 + \left(\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,04} \right) 15,089 \\ &= -0,274 \end{aligned}$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.15), yaitu

$$\begin{aligned} C_0 &= NC + S_0 \\ &= 0,419 + (-0,274) \\ &= 0,145 \end{aligned}$$

2) untuk tahun ke-1

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.13), yaitu

$$\begin{aligned} F_1 &= (1+i')(F_0 + C_0 - B) \\ &= (1+0,045)(15,089+0,145-1) \\ &= 14,875 \end{aligned}$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.14), yaitu

$$\begin{aligned} UL_1 &= AL - F_1 \\ &= 15,089 - 14,875 \\ &= 0,214 \end{aligned}$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.17), yaitu

$$L_1 = UL_1 - UL_1^A$$

  Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$\begin{aligned} UL_1^A &= AL - F_1^A \\ &= 15,089 - (1+i_A)(F_0 + C_0 - B) \\ &= 15,089 - (1,06)(15,089+0,145-1) \\ &= 15,089 - 15,089 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Jadi, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} L_1 &= UL_1 - UL_1^A \\ &= 0,214 - 0 \\ &= 0,214 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-1 adalah

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{1-j} + (v_A - v_L)AL$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j\, u_A{}^j\, L_{1-j} + \left(\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,04}\right)15,089$$

  Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \leq 0$, maka

$$S_1 = (1-K)L_1 + (-0,274)$$
$$= (0,224)(0,214) + (-0,274)$$
$$= -0,226$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-1 adalah

$$C_1 = NC + S_1$$
$$= 0,419 + (-0,226)$$
$$= 0,193$$

3) untuk tahun ke-2

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-2 adalah

$$F_2 = (1+i')(F_1 + C_1 - B)$$
$$= (1+0,045)(14,875+0,193-1)$$
$$= 14,701$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-2 adalah

$$UL_2 = AL - F_2$$
$$= 15,089 - 14,701$$
$$= 0,388$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-2 adalah

$$L_2 = UL_2 - UL_2^A$$

  Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$UL_2^A = AL - F_2^A$$
$$= 15,089 - (1 + i_A)(F_1 + C_1 - B)$$
$$= 15,089 - (1,06)(14,875 + 0,193 - 1)$$
$$= 15,089 - 14,912$$
$$= 0,177$$

Jadi, dapat diperoleh

$$L_2 = UL_2 - UL_2^A$$
$$= 0,388 - 0,177$$
$$= 0,211$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-2 adalah

$$S_2 = \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{2-j} + (v_A - v_L)AL$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-K)K^j u_A{}^j L_{2-j} + \left(\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,04}\right) 15,089$$

Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$S_2 = (1-K)L_2 + (1-K)K\, u_A\, L_1 + (-0,274)$$
$$= (0,224)\,(0,211) + (0,224)\,(0,776)\,(1+0,06)\,(0,214) + (-0,274)$$
$$= -0,187$$

- *contribution*

  Contribution pada tahun ke-2 adalah

$$C_2 = NC + S_2$$
$$= 0,419 + (-0,187)$$
$$= 0,232$$

4) untuk tahun ke-3

- aset kekayaan

  Aset kekayaan pada tahun ke-3 adalah

$$F_3 = (1 + i')(F_2 + C_2 - B)$$
$$= (1 + 0,045)(14,701 + 0,232 - 1)$$
$$= 14,560$$

- *unfunded liability*

  Unfunded liability pada tahun ke-3 adalah

$$\begin{aligned} UL_3 &= AL - F_3 \\ &= 15,089 - 14,560 \\ &= 0,529 \end{aligned}$$

- *loss*

  Loss pada tahun ke-3 adalah

$$L_3 = UL_3 - UL_3^A$$

Untuk itu, nilai UL_1^A harus terlebih dahulu dicari, yaitu

$$\begin{aligned} UL_3^A &= AL - F_3^A \\ &= 15,089 - (1+i_A)(F_2 + C_2 - B) \\ &= 15,089 - (1,06)(14,560 + 0,232 - 1) \\ &= 15,089 - 14,769 \\ &= 0,320 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} L_3 &= UL_3 - UL_3^A \\ &= 0,529 - 0,320 \\ &= 0,209 \end{aligned}$$

