UNIVERSITAS INDONESIA

DISTRIBUSI BANYAK SINGGAH DARI SUATU *RANDOM WALK* DAN UJI KERANDOMAN

SKRIPSI

RANTI NUGRAHENI
0305010475

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

DISTRIBUSI BANYAK SINGGAH DARI SUATU *RANDOM WALK* DAN UJI KERANDOMAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

RANTI NUGRAHENI
0305010475

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Ranti Nugraheni
NPM	: 0305010475
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 13 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Ranti Nugraheni
NPM	:	0305010475
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Distribusi Banyak Singgah dari Suatu *Random Walk* dan Uji Kerandoman

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dra. Netty Sunandi, M.Si.	(Netty S)
Pembimbing	:	Mila Novita, M.Si.	( )
Penguji	:	Dra. Siti Nurrohmah, M.Si.	( )
Penguji	:	Fevi Novkaniza, M.Si.	( )
Penguji	:	Sarini Abdullah, M.Stats.	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	14 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah S.W.T yang Maha pengasih dan Maha penyayang, atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulisan skripsi ini dapat selesai. Selain itu, Penulis menyadari bahwa skripsi ini selesai atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si. sebagai pembimbing penulis dalam proses pengerjaan skripsi ini, atas bantuan pengerjaan, kesabaran, waktu luang, pengorbanan, nasihat, dan pertolongan yang besar dalam mengerjakan skripsi dan membimbing penulis. Terima kasih atas semua pelajaran yang telah Ibu Netty berikan. Semoga penulis mampu mengamalkannya dan menjadi pribadi yang lebih baik lagi. Maaf atas semua kesalahan yang pernah terjadi.

(2) Ibu Mila Novita, M.Si. sebagai pembimbing kedua penulis dalam penulisan tugas akhir ini. Terima kasih atas kesabaran, waktu luang dan masukkan yang diberikan selama proses pengerjaan skripsi ini.

(3) Ibu Siti Nurrohmah sebagai pembimbing akademik selama penulis melaksanakan kuliah. Terima kasih atas kesediaan waktu, ketulusan, dan kesabaran dalam membimbing penulis, dan atas segala nasihat yang diberikan kepada penulis.

(4) Bapak Yudi Satria selaku Kepala Departemen Matematika dan Ibu Rahmi Rusin selaku Sekretaris Departemen Matematika yang telah banyak memberikan bantuan kepada penulis.

(5) Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si, Ibu Dra. Saskya Mary, M.Si, Ibu Dr. Dian Lestari, Ibu Fevi Novkaniza, M.Si, dan Ibu Sarini Abdullah, M.Si. Terima kasih atas dukungan semangat dan informasi yang berguna bagi penulis dalam proses pengerjaan tugas akhir ini.

(6) Seluruh dosen yang telah mengajar penulis dan memberikan semangat serta bantuan yang diberikan.

(7) Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA UI, terima kasih atas segala bantuan yang diberikan.

(8) Ibu ku yang aku sayangi, terima kasih atas kasih sayangnya kepada penulis, semoga aku cukup membuat ibu bangga.

(9) Teman-teman Matematika UI, khususnya angkatan 2005, atas pengalaman yang telah kalian berikan selama masa kuliah.

(10) Teman-teman seperjuangan dalam mengerjakan skripsi, atas bantuan informasi dan dorongan semangat yang telah diberikan.

Kepada seluruh pihak yang telah berjasa kepada penulis yang tidak penulis sebutkan di atas, Allah mengetahui semua kebaikan kalian, terima kasih. Untuk seluruh pihak yang telah penulis sebutkan di atas, dan pihak yang tidak disebutkan, semoga Allah selalu membimbing dan memberikan hidayahnya kepada kalian, dan menjadikan segala amal baik kalian sebagai penyelamat bagi kalian di dunia dan akhirat. Penulis mohon maaf apabila dikemudian hari ditemukan kesalahan atau kekurangan yang tidak disengaja dalam skripsi ini.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ranti Nugraheni
NPM	: 0305010475
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Distribusi Banyak Singgah dari Suatu *Random Walk* dan Uji Kerandoman

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 13 Juli 2011
Yang menyatakan

(Ranti Nugraheni)

ABSTRAK

Nama : Ranti Nugraheni
Program Studi : Matematika
Judul : Distribusi Banyak Singgah dari Suatu *Random Walk* dan Uji Kerandoman

Random walk sederhana merupakan suatu proses stokastik yang memenuhi aturan rantai Markov. Pada random walk sederhana dapat dibentuk suatu variabel banyak singgah di suatu state pada satu putaran berhingga. State disini merupakan nilai dari jumlah kumulatif random walk. Dalam skripsi ini akan dibahas distribusi dari banyak singgah di suatu state pada satu putaran berhingga dari sebuah random walk sederhana. Distribusinya adalah distribusi geometri termodifikasi di nol. Distribusi banyak singgah akan diaplikasikan untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga.

Kata Kunci : random walk, banyak singgah, distribusi geometri termodifikasi di nol, uji kerandoman, uji chi-square.
xiii +73 halaman ; 2 gambar ; 8 tabel
Daftar Pustaka : 8 (1993-2010)

ABSTRACT

Name : Ranti Nugraheni
Program Study : Mathematics
Title : Distribution of The Number of Visits of A Random Walk and Randomness Test.

Simple random walk is a stochastic process that meets the Markov chain property. In a simple random walk can be established a number of visits variable within an excursion to a given state. State here the value of the cumulative random walk. In this paper will discuss the distribution of the number of visits within an excursion of a simple random walk to a given state. The distribution of the number of visits is zero-modified geometric. The distribution of the number of visits is applied for testing randomness on a finite binary sequence.

Keywords : random walk, number of visits, zero-modified geometric distribution, testing randomness, chi-square test.
xiii+73 pages ; 2 pictures ; 8 table
Bibliography : 8 (1993-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

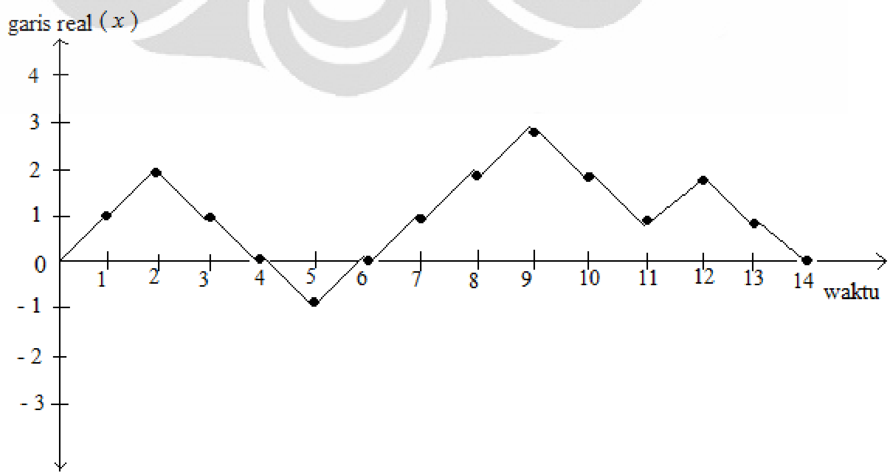
BAB 1
PENDAHULUAN

1. 1 Latar Belakang

Random walk merupakan bagian dari proses stokastik yang memiliki banyak kegunaan. Pada bidang fisika, random walk digunakan untuk memodelkan gerak Brown (gerak random suatu partikel pada zat cair atau gas), selain itu pada bidang ekonomi, random walk sering digunakan untuk memodelkan harga saham. Terdapat berbagai macam model random walk salah satunya adalah model random walk sederhana (random walk dimensi satu).

Random walk sederhana adalah model gerak acak partikel (gerak Brown) pada suatu garis Real, dimana:

- Partikel tersebut bergerak mulai $x = 0$
- Partikel bergerak satu unit ke atas dengan probabilitas p dan satu unit ke bawah dengan probabilitas $(1- p)$ untuk satu satuan waktu.
- Partikel tersebut bergerak satu unit ke atas atau ke bawah dengan probabilitas yang sama untuk langkah selanjutnya.



Gambar 1. 1 : Contoh pergerakan suatu partikel secara acak pada garis Real apabila dikaitkan dengan waktu.

Apabila pada gerak random walk sederhana S_n merupakan posisi partikel di garis Real pada saat *n* dan partikel bergerak mulai $x = 0$ pada garis Real, maka gerak random walk sederhana tersebut dapat dinyatakan dengan jumlah kumulatif, yaitu :

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

dimana :

- X_i adalah gerak acak partikel pada saat ke-i dan merupakan variabel random independen ($i = 1, 2, \dots, n$)
- $X_i = +1$ dengan probabilitas p , $X_i = -1$ dengan probabilitas $q = 1 - p$.

Selanjutnya, pada model random walk sederhana dapat dibentuk suatu putaran (*cycle*) yaitu, apabila diambil nilai 0 sebagai posisi awal maka satu putaran pada random walk akan berisi barisan posisi partikel dari posisi awal 0 sampai kembali lagi menuju posisi 0 di garis real.

Sehingga kemudian dapat dibuat suatu barisan putaran (*cycle*), seperti berikut :

$\left(S_0, \dots, S_{\rho_1}\right), \left(S_{\rho_1}, \dots, S_{\rho_2}\right), \dots$

dimana:

- digunakan asumsi $S_0 = 0$
- $\rho_1 = \min\{k, k > 0, S_k = 0\}$, $\rho_2 = \min\{k, k > \rho_1, S_k = 0\}$,

  $\rho_3 = \min\{k, k > \rho_2, S_k = 0\}$ ….
- $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots$

Pada putaran yang berhingga, didefinisikan suatu variabel banyak singgah, $\xi(x)$, yaitu :

$\xi(x) = \#\{n :\ 0 < n < \rho\ ,\ S_n = x, x \in Z, x \neq 0\}$

Banyak singgah, $\xi(x)$, menyatakan berapa sering suatu partikel mendatangi (singgah) posisi x di garis Real. Pada satu putaran yang berhingga, $\xi(x) = k$ dengan $k \geq 1$, jika dan hanya jika random walk $\{S_n\}$ mencapai posisi (level) x, lalu (k – 1) kali lagi mencapai posisi x sebelum akhirnya kembali ke posisi 0.

Banyak singgah $\xi(x)$ dapat digunakan untuk menguji kerandoman dari suatu barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$. Menguji kerandoman pada barisan bilangan biner memiliki banyak manfaat, terutama dalam bidang Kriptografi.

1. 2 Perumusan masalah

1. Bagaimanakah fungsi probabilitas dari variabel banyak singgah $\xi(x)$?
2. Bagaimana penggunaan banyak singgah, $\xi(x)$, terutama dalam melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$?

1. 3 Tujuan Penulisan

1. Mencari fungsi probabilitas dari variabel banyak singgah $\xi(x)$.
2. Menggunakan banyak singgah, $\xi(x)$, untuk melakukan uji kerandoman pada suatu barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$.

1. 4 Pembatasan Masalah

1. Random walk yang digunakan adalah model random walk sederhana (random walk dimensi satu).
2. Barisan bilangan yang diuji merupakan barisan bilangan biner berhingga.

1. 5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis menjadi 5 Bab, dimana :

BAB 1	: Bab 1 ini berisi latar belakang, permasalahan, tujuan, dan batasan masalah.
BAB 2	: Pada Bab 2 ini ditulis beberapa landasan teori untuk mencari banyak singgah $\xi(x)$, yaitu mengenai random walk sederhana, teori permainan, putaran (*cycle*) dan distribusi geometri termodifikasi di nol. Selain itu, dibahas juga mengenai uji *chi-square* sebagai dasar untuk melakukan uji kerandoman dengan menggunakan banyak singgah.
BAB 3	: Pada Bab 3 dijelaskan cara mendapatkan fungsi probabilitas banyak singgah $\xi(x)$, kemudian ditentukan jenis distribusinya, fungsi pembangkit moment (*m.g.f*) untuk banyak singgah, hingga mean dan variansinya.
BAB 4	: Pada Bab 4 diberikan contoh ilustrasi bagaimana cara menggunakan banyak singgah untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga.
BAB 5	: Bab terakhir adalah bab penutup yang berisi kesimpulan yang diperoleh dari penelitian, serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori dasar yang akan digunakan untuk mencari fungsi probabilitas banyak singgah $\xi(x)$. Mencari fungsi probabilitas banyak singgah akan dibahas lebih lanjut pada Bab 3.

2. 1 Proses Stokastik

Proses stokastik merupakan keluarga dari variabel random X_t, dimana t adalah suatu indeks yang berada pada himpunan indeks T yang sesuai.[Taylor,Karlin.1998. Hal.5]

Suatu proses stokastik $\underline{X}$ biasa dinotasikan dengan $\underline{X} = \{ X(t), t \in T \}$ atau $\underline{X} = \{ X_t , t \in T \}$, dimana himpunan T merupakan ruang indeks dari proses stokastik $\underline{X}$ dan indeks t pada proses stokastik sering diinterpretasikan sebagai waktu. Selain itu pada proses stokastik, nilai dari variabel random X_t disebut keadaan (*state*) dan himpunan semua nilai X_t yang mungkin disebut ruang keadaan (ruang *state*).

Pada proses stokastik, jika himpunan indeks *T* merupakan suatu himpunan terhitung maka $\underline{X}$ adalah proses stokastik dengan waktu diskrit. Dan apabila *T* merupakan himpunan yang kontinu maka $\underline{X}$ adalah proses stokastik dengan waktu kontinu. Selain itu, jika nilai dari X_t dapat dihitung maka disebut proses stokastik dengan *state* diskrit. Begitu juga sebaliknya, jika X_t bernilai kontinu maka disebut proses stokastik dengan *state* kontinu.

2. 2 Proses Markov

Suatu proses Markov $\{X_t\}$ merupakan suatu proses stokastik dengan aturan yaitu, jika diberikan nilai dari X_t , maka nilai dari X_S untuk s > t tidak dipengaruhi oleh nilai dari X_u dimana u < t. Atau dengan parkataan lain, probabilitas dari kejadian masa yang akan datang, hanya dipengaruhi oleh kejadian saat sekarang yang telah diketahui, sehingga kejadian masa lalu tidak dapat mempengaruhi kejadian masa depan.

Oleh sebab itu, berdasarkan definisi proses Markov diatas, apabila terdapat suatu proses Markov yang ruang *state*-nya himpunan hingga atau himpunan yang terhitung (diskrit), dan himpunan indeks waktunya yaitu T = (0, 1, 2, . . .) akan dinamakan rantai Markov dengan waktu diskrit (*discrete time Markov chain*). Dalam bentuk formal, aturan rantai Markov dapat dinyatakan sebagai :

$$\mathrm{P}\left\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right\} = \mathrm{P}\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\right\} \quad (2.2.1)$$

untuk setiap indeks waktu *n* dan setiap *state* $i_0, \; . \; . \; . \; , i_{n-1}, i, j$.

Ruang *state* dari rantai Markov biasanya dinyatakan dengan bilangan bulat non-negatif {0, 1, 2, …} dan biasanya dikatakan bahwa X_n berada di *state i* pada saat n jika $X_n = i$.

Probabilitas bahwa X_{n+1} berada di *state j* dengan diberikan bahwa X_n berada di *state i* disebut probabilitas transisi 1-langkah (*one-step transition probability*) dan dinotasikan dengan $P_{ij}^{n,n+1}$. Dengan kata lain :

$$P_{ij}^{n,n+1} = \Pr \{ X_{n+1} = j \mid X_n = i \}, \quad n \geq 0 , i,j \geq 0 \quad (2.2.2)$$

Notasi $P_{ij}^{n,n+1}$ ini menegaskan bahwa secara umum probabilitas-probabilitas transisi merupakan fungsi yang tidak hanya dipengaruhi oleh *state* awal dan *state* akhir, tetapi fungsi ini juga dipengaruhi oleh waktu dari transisi. Akan tetapi jika probabilitas transisi 1-langkah ini independen terhadap variabel waktu *n*, maka dapat dikatakan bahwa rantai Markov memiliki probabilitas-probabilitas transisi yang stasioner (*stationary transition probabilities*).

