



UNIVERSITAS INDONESIA

BINTANG QUARK DENGAN MODEL *BAG* M.I.T

SKRIPSI

AHMAD FAUZI

0706262073

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI FISIKA

DEPOK

DESEMBER 2011



UNIVERSITAS INDONESIA

BINTANG QUARK DENGAN MODEL *BAG* M.I.T

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar Sarjana Sains

AHMAD FAUZI

0706262073

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI FISIKA

KEKHUSUSAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL

DEPOK

DESEMBER 2011

Kupersembahkan untuk keluargaku tercinta.



HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Ahmad Fauzi

NPM : 0706262073

Tanda Tangan :



Tanggal : 27 Desember 2011




HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Ahmad Fauzi
NPM : 0706262073
Program Studi : Fisika
Judul Skripsi : Bintang Quark dengan Model *Bag* M.I.T

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Anto Sulaksono ()
Penguji I : Prof. Dr. Terry Mart ()
Penguji II : Dr. L. T. Handoko ()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 27 Desember 2011

KATA PENGANTAR


Alhamdulillah, berkat karunianya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik. Salawat dan salam tercurah kepada Rasullallah, rasul seluruh alam.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung, yakni:

- Bapak dan Ibu yang selalu memberikan doanya, jadi inget masa-masa dulu ya.
- Dr. Anto Sulaksono selaku pembimbing yang mau menerima saya sebagai mahasiswa bimbingannya, dan terima kasih atas nasehatnya selama ini.
- Para penguji yang mau meluangkan waktu untuk mahasiswa yang satu ini, saya hanya bisa berterimakasih.
- Para dosen dan staf departemen fisika.
- Teman - teman angkatan 2007 yang mau berteman dengan orang yang satu ini.
- Juga semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan tugas skripsi ini.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua, dan doakan penulis agar senantiasa diberi kelapangan di dunia dan akhirat.

Depok, 20 Desember 2011


Ahmad Fauzi

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ahmad Fauzi
NPM : 0706262073
Program Studi : *S-1 Reguler*
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non - exclusive Royalty - Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Bintang Quark dengan Model *Bag* M.I.T

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/ pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 20 Desember 2011

Yang menyatakan



(Ahmad Fauzi)

ABSTRAK

Nama : Ahmad Fauzi
Program Studi : S-1 Reguler
Judul Skripsi : Bintang Quark dengan Model *Bag* M.I.T

Pada tahun 1964, Gellman dan Zweig mengajukan hipotesis bahwa proton, neutron, dan hadron lainnya tersusun dari partikel elementer yang disebut quark. Setelah itu, Bodmer, Terazawa dan Witten mengajukan gagasan tentang adanya quark *strange* pada bintang kompak yang menyebabkan energi ikat quark *up*, *down*, *strange* lebih rendah dibandingkan energi ikat nuklir. Model yang mudah digunakan untuk mempelajari bintang quark yaitu dengan model *bag* MIT. Ukuran *bag* direpresentasikan oleh konstanta *bag*, B , dimana massa quark konstan. Pada temperatur $T = 0$, maka fraksi quark *up* konstan, sekitar 33%, sedangkan fraksi quark *down* turun diikuti fraksi quark *strange* yang naik. Fraksi quark *up* pada $T \neq 0$, tanpa penangkapan neutrino, sekitar 33%, namun pada $T \neq 0$, dengan penangkapan neutrino, fraksi quark *up* naik menjadi 42%. Massa bintang akan meningkat ketika nilai B turun.

Kata kunci: Persamaan keadaan, model *bag* MIT, materi quark.