- *supplementary contribution*

  Supplementary contribution pada tahun ke-3 adalah

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{3-j} + (v_A - v_L)AL \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(1-K)K^j u_A{}^j L_{3-j} + \left(\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,04}\right)15,089 \end{aligned}$$

Karena diasumsikan $L_t = 0$ untuk $t \le 0$, maka

$$\begin{aligned} S_3 &= (1-K)L_3 + (1-K)K\,u_A\,L_2 + (1-K)K^2\,u_A{}^2\,L_1 + (-0,274) \\ &= (0,224)(0,209) + (0,224)(0,776)(1+0,06)(0,211) + \\ &\quad (0,224)(0,776)^2(1+0,06)^2(0,214) + (-0,274) \\ &= -0,155 \end{aligned}$$

- *contribution*

Contribution pada tahun ke-3 adalah

$$C_3 = NC + S_3$$
$$= 0,419 + (-0,155)$$
$$= 0,264$$

.
.
.

demikian seterusnya

Secara ringkas, hasil perhitungan dengan menggunakan asumsi tingkat pengembalian investasi sebesar 6% ditampilkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.3 Hasil perhitungan dengan i_A sebesar 6%

t	AL	NC	F_t	UL_t	L_t	S_t	C_t
0	15,089	0,419	15,089	0,000	0,000	-0,274	0,145
1	15,089	0,419	14,875	0,214	0,214	-0,226	0,193
2	15,089	0,419	14,701	0,388	0,211	-0,187	0,232
3	15,089	0,419	14,560	0,529	0,209	-0,155	0,264
4	15,089	0,419	14,445	0,644	0,207	-0,130	0,289
5	15,089	0,419	14,353	0,736	0,206	-0,109	0,310
6	15,089	0,419	14,277	0,812	0,205	-0,092	0,327
7	15,089	0,419	14,216	0,873	0,204	-0,079	0,340
8	15,089	0,419	14,167	0,922	0,203	-0,067	0,352
9	15,089	0,419	14,127	0,962	0,203	-0,058	0,361
10	15,089	0,419	14,094	0,995	0,202	-0,051	0,368
11	15,089	0,419	14,068	1,021	0,202	-0,045	0,374
12	15,089	0,419	14,046	1,043	0,202	-0,040	0,379
13	15,089	0,419	14,029	1,060	0,201	-0,037	0,382
14	15,089	0,419	14,015	1,074	0,201	-0,033	0,386
15	15,089	0,419	14,003	1,086	0,201	-0,031	0,388
16	15,089	0,419	13,994	1,095	0,201	-0,029	0,390
17	15,089	0,419	13,987	1,102	0,201	-0,027	0,392
18	15,089	0,419	13,981	1,108	0,201	-0,026	0,393
19	15,089	0,419	13,976	1,113	0,201	-0,025	0,394
20	15,089	0,419	13,972	1,117	0,201	-0,024	0,395
25	15,089	0,419	13,960	1,129	0,200	-0,021	0,398
30	15,089	0,419	13,958	1,131	0,200	-0,021	0,398
35	15,089	0,419	13,958	1,131	0,200	-0,021	0,398
40	15,089	0,419	13,958	1,131	0,200	-0,021	0,398
45	15,089	0,419	13,958	1,131	0,200	-0,021	0,398
50	15,089	0,419	13,958	1,131	0,200	-0,021	0,398

Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa jika i_A = 6% dan i' = 4,5% ($i_A > i'$), maka *unfunded liability* akan bernilai positif, yang berarti terjadi defisit pada dana program pensiun. Setelah 30 tahun, besarnya defisit akan menjadi stabil, sebesar 7,50% dari besarnya *actuarial liability*. Di samping itu, pada akhirnya *supplementary contribution* akan menjadi stabil dan diperlukan *contribution* yang relatif besar (dibandingkan *contribution* yang diperlukan pada awalnya), yaitu sebesar 94,99% dari besarnya *normal contribution*.