Berdasarkan penjelasan diatas maka $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}$ menyatakan bahwa probabilitas transisi 1-langkah independen terhadap n. Sedangkan P_{ij} adalah probabilitas bersyarat bahwa nilai *state* mengalami satu transisi dari *i* ke *j* dalam satu percobaan. Nilai dari probabilitas bersyarat P_{ij} biasa disusun dalam sebuah matriks seperti berikut :

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \right\|$$

dimana **P** = $\|P_{ij}\|$ merupakan matriks Markov atau matriks probabilitas transisi 1-langkah dari proses Markov.

Pada matriks Markov **P**, barisan ke-*i* (i = 0, 1, 2, …) adalah distribusi probabilitas nilai-nilai dari X_{n+1} dengan syarat bahwa $X_n = i$. Jika nilai-nilai dari *state* adalah berhingga maka **P** merupakan suatu matriks persegi yang berhingga. Selain itu pada matriks Markov **P**, karena probabilitas bersifat non-negatif dan proses harus bertransisi ke suatu langkah, maka jelas bahwa nilai-nilai P_{ij} memenuhi kondisi sebagai berikut :

1. $P_{ij} \geq 0$, untuk i, j = 0, 1, 2, …
2. $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$, untuk i = 0, 1, 2, …

Telah diketahui bahwa P_{ij} merupakan probabilitas transisi 1-langkah, maka selanjutnya akan didefinisikan probabilitas transisi n-langkah yang dinotasikan dengan P_{ij}^n . Notasi P_{ij}^n menyatakan probabilitas bahwa proses berada pada keadaan (*state*) *i* menuju ke keadaan *j* dalam n-langkah.

Jadi $$P_{ij}^n = \Pr\{ X_{m+n} = j \mid X_m = i \},\ m,n \geq 0. \qquad (2.2.3)$$

Probabilitas transisi n-langkah jika dihubungkan dengan probabilitas transisi 1-langkah, maka akan didapat:

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}, \text{ dengan digunakan } P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 \text{ , jika } i = j \\ 0 \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$$

<u>Bukti</u>:

P_{ij}^n

$= \Pr\{X_n = j \mid X_0 = i\}$

$$= \frac{\Pr\{X_n = j, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}}$$, karena probabilitas bersyarat

$$= \frac{\sum_{x_1}\sum_{x_2}\dots\sum_{x_{n-1}} \Pr\{X_n = j, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}}$$, karena p.d.f marjinal

$$= \frac{\sum_{x_1} \Pr\{X_n = j, X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}}$$, karena p.d.f marjinal

$$= \sum_{x_1} \frac{\Pr\{X_n = j, X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}}$$, karena sifat notasi sigma

$$= \sum_{x_1} \frac{\Pr\{X_n = j, X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}} \times \frac{\Pr\{X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_1 = x_1, X_0 = i\}}$$

$$= \sum_{x_1} \frac{\Pr\{X_n = j, X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_1 = x_1, X_0 = i\}} \times \frac{\Pr\{X_1 = x_1, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}}$$

$$= \sum_{x_1}^{\infty} \Pr\{X_n = j \mid X_1 = x_1, X_0 = i\} \cdot \Pr\{X_1 = x_1 \mid X_0 = i\}$$, karena probabilitas bersyarat

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{X_n = j \mid X_1 = k, X_0 = i\} \cdot \Pr\{X_1 = k \mid X_0 = i\}$$, digunakan permisalan $x_1 = k$ dimana $k = 0, 1, 2, \dots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{(n-1)} P_{ik}$$

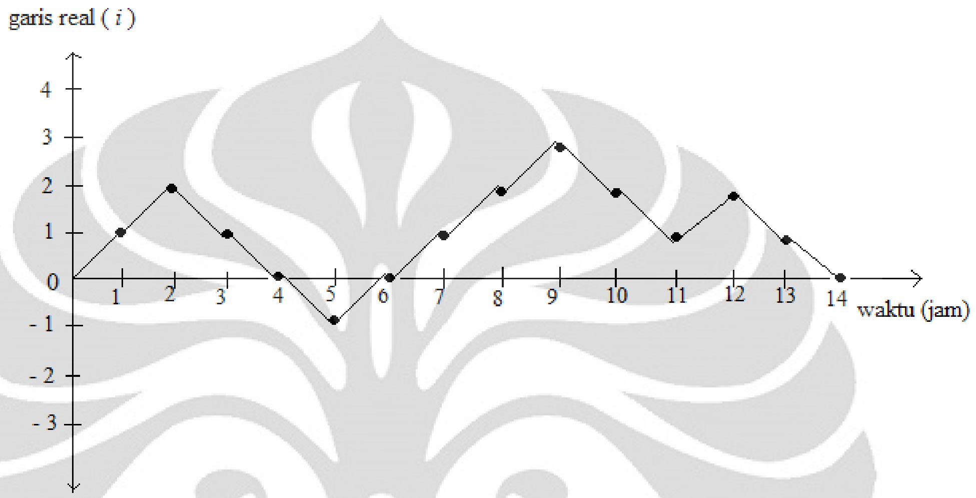
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \quad \blacksquare \qquad (2.2.4)$$

Setelah mengetahui beberapa sifat dan aturan rantai Markov ini, selanjutnya akan dibahas model random walk sederhana yang menggunakan sifat rantai Markov.

2. 3 Random Walk Sederhana

Model random walk sederhana merupakan model gerak acak partikel (gerak Brown) pada suatu garis Real i, dimana:

- Partikel tersebut bergerak mulai $i_0 = 0$
- Partikel bergerak satu unit ke atas dengan probabilitas p dan satu unit ke bawah dengan probabilitas (1- p) untuk satu satuan waktu.
- Partikel tersebut bergerak satu unit ke atas atau ke bawah secara bebas dari posisi sebelumnya dengan probabilitas yang sama untuk langkah selanjutnya.



Gambar 1.1 : Contoh pergerakan suatu partikel secara acak pada garis real apabila dikaitkan dengan waktu.

Pada model random walk sederhana, arah gerak partikel pada saat ke-i dapat dinyatakan dengan variabel random X_i, dimana:

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{,dengan probabilitas} = p \\ -1 & \text{,dengan probabilitas} = q = 1 - p \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, ...), X_i \text{ saling independen}$$

Selain arah gerak partikel, posisi partikel pada saat ke-n pada random walk dapat dinyatakan dengan S_n, dimana S_n merupakan jumlah kumulatif dari X_i, yaitu

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad \text{dengan} \qquad S_0 = 0$$

Sebagai contoh, dapat dilihat posisi partikel saat waktu ke-5, yaitu berada di (– 1) pada garis real menurut Gambar 2.3.1. Posisi partikel pada saat ke-5 ini bisa didapat sebab partikel melakukan gerak ke atas pada waktu ke-1 dan ke-2, serta melakukan gerak ke bawah pada waktu ke-3, ke-4, dan ke-5. Kemudian apabila gerakan ini dinyatakan dengan variabel random X_i maka akan didapatkan $X_1 = +1$, $X_2 = +1$, $X_3 = -1$, $X_4 = -1$, dan $X_5 = -1$. Sehingga posisi partikel pada saat ke-5 akan dinyatakan dengan $S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = -1$.

Sesuai dengan posisi partikel, maka probabilitas transisi 1–langkah partikel tersebut dapat dinyatakan dengan $\Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n\}$. Akan dicari besarnya probabilitas transisi 1-langkah partikel sebagai berikut:

Telah diketahui:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{dan}$$

$$S_{n+1} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Sehingga :

$$\Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n\}$$
$$= \Pr\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 + X_2 + \ldots + X_n = s_n\}$$
$$= \Pr\{s_n + X_{n+1} = s_{n+1}\}$$
$$= \Pr\{X_{n+1} = s_{n+1} - s_n\} \tag{2.3.1}$$

Selanjutnya, dengan melihat pada cara bergerak dan posisi dari partikel tersebut, maka posisi partikel dapat dikatakan sebagai keadaan (*state*) dari rantai Markov. Berikut akan dibuktikan bahwa model random walk sederhana memenuhi aturan rantai Markov.

<u>Bukti</u>:

Apabila diketahui:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{dan}$$

$$S_{n+1} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1}$$

Sehingga :

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \quad \text{atau dapat ditulis dengan}$$

$$X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

Misalkan nilai dari variabel S_k adalah s_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$),

sehingga $S_n = s_n$, $S_{n+1} = s_{n+1}$ dan $X_{n+1} = s_{n+1} - s_n$

maka :

$$\Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, S_1 = s_1\}$$
$$= \Pr\{S_n + X_{n+1} = s_{n+1} \mid S_{n-1} + X_n = s_n, S_{n-2} + X_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, S_0 + X_1 = s_1\}$$

$= \Pr\{X_{n+1} = s_{n+1} - S_n \mid X_n = s_n - S_{n-1}, X_{n-1} = s_{n-1} - S_{n-2}, \ldots, X_1 = s_1 - S_0\}$

$= \Pr\{X_{n+1} = s_{n+1} - s_n \mid X_n = s_n - s_{n-1}, X_{n-1} = s_{n-1} - s_{n-2}, \ldots, X_1 = s_1 - s_0\}$

$= \Pr\{X_{n+1} = s_{n+1} - s_n\}$, karena sifat independen $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$

$= \Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n\}$, karena persamaan (2.3.1).

$\therefore \Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, S_1 = s_1, S_0 = s_0\} = \Pr\{S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n\}$

■

Dari uraian diatas, terbukti bahwa suatu suatu jumlah kumulatif random walk $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ merupakan rantai Markov, dimana nilai dari jumlah kumulatif S_n merupakan *state* untuk rantai Markov pada model random walk sederhana .

Sebelumnya telah diketahui bahwa S_n merupakan model random walk sederhana yang memenuhi aturan rantai Markov dan telah didapat probabilitas transisi 1-langkah untuk perubahan posisi pada model random walk sederhana. Sehingga apabila probabilitas-probabilitas transisi 1-langkah tersebut dituliskan dalam sebuah matriks transisi, maka akan didapat matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \textit{state} \rightarrow \\ \downarrow \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}$$

Setelah mengetahui model random walk sederhana, selanjutnya akan dibahas teori permainan pada pelemparan sebuah koin. Teori permainan ini merupakan salah satu model permainan yang dapat dideskripsikan dengan model random walk sederhana.

2. 4 Teori Permainan

Andaikan terdapat 2 orang pemain, pemain A dan pemain B yang sedang bertaruh pada keluaran dari pelemparan sebuah koin. Pada setiap pelemparan, apabila muncul angka maka A memperoleh 1 unit uang dari B, sebaliknya apabila muncul gambar maka A membayar 1 unit uang kepada B. Kedua pemain melakukan permainan ini sampai salah satu dari mereka kehabisan uang sehingga permainan dihentikan.

Diasumsikan bahwa keluaran dari pelemparan koin bersifat independen dan setiap hasil yang keluar untuk angka memiliki probabilitas sebesar p serta untuk gambar memiliki probabilitas sebesar $q = 1 - p$. Apabila total uang yang dimiliki oleh pemain A dan pemain B sebesar N serta salah satu pemain memulai permainan dengan uang sebanyak k, maka akan ditentukan probabilitas bahwa salah satu pemain, yang bermain dengan uang mula-mula sebesar k, akan kehilangan semua uangnya. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, akan digunakan teori permainan.

Pada teori permainan, banyaknya uang pemain dinyatakan dengan *state*. Apabila salah satu pemain memulai permainan dengan banyak uang sebesar k maka saat mulai *state*-nya adalah k. Kemudian jika pemain tersebut menang dengan probabilitas sebesar p, maka pemain ini mendapatkan 1 unit uang dan *state* sekarang adalah $k + 1$. Begitu pula sebaliknya, jika pemain tersebut kalah dengan probabilitas $q = 1 - p$ maka pemain ini kehilangan 1 unit uang dan *state* sekarang adalah $k - 1$.

Permasalahan tersebut apabila digambarkan dengan matriks probabilitas transisi akan memiliki matriks sebagai berikut:

$$
P = \begin{array}{c|cccccccccccc|}
\text{state} \rightarrow \downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & N-1 & N \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
N-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\
N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}
$$

Akan ditentukan probabilitas salah satu pemain akan kehilangan seluruh uangnya dengan menggunakan teori permainan. Pada teori permainan, kekalahan pemain merupakan kejadian bahwa salah satu pemain telah mencapai posisi 0 (uang habis) sebelum mencapai posisi *N*. Untuk menentukan kekalahan pemain, akan digunakan T, yang merupakan waktu minimum permainan pertama kali mencapai posisi 0 atau N. Atau dengan kata lain T dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T = \min\{n \geq 0;\ S_n = 0 \text{ atau } S_n = N\}$$

dimana S_n merupakan banyaknya uang dari salah satu pemain pada saat *n*.

Apabila kejadian $S_T = 0$ merupakan kejadian salah satu pemain bangkrut (uangnya habis), maka probabilitas dari kejadian ini dengan syarat banyak uang mula-mula salah satu pemain sebanyak *k* adalah

$$u_k = \Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = k\} \qquad \text{dengan } k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Kemudian apabila pemain yang mula-mula memiliki uang sebanyak *k* melakukan 1 kali permainan dan mengalami kemenangan sehingga banyak uangnya saat ini adalah $k + 1$, maka probabilitas menang pemain ini sebesar $p = \Pr\{S_1 = k + 1 \mid S_0 = k\}$ dan probabilitas pemain ini akan kehilangan seluruh uangnya sebesar $\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = k + 1\} = u_{k+1}$.

Apabila pemain tersebut mengalami kekalahan sehingga banyak uangnya saat ini adalah $k - 1$ maka probabilitas kalah pemain ini adalah $q = 1 - p = \Pr\{S_1 =$

$k-1 \mid S_0 = k\}$ serta probabilitas pemain ini akan kehilangan seluruh uangnya sebesar $\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = k-1\} = u_{k-1}$.

Agar lebih mudah untuk menghitung probabilitas seorang pemain kehilangan seluruh uangnya dengan syarat uang mula-mula yang dimiliki sebanyak k, maka akan dicari penulisan lain dari u_k sebagai berikut:

u_k

$= \Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = k\}$

$= \sum_j P(S_T = 0, S_1 = j \mid S_0 = k)$, karena p.d.f marjinal.