Daftar Pustaka: 34 (1975-2011)

ABSTRACT

Name : Ahmad Fauzi
Study Program : S-1 Reguler
Title : Quark Stars with The M.I.T. Bag Model

In 1964, Gellman and Zweig proposed their hypothesis about the proton, the neutron, and all the other hadrons composed by elementary particle which were called quark. Afterwards, Bodmer, Terazawa and Witten proposed idea about strange quark in compact stars which binding energy of up, down, strange quark lower than nuclear. A simple model to learn quark stars is the MIT bag model. The size of the bag is represented by the bag constant, B , with mass of quark is constant. Temperature $T = 0$, the fraction of up quarks is constant, about 33%, the fraction of down quarks decreases followed by the increase of strange quarks fraction. The fraction of up quarks at $T \neq 0$, without neutrino trapping about 33%, whereas at $T \neq 0$, in case neutrino trapping, the fraction of up quarks increases to 42%. The maximum mass of the stars increases as the value B decrease.

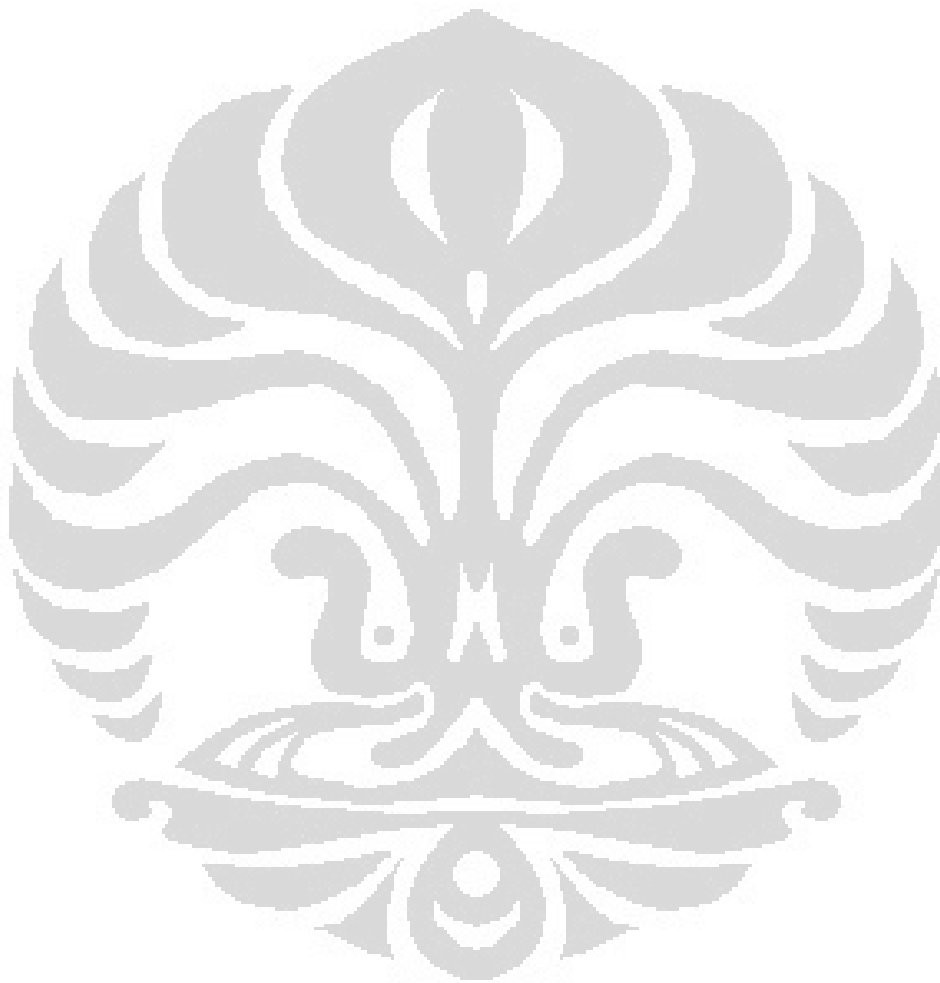
Keywords: Equations of state, MIT bag model, quark matter.