4.4 Perbandingan Metode *Spreading Gains and Losses* untuk $m = 5$ dan $m = 7$ dengan Asumsi Tingkat Pengembalian Investasi Sebesar 6%

Jika $m = 5$, maka K akan bernilai $0,78801$, sedangkan jika $m = 7$ maka K akan bernilai $0,84417$. Perbandingan besarnya *supplementary contribution* untuk kedua nilai K yang berbeda tersebut, ditampilkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.4 Perbandingan besarnya *supplementary contribution*

t	$m = 5$		$m = 7$	
	S_t	S_t^*	S_t	S_t^*
0	-0,134	0,000	-0,134	0,000
1	-0,069	0,065	-0,083	0,051
2	-0,035	0,099	-0,057	0,077
3	-0,007	0,127	-0,034	0,100
4	0,016	0,150	-0,014	0,120
5	0,034	0,168	0,004	0,138
6	0,048	0,182	0,020	0,154
7	0,060	0,194	0,034	0,168
8	0,070	0,204	0,046	0,180
9	0,078	0,212	0,057	0,191
10	0,084	0,218	0,067	0,201

S_t^* adalah *supplementary contribution* yang hanya memperhitungkan *loss* yang terjadi (tanpa memperhitungkan penyesuaian yang ditimbulkan karena adanya perbedaan asumsi tingkat bunga untuk kewajiban pensiun dan aset program pensiun).

Berdasarkan Tabel 4.4, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan asumsi tingkat pengembalian investasi yang sama, semakin besar nilai parameter K (semakin besar m), akan mengakibatkan semakin lambat *loss* ditutupi.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang didapatkan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Laba ataupun rugi (*loss*) pada dana program pensiun manfaat pasti dapat terjadi karena adanya ketidaksesuaian antara asumsi aktuaria yang digunakan dengan kenyataan.
2. *Loss* yang terjadi pada pendanaan program pensiun manfaat pasti dapat ditutupi dengan suatu faktor kontribusi tambahan yang disebut *supplementary contribution*.
3. Salah satu metode untuk menentukan *supplementary contribution* adalah metode *spreading gains and losses*. Pada metode ini, pembayaran *loss* yang terjadi pada waktu t, didistribusikan pada waktu t, $t + 1$, $t + 2$ dan seterusnya, melalui serangkaian pembayaran yang menurun secara eksponensial.
4. Dengan menggunakan metode *spreading gains and losses,* akan tetap terdapat cukup dana untuk membayar manfaat pensiun yang telah jatuh tempo, serta pada akhirnya didapatkan *supplementary contribution* yang relatif stabil setiap periodenya.
5. Jika asumsi tingkat pengembalian investasi sama dengan tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A = i'$), maka tidak akan terjadi surplus ataupun defisit pada pendanaan program pensiun manfaat pasti.
6. Jika asumsi tingkat pengembalian investasi lebih besar daripada tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A > i'$), maka akan memberikan dampak jangka panjang berupa terjadinya defisit pada pendanaan program pensiun manfaat pasti.
7. Jika asumsi tingkat pengembalian investasi lebih kecil daripada tingkat pengembalian investasi aktual ($i_A < i'$), maka akan memberikan dampak jangka panjang berupa terjadinya surplus pada pendanaan program pensiun manfaat pasti.

5.2 Saran

1. Model pendanaan program pensiun manfaat pasti masih perlu dikembangkan untuk kasus dimana *loss* dimungkinkan terjadi, tidak hanya dikarenakan asumsi tingkat pengembalian investasi berbeda dengan tingkat pengembalian investasi aktual, tetapi juga dikarenakan ketidaksesuaian asumsi aktuaria lainnya.
2. Perlu dikembangkan sebuah model baru yang lebih sesuai dengan kenyataan, dengan mempertimbangkan kerandoman tingkat pengembalian investasi, maupun kondisi apabila populasi program pensiun tidak stasioner.
3. Pemilihan parameter K yang efisien dan optimal pada metode *spreading gains and losses* juga masih perlu dianalisa lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Aitken, W.H. (2010). *A Problem Solving Approach to Pension Funding and Valuation*. Connecticut: ACTEX Publications.