$= \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = k).P(S_T = 0 \mid S_1 = j, S_0 = k)$, karena probabilitas bersyarat

$= \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = k).P(S_T = 0 \mid S_1 = j)$, karena aturan Markov

$= P(S_1 = k-1 \mid S_0 = k).P(S_T = 0 \mid S_1 = k-1) +$

$P(S_1 = k+1 \mid S_0 = k).P(S_T = 0 \mid S_1 = k+1)$

$= q \cdot u_{k-1} + p \cdot u_{k+1}$

Berdasarkan uraian diatas, telah didapat persamaan

$$u_k = q \cdot u_{k-1} + p \cdot u_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (2.4.1)$$

dengan batasan :

$u_0 = \Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = 0\} = 1$ dan

$u_N = \Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = N\} = 0$

Karena persamaan (2.4.1) masih dalam persamaan rekursif, maka persamaan (2.4.1) akan ditulis kembali dalam bentuk yang lebih sederhana. Sehingga dari hubungan rekursif persamaan (2.4.1) dan batasan $u_0 = 1$, $u_N = 0$ akan diperoleh:

$$u_k = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \qquad (2.4.2)$$

<u>Bukti</u> :

Berdasarkan persamaan (2.4.1) didapat :

$u_k = q \cdot u_{k-1} + p \cdot u_{k+1}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, N-1$

$\leftrightarrow \quad (p+q)\, u_k = q \cdot u_{k-1} + p \cdot u_{k+1}$, karena $(p + q) = 1$

$\leftrightarrow \quad p \cdot u_k + q \cdot u_k = q \cdot u_{k-1} + p \cdot u_{k+1}$

$\leftrightarrow \quad 0 = p \cdot (u_{k+1} - u_k) - q \cdot (u_k - u_{k-1}) \qquad (2.4.3)$

Dengan menggunakan bantuan $x_k = u_k - u_{k-1}$ untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, N$

Maka dari persamaan (2.4.3) akan diperoleh :

Untuk $k = 1$:

$0 = p \cdot (u_2 - u_1) - q \cdot (u_1 - u_0) = p \cdot x_2 - q \cdot x_1$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{q}{p} x_1$

Untuk $k = 2$:

$0 = p \cdot (u_3 - u_2) - q \cdot (u_2 - u_1) = p \cdot x_3 - q \cdot x_2$

$\rightarrow x_3 = \dfrac{q}{p} x_2 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^2 x_1$

Untuk $k = 3$:

$0 = p \cdot (u_4 - u_3) - q \cdot (u_3 - u_2) = p \cdot x_4 - q \cdot x_3$

$\rightarrow x_4 = \dfrac{q}{p} x_3 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^3 x_1$

$\vdots$

Untuk $k = N - 1$:

$0 = p.(u_N - u_{N-1}) - q.(u_{N-1} - u_{N-2}) = p \cdot x_N - q \cdot x_{N-1}$

$\rightarrow x_N = \dfrac{q}{p} x_{N-1} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{N-1} x_1$

Kemudian apabila dituliskan kembali $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N$ dengan memasukkan syarat $u_0 = 1$, $u_N = 0$ serta penjumlahan dari x_k , maka akan didapat :

$x_1 = u_1 - u_0 = u_1 - 1 \qquad \rightarrow u_1 = 1 + x_1$

$x_2 = u_2 - u_1 = u_2 - (1 + x_1) \qquad \rightarrow u_2 = 1 + x_1 + x_2$

$x_3 = u_3 - u_2 = u_3 - (1 + x_1 + x_2) \qquad \rightarrow u_3 = 1 + x_1 + x_2 + x_3$

$\vdots$

$x_k = u_k - u_{k-1} = u_k - (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) \rightarrow u_k = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k$

$\vdots$

$x_N = u_N - u_{N-1} = u_N - (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{N-1}) \rightarrow u_N = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{N-1} + x_N$

Sehingga berdasarkan persamaan diatas dapat diperoleh persamaan umum dalam k :

$$u_k = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k$$

$$= 1 + x_1 + \frac{q}{p} x_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 x_1 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} x_1$$

$$= 1 + \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] x_1 \qquad (2.4.4)$$

Karena telah terdapat syarat $u_N = 0$ maka akan didapat :

$$u_N = 1 + \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right] x_1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-1}{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]} \qquad (2.4.5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.4.5) ke (2.4.4) maka diperoleh :

$$u_k = 1 - \frac{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right]}{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]} \qquad (2.4.6)$$

Karena jumlah dari barisan geometri :

$$\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} & , \text{jika } p \neq q \\ k & , \text{jika } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Maka persamaan (2.4.6) dapat ditulis kembali menjadi :

$$u_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N} & \text{, jika } p \neq q \\[2ex] 1 - \dfrac{k}{N} & \text{, jika } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.4.7)$$

∴ Persamaan (2.4.2) terbukti. ■

Pada pembahasan diatas, telah dicari probabilitas seorang pemain kalah dengan syarat banyaknya uang mula-mula salah satu pemain sebanyak *k*. Selanjutnya akan dicari probabilitas seorang pemain menang dengan syarat banyak uang mula-mula salah satu pemain sebanyak *k*.

Kejadian menang seorang pemain pada teori permainan, merupakan kejadian bahwa salah satu pemain telah mencapai posisi N sebelum mencapai posisi 0 (uang habis). Untuk menentukan kemenangan seorang pemain, akan digunakan T, yang merupakan waktu minimum ketika permainan pertama kali mencapai posisi 0 atau N. Atau dengan kata lain T dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T = \min\{n \geq 0;\ S_n = 0 \text{ atau } S_n = N\}$$

dimana S_n merupakan banyaknya uang dari salah satu pemain pada saat *n*.

Apabila kejadian $S_T = N$ merupakan kejadian salah satu pemain menang, maka probabilitas dari kejadian ini dengan syarat banyak uang mula-mula salah satu pemain sebanyak *k* adalah

$$v_k = \Pr\{S_T = N \mid S_0 = k\} \qquad \text{dengan } k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Kemudian apabila pemain yang mula-mula memiliki uang sebanyak *k* melakukan 1 kali permainan dan mengalami kemenangan sehingga banyak uangnya saat ini adalah $k + 1$, maka probabilitas menang pemain ini sebesar $p = \Pr\{S_1 = k + 1 \mid S_0 = k\}$ dan probabilitas pemain ini akan mendapatkan seluruh uang yang ada dalam permainan yaitu $\Pr\{S_T = N \mid S_1 = k+1\} = v_{k+1}$.

Apabila pemain tersebut mengalami kekalahan sehingga banyak uangnya saat ini adalah $k - 1$ maka probabilitas kalah pemain ini adalah $q = 1 - p = \Pr\{S_1 =$

$k - 1 \mid S_0 = k\}$ serta probabilitas pemain ini akan mendapatkan seluruh uang yang ada dalam permainan sebesar $\Pr\{S_T = N \mid S_1 = k - 1\} = v_{k-1}$.

Agar lebih mudah untuk menghitung probabilitas seorang pemain mendapatkan seluruh uang yang ada dalam permainan dengan syarat uang mula-mula yang dimiliki sebanyak k, maka akan dicari penulisan lain dari v_k sebagai berikut:

v_k

$= \Pr\{S_T = N \mid S_0 = k\}$

$= \sum_j P\left(S_T = N, S_1 = j \mid S_0 = k\right),$ karena p.d.f marjinal.

$= \sum_j P\left(S_1 = j \mid S_0 = k\right).P\left(S_T = N \mid S_1 = j, S_0 = k\right)$, karena probabilitas bersyarat

$= \sum_j P\left(S_1 = j \mid S_0 = k\right).P\left(S_T = N \mid S_1 = j\right)$, karena aturan Markov

$= P\left(S_1 = k-1 \mid S_0 = k\right).P\left(S_T = N \mid S_1 = k-1\right) +$

$P\left(S_1 = k+1 \mid S_0 = k\right).P\left(S_T = N \mid S_1 = k+1\right)$

$= q \cdot v_{k-1} + p \cdot v_{k+1}$

Berdasarkan uraian diatas, telah didapat persamaan

$$v_k = q \cdot v_{k-1} + p \cdot v_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (2.4.8)$$

dengan batasan :

$v_0 = \Pr\{S_T = N \mid S_0 = 0\} = 0$ dan

$v_N = \Pr\{S_T = N \mid S_0 = N\} = 1$

Karena persamaan (2.4.8) masih dalam persamaan rekursif, maka persamaan (2.4.8) akan ditulis kembali dalam bentuk yang lebih sederhana.

Berdasarkan (2.4.8) telah diperoleh :

$v_k = q \cdot v_{k-1} + p \cdot v_{k+1}$, untuk $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

$\leftrightarrow \quad (p + q)\, v_k = q \cdot v_{k-1} + p \cdot v_{k+1}$, karena $(p + q) = 1$

$\leftrightarrow \quad p \cdot v_k + q \cdot v_k = q \cdot v_{k-1} + p \cdot v_{k+1}$

$\leftrightarrow \quad 0 = p \cdot (v_{k+1} - v_k) - q \cdot (v_k - v_{k-1}) \qquad (2.4.9)$

Dengan menggunakan bantuan $z_k = v_k - v_{k-1}$ untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, N$

Maka dari persamaan (2.4.9) akan diperoleh :

Untuk $k = 1$:

$0 = p\,.\,(v_2 - v_1) - q\,.\,(v_1 - v_0) = p\,.\,z_2 - q\,.\,z_1$

$\rightarrow z_2 = \dfrac{q}{p} z_1$

Untuk $k = 2$:

$0 = p\,.\,(v_3 - v_2) - q\,.\,(v_2 - v_1) = p\,.\,z_3 - q\,.\,z_2$

$\rightarrow z_3 = \dfrac{q}{p} z_2 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^2 z_1$

Untuk $k = 3$:

$0 = p\,.\,(v_4 - v_3) - q\,.\,(v_3 - v_2) = p\,.\,z_4 - q\,.\,z_3$

$\rightarrow z_4 = \dfrac{q}{p} z_3 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^3 z_1$

$\vdots$

Untuk $k = N - 1$:

$0 = p.(v_N - v_{N-1}) - q.(v_{N-1} - v_{N-2}) = p.\,z_N - q.\,z_{N-1}$

$\rightarrow z_N = \dfrac{q}{p} z_{N-1} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{N-1} z_1$

Kemudian apabila dituliskan kembali $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_N$ dengan memasukkan syarat $v_0 = 0$, $v_N = 1$ serta penjumlahan dari z_k , maka akan didapat :

$z_1 = v_1 - v_0 = v_1 - 0 \qquad \rightarrow v_1 = z_1$

$z_2 = v_2 - v_1 = v_2 - (z_1) \qquad \rightarrow v_2 = z_1 + z_2$

$z_3 = v_3 - v_2 = v_3 - (z_1 + z_2) \qquad \rightarrow v_3 = z_1 + z_2 + z_3$

$\vdots$

$z_k = v_k - v_{k-1} = v_k - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{k-1}) \qquad \rightarrow v_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_{k-1} + z_k$

$\vdots$

$z_N = v_N - v_{N-1} = v_N - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{N-1}) \qquad \rightarrow v_N = z_1 + z_2 + \ldots + z_{N-1} + z_N$

Sehingga berdasarkan persamaan diatas dapat diperoleh persamaan umum dalam k :

$$v_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_{k-1} + z_k$$

$$= z_1 + \frac{q}{p} z_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 z_1 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} z_1$$

$$= \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] z_1 \qquad (2.4.10)$$

Karena telah terdapat syarat $v_N = 1$ maka dari persamaan (2.4.10) akan didapat :

$$v_N = \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right] z_1 = 1$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{1}{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]} \qquad (2.4.11)$$

Dengan mensubstitusikan (2.4.11) ke (2.4.10) maka diperoleh :

$$v_k = \frac{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right]}{\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]} \qquad (2.4.12)$$

Karena jumlah dari barisan geometri :

$$\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} & \text{, jika } p \neq q \\ k & \text{, jika } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Maka persamaan (2.4.12) dapat ditulis kembali menjadi :

$$v_k = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N} = \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1} & \text{, jika } p \neq q \\ \dfrac{k}{N} & \text{, jika } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Jadi dari persamaan (2.4.12) diperoleh probabilitas seorang pemain menang dengan syarat banyak uang mula-mula salah satu pemain sebanyak k :

$$\Pr\{S_T = N \mid S_0 = k\} = v_k = \frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1} \qquad (2.4.13)$$

2. 5 Putaran (*Cycle*)

Pada model random walk sederhana, telah diketahui cara bergerak dan posisi partikel pada saat ke-n. Selanjutnya, dengan melihat pada posisi partikel, akan didefinisikan suatu putaran (*cycle*). Berikut akan digunakan definisi *cycle* pada matematika diskrit.

Sebelum mendefinisikan *cycle,* akan terlebih dahulu didefinisikan jalur. Pada matematika diskrit, sebuah jalur dari a ke b pada suatu graf G merupakan sebuah barisan dari ruas-ruas (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), …, (x_{n-1}, x_n) di G, dimana $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ merupakan titik-titik hubung antar ruas, n bilangan bulat nonnegatif, $x_0 = a$, dan $x_1 = b$. Selanjutnya sebuah jalur yang ditunjukkan dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ akan mempunyai panjang sebesar n. Suatu jalur dengan panjang n $\geq$ 1 yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama disebut *cycle*.

Sehingga dengan menggunakan definisi *cycle* diatas, apabila diambil nilai 0 sebagai posisi awal maka satu putaran pada random walk akan berisi barisan posisi partikel dari posisi awal 0 sampai kembali lagi menuju posisi 0 di garis real.

Sebagai contoh putaran (*cycle*) dengan menggunakan Gambar 2.3.1, yaitu (S_0, S_1, S_2, S_3, S_4) adalah satu putaran atau (S_4, S_5, S_6) juga merupakan satu putaran. Apabila digunakan $S_0 = 0$ sebagai titik awal partikel, $S_n = x$ merupakan posisi (*state*) partikel dengan indeks n menyatakan waktu, serta ρ_1, ρ_2, ρ_3, …. menyatakan waktu-waktu ketika partikel kembali ke posisi 0, maka dapat dibuat suatu barisan putaran (*cycle*) sebagai berikut:

$$\left(S_0, S_1, \, . \, . \, . \, , S_{\rho_1}\right), \left(S_{\rho_1}, S_{\rho_1+1}, \, . \, . \, . \, , S_{\rho_2}\right), ...$$

dimana :

- $\rho_1 = \min\{k, k > 0, S_k = 0\}$, $\rho_2 = \min\{k, k > \rho_1, S_k = 0\}$, dan seterusnya.
- $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < ...$

Selanjutnya pada model random walk sederhana ini, akan dicari besarnya probabilitas suatu partikel tidak kembali ke posisi 0 apabila diketahui $\Pr(X_i = +1) = p \neq ½$, i = 1,2,3,……n . Jika probabilitas suatu partikel tidak kembali ke posisi 0 dinyatakan dengan $\mathrm{P}(\rho = \infty)$, dimana notasi $\rho = \infty$ menyatakan bahwa partikel tidak akan kembali ke posisi 0, maka nilai $\mathrm{P}(\rho = \infty)$ yaitu :

$\mathrm{P}(\rho = \infty)$

$= \mathrm{P}(S_1 = 1, S_T \neq 0) + \mathrm{P}(S_1 = -1, S_T \neq 0)$, T = waktu minimum partikel mencapai posisi 0.

$= \mathrm{P}(S_1 = 1).\mathrm{P}(S_T \neq 0 \mid S_1 = 1) + \mathrm{P}(S_1 = -1).\mathrm{P}(S_T \neq 0 \mid S_1 = -1)$, karena probabilitas bersyarat

$$= \text{p} \, . \, \left(1 - \mathrm{P}(S_T = 0 \mid S_1 = 1)\right) + \text{q} \, . \, \left(1 - \mathrm{P}(S_T = 0 \mid S_1 = -1)\right) \qquad (2.\ 5.1)$$

Akan dicari $\mathrm{P}(S_T = 0 \mid S_1 = 1)$ dan $\mathrm{P}(S_T = 0 \mid S_1 = -1)$ dengan menggunakan persamaan pada teori permainan. Pada teori permainan, $\mathrm{P}(S_T = 0 \mid S_1 = 1)$ dapat dijelaskan dengan probabilitas seorang pemain bermain dengan uang mula-mula sebanyak 1 unit uang dan ketika banyaknya uang pemain tersebut telah mencapai 0, permainan dihentikan.