References: 34 (1975-2011)

Daftar Isi

Halaman Pengesahan	ii
Kata Pengantar	iii
Halaman Pernyataan Persetujuan Publikasi	iv
Abstrak	v
Daftar Isi	vii
Daftar Gambar	ix
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Batasan Penelitian	3
1.5 Metode Penelitian	3
2 Landasan Teori	4
2.1 Materi Quark	4
2.2 Persamaan Keadaan Materi Quark	6
2.2.1 Temperatur $T = 0$	8
2.2.2 Temperatur $T \neq 0$	12
2.3 Persamaan TOV	14
3 Hasil dan Pembahasan	17
3.1 Temperatur $T = 0$	17
3.2 Temperatur $T \neq 0$	18
3.3 <i>Bag</i> dan Massa Quark Sebagai Fungsi Kerapatan	22

4 Kesimpulan	28
A Persamaan TOV	29
B Termodinamika	38
C Model <i>Bag</i> M.I.T	42
Daftar Pustaka	45

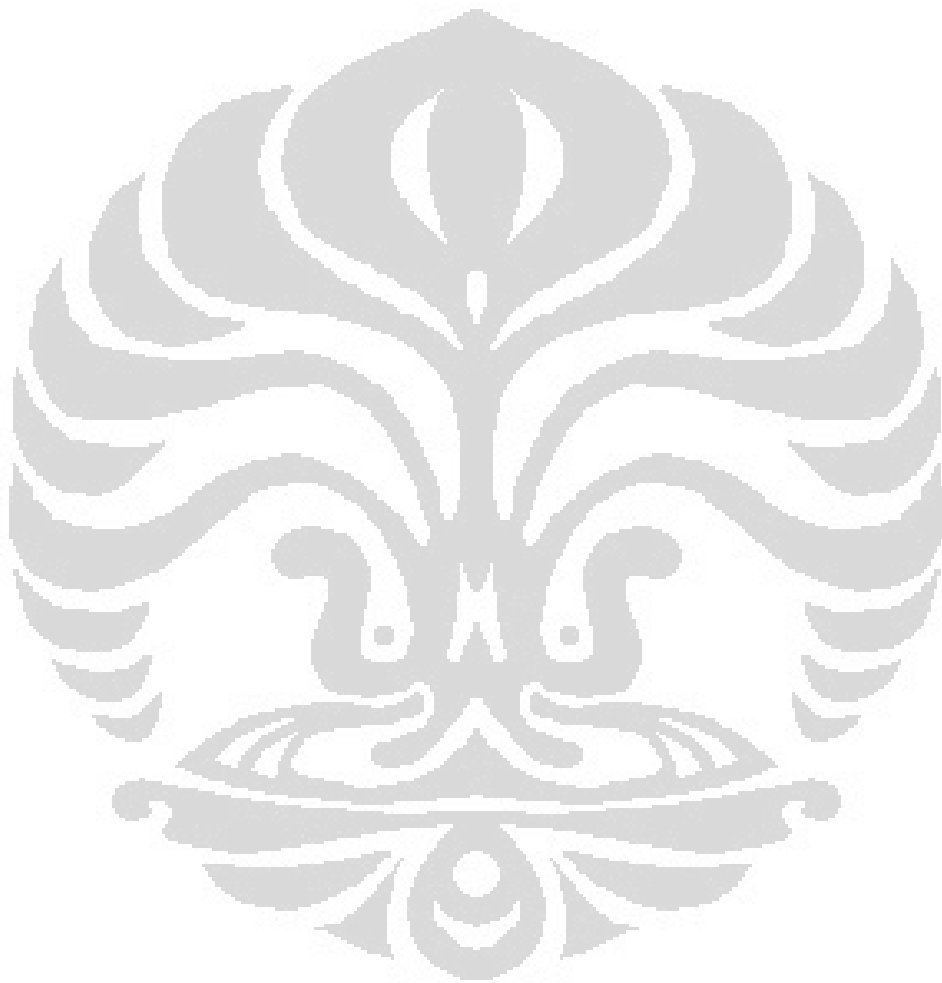


Daftar Gambar

2.1	Perbandingan energi per barion ^{56}Fe , dengan uds quark dan ud quark. Gambar diambil dari ref. [33].	5
2.2	Hubungan potensial kimia neutron dengan potensial elektron.	10
2.3	Jarak momentum Fermi antar quark. Diambil dari ref [25]	11
2.4	Massa-radius bintang Neutron.	16
3.1	Fraksi setiap quark $T = 0$ MeV.	17
3.2	(a) Hubungan kerapatan energi ϵ terhadap potensial kimia neutron μ_n , (b) kerapatan tekanan p terhadap potensial kimia neutron μ_n , (c) kerapatan energi ϵ terhadap kerapatan tekanan p pada $T = 0$	19
3.3	Pengaruh massa <i>strange</i> terhadap radius massa bintang dengan $B^{1/4} = 145$ MeV.	20
3.4	Perbandingan radius-massa bintang akibat efek c	20
3.5	Perbandingan fraksi tiap konstituen pada $T = 30$ MeV, dengan $T = 50$ MeV. Merah=quark <i>up</i> , biru=quark <i>down</i> , hijau=quark <i>strange</i> , hitam=elektron, dan coklat=muon.	22
3.6	Perbandingan radius dan massa untuk $T = 30$ MeV, $T = 50$ MeV; $B^{1/4} = 145$ MeV.	23