Bowers, N.L., et al. (1997). *Actuarial Mathematics*. Illinois: The Society of Actuaries.

Cipra, T. (2010). *Financial and insurance formulas.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Dufresne, D. (1988). Moments of pension contributions and fund levels when rates of return are random. *Journal of the Institute of Actuaries,* 115, 535-544.

Dufresne, D. (1989). Stability of pension systems when rates of return are random. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8, 71-76.

Ikatan Akuntan Indonesia. (2004). *Standar Akuntansi Keuangan.* Jakarta: Salemba Empat.

Kellison, S.G. (1991). *The Theory of Interest, 2nd ed*. Illinois: Richard D. Irwin, Inc.

Liu, C.L. (1995). *Dasar-Dasar Matematika Diskret*, *Edisi Kedua*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

McGill, D.M., Brown, K.N., Hale, J.J., dan Schieber, S.J. (1996). *Fundamentals of Private Pensions*, 7th ed. Pennsylvania: University of Pennsylvania Press.

Owadally, M.I. (2003). Pension funding and the actuarial assumption concerning investment return. *ASTIN BULLETIN*, 33 (2), 289-312.

Owadally, M.I. dan Haberman, S. (1999). Pension Fund Dynamics and Gains/Losses Due to Random Rates of investment Return. *North American Actuarial Journal* 3(3), 105-117.

Owadally, M.I. dan Haberman, S. (2004). Efficient Gain and Loss Amortization and Optimal Funding in Pension Plans. *North American Actuarial Journal* 8(1).

Rosen, K.H. (1995). *Discrete Mathematics and Its Application, 3^{rd} ed*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Trwobridge, C.L. (1952). Fundamental of pension funding. *Transaction of the Society of Actuaries* 4, 17-43

Ulfah, E.H. (2007). *Analisis dampak penyimpangan asumsi tingkat pengembalian investasi pada pendanaan program pensiun manfaat pasti.* Depok: Universitas Indenesia.

Winklevoss, H.E. (1977). *Pension Mathematics : with Numerical Ilustrations*. Illinois: Richard D. Irwin.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Daftar Notasi

Notasi-notasi yang digunakan pada tugas akhir ini adalah:

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$: *present value* dari anuitas dimuka sebesar satu selama *n* periode.

$\ddot{a}_x$: *actuarial present value* dari anuitas seumur hidup diskrit dimuka sebesar satu, yang dimulai dari usia *x*.

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$: *actuarial present value* dari anuitas hidup diskrit dimuka berjangka *n*-tahun sebesar satu, yang dimulai dari usia *x*.

AL : *actuarial liability* untuk suatu program pensiun, besar aset program pensiun secara teoritis yang seharusnya telah terkumpul pada suatu waktu, untuk pembayaran manfaat pensiun yang akan datang.

APVFB : *actuarial present value of future benefits* untuk suatu program pensiun.

APVFNC : *actuarial present value of future normal contribution* untuk suatu program pensiun.

B_r : manfaat pensiun berkala yang dibayarkan kepada seorang peserta program pensiun setelah peserta tersebut pensiun pada usia *r*.

B : *benefit* untuk suatu program pensiun, total manfaat yang harus dibayarkan setiap periodenya.

C_t : *contribution* yang diterima pada awal tahun $(t,\ t+1)$.

d : tingkat diskonto, besar bunga yang diperoleh dalam suatu periode per jumlah uang yang dihasilkan pada akhir periode tersebut.