Pada teori permainan, probabilitas seorang pemain bermain dengan uang mula-mula sebanyak 1 unit uang dan ketika banyaknya uang pemain tersebut telah mencapai 0 permainan dihentikan, sehingga dari persamaan (2.4.7) diperoleh :

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = 1\} = u_1 = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \qquad (2.5.2)$$

dimana $p \neq q$, N merupakan total uang yang dimainkan pada permainan, dan permainan dimulai pada saat 0 dengan $S_0 = 1$.

Pada teori permainan permainan dimulai pada saat 0 dengan $S_0 = 1$, namun pada random walk, partikel memulai langkahnya pada saat 1 dengan $S_1 = 1$, sehingga $\Pr\{S_T = 0 \mid S_0 = 1\}$ pada teori permainan akan sama dengan $\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = 1\}$ pada random walk.

Kemudian pada teori permainan terdapat *N*, yang merupakan total uang pada permainan. Apabila disesuaikan dengan teori permainan, maka *N* seharusnya merupakan *state* tertinggi pada model random walk. Akan tetapi, karena *state* maksimum pada pergerakan partikel tidak ada, maka untuk $N \to \infty$ dapat diperoleh :

untuk $p > q$:

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = 1\} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right) = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^1}{1-0} = \left(\frac{q}{p}\right)^1 \qquad (2.5.3)$$

untuk $p < q$:

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = 1\} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right) = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^1}{1-\infty} = 1 \qquad (2.5.4)$$

Diperoleh dari persamaan (2.5.4) bahwa $\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = 1\} = 1$, ini berarti jika $p<q$ dan langkah pertama partikel dimulai untuk *state* $x > 0$ maka partikel pada random walk pasti kembali ke *state* 0. Sehingga untuk $N \to \infty$ kejadian $\rho = \infty$ tidak mungkin terjadi bila $p < q$ dan $x > 0$.

Sebelumnya telah diperoleh $\mathrm{P}\left(S_T = 0 \mid S_1 = 1\right)$, maka selanjutnya akan dicari $\mathrm{P}\left(S_T = 0 \mid S_1 = -1\right)$ dengan menggunakan persamaan (2.4.7) pada teori permainan sebagai berikut :

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = -1\} = u_{-1} = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{-N}} = 1-\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{1}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{N}}$$, dimana $p \neq q$.

Kemudian karena pada random walk $N \to \infty$ maka diperoleh :

untuk $p > q$:

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = -1\} = u_{-1} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{1}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{N}}\right) = 1-\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{1}}{1-\infty} = 1 \qquad (2.5.5)$$

untuk $p < q$:

$$\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = -1\} = u_{-1} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{1}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{N}}\right) = 1-\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{1}}{1-0} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1} \qquad (2.5.6)$$

Diperoleh dari persamaan (2.5.5) bahwa $\Pr\{S_T = 0 \mid S_1 = -1\} = 1$, ini berarti jika $p>q$ dan langkah pertama partikel dimulai untuk *state* $x < 0$ maka partikel pada random walk pasti kembali ke *state* 0. Sehingga untuk $N \to \infty$ kejadian $\rho = \infty$ tidak mungkin terjadi bila $p > q$ dan $x < 0$.

Telah didapat $\mathrm{P}\left(S_T = 0 \mid S_1 = 1\right)$ dan $\mathrm{P}\left(S_T = 0 \mid S_1 = -1\right)$ maka persamaan (2.5.1) dapat ditulis kembali menjadi :

untuk $p > q$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\rho=\infty) &= p \,.\, \left(1-\mathrm{P}\left(S_T=0 \mid S_1=1\right)\right) + q \,.\, \left(1-\mathrm{P}\left(S_T=0 \mid S_1=-1\right)\right)\\ &= p \,.\, \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{1}\right) + q \,.\, (1-1)\\ &= p - q\end{aligned}$$

Universitas Indonesia

untuk $p < q$:

$$\mathrm{P}(\rho=\infty) = \mathrm{p}\ .\ \left(1-\mathrm{P}\left(S_T=0 \mid S_1=1\right)\right) + \mathrm{q}\ .\ \left(1-\mathrm{P}\left(S_T=0 \mid S_1=-1\right)\right)$$

$$= \mathrm{p}\ .\ (1-1) + \mathrm{q}\ .\ \left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^1\right)$$

$$= \mathrm{q} - \mathrm{p}$$

$\therefore$ Untuk p $\neq$ q, didapat $\mathrm{P}(\rho=\infty)$ = |p – q|. ■ (2.5.7)

2. 6 Distribusi Geometri Termodifikasi di Nol

2. 6. 1 Distribusi Geometri Umum

Andaikan terdapat percobaan-percobaan yang independen dimana setiap percobaannya mempunyai probabilitas terjadinya sukses sebesar p, 0 < p < 1. Percobaan-percobaan tersebut dilakukan sampai sukses terjadi.

Jika variabel X merupakan kejadian terjadinya sukses pertama pada *n* percobaan, maka fungsi probabilitas untuk X adalah

$$\Pr\{X = n\} = (1-p)^{n-1} \cdot p \qquad , n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.6.1}$$

Persamaan (2.6.1) dapat berlaku sebab untuk X = *n* berarti harus terjadi kejadian *n*–1 pertama merupakan kejadian-kejadian gagal, lalu kejadian sukses baru terjadi pada percobaan ke-*n*. Kemudian karena hasil dari setiap percobaan telah diasumsikan saling independen maka persamaan (2.6.1) dapat berlaku. Selain itu, dari persamaan (2.6.1) juga dapat diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{X=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}$$

$$= p \cdot \left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots.\right]$$

$$= p \cdot \left[\frac{1}{1-(1-p)}\right]$$

$$= 1 \tag{2.6.2}$$

Dari persamaan (2.6.2) diatas diperoleh hasil $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{X = n\}$ = 1, ini berarti bahwa apabila percobaan dilakukan terus menerus berulang kali, kejadian sukses pasti akan terjadi.

Selanjutnya, setiap variabel random X yang p.d.f nya seperti persamaan (2.6.1) maka X akan dikatakan sebagai suatu variabel random berdistribusi geometri dengan parameter *p*. Variabel random X ini memiliki m.g.f (*moment generating function*) sebagai berikut:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$= p \cdot \left[e^{t} + e^{2t}(1-p) + e^{3t}(1-p)^2 + e^{4t}(1-p)^3 + ...\right]$$

$$= p \cdot \left[\frac{e^t}{1-(1-p)e^t}\right]$$

$$= \frac{p \cdot e^t}{1-(1-p)e^t} \qquad (2.6.3)$$

Persamaan (2.6.3) diatas merupakan m.g.f dari variabel random X. Kemudian dari persamaan (2.6.3) diatas akan dicari turunan pertama dan turunan kedua terhadap variabel *t* sebagai berikut:

Diketahui $M(t) = \dfrac{p \cdot e^t}{1-(1-p)e^t}$

maka $M'(t) = \dfrac{dM(t)}{dt}$

$$= \frac{\left(p \cdot e^t\right)\left[1-(1-p)e^t\right] - \left(p \cdot e^t\right)\left[-(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{\left(p\cdot e^t\right)\left[1-(1-p)e^t+(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{\left(p\cdot e^t\right)}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2} \qquad (2.6.4)$$

dan

$$M''(t) = \frac{d^2M(t)}{dt^2} = \frac{d\left(M'(t)\right)}{dt}$$

$$= \frac{\left(p\cdot e^t\right)\left[1-(1-p)e^t\right]^2-\left(p\cdot e^t\right)\cdot 2\left[1-(1-p)e^t\right]\left[-(1-p)e^t\right]}{\left(\left[1-(1-p)e^t\right]^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(p\cdot e^t\right)\left[1-(1-p)e^t\right]\left[\left(1-(1-p)e^t\right)+2(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^4}$$

$$= \frac{\left(p\cdot e^t\right)\left[1+(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^3} \qquad (2.6.5)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (2.6.4) dan (2.6.5) diatas, dapat dicari nilai untuk mean dan variansi dari variabel random X sebagai berikut:

$$\mu = E(X) = M'(0) = \frac{(p\cdot 1)}{\left[1-(1-p)\cdot 1\right]^2} = \frac{p}{[p]^2} = \frac{1}{p} \qquad (2.6.6)$$

dan $\text{Var}(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$= M''(0)-\left[M'(0)\right]^2$$

$$= \frac{(p\cdot 1)\left[1+(1-p)\cdot 1\right]}{\left[1-(1-p)\cdot 1\right]^3}-\left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{(p)[2-p]}{[p]^3}-\frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{[2-p]}{[p]^2}-\frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2} \quad (2.6.7)$$

2. 6. 2 Distribusi Geometri Termodifikasi di Nol (*Zero-modified Geometric Distribution*)

Telah diketahui sebelumnya, apabila suatu variabel random X berdistribusi geometri, maka akan memiliki fungsi probabilitas seperti pada persamaan (2.6.1). Dari fungsi probabilitas tersebut, dapat diperoleh nilai probabilitas ketika variabel random bernilai 0 (nol) adalah 0 (nol), Pr(X = 0) = 0.

Namun, apabila diperoleh pada data hasil suatu penelitian bahwa variabel random X berdistribusi geometri tetapi dengan nilai Pr(X = 0) > 0, maka harus dilakukan modifikasi pada fungsi probabilitas dari persamaan (2.6.1). Modifikasi dilakukan sebab nilai Pr(X = 0) ≠ 0, sehingga akan mempengaruhi fungsi probabilitas dari variabel X. Karena modifikasi dilakukan akibat terjadi perubahan probabilitas pada saat (X = 0), maka distribusi hasil modifikasi disebut distribusi geometri termodifikasi di nol (*zero-modified geometric distribution*).

Fungsi probabilitas untuk distribusi geometri termodifikasi di nol yaitu :

$$p_n^M = \left(1-p_0^M\right).(1-p)^{n-1}\,.\,p \qquad , (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (2.6.8)$$

dimana :

p_n^M = $\Pr^M\{X=n\}$, fungsi probabilitas untuk X berdistribusi geometri termodifikasi.

p_0^M = $\Pr^M\{X=0\} > 0$.

p = probabilitas terjadinya sukses, sama seperti pada distribusi geometri umum.

Selanjutnya, variabel random X yang berdistribusi geometri termodifikasi di nol akan memiliki *m.g.f* sebagai berikut:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \cdot \Pr^M\{X=n\}$$

$$= e^{t(0)} \cdot \Pr^M \{X = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \cdot \Pr^M \{X = n\}$$

$$= p_0^M + \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \cdot \left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$= p_0^M + \left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \cdot (1-p)^{n-1}\right]$$

$$= p_0^M + \left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot \left[e^t + e^{2t}(1-p) + e^{3t}(1-p)^2 + e^{4t}(1-p)^3 + \ldots.\right]$$

$$= p_0^M + \left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot \left[\frac{e^t}{1-(1-p)e^t}\right]$$

$$= p_0^M + \frac{\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t}{1-(1-p)e^t} \qquad (2.6.9)$$

Dari persamaan (2.6.9) diatas, akan dicari mean dan variansi dari variabel random X yang berdistribusi geometri termodifikasi di nol. Untuk mencari mean dan variansinya, akan terlebih dahulu dicari turunan pertama dan turunan kedua dari persamaan (2.6.9) terhadap variabel *t* sebagai berikut:

Diketahui $M(t) = p_0^M + \dfrac{\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t}{1-(1-p)e^t}$

maka

$$M'(t) = \frac{dM(t)}{dt}$$

$$= 0 + \frac{\left[\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t\right] \cdot \left[1-(1-p)e^t\right] - \left[\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t\right] \cdot \left[0-(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t\right] \cdot \left[1-(1-p)e^t + (1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1 - p_0^M\right) \cdot p \cdot e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2} \qquad (2.6.10)$$

dan

$M''(t)$

$$= \frac{d^2M(t)}{dt^2} = \frac{d(M'(t))}{dt}$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\left[1-(1-p)e^t\right]^2-\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\left(2\cdot\left[1-(1-p)e^t\right]^1\cdot\left[0-(1-p)e^t\right]\right)}{\left(\left[1-(1-p)e^t\right]^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\cdot\left[1-(1-p)e^t\right]^2-\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\cdot\left[-2(1-p)e^t\right]\cdot\left[1-(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^4}$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\cdot\left[1-(1-p)e^t\right]\cdot\left[1-(1-p)e^t+2(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^4}$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot e^t\right]\cdot\left[1+(1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^3} \qquad (2.6.11)$$

Dari persamaan (2.6.10) dan (2.6.11) akan didapat mean dan variansi dari variabel random X yang berdistribusi geometri termodifikasi di nol sebagai berikut:

$$\mu = E(X)$$

$$= M'(0)$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot 1\right]}{\left[1-(1-p)\cdot 1\right]^2}$$

$$= \frac{\left(1-p_0^M\right)\cdot p}{[p]^2}$$

$$= \frac{\left(1-p_0^M\right)}{p} \qquad (2.6.12)$$

dan $\text{Var}(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$= M''(0)-\left[M'(0)\right]^2$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\cdot 1\right]\cdot\left[1+\left(1-p\right)\cdot 1\right]}{\left[1-\left(1-p\right)\cdot 1\right]^3} - \left[\frac{1-p_0^M}{p}\right]^2$$

$$= \frac{\left[\left(1-p_0^M\right)\cdot p\right]\cdot\left[2-p\right]}{\left[p\right]^3} - \frac{\left(1-p_0^M\right)^2}{p^2}$$

$$= \frac{\left(1-p_0^M\right)\cdot\left[2-p\right]}{p^2} - \frac{\left(1-p_0^M\right)^2}{p^2}$$

$$= \frac{\left(1-p_0^M\right)\cdot\left[2-p-1+p_0^M\right]}{p^2}$$

$$= \frac{\left(1-p_0^M\right)\cdot\left[1-p+p_0^M\right]}{p^2} \qquad (2.6.13)$$

2. 7 Chi-Square Goodness of Fit

Uji Goodness of Fit adalah suatu pengujian untuk menentukan apakah suatu variabel acak X cocok dengan distribusi teoritik tertentu. Uji ini didasarkan pada seberapa baik kesesuaian/kecocokan antara frekuensi yang teramati dalam data sampel dengan frekuensi harapan yang didasarkan pada distribusi yang dihipotesiskan.

Pada uji Goodness of Fit, apabila digunakan distribusi Chi-Square sebagai statistik ujinya maka disebut Chi-Square Goodness of Fit. Sehingga Chi-Square Goodnees of Fit merupakan salah satu metode untuk menentukan seberapa baik sampel yang diambil secara acak dari suatu populasi yang tidak diketahui distribusinya dapat cocok dengan model distribusi tertentu.

Pada pengujian Chi-Square Goodness of Fit, data sampel dikelompokkan menjadi beberapa kategori. Misalkan terdapat *N* data sampel yang didalamnya terdapat O_1 untuk kategori 1, O_2 untuk kategori 2, …… , O_r untuk kategori *r*. Sehingga data sampel diatas dapat dikelompokkan dalam bentuk tabel seperti dibawah ini.

Tabel 2. 1 Model tabulasi data yang digunakan pada uji Chi-Square.

Kategori	1	2	3	…	r	Total
Frekuensi Observasi	O_1	O_2	O_3	…	O_r	N

Pada tabel diatas, penelitian dikelompokkan ke dalam *r* kategori yang tidak saling tumpang tindih (*non-overlapping*) sehingga mencakup semua kemungkinan klasifikasi. Kategori-kategori tersebut saling lepas dan mencakup semua data sampel. Kategori dapat berbentuk nominal atau numerik.

Setiap kategori mempunyai frekuensi harapan tertentu, sesuai dengan distribusi dibawah H_0 benar. Sehingga setiap kategori akan memiliki probabilitas tertentu pula. Apabila probabilitas untuk setiap kategori dinyatakan dengan π_1, π_2, π_3, …. , π_r, maka pada saat hipotesis nol benar akan diperoleh frekuensi harapan dari setiap kategori yaitu $N\pi_1$, $N\pi_2$, $N\pi_3$, …. , $N\pi_r$, dimana N adalah total sampel yang telah diperoleh.