3.7	Perbandingan fraksi tiap konstituen pada $T = 50$ MeV; (a) $Y_{\nu_e} = 0$, (b) $Y_{Le} = 0.4$. Merah=quark <i>up</i> , biru=quark <i>down</i> , hijau=quark <i>strange</i> , hitam=elektron, coklat=muon, dan emas=neutrino elektron.	23
3.8	Perbandingan radius massa pada $T = 50$ MeV; $Y_{\nu_e} = 0$ dengan $Y_{Le} = 0.4$	24
3.9	(a) <i>Bag</i> fungsi kerapatan, (b) perbandingan $p(\epsilon)$; <i>bag</i> konstan dengan <i>bag</i> fungsi kerapatan.	25
3.10	Massa quark fungsi kerapatan.	25

3.11 Perbandingan radius massa bintang quark: $B^{1/4} = 145$ MeV
dengan $B(\rho)$ 26

3.12 Bintang quark dengan persamaan keadaan $\epsilon = 3p + 4B$: (a)
Radius massa bintang quark, (b) kerapatan energi ϵ fungsi radius. 27



Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Setelah penemuan neutron oleh Chadwick pada tahun 1932, maka bermunculan teori tentang adanya materi yang tersusun dari neutron, dan pada tahun 1934 Baade dan Zwicky mengajukan teori tentang adanya bintang yang disebut dengan bintang neutron yang merupakan hasil akhir transisi bintang normal akibat mekanisme ledakan supernova [15]. Dengan menggunakan teori relativitas umum Einstein, maka pada tahun 1939, Oppenheimer dan Volkoff, berhasil memecahkan problem dari persamaan medan Einstein untuk bintang relativistik [7].

Pada tahun 1964, Murray Gellman dan George Zweig mengajukan hipotesis, bahwa proton, neutron, dan semua partikel lainnya, yang dikenal pada saat itu, bukan merupakan partikel elementer, tetapi merupakan partikel yang disusun dari sesuatu yang lebih kecil lagi, yang disebut quark [4]. Pada tahun 1967, eksperimen elektron proton scattering pada energi tinggi yang dilakukan di Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), menunjukkan tentang kebenaran adanya quark. Konsep tentang quark, memberi konsekuensi tentang adanya bintang yang disusun dari materi quark.