F_t : aset program pensiun pada tahun ke-*t*.

i : tingkat bunga, besar bunga yang diperoleh dalam suatu periode per jumlah uang yang diinvestasikan pada awal periode tersebut.

i' : tingkat pengembalian investasi aktual.

i_A : asumsi tingkat pengembalian investasi.

i_L : asumsi tingkat bunga yang dikenakan atas kewajiban pensiun.

k	:	besarnya proporsi untuk mencicil *unfunded liability* pada metode *spreading gains and losses.*
K	:	parameter pada metode *spreading gains and losses*.
m	:	periode untuk mencicil *unfunded liability* pada metode *spreading gains and losses.*
L_t	:	*loss*, total laba/rugi yang terjadi selama tahun $(t-1, t)$.
NC	:	*normal contribution* untuk suatu program pensiun, total iuran yang diterima secara berkala dari seluruh peserta program pensiun.
$(NC)_t$	:	*normal contribution* yang diterima dari seorang peserta program pensiun pada saat orang tersebut berusia *t*-tahun.
S_t	:	*supplementary contribution* yang diterima pada awal tahun $(t, t+1)$.
$s_X(x)$	:	fungsi survival dari variabel random *X*.
$T(x)$	:	variabel random yang menyatakan sisa usia dari seseorang yang saat ini berusia *x*.
${}_tp_x$	:	fungsi survival dari variabel random $T(x)$, probabilitas seseorang yang berusia *x* masih hidup *t* tahun kemudian.
${}_tq_x$	:	fungsi distribusi dari variabel random $T(x)$, probabilitas seseorang yang berusia *x* akan meninggal *t* tahun kemudian.
UL_t	:	*unfunded liabiity* suatu program pensiun pada tahun ke-*t*
u', u_A, u_L	:	secara berurutan adalah notasi untuk $(1+i'), (1+i_A), (1+i_L)$.
v', v_A, v_L	:	secara berurutan adalah notasi untuk $(1+i')^{-1}, (1+i_A)^{-1}, (1+i_L)^{-1}$.
$W(x)$	:	variabel random yang menyatakan banyaknya tahun di masa depan yang akan dijalani oleh seseorang yang berusia *x*, sebelum dia meninggal.
X	:	variabel random yang menyatakan usia saat kematian yang diukur dari saat lahir.
x	:	nilai usia yang diberikan.

Lampiran 2. Sumasi Parsial

$$\Delta\left[f(x)\right] = f(x+1) - f(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta\left[f(x)\ g(x)\right] &= f(x+1)\ g(x+1) - f(x)\ g(x)\\ &= f(x+1)\ g(x+1) - f(x+1)\ g(x) + f(x+1)\ g(x) - f(x)\ g(x)\\ &= f(x+1)\left[g(x+1) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x+1) - f(x)\right]\\ &= f(x+1)\ \Delta\left[g(x)\right] + g(x)\ \Delta\left[f(x)\right]\end{aligned}$$

selanjutnya, kedua ruas pada persamaan diatas di-sumasi-kan dari 0 sampai $n-1$

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n-1}\Delta\left[f(x)\ g(x)\right] &= \sum_{x=0}^{n-1}\Big(f(x+1)\ \Delta\left[g(x)\right] + g(x)\ \Delta\left[f(x)\right]\Big)\\ &= \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\ \Delta\left[g(x)\right] + \sum_{x=0}^{n-1} g(x)\ \Delta\left[f(x)\right] \qquad (1)\end{aligned}$$

ruas kiri pada persamaan (1) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n-1}\Delta\left[f(x)\ g(x)\right] &= \Delta\left[f(0)\ g(0)\right] + \Delta\left[f(1)\ g(1)\right] + \ldots + \Delta\left[f(n-1)\ g(n-1)\right]\\ &= \left[f(1)\ g(1) - f(0)\ g(0)\right] + \left[f(2)\ g(2) - f(1)\ g(1)\right] + \ldots +\\ &\quad \left[f(n)\ g(n) - f(n-1)\ g(n-1)\right]\\ &= f(n)\ g(n) - f(0)\ g(0)\\ &= f(x)\ g(x)\Big|_0^n \qquad (2)\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaaan (2) ke dalam persamaan (1), akan diperoleh

$$f(x)\ g(x)\Big|_0^n = \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\ \Delta\left[g(x)\right] + \sum_{x=0}^{n-1} g(x)\ \Delta\left[f(x)\right]$$