Untuk melakukan uji Chi-Square Goodness of Fit digunakan beberapa langkah berikut:

Asumsi :

1. Data sampel adalah random
2. Skala pengukuran minimal nominal
3. Data untuk melakukan analisis dapat digambarkan dalam Tabel 2.1.

Hipotesis :

H_0 : Data sampel cocok dengan model distribusi tertentu.

H_1 : Data sampel tidak cocok dengan model distribusi tertentu.

Statistik Uji :

Statistik uji yang digunakan adalah $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$, dimana:

O_i = frekuensi observasi kategori ke–*i*.

E_i = frekuensi harapan kategori ke–*i* = $N\pi_i$.

χ^2 memiliki distribusi pendekatan ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas (r – 1), $\chi^2_{(r-1)}$. Untuk pembuktian bahwa χ^2 memiliki distribusi pendekatan ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas (r – 1), lihat Lampiran 2.

Metode ini mempunyai kelemahan, salah satunya yaitu kurang tepat digunakan bila terdapat beberapa kategori yang memiliki frekuensi harapan yang relatif rendah. Frekuensi harapan minimum yang diperbolehkan adalah 5. Jadi jika ada kategori yang memiliki frekuensi harapan kurang dari 5, maka kategori tersebut digabungkan dengan kategori yang berdekatan sampai memenuhi frekuensi minimum.

Aturan Keputusan :

Distribusi pendekatan dari χ^2 untuk sampel besar adalah distribusi Chi-Square dengan derajat bebas *r*–1, dimana *r* adalah jumlah kategori. Jika hasil statistik uji χ^2 bernilai sama atau lebih besar dari nilai $\chi^2_{\alpha,(r-1)}$ dengan tingkat signifikansi α yang telah dipilih, maka hipotesis nol ditolak. Selain itu berarti hipotesis nol tidak ditolak.

BAB 3
BANYAK SINGGAH

Pada bab ini akan dibahas mengenai banyak singgah, mulai dari cara mencari fungsi probabilitas, jenis distribusinya, hingga mean dan variansinya.

3. 1 Fungsi Probabilitas Banyak Singgah

Setelah mengetahui definisi putaran (*cycle*) pada random walk sederhana, selanjutnya akan didefinisikan banyak singgah dalam satu putaran.

Apabila Z menyatakan bilangan bulat, simbol #{a} menyatakan banyaknya anggota dari himpunan {a} , dan variabel $\xi(x)$ menyatakan banyak singgah partikel di *state x* dalam satu putaran, maka

$$\xi(x) = \#\{n:\ 0 < n < \rho\ ,\ S_n = x, x \in Z, x \neq 0\}$$

Apabila ditinjau pada satu putaran berhingga $\xi(x) = k$ (k ≥1), jika dan hanya jika random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x*, lalu (*k* – 1) kali lagi mencapai *state x* sebelum mencapai *state* 0.

<u>Bukti</u> :

Akan dibuktikan :

a. Pada satu putaran berhingga, jika $\xi(x) = k$ (k ≥1), maka random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x*, lalu (*k* – 1) kali lagi mencapai *state x* sebelum mencapai *state* 0.
b. Pada satu putaran berhingga, jika random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x*, lalu (*k* – 1) kali lagi mencapai *state x* sebelum mencapai *state* 0, maka $\xi(x) = k$ (k ≥1).

<u>Bukti a.</u>

Diketahui $\xi(x) = k$, maka $\#\{n:\ 0 < n < \rho\ ,\ S_n = x, x \in Z, x \neq 0\}$ = *k*.

Karena $\#\{n:\ 0<n<\rho\ ,\ S_n = x, x\in Z, x\neq 0\} = k$, maka terdapat $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sehingga berlaku $\#\{n_1, n_2, ..., n_k\} = k$ dan $\{\ S_{n_1} = x, S_{n_2} = x, ..., S_{n_k} = x\}$.

Dari $\{\ S_{n_1} = x, S_{n_2} = x, ..., S_{n_k} = x\}$ dapat dilihat bahwa random walk $\{S_n\}$ mencapai level *x* pada saat n_1, lalu (k-1) kali lagi mencapai level *x* pada saat n_2, $n_3, \ldots, n_k$.

Jadi pernyataan a. terbukti. ■

<u>Bukti b.</u>

Diketahui random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x*, lalu $(k-1)$ kali lagi mencapai *state x* sebelum mencapai *state* 0.

Ini berarti terdapat $n_1 > 0$, sehingga terjadi $X_1 + X_2 + ... + X_{n_1} = x$. Karena $X_1 + X_2 + ... + X_{n_1} = x$ maka $S_{n_1} = x$. Pada saat n_1 ini, berarti random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x* untuk yang pertama kali.

Kemudian selanjutnya random walk mencapai *state x* sebanyak (*k*-1) kali lagi, berarti akan ada $n_2, n_3, \ldots, n_k$ ($n_k > \ldots. > n_2 > n_1$) sehingga terjadi :

$X_1 + X_2 + ... + X_{n_1} + X_{n_1+1} + X_{n_1+2} + ... + X_{n_2} = x \rightarrow S_{n_2} = x$

$X_1 + X_2 + ... + X_{n_1} + X_{n_1+1} + X_{n_1+2} + ... + X_{n_2} + X_{n_2+1} + X_{n_2+2} + ... + X_{n_3} = x \rightarrow$

$S_{n_3} = x$

$\vdots$

$X_1 + X_2 + ... + X_{n_k} = x \rightarrow S_{n_k} = x$.

Jadi pada random walk $\{S_n\}$ mencapai *state x*, lalu $(k-1)$ kali lagi mencapai *state x* sebelum mencapai *state* 0, terdapat kejadian $\{\ S_{n_1} = x, S_{n_2} = x, ..., S_{n_k} = x\}$.

Karena $\{\ S_{n_1} = x, S_{n_2} = x, ..., S_{n_k} = x\}$, maka partikel pada random walk singgah di *state x* sebanyak *k* kali. Sehingga $\xi(x) = k$.

Jadi pernyataan b. terbukti. ■

Selanjutnya akan dicari fungsi probabilitas dari variabel banyak singgah $\xi(x)$ sebagai berikut :

TEOREMA :

1. Untuk p ≠ ½ , $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0\right)=1-\dfrac{|p-q|}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}\right|}$

   dimana $\xi(x)=0$ menyatakan partikel tidak singgah di *state x* dalam 1 putaran.

2. Untuk p ≠ ½ , k = 1, 2, 3, …

   a. $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)=\dfrac{|p-q|^{2}}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}\right|^{2}}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}}\right]^{k-1}$, untuk *p* > *q*, *x* > 0 atau $p<q, x<0$.

   b. $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)=\dfrac{|p-q|^{2}}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}\right|\left|1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}\right|}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x}}\right]^{k-1}$, untuk $p>q, x<0$ atau $p<q, x>0$.

   dimana $\xi(x)=k$ menyatakan partikel singgah di *state x* sebanyak *k* kali dalam 1 putaran.

3. Untuk p = ½ , $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0\right)=1-\dfrac{1}{2|x|}$

4. Untuk p = ½ , k ≥ 1, $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)=\dfrac{1}{4x^{2}}\left(1-\dfrac{1}{2|x|}\right)^{k-1}$

Bukti:

1. <u>Bukti Teorema 1</u>

Telah diketahui bahwa variabel $\xi(x)$ menyatakan banyak singgah partikel di *state x*, sehingga nilai dari $\xi(x)$ yang mungkin adalah (0, 1, 2, …). Oleh karena itu, akan berlaku:

$$\mathrm{P}(\xi(x)=0) + \mathrm{P}(\xi(x)>0) = 1$$

$$\leftrightarrow \quad \mathrm{P}(\xi(x)=0) = 1 - \mathrm{P}(\xi(x)>0) \qquad (3.1)$$

Dari persamaan (3.1) diatas dapat dilihat bahwa $\mathrm{P}(\xi(x)=0)$ menyatakan probabillitas banyak singgah partikel di *state x* adalah 0, $\xi(x)=0$, berarti partikel tidak singgah di *state x*. Selanjutnya $\mathrm{P}(\xi(x)>0)$ menyatakan probabilitas banyak singgah partikel di *state x* lebih besar dari 0, $\xi(x)>0$, berarti partikel pernah singgah di *state x*. Partikel pernah singgah di *state x*, berarti partikel minimum singgah 1 kali di *state x*.

Akan dicari nilai dari $\mathrm{P}(\xi(x)>0)$ sebagai berikut :

Andaikan $x > 0$.

Telah diketahui $S_0 = 0$ pada random walk, sehingga untuk langkah pertama, nilai S_1 yang mungkin adalah $S_1=1$ atau $S_1=-1$. Karena digunakan pengandaian $x > 0$, dan $\xi(x)>0$ berarti partikel minimum singgah 1 kali di *state x* maka :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi(x)>0) &= \mathrm{P}(S_1=1, S_T=x) \\ &= \mathrm{P}(S_1=1)\ .\ \mathrm{P}(S_T=x \mid S_1=1) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

dimana T adalah waktu minimum partikel singgah di *x*.

Untuk mencari $\mathrm{P}(S_T=x \mid S_1=1)$, akan digunakan persamaan yang terdapat pada teori permainan. Pada teori permainan, $\mathrm{P}(S_T=x \mid S_1=1)$ dapat dijelaskan dengan probabilitas seorang pemain bermain dengan uang mula-mula sebanyak 1 unit uang dan ketika banyaknya uang pemain tersebut telah mencapai *x*, permainan dihentikan.

Dari persamaan (2.4.13) pada teori permainan diperoleh :

$$v_k = \Pr\{S_T = N \mid S_0 = k\} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1},$$

dimana : v_k menyatakan probabilitas seorang pemain akan bermain dengan uang mula-mula sebanyak *k* unit uang dan permainan akan dihentikan ketika uang mencapai N.

Karena pada persamaan (3.2) diperlukan $\mathrm{P}\left(S_T = x \mid S_1 = 1\right)$, maka sesuai dengan teori permainan:

$$\mathrm{P}\left(S_T = x \mid S_1 = 1\right) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^1 - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^x - 1}$$

Sehingga persamaan (3. 2) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\xi(x) > 0\right) &= \mathrm{P}\left(S_1 = 1\right).\mathrm{P}\left(S_T = x \mid S_1 = 1\right) \\ &= p\,\frac{\left(\frac{q}{p}\right) - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^x - 1} \\ &= \frac{q-p}{\left(\frac{q}{p}\right)^x - 1} \qquad (3.\ 3) \end{aligned}$$

Kemudian untuk x < 0 akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\xi(-x) > 0\right) &= \mathrm{P}\left(S_1 = -1, S_T = -x\right) \\ &= \mathrm{P}\left(S_1 = -1\right).\ \mathrm{P}\left(S_T = -x \mid S_1 = -1\right) \\ &= q \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{-1} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-x} - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-x} - 1} \tag{3.4}$$

Sehingga dari persamaan (3. 3) dan (3. 4) dapat diperoleh :

$$\mathrm{P}\big(\xi(x) > 0\big) = \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1} \right| \text{, berlaku untuk setiap x, x} \neq 0. \tag{3. 5}$$

$\therefore$ Dari persamaan (3. 1) dan (3. 5) akan diperoleh :

$$\mathrm{P}\big(\xi(x) = 0\big) = 1 - \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1} \right| = 1 - \frac{|p-q|}{\left|1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|} \tag{3.6}$$

$\therefore$ Teorema 1 telah terbukti. ■

2. Bukti Teorema 2

Akan dicari $\mathrm{P}\big(\xi(x) = k\big)$, yaitu probabilitas banyak singgah partikel di *state x* sebanyak *k*, $\xi(x) = k$. Banyak singgah partikel di *state x* sebanyak *k*, berarti partikel singgah di *state x* sebanyak *k* kali.

Probabilitas partikel singgah di *state x* sebanyak *k* kali, dapat dibagi menjadi 2 kondisi. Pertama, partikel singgah di *state x* yang tidak bernilai 0 ($x \neq 0$) sebanyak *k* kali, dan untuk selanjutnya partikel tidak pernah singgah di *state* 0. Probabilitas kondisi pertama tersebut akan dinotasikan dengan $\mathrm{P}\big(\xi(x) = k, \rho = \infty\big)$. Kemudian kondisi kedua yaitu, partikel singgah di *state x* yang tidak bernilai 0 ($x \neq 0$) sebanyak *k* kali dan kemudian singgah di *state* 0. Probabilitas dari kondisi ini akan dinotasikan dengan $\mathrm{P}\big(\xi(x) = k, \rho < \infty\big)$. Agar lebih jelas, lihat Tabel 3.1 dibawah.

Sehingga dari penjelasan diatas, akan diperoleh:

$$\mathrm{P}\big(\xi(x) = k\big) = \mathrm{P}\big(\xi(x) = k, \rho = \infty\big) + \mathrm{P}\big(\xi(x) = k, \rho < \infty\big) \tag{3.7}$$

Sebelumnya pada Teorema 1 telah dicari besar $P(\xi(x)=0)$, probabilitas banyak singgah partikel di *state* x sebanyak 0, $\xi(x)=0$. Hal ini berarti partikel tidak singgah di *state x*. Selanjutnya probabilitas partikel tidak singgah di *state x*, juga dapat dibagi menjadi 2 kondisi. Pertama, partikel tidak singgah di *state x* yang tidak bernilai 0 ($x \neq 0$) dan untuk selanjutnya tidak pernah singgah di *state* 0. Probabilitas kondisi pertama tersebut akan dinotasikan dengan $P(\xi(x)=0,\rho=\infty)$. Kemudian kondisi kedua yaitu, partikel tidak singgah di *state x* yang tidak bernilai 0 ($x \neq 0$) dan kemudian partikel singgah di *state* 0. Probabilitas dari kondisi ini akan dinotasikan dengan $P(\xi(x)=0,\rho<\infty)$. Lihat Tabel 3.1 agar uraian diatas dapat lebih jelas.

Sehingga dari penjelasan diatas akan diperoleh:

$$P(\xi(x)=0) = P(\xi(x)=0,\rho=\infty) + P(\xi(x)=0,\rho<\infty) \tag{3.8}$$

Tabel 3. 1 Penjelasan Notasi

Notasi	*State*	
	$x = 0$	$x \neq 0$
$(\xi(x) = k, \rho = \infty)$	Partikel tidak singgah	Partikel singgah *k* kali
$(\xi(x) = k, \rho < \infty)$	Partikel singgah	Partikel singgah *k* kali
$(\xi(x) = 0, \rho = \infty)$	Partikel tidak singgah	Partikel tidak singgah
$(\xi(x) = 0, \rho < \infty)$	Partikel singgah	Partikel tidak singgah

Pada persamaan (3.8) dibutuhkan $P(\xi(x)=0,\rho<\infty)$ dan $P(\xi(x)=0,\rho=\infty)$, dimana nilai-nilai dari probabilitas tersebut akan dicari dengan cara seperti dibawah ini:

dari persamaan (3.1) dan (3.8) akan diperoleh :

$$P(\xi(x)=0,\rho<\infty) = 1 - P(\xi(x)>0) - P(\xi(x)=0,\rho=\infty) \tag{3.9}$$

Akan dicari terlebih dahulu nilai dari $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0,\rho=\infty\right)$ dengan menggunakan bantuan variabel *I* berikut ini :

Andaikan $\mathrm{I} = \begin{cases} 0\ , \text{ jika } p>q,\, x<0 \text{ atau } p<q, x>0 \\ 1\ , \text{ jika } p>q,\, x>0 \text{ atau } p<q, x<0 \end{cases}$

maka $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0,\rho=\infty\right)$

$= \sum_{i=0}^{1} \mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=i, \rho=\infty\right)$

$= \mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=0, \rho=\infty\right) + \mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=1, \rho=\infty\right)$

$= \mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right)\cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right) + \mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right)\cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)$

Untuk mencari nilai dari $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right)$ dan $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right)$ dijelaskan pada Tabel 3.2 dibawah ini.

Tabel 3. 2 Hubungan antara I dengan syarat $\rho=\infty$ untuk $\xi(x)=0$.

Syarat $\rho=\infty$	I = 0	I = 1
$x>0$	$x > 0$, $p < q$ $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right)$ = 1 sebab supaya syarat $\rho=\infty$ terjadi untuk $x > 0$, $p < q$, berarti partikel haruslah singgah di *state* $x > 0$ saja, sehingga kejadian $\xi(x)=0$ tidak mungkin terjadi. Tetapi berdasarkan persamaan 2.5.4, kejadian $\rho=\infty$ tidak mungkin terjadi untuk $x > 0$, $p<q$. Jadi, karena $\rho=\infty$ tidak mungkin terjadi untuk $x > 0$, $p<q$ maka kejadian $\xi(x)=0$	$x > 0$, $p > q$ $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right)$ = 0 sebab supaya syarat $\rho=\infty$ terjadi untuk $x > 0$, $p > q$, berarti partikel haruslah singgah di *state* $x > 0$ saja, sehingga kejadian $\xi(x)=0$ tidak mungkin terjadi.

	pasti terjadi.	
$x<0$	$x < 0$, $p > q$ $\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right) = 1$ sebab supaya syarat $\rho=\infty$ terjadi untuk $x < 0$, $p > q$, berarti partikel haruslah singgah di *state* $x < 0$ saja, sehingga kejadian $\xi\left(x\right)=0$ tidak mungkin terjadi. Tetapi berdasarkan persamaan 2.5.5, kejadian $\rho=\infty$ tidak mungkin terjadi untuk $x < 0$, $p>q$. Jadi karena $\rho=\infty$ tidak mungkin terjadi untuk $x < 0$, $p>q$ maka kejadian $\xi\left(x\right)=0$ pasti terjadi.	$x < 0$, $p < q$ $\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right) = 0$ sebab supaya syarat $\rho=\infty$ terjadi untuk $x < 0$, $p < q$, berarti partikel haruslah singgah di *state* $x < 0$ saja, sehingga kejadian $\xi\left(x\right)=0$ tidak mungkin terjadi.
Kesimpulan	$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right)$ = 1 = 1 – I	$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right) = 0$

Jadi dari Tabel 3.2 diatas akan didapat :

$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, \rho=\infty\right)$

$= \mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=0 \mid \rho=\infty\right)\cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)+\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, I=1 \mid \rho=\infty\right)\cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)$

$= (1 - \mathrm{I}) \cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right) + 0 \cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)$

$= (1 - \mathrm{I}) \cdot \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)$ (3.10)

$= (1 - \mathrm{I}) \cdot |p - q|$, dari persamaan (2.5.7) (3.11)

Jelas dari persamaan (3.9), (3.5) dan (3.11) diperoleh :

$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, \rho<\infty\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)>0\right) - \mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=0, \rho=\infty\right)$

$$= 1 - \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1} \right| - (1 - \mathrm{I}) \cdot |p - q| \tag{3.12}$$

Akan dibuktikan Teorema 2, berarti akan dicari $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)$, dengan k = 1,2,3,… . Untuk mencari $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)$, maka berdasarkan persamaan (3.7) akan dicari terlebih dahulu nilai dari $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k,\rho<\infty\right)$ dan $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k,\rho=\infty\right)$.

$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k,\rho<\infty\right)$

$$= \mathrm{P}\left(\xi(x)>0\right) . \left[\mathrm{P}\left(\xi(-x)=0,\rho<\infty\right)\right]^{k-1} . \mathrm{P}\left(\xi(-x)>0\right)$$

$$= \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1} \right| . \left[1 - \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-x} - 1} \right| - I \cdot |p-q| \right]^{k-1} . \left| \frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-x} - 1} \right|$$

$$= \frac{|p-q|^{2}}{\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{x} - 1\right| \left|\left(\frac{p}{q}\right)^{x} - 1\right|} . \left[1 - \left| \frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x} - 1} \right| - I \cdot |p-q| \right]^{k-1}$$

$$= (pq)^{x} \left(\frac{p-q}{p^{x}-q^{x}} \right)^{2} . \left[1 - \left| \frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x} - 1} \right| - I \cdot |p-q| \right]^{k-1} \tag{3.13}$$

$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k,\rho=\infty\right)$

$$= \mathrm{P}\left(\xi(x)>0\right) . \left[\mathrm{P}\left(\xi(-x)=0,\rho<\infty\right)\right]^{k-1} . \mathrm{I}\ \mathrm{P}\left(\rho=\infty\right)$$

$$= \left|\frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-1}\right| \cdot \left[1-\left|\frac{p-q}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-x}-1}\right|-I\cdot\left|p-q\right|\right]^{k-1} \cdot \mathrm{I}\ \left|p-q\right|$$

$$= \mathrm{I}\ \cdot\frac{\left(p-q\right)^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|} \cdot \left[1-\left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x}-1}\right|-I\cdot\left|p-q\right|\right]^{k-1} \tag{3.14}$$

Kemudian dari persamaan (3.7), (3.13) dan (3.14) akan diperoleh:

$$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k,\rho<\infty\right) + \mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k,\rho=\infty\right)$$

$$= \left(pq\right)^{x}\left(\frac{p-q}{p^{x}-q^{x}}\right)^{2} \cdot \left[1-\left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x}-1}\right|-I\cdot\left|p-q\right|\right]^{k-1} +$$

$$\mathrm{I}\ \cdot\frac{\left(p-q\right)^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|} \cdot \left[1-\left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x}-1}\right|-I\cdot\left|p-q\right|\right]^{k-1} \tag{3.15}$$

Untuk bukti Teorema 2b ambil I = 0, sehingga dari persamaan (3.15) akan diperoleh:

$$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k\right)$$

$$= \left(pq\right)^{x}\left(\frac{p-q}{p^{x}-q^{x}}\right)^{2} \cdot \left[1-\left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{x}-1}\right|\right]^{k-1}$$

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|\left(\frac{q}{p}\right)^x - 1\right|\left|\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1\right|} \cdot \left[1 - \left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1}\right|\right]^{k-1}$$

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|\left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^x\right|} \cdot \left[1 - \left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x}\right|\right]^{k-1} \qquad (3.16)$$

Untuk bukti Teorema 2a ambil I = 1, sehingga dari persamaan (3.15) akan diperoleh:

$$\mathrm{I} \cdot \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} \cdot \left[1 - \left|\frac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1}\right| - I \cdot |p-q|\right]^{k-1}$$

$$= \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} \cdot \left[1 - |p-q|\left(\frac{1}{\left|\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1\right|} + 1\right)\right]^{k-1}$$

$$= \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} \cdot \left[1 - |p-q|\left(\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1} + 1\right)\right]^{k-1}$$, lihat lampiran 1

$$= \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} \cdot \left[1 - \frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1}$$

Jadi $\mathrm{P}(\xi(x) = k)$

$$= (pq)^x \left(\frac{p-q}{p^x-q^x}\right)^2 . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} + \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1}$$

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|\left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^x\right|} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} + \frac{(p-q)^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1}$$

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} . \left[\frac{1}{\left|\left(\frac{p}{q}\right)^x-1\right|}+1\right]$$

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} . \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^x-1}+1\right]$$, lihat lampiran 1

$$= \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|^2} . \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} \qquad (3.17)$$

Jadi dari persamaan (3.16) dan (3.17) terbukti Teorema 2. ■

3. Bukti Teorema 3

Pada Teorema 1 telah diperoleh $P(\xi(x)=0) = 1 - \left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right|$, untuk p ≠ ½ .

Sehingga untuk mencari nilai $P(\xi(x)=0)$ untuk p = ½ yaitu :

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=0\right)$$

$$= \lim_{p\to\frac{1}{2}}\left(1-\left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}\right|\right)$$

$$= 1-\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}\right|$$

$$= 1-\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left|\frac{p-(1-p)}{1-\left(\frac{(1-p)}{p}\right)^{x}}\right|$$

$$= 1-\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left|\frac{2p-1}{1-\left(p^{-1}-1\right)^{x}}\right|$$

$$= 1-\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left|\frac{2}{0-x\left(p^{-1}-1\right)^{x-1}\cdot\left(-p^{-2}\right)}\right| \text{, menggunakan aturan l'Hopital.}$$

$$= 1-\left|\frac{2}{0-x\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-1\right)^{x-1}\cdot\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)}\right|$$

$$= 1-\left|\frac{2}{0-x(1)^{x-1}\cdot(-4)}\right|$$

$$= 1-\left|\frac{2}{4x}\right| = 1-\frac{1}{2|x|} \qquad (3.18)$$

Pada persamaan (3.18) telah diperoleh $\mathrm{P}\left(\xi(x)=0\right) = 1-\frac{1}{2|x|}$, sehingga

Teorema 3 telah terbukti. ■

4. Bukti Teorema 4

Pada Teorema 2 telah diperoleh :

$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k\right)$ =

a. $$\frac{\left|p-q\right|^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|^{2}}\left[1-\frac{\left|p-q\right|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}\right]^{k-1}$$, untuk $\left(p>q,x>0\right)$ atau $\left(p<q,x<0\right)$

b. $$\frac{\left|p-q\right|^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|\left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}\right|}\left[1-\frac{\left|p-q\right|}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}}\right]^{k-1}$$, untuk $\left(p>q,x<0\right)$ atau $\left(p<q,x>0\right)$

dengan p ≠ ½ , k = 1, 2, 3, ….

Untuk mencari nilai $\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k\right)$ untuk p = ½ dengan menggunakan Teorema 2 yaitu sebagai berikut :

$\mathrm{P}\left(\xi\left(x\right)=k\right)$ =

a. $$\lim_{p\to\frac{1}{2}}\frac{\left|p-q\right|^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|^{2}}\left[1-\frac{\left|p-q\right|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}\right]^{k-1} \tag{3.19}$$

b. $$\lim_{p\to\frac{1}{2}}\frac{\left|p-q\right|^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right|\left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}\right|}\left[1-\frac{\left|p-q\right|}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}}\right]^{k-1} \tag{3.20}$$

Karena pada pembuktian Teorema 3 telah diperoleh $\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}\right| = \frac{1}{2\left|x\right|}$, maka

persamaan (3.19) menjadi

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right) = \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|^2} \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2|x|}\right)^2 \left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1}$$

$$= \frac{1}{4x}\left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1} \qquad (3.21)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.20), akan dicari terlebih dahulu hasil dari

$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x}\right|$ sebagai berikut:

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \left|\frac{p-q}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x}\right|$$

$$= \lim_{p\to\frac{1}{2}} \left|\frac{p-(1-p)}{1-\left(\frac{p}{(1-p)}\right)^x}\right|$$

$$= \lim_{p\to\frac{1}{2}} \left|\frac{2p-1}{1-\left(\frac{(1-p)}{p}\right)^{-x}}\right|$$

$$= \lim_{p\to\frac{1}{2}} \left|\frac{2p-1}{1-\left(p^{-1}-1\right)^{-x}}\right|$$

$$= \lim_{p \to \frac{1}{2}} \left| \frac{2}{0-(-x)\left(p^{-1}-1\right)^{-x-1} \cdot \left(-p^{-2}\right)} \right|$$, menggunakan aturan l'Hopital.

$$= \left| \frac{2}{0-(-x)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-1\right)^{-x-1} \cdot \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)} \right|$$

$$= \left| \frac{2}{0-(-x)(1)^{-x-1} \cdot (-4)} \right|$$

$$= \left| \frac{2}{-4x} \right| = \frac{1}{2|x|} \tag{3.22}$$

Karena dari persamaan (3.22) telah diperoleh $\lim_{p \to \frac{1}{2}} \left| \frac{p-q}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}} \right| = \frac{1}{2|x|}$,

maka persamaan (3.20) menjadi :

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right) = \lim_{p \to \frac{1}{2}} \frac{|p-q|^{2}}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}\right| \left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}\right|} \left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{x}}\right]^{k-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2|x|}\right)\left(\frac{1}{2|x|}\right)\left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1}$$

$$= \frac{1}{4x}\left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1} \tag{3.23}$$

Karena diperoleh hasil yang sama dari persamaan (3.21) dan (3.23) maka

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right) = \frac{1}{4x}\left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1}$$, dengan p ≠ ½ , k = 1, 2, 3, … . (3.24)

$\therefore$ Teorema 4 telah terbukti. ■

3. 2 Distribusi Banyak Singgah

Pada Teorema 1dan Teorema 2 telah diketahui bahwa

$$\mathrm{P}\big(\xi(x)=0\big)=1-\frac{|p-q|}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} \quad \text{dan}$$

$$\mathrm{P}\big(\xi(x)=k\big)=\begin{cases}\dfrac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|^2}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} & \text{, untuk } I=1\\[2ex] \dfrac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|\left|1-\left(\frac{p}{q}\right)^x\right|}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x}\right]^{k-1} & \text{, untuk } I=0\end{cases}$$

dengan p ≠ ½ , k = 1, 2, 3, ….

$$\text{Jika } \pi=\begin{cases}\dfrac{|p-q|}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x} & \text{, untuk I = 1}\\[2ex] \dfrac{|p-q|}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x} & \text{, untuk I = 0}\end{cases}$$

$$\text{dan} \quad \mathrm{P}\big(\xi(x)=0\big)=1-\frac{|p-q|}{\left|1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right|} = p_0 \qquad (3.25)$$

maka :

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)=\begin{cases}\dfrac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^x\right|^2}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^x}\right]^{k-1} = (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1} & \text{, untuk } I = 1\\[2ex] \dfrac{|p-q|^2}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^x\right|\left|1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^x\right|}\left[1-\dfrac{|p-q|}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^x}\right]^{k-1} = (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1} & \text{, untuk } I = 0\end{cases}$$

Jadi $\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right) = (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. (3.26)

Sehingga

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\xi(x)\geq k\right) &= \mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right) + \mathrm{P}\left(\xi(x)=k+1\right) + \mathrm{P}\left(\xi(x)=k+2\right) + \ldots\ldots\\ &= (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1} + (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k} +\\ &\quad (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k+1} + \ldots\ldots\\ &= \frac{(1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1}}{1-[1-\pi]}\\ &= (1-p_0)\cdot[1-\pi]^{k-1}\\ &= \frac{\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)}{\pi}\end{aligned} \tag{3.27}$$

dan untuk p = ½ ,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\xi(x)\geq k\right) &= \lim_{p\to\frac{1}{2}}(1-p_0)\cdot[1-\pi]^{k-1}\\ &= \lim_{p\to\frac{1}{2}}\left(\frac{|p-q|}{\left|1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^x\right|}\right)\cdot\left[1-\frac{|p-q|}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^x}\right]^{k-1}\\ &= \frac{1}{2|x|}\left[1-\frac{1}{2|x|}\right]^{k-1}\end{aligned} \tag{3.28}$$

Kemudian, karena dari persamaan (3.25) dan (3.26) telah diperoleh:

$\mathrm{P}\big(\xi(x)=0\big) \;=\; p_0$ dan

$\mathrm{P}\big(\xi(x)=k\big) \;=\; (1-p_0)\cdot\pi\cdot[1-\pi]^{k-1}$, untuk k = 1, 2, 3, …

maka dengan mengacu pada subbab 2.6.2, diperoleh *p.d.f* variabel random $\xi(x)$ identik dengan p.d.f distribusi Geometri Termodifikasi di Nol (*Zero-Modified Geometric*), maka dapat diambil kesimpulan bahwa $\xi(x)$ berdistribusi geometri termodifikasi di nol.