$\therefore$ Bentuk umum dari sumasi parsial adalah

$$\sum_{x=0}^{n-1} g(x)\ \Delta\left[f(x)\right] = f(x)\ g(x)\Big|_0^n - \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\ \Delta\left[g(x)\right]$$

Lampiran 3. *English Life Table No. 12 (males)*

x	l_x	d_x	q_x	p_x
25	95753	95	0,000992	0,999008
26	95658	94	0,000983	0,999017
27	95564	96	0,001005	0,998995
28	95468	99	0,001037	0,998963
29	95369	104	0,001091	0,998909
30	95265	110	0,001155	0,998845
31	95155	115	0,001209	0,998791
32	95040	122	0,001284	0,998716
33	94918	129	0,001359	0,998641
34	94789	137	0,001445	0,998555
35	94652	147	0,001553	0,998447
36	94505	158	0,001672	0,998328
37	94347	171	0,001812	0,998188
38	94176	185	0,001964	0,998036
39	93991	201	0,002139	0,997861
40	93790	220	0,002346	0,997654
41	93570	242	0,002586	0,997414
42	93328	268	0,002872	0,997128
43	93060	297	0,003191	0,996809
44	92763	330	0,003557	0,996443
45	92433	369	0,003992	0,996008
46	92064	412	0,004475	0,995525
47	91652	463	0,005052	0,994948
48	91189	520	0,005702	0,994298
49	90669	584	0,006441	0,993559
50	90085	656	0,007282	0,992718
51	89429	736	0,008230	0,991770
52	88693	825	0,009302	0,990698
53	87868	923	0,010504	0,989496
54	86945	1029	0,011835	0,988165
55	85916	1265	0,014724	0,985276
56	84772	1144	0,013495	0,986505
57	83507	1393	0,016681	0,983319
58	82114	1526	0,018584	0,981416
59	80588	1664	0,020648	0,979352
60	78924	1805	0,022870	0,977130
61	77119	1947	0,025247	0,974753
62	75172	2088	0,027776	0,972224
63	73084	2228	0,030485	0,969515
64	70856	2366	0,033392	0,966608
65	68490	2499	0,036487	0,963513

x	l_x	d_x	q_x	p_x
66	65991	2625	0,039778	0,960222
67	63366	2745	0,043320	0,956680
68	60621	2856	0,047112	0,952888
69	57765	2959	0,051225	0,948775
70	54806	3051	0,055669	0,944331
71	51755	3130	0,060477	0,939523
72	48625	3195	0,065707	0,934293
73	45430	3243	0,071385	0,928615
74	42187	3273	0,077583	0,922417
75	38914	3282	0,084340	0,915660
76	35632	3266	0,091659	0,908341
77	32366	3225	0,099642	0,900358
78	29141	3154	0,108232	0,891768
79	25987	3054	0,117520	0,882480
80	22933	2923	0,127458	0,872542
81	20010	2763	0,138081	0,861919
82	17247	2576	0,149359	0,850641
83	14671	2365	0,161202	0,838798
84	12306	2137	0,173655	0,826345
85	10169	1897,4	0,186587	0,813413
86	8271,6	1654,1	0,199973	0,800027
87	6617,5	1414,1	0,213691	0,786309
88	5203,4	1184,6	0,227659	0,772341
89	4018,8	971,6	0,241770	0,758230
90	3047,2	779,9	0,255940	0,744060
91	2267,3	612,2	0,270013	0,729987
92	1655,1	470	0,283971	0,716029
93	1185,1	352,73	0,297637	0,702363
94	832,37	258,83	0,310955	0,689045
95	573,54	185,74	0,323848	0,676152
96	387,8	130,39	0,336230	0,663770
97	257,41	89,59	0,348044	0,651956
98	167,82	60,3	0,359314	0,640686
99	107,52	39,771	0,369894	0,630106
100	67,749	25,733	0,379828	0,620172
101	42,016	16,349	0,389114	0,610886
102	25,667	10,209	0,397748	0,602252
103	15,458	6,2721	0,405751	0,594249
104	9,1859	3,7949	0,413122	0,586878
105	5,391			