3. 3 *M.g.f* , Mean, dan Variansi Banyak Singgah

Telah diketahui bahwa banyak singgah $\xi(x)$ berdistribusi geometri termodifikasi di nol, maka dengan mengacu pada subbab 2.6.2 akan diperoleh *m.g.f* (*moment generating function*) dari variabel random $\xi(x)$ adalah sebagai berikut:

$$M(t) \;=\; E\left(e^{t\xi(x)}\right)$$

$$= \; p_0 + \frac{(1-p_0)\cdot\pi\cdot e^t}{1-(1-\pi)e^t} \tag{3.29}$$

Kemudian karena telah diperoleh m.g.f dari banyak singgah $\xi(x)$ dan karena banyak singgah $\xi(x)$ berdistribusi geometri termodifikasi di nol, maka dengan mengacu pada subbab 2.6.2 $\xi(x)$ akan memiliki mean dan variansi sebagai berikut:

$$\mu_{\xi(x)} \;=\; E\big(\xi(x)\big) \;=\; M'(0) \;=\; \frac{(1-p_0)}{\pi}$$, dari persamaan (2.6.12)

$$\mathrm{Var}(\xi(x)) \;=\; E\left(\xi(x)^2\right)-\left[E\big(\xi(x)\big)\right]^2$$

$$= \; M''(0)-\left[M'(0)\right]^2$$

$$= \; \frac{(1-p_0)\cdot[1-\pi+p_0]}{\pi^2}$$, dari persamaan (2.6.13)

Selanjutnya untuk p = ½ , telah didapat $p_0 = 1-\frac{1}{2|x|}$ dari Teorema 3, dan didapat $\pi = \frac{1}{2|x|}$ dari Teorema 4. Sehingga:

$$\mu_{\xi(x)} = \frac{(1-p_0)}{\pi} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2|x|}\right)}{\frac{1}{2|x|}} = 1$$

dan Var($\xi(x)$) = $\frac{(1-p_0)\cdot[1-\pi+p_0]}{\pi^2}$

$$= \frac{\left(1-\left(1-\frac{1}{2|x|}\right)\right)\cdot\left[1-\frac{1}{2|x|}+1-\frac{1}{2|x|}\right]}{\left(\frac{1}{2|x|}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2|x|}\right)\cdot\left[2-\frac{2}{2|x|}\right]}{\left(\frac{1}{2|x|}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[2-\frac{1}{|x|}\right]}{\left(\frac{1}{2|x|}\right)}$$

$$= (2|x|)\left[2-\frac{1}{|x|}\right]$$

$$= 4|x|-2$$

BAB 4
BANYAK SINGGAH PADA UJI KERANDOMAN

Distribusi dari variabel banyak singgah $\xi(x)$ yang telah diperoleh pada Bab 3 dapat digunakan untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$ dimana $\varepsilon_i = 0, 1$. Pada Bab 4 ini akan diberikan contoh ilustrasi penggunaan distribusi banyak singgah untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$.

Uji kerandoman dilakukan dengan menggunakan hipotesis berikut:

H_0 : Barisan bilangan biner adalah random

H_1 : Tidak demikian

Untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$, lakukan beberapa langkah berikut:

1. Lakukan transformasi barisan bilangan biner berhingga $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$ dengan menggunakan transformasi $X_i = 2\varepsilon_i - 1$.

   Setelah dilakukan transformasi, akan diperoleh barisan baru yaitu $X = X_1 X_2 \ldots\ldots X_n$, dimana $X_i = -1, 1$. Selanjutnya disini akan dilakukan uji kerandoman, dimana kerandoman akan diuji dengan menggunakan banyak putaran (*cycle*) yang memperoleh tepat *k* singgah dalam suatu jumlah kumulatif random walk (*cumulative sum random walk*).

   Tujuan menggunakan cara tersebut adalah menentukan apakah banyak singgah pada suatu *state* tertentu dalam suatu putaran menyimpang atau tidak dari yang diharapkan pada suatu barisan random. Harapan pada suatu barisan random yang dimaksud adalah apabila suatu barisan bersifat random, maka diharapkan banyak singgah yang ada memiliki distribusi seperti yang telah dicari pada Bab 3.

   Suatu barisan bilangan biner dikatakan random jika probabilitas muncul angka 1 dan angka 0 adalah sama, yaitu masing-masing memiliki probabilitas sebesar ½. Sehingga, karena akan digunakan distribusi banyak singgah $\xi(x)$ pada suatu *state* dalam satu putaran yang telah dibahas pada Bab 3, maka digunakan distribusi banyak singgah $\xi(x)$ untuk melakukan uji kerandoman dengan *p* = ½. Hal ini mengakibatkan hipotesis yang digunakan sekarang adalah :

H_0 : $P(\xi(x)=0)=\pi_0(x)=1-\frac{1}{2|x|}$

$$P(\xi(x)=k)=\pi_k(x)=\frac{1}{4x^2}\left(1-\frac{1}{2|x|}\right)^{k-1}$$

H_1 : Tidak demikian

Untuk mencari $\xi(x)$ diperlukan jumlah kumulatif random walk. Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.3 bahwa jumlah kumulatif random walk yaitu $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, dimana X_i = -1, 1, dan X_i saling independen dengan $Pr(X_i = 1) = p$ serta $Pr(X_i = -1) = 1 - p$. Sehingga untuk langkah selanjutnya, dengan mengikuti subbab 2.3, akan dicari jumlah kumulatif random walk terlebih dahulu.

2. Bentuk barisan S = $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ dimana $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$, k= 1, 2, …, n.

   Pada langkah ini, akan diperoleh barisan S = $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ dimana:

   $S_1 = X_1$

   $S_2 = X_1 + X_2$

   $\vdots$

   $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

3. Bentuk lagi suatu barisan baru S’, dimana S’ = 0, S, 0.

Berikut diberikan contoh ilustrasi untuk barisan bilangan biner.

Contoh ilustrasi :

Andaikan barisan biner berhinga ε =10110001011100010010, maka n = 20 dan diperoleh barisan baru

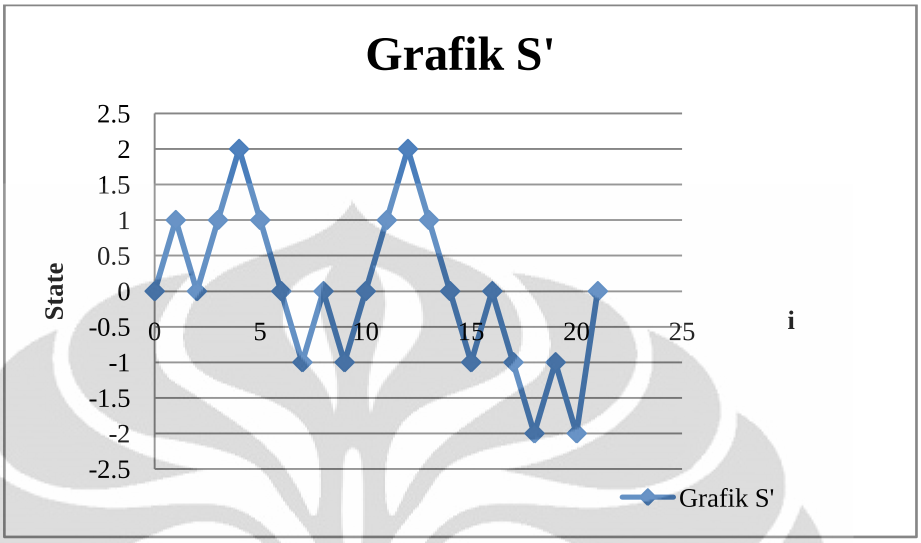
X = 1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1.

Kemudian bentuk barisan S dan barisan S', dimana S' = 0, S, 0. Agar lebih jelas, lihat Tabel 4.1 dibawah ini.

Tabel 4. 1 Barisan biner ε, X, S, dan S'.

i	ε_i	X_i	S	S'
				0
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	0
3	1	1	1	1
4	1	1	2	2
5	0	-1	1	1
6	0	-1	0	0
7	0	-1	-1	-1
8	1	1	0	0
9	0	-1	-1	-1
10	1	1	0	0
11	1	1	1	1
12	1	1	2	2
13	0	-1	1	1
14	0	-1	0	0
15	0	-1	-1	-1
16	1	1	0	0
17	0	-1	-1	-1
18	0	-1	-2	-2
19	1	1	-1	-1
20	0	-1	-2	-2
				0

Apabila barisan S' digambarkan dalam bentuk grafik, maka akan diperoleh gambar sebagai berikut:



Gambar 4. 1: Grafik S'

4. Hitung J, dimana J = banyaknya putaran (*cycle*) pada barisan S', dan tuliskan putarannya.

   Putaran (*cycle*) telah didefinisikan pada Subbab 2.5. Pada subbab tersebut telah dijelaskan, apabila diambil nilai 0 sebagai posisi awal maka satu putaran pada random walk akan berisi barisan posisi partikel dari posisi awal 0 sampai kembali lagi menuju posisi 0 di garis real. Pada Gambar 4.1, salah satu contoh putaran adalah {0,1,2,1,0}.
   Pada barisan S', definisi J selain definisi diatas, dapat juga diartikan dengan banyaknya angka 0 pada barisan S' yang terjadi setelah angka 0 mula-mula.
   Dengan menggunakan contoh dari langkah 3 diatas, karena diperoleh S' = {0,1,0,1,2,1,0,-1,0,-1,0,1,2,1,0,-1,0,-1,-2,-1,-2,0} maka J = 7, sebab terdapat 7 angka 0 pada barisan S' setelah angka 0 mula-mula.
   Karena J = 7, berarti terdapat 7 putaran, yaitu: {0,1,0}, {0,1,2,1,0}, {0,-1,0}, {0,-1,0}, {0,1,2,1,0}, {0,-1,0}, dan {0,-1,-2,-1,-2,0}.

5. Untuk setiap putaran dan untuk setiap *state* x $\neq$ 0, hitung frekuensi dari masing-masing *state* didalam setiap putaran.

Pada langkah ini, pilih *state* x $\neq 0$ yang mewakili koleksi dari nilai x yang ada, misalnya $1 \leq x \leq 7$ atau $-7 \leq x \leq -1$. Dalam contoh ini, dipilih *state* $-4 \leq x \leq 4$.

Dari contoh yang telah kita miliki, akan diperoleh:

Tabel 4. 2 Frekuensi masing-masing *state* dalam setiap putaran.

State x	Putaran 1 {0,1,0}	Putaran 2 {0,1,2,1,0}	Putaran 3 {0,-1,0}	Putaran 4 {0,-1,0}	Putaran 5 {0,1,2,1,0}	Putaran 6 {0,-1,0}	Putaran 7 {0,-1,-2,-1,-2,0}
-4	0	0	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	2
-1	0	0	1	1	0	1	2
1	1	2	0	0	2	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0

6. Untuk masing-masing *state* x pada langkah 5, hitung $v_k(x)$. $v_k(x)$

   $v_k(x)$ = banyaknya putaran dimana *state x* dikunjungi tepat *k* kali dari seluruh putaran yang ada, dimana *k* = 0, 1, 2, …, 5.

   Sebagai contoh dari langkah 5 diatas, untuk *state* (–1) :

   $v_0(-1)$ = 3 (menyatakan *state* –1 dikunjungi tepat 0 kali di 3 putaran)

   $v_1(-1)$ = 3 (menyatakan *state* –1 dikunjungi tepat 1 kali di 3 putaran)

   $v_2(-1)$ = 1 (menyatakan *state* –1 dikunjungi tepat 2 kali di 1 putaran)

   $v_3(-1) = v_4(-1) = v_5(-1) = 0$

   Apabila $v_k(x)$ dituliskan dalam bentuk tabel, maka akan didapat tabel sebagai berikut:

Tabel 4. 3 : Tabel $v_k(x)$ untuk contoh ilustrasi.

State x	Banyaknya Putaran					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	≥ 5
-4	7	0	0	0	0	0
-3	7	0	0	0	0	0
-2	6	0	1	0	0	0
-1	3	3	1	0	0	0
1	4	1	2	0	0	0
2	5	2	0	0	0	0
3	7	0	0	0	0	0
4	7	0	0	0	0	0

7. Lakukan uji kerandoman untuk masing-masing *state x* dengan uji Chi-Square.

Pada langkah 1 telah dijelaskan bahwa uji kerandoman dilakukan dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $$\mathrm{P}\left(\xi(x)=0\right)=\pi_0(x)=1-\frac{1}{2|x|}$$

$$\mathrm{P}\left(\xi(x)=k\right)=\pi_k(x)=\frac{1}{4x^2}\left(1-\frac{1}{2|x|}\right)^{k-1}$$

H_1 : Tidak demikian

Dari hipotesis tersebut, dapat dilihat bahwa akan dilakukan pengujian apakah data observasi yang ada pada langkah 6 memiliki distribusi yang sesuai dengan hipotesis yang ada. Karena data yang dimiliki merupakan data dalam bentuk kelompok yang terbagi dalam 6 kategori, maka untuk melakukan uji kesesuaian akan digunakan uji Chi-Square Goodness of Fit, seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.7.

Oleh karena itu, untuk masing-masing *state* x pada langkah 6,

hitung statistik uji $\chi^2 = \sum_{k=0}^{5} \frac{\left(v_k(x) - J.\pi_k(x)\right)^2}{J.\pi_k(x)}$,

dimana: χ^2 memiliki distribusi pendekatan ke $\chi^2_{(5)}$, sesuai dengan penjelasan pada subbab 2.7.

$v_k(x)$ = banyaknya putaran dimana *state x* dikunjungi *k* kali, *k* = 0,1,2,3,4.

$v_5(x)$ = banyaknya putaran dimana *state x* dikunjungi ≥ *5* kali.

$\pi_k(x) = \mathrm{P}\left(\xi(x) = k\right)$, k = 0, 1, 2, 3, 4.

$\pi_5(x) = \mathrm{P}\left(\xi(x) \geq 5\right) = \frac{1}{2|x|}\left[1 - \frac{1}{2|x|}\right]^4$, dari persamaan (3.28).

J = banyaknya putaran (*cycle*) pada barisan S'. Supaya uji Chi-Square ini berlaku, maka perlu syarat untuk J, yaitu $J.\min \pi_k(x) \geq 5$.

Untuk menghitung statistik uji χ^2 diperlukan $\pi_k(x)$, dimana :

$$\pi_0(x) = \mathrm{P}\left(\xi(x) = 0\right) = 1 - \frac{1}{2|x|}$$

$$\pi_k(x) = \mathrm{P}\left(\xi(x) = k\right) = \frac{1}{4x^2}\left(1 - \frac{1}{2|x|}\right)^{k-1}, \text{ k = 1, 2, 3, 4.}$$

$$\pi_5(x) = \mathrm{P}\left(\xi(x) \geq 5\right) = \frac{1}{2|x|}\left[1 - \frac{1}{2|x|}\right]^4$$

dan berlaku $\pi_k(x) = \pi_k(-x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Nilai probabilitas-probabilitas tersebut apabila dituliskan dalam bentuk tabel, maka akan diperoleh Tabel 4.4 dibawah ini:

Tabel 4. 4 : Nilai-nilai Probabilitas $\pi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

state x	$\pi_0(x)$	$\pi_1(x)$	$\pi_2(x)$	$\pi_3(x)$	$\pi_4(x)$	$\pi_5(x)$
1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.03125
2	0.75	0.0625	0.046875	0.03515625	0.026367188	0.079101563
3	0.833333333	0.027777778	0.023148148	0.019290123	0.016075103	0.080375514
4	0.875	0.015625	0.013671875	0.011962891	0.010467529	0.073272705
5	0.9	0.01	0.009	0.0081	0.00729	0.06561
6	0.916666667	0.006944444	0.006365741	0.005835262	0.00534899	0.058838895
7	0.928571429	0.005102041	0.004737609	0.004399209	0.004084979	0.053104733
8	0.9375	0.00390625	0.003662109	0.003433228	0.003218651	0.048279762

Selanjutnya, hitung statistik uji χ^2 untuk *state x* = -1 :

$$\chi^2 = \frac{(3-7.(0,5))^2}{7.(0,5)} + \frac{(3-7.(0,25))^2}{7.(0,25)} + \frac{(1-7.(0,125))^2}{7.(0,125)} + \frac{(0-7.(0,0625))^2}{7.(0,0625)} +$$

$$\frac{(0-7.(0,03125))^2}{7.(0,03125)} + \frac{(0-7.(0,03125))^2}{7.(0,03125)} = 1,85714285$$

Dengan mengikuti cara yang sama seperti *state x* = -1, maka hasil χ^2 untuk masing-masing *state* x diperlihatkan pada tabel dibawah ini:

Tabel 4. 5 : Hasil perhitungan statistik uji χ^2 untuk masing-masing *state x*.

State x	χ^2
-4	1
-3	1.4
-2	2.904761905
-1	1.857142857
1	2.714285714
2	6.904761905
3	1.4
4	1

8. Aturan Keputusan

Apabila dipergunakan tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}01$, maka dari tabel Chi-Square (Hogg,Craig. Introduction to Mathemetical Statistics) diperoleh nilai $\chi^2_{(5)}$ = 15,1.

Karena dari Tabel 4.5 untuk masing-masing *state* diperoleh nilai statistik uji $\chi^2 < \chi^2_{(5)}$ ($\chi^2_{(5)}$ = 15,1) maka diambil kesimpulan bahwa H_0 tidak ditolak. Karena H_0 tidak ditolak, berarti masing-masing *state x* sesuai dengan distribusi banyak singgah $\xi(x)$ yang diharapkan. Hal ini berarti barisan bilangan biner ε pada contoh bersifat random.

9. Catatan

Uji Chi-Square diatas dapat dilakukan dengan syarat untuk J, yaitu $J.\min \pi_k(x) \geq 5$.

Pada contoh kasus diatas, karena digunakan *state* $-4 \leq x \leq 4$ maka nilai minimum $\pi_k(x)$ yang diambil adalah $\pi_4(4)$ = 0,01. Sehingga nilai J harus memenuhi syarat J $\geq$ 500. Untuk memperoleh nilai J $\geq$ 500, berarti nilai banyaknya angka pada barisan bilangan biner ε harus diperbanyak. Disarankan dalam jurnal yang dikeluarkan oleh *National Institute of Standar and Technology* (NIST, *Special Publication* 800-22, *with revisions dated May* 15, 2001) data yang digunakan sebanyak n $\geq$ 1.000.000 bit bilangan random.

BAB 5
KESIMPULAN

Setelah dibahas mengenai distribusi banyak singgah dan penggunaannya dalam melakukan uji kerandoman, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Pada random walk sederhana, dapat dibuat suatu variabel banyak singgah dalam 1 satu putaran berhingga, dimana variabel banyak singgah memiliki distribusi *zero-modified geometric*.
2. Distribusi banyak singgah dapat digunakan untuk melakukan uji kerandoman pada barisan bilangan biner.
3. Namun dalam melakukan uji kerandoman barisan bilangan biner dengan menggunakan banyak singgah, diperlukan data sampel barisan bilangan biner yang cukup besar, yaitu dengan minimal banyaknya putaran sebesar 500.

DAFTAR PUSTAKA

Sunandi, Netty. 2010. *Distribusi Banyak Singgah dari Suatu Random Walk dan Suatu Uji Kerandoman*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

M. Baron dan A.L. Rukhin. 1999 . *Distribution of the Number of Visits For Random Walk*. Communications in Statistics: Stochastic Model. Vol.15, page 593-597.

Rukhin,A., et al. 2001. *A Statistical Test Suit for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*. National Institute of Standard and Technology, May 15.

H.M. Taylor dan S. Karlin. 1993. *An Intoduction to Stochastic Modeling*. Academic Press.

Hogg, R.V. and A.T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics* (fifth edition), New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Klugman, Stuart A., Harry J. Panjer, and Gordon E. William. 2004. *Loss Model From Data to Decision,* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Pal Revesz. 1990. *Random Walk in Random and Non-random Environtments*. Singapore: World Scientific.

Ross, Sheldon. 2002. *A First Course in Probability, 6th edition*. Prentice Hall.

Lampiran 1

I = 1, berarti berlaku $p > q, x > 0$ atau $p < q, x < 0$.

Akibatnya :

(a) Untuk $p > q, x > 0$ akan diperoleh:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^x > 1 \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{p}{q}\right)^x - 1 > 0$$

Sehingga , $$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1\right| = \left(\frac{p}{q}\right)^x - 1$$

(b) Untuk $p < q, x < 0$ akan diperoleh:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^x > 1 \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{p}{q}\right)^x - 1 > 0$$

Sehingga , $$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^x - 1\right| = \left(\frac{p}{q}\right)^x - 1$$

Lampiran 2

Pembuktian bahwa χ^2 memiliki distribusi pendekatan ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas (r – 1).

Akan dibuktikan bahwa $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ memiliki distribusi pendekatan ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas (r – 1).

<u>Bukti</u>:

Andaikan diketahui variabel random $X_1 \sim b(n, p_1)$ sehingga fungsi probabilitasnya yaitu

$$f(x) = \binom{n}{x}(p_1)^x(1-p_1)^{n-x}$$, dimana $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Pertama, akan ditunjukan terlebih dahulu bahwa variabel Y = $\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$ berdistribusi limit ke $N(0,1)$ dengan menggunakan limit m.g.f.

Bukti:

Telah diketahui $X_1 \sim b(n, p_1)$, maka m.g.f. dari X_1 :

$$M_{X_1}(t) = E\left[e^{tX_1}\right] = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}(p_1)^x(1-p_1)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(p_1e^t)^x(1-p_1)^{n-x} = \left[(1-p_1)+p_1e^t\right]^n .$$

Kemudian mean dan variansi dari X_1 yaitu:

$$\mu = M_{X_1}'(0) = n\left[(1-p_1)+p_1e^0\right]^{n-1}(p_1e^0) = n\left[(1-p_1)+p_1\right]^{n-1}(p_1) = np_1$$

$$\sigma^2 = M_{X_1}''(0) - \mu^2 =$$

$$n\left[(1-p_1)+p_1e^0\right]^{n-1}(p_1e^0)+n(n-1)\left[(1-p_1)+p_1e^0\right]^{n-2}(p_1e^0)^2-(np_1)^2$$

$$= n(p_1)+n(n-1)(p_1)^2-(np_1)^2 = np_1(1-p_1).$$

dimana :

$$M_{X_1}{}'(t) = n\left[(1-p_1)+p_1e^t\right]^{n-1}\left(p_1e^t\right)$$

$$M_{X_1}{}''(0) = n\left[(1-p_1)+p_1e^t\right]^{n-1}\left(p_1e^t\right)+n(n-1)\left[(1-p_1)+p_1e^t\right]^{n-2}\left(p_1e^t\right)^2$$

Selanjutnya akan dicari m.g.f dari Y sebagai berikut :

$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right]$$

$$= E\left[\exp\left(t\left[\frac{X_1-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right]\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\frac{tX_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}-\frac{tnp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\frac{tX_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{tnp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\frac{tX_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]\cdot E\left[\exp\left(-\frac{tnp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]$$

$$= \left[(1-p_1)+p_1\cdot\exp\left(\frac{t}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n\cdot\left[\exp\left(-\frac{tnp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]$$

$$= \left[(1-p_1)+p_1\cdot\exp\left(\frac{t}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n\cdot\left[\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n$$

$$= \left[(1-p_1)\cdot\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)+p_1\cdot\exp\left(\frac{t}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n$$

$$= \left[(1-p_1)\cdot\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)+p_1\cdot\exp\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n$$

Akan dicari terlebih dahulu nilai dari $\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$ dan

$\exp\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$ dengan menggunakan Formula Taylor sebagai berikut :

Berdasarkan Formula Taylor, terdapat $\varepsilon_1(n)$ antara 0 dan $\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$

sedemikian sehingga berlaku :

$$\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$$

$$= 1+\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2+\frac{e^{\varepsilon_1(n)}}{3!}\cdot\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^3$$

$$= 1-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(tp_1)^2}{np_1(1-p_1)}-\frac{e^{\varepsilon_1(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}$$

Berdasarkan Formula Taylor, terdapat $\varepsilon_2(n)$ antara 0 dan $\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$

sedemikian sehingga berlaku :

$$\exp\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$$

$$= 1+\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2+\frac{e^{\varepsilon_2(n)}}{3!}\cdot\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^3$$

$$= 1+\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2(1-p_1)^2}{np_1(1-p_1)}+\frac{e^{\varepsilon_2(n)}}{6}\cdot\frac{t^3(1-p_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}$$

Karena berdasarkan Formula Taylor telah diperoleh nilai dari

$\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$ dan $\exp\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)$ maka :

$$M_Y(t)$$

$$= \left[(1-p_1)\cdot\exp\left(-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)+p_1\cdot\exp\left(\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n$$

$$= \left[(1-p_1)\cdot\left(1-\frac{tp_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(tp_1)^2}{np_1(1-p_1)}-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) + \right.$$

$$\left. p_1\cdot\left(1+\frac{t(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2(1-p_1)^2}{np_1(1-p_1)}+\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3(1-p_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)\right]^n$$

, karena Formula Taylor.

$$= \left[1-p_1-\frac{tp_1(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(tp_1)^2(1-p_1)}{np_1(1-p_1)}-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3(1-p_1)}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}} + \right.$$

$$\left. p_1+\frac{tp_1(1-p_1)}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2p_1(1-p_1)^2}{np_1(1-p_1)}+\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3p_1(1-p_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right]^n$$

$$= \left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2p_1(1-p_1)}{np_1(1-p_1)}\cdot p_1-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3(1-p_1)}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2p_1(1-p_1)}{np_1(1-p_1)}\cdot(1-p_1)+\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3p_1(1-p_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right]^n$$

$$=$$

$$\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2p_1(1-p_1)}{np_1(1-p_1)}-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3(1-p_1)}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3p_1(1-p_1)^3}{np_1(1-p_1)\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right]^n$$

$$= \left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{n}-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3}{np_1\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3p_1(1-p_1)^2}{np_1\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right]^n$$

$$= \left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{n}+\frac{\psi(n)}{n}\right]^n$$, dimana

$$\psi(n)=\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{t^3p_1(1-p_1)^2}{p_1\sqrt{np_1(1-p_1)}}-\frac{e^{\varepsilon(n)}}{6}\cdot\frac{(tp_1)^3}{p_1\sqrt{np_1(1-p_1)}}$$

Untuk $n\to\infty$, $\varepsilon(n)\to 0$, maka akan diperoleh $\lim_{n\to\infty}\psi(n)=0$, berlaku untuk setiap *t*.

Kemudian selanjutnya, akan diperoleh limit m.g.f. dari Y sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} M_Y(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{n}+\frac{\psi(n)}{n}\right]^n = e^{t^2/2}$$, berlaku untuk setiap $t \in R$.

Karena didapat $\lim_{n\to\infty} M_Y(t) = e^{t^2/2}$, maka dapat diambil kesimpulan bahwa Y = $\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$ mempunyai distribusi limit ke $N(0,1)$.

Telah terbukti bahwa Y = $\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$ berdistribusi limit ke $N(0,1)$ untuk $n\to\infty$.

Sehingga, andaikan $G_n(y)$ menyatakan fungsi distribusi dari Y,dan $\Phi(y)$ menyatakan fungsi distribusi dari $N(0,1)$, maka pernyataan diatas dapat dituliskan kembali menjadi $\lim_{n\to\infty} G_n(y) = \Phi(y)$.

Selanjutnya, apabila $Z = Y^2$ maka Z akan berdistribusi limit ke $\chi^2_{(1)}$.

Bukti:

Misalkan $H_n(z)$ menyatakan fungsi distribusi dari Z, maka :

$H_n(z) = \Pr(Z \le z) = \Pr(Y^2 \le z) = \Pr\left(-\sqrt{z} \le Y \le \sqrt{z}\right) = G_n\left(\sqrt{z}\right) - G_n\left(-\sqrt{z}-\right)$

Kemudian, karena $\Phi(y)$ kontinu di setiap titik y, maka :

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z) = \lim_{n\to\infty} G_n\left(\sqrt{z}\right) - G_n\left(-\sqrt{z}\right) = \Phi\left(\sqrt{z}\right) - \Phi\left(-\sqrt{z}\right) = 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\,dw$$

.

Pada persamaan diatas, apabila $w^2 = v$ maka :

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z) = 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\,dw = 2\int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v/2}\,\frac{1}{2} v^{-1/2}\,dv = \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{1-1/2} e^{-v/2}\,dv =$$

$$\int_0^{z} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{1/2}} v^{1-1/2} e^{-v/2}\,dv$$

Persamaan diatas berlaku untuk $z \ge 0$. Jika $z < 0$ maka $\lim_{n\to\infty} H_n(z) = 0$. Sehingga $\lim_{n\to\infty} H_n(z)$ sama dengan fungsi distribusi dari sebuah variabel random yang berdistribusi $\chi^2_{(1)}$. Atau dengan perkataan lain, Z memiliki distribusi limit ke $\chi^2_{(1)}$.

Perhatikan kembali variabel random X_1, dimana $X_1 \sim b(n, p_1)$.

Andaikan $X_2 = n - X_1$ dan $p_2 = 1 - p_1$.

Jika digunakan variabel Q_1 sebagai pengganti Z, maka

$$Q_1 = Y^2 = \left(\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \right)^2 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2 - p_1(X_1 - np_1)^2 + p_1(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)}$$

$$= \frac{(1-p_1)(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} + \frac{p_1(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_1 - np_1)^2}{n(1-p_1)}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n - X_2 - n(1-p_2))^2}{np_2}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(-X_2 + np_2)^2}{np_2}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

Karena Q_1 mempunyai limit distribusi ke $\chi^2_{(1)}$ maka dapat dikatakan bahwa Q_1 mempunyai sebuah aproksimasi ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas 1, berlaku untuk bilangan bulat positif *n*. Hasil ini dapat diperluas sebagai berikut : Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$ mempunyai distribusi multinomial dengan parameter-parameter n, $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, dimana p_i menyatakan probabilitas terjadinya kejadian X_i ($i = 1, 2, \ldots, r-1$), $X_r = n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_{r-1})$, dan $p_r = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1})$. Sehingga distribusi multinomial ini mempunyai fungsi probabilitas sebagai berikut :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_r) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_{r-1}!x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_{r-1}^{x_{r-1}} p_r^{x_r}$$

Selanjutnya, definisikan Q_{r-1} dengan $Q_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$.

Sebelumnya telah dibuktikan bahwa untuk $n \to \infty$, Q_1 mempunyai limit distribusi ke $\chi^2_{(1)}$. Sehingga untuk $n \to \infty$, Q_{r-1} akan memiliki sifat yang sama dengan Q_1, yaitu Q_{r-1} mempunyai limit distribusi ke $\chi^2_{(r-1)}$. Atau dengan perkataan lain, Q_{r-1} mempunyai pendekatan ke distribusi Chi-Square dengan derajat bebas (r – 1), berlaku untuk bilangan bulat positif *n*.