Persamaan keadaan bintang quark, yang sebenarnya tidak diketahui secara pasti hingga saat ini, dapat dipelajari dengan menggunakan model persamaan keadaan bintang neutron. Beberapa model persamaan keadaan bintang neutron yang sudah diusulkan oleh orang, salah satunya adalah model *bag* MIT yang dikembangkan di Massachusetts Institute of Technology pada tahun 1970-an. Pada awalnya, model ini digunakan untuk melukiskan hadron [12], tetapi, pada perkembangannya model ini digunakan juga sebagai salah satu model un-

tuk melukiskan materi-materi yang tersusun dari quark-quark. Dalam model *bag* MIT, quark-quark dianggap bebas yang terkurung dalam ruang terbatas yang disebut *bag* [4].

Sebagai suatu langkah pertama pada skripsi ini, digunakan model *bag* MIT untuk mempelajari persamaan keadaan dari materi yang tersusun dari quark, baik untuk kasus neutrino yang tidak terperangkap maupun yang terperangkap untuk $T \neq 0$. Hal ini penting dilakukan sebelum melangkah lebih lanjut dengan menggunakan model yang lebih realistis.

1.2 Perumusan Masalah

Bintang quark merupakan bintang pada keadaan murni quark, sehingga dibutuhkan persamaan keadaan yang dapat menggambarkan keadaan bintang quark tersebut. Persamaan keadaan bintang quark dapat diperoleh dari model yang digunakan dan relasi termodinamika. Dengan mengetahui persamaan keadaan bintang quark, maka muncul hubungan antara efek temperatur terhadap tekanan, dan kerapatan energi yang merupakan input untuk persamaan TOV.

Selain itu, efek temperatur memiliki pengaruh pada peristiwa *neutrino trapping* (penangkapan neutrino), sehingga persamaan keadaan mengalami perubahan dikarenakan adanya neutrino yang terperangkap di materi.

Bagaimana kedua hal tersebut diatas dapat diketahui hubungannya secara eksplisit dan kuantitatif, adalah masalah yang akan ditangani pada skripsi ini.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian yang dilakukan oleh penulis bertujuan:

1. Mengetahui persamaan keadaan bintang quark pada $T = 0$, sehingga diperoleh gambaran jelas tentang fenomena-fenomena yang terjadi pada $T = 0$.
2. Selain pada $T = 0$, dipelajari persamaan keadaan bintang quark pada $T \neq 0$, sehingga hubungan antara efek temperatur dengan variabel-variabel lainnya, seperti tekanan dan energi dapat dianalisa.
3. Secara teori, ketika $T \neq 0$, lintasan bebas rata-rata dari neutrino menjadi lebih kecil dibandingkan radius bintang [30], akibatnya neutrino menjadi

terperangkap. Sehingga efek neutrino pada persamaan bintang quark juga dipelajari.

1.4 Batasan Penelitian

1. Pada penelitian yang dilakukan, penulis membatasi diri dengan hanya mempelajari persamaan keadaan bintang quark hanya pada keadaan fase murni quark, tidak dalam keadaan fase campuran.
2. Penulis dalam mengerjakan penelitian menganggap bintang quark memiliki *crust* yang sangat tipis, sehingga efek *crust* diabaikan.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan oleh penulis dilakukan secara analitik dan numerik. Sebelumnya penulis juga melakukan studi literatur untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas mengenai masalah materi quark di bintang kompak.

Bab 2

Landasan Teori

2.1 Materi Quark

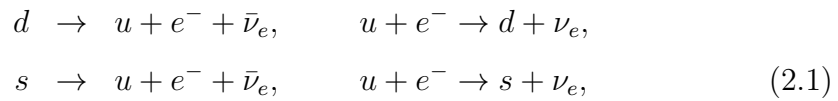
Setelah Murray Gellman dan George Zweig mengemukakan gagasan tentang partikel elementer, yang disebut quark, maka banyak studi lanjutan untuk mempelajari fenomena quark, baik dengan membuat model untuk menjelaskan quark, atau dengan eksperimen, seperti eksperimen yang dilakukan di Stanford Linear Accelerator Center (SLAC).

Fase quark terjadi pada keadaan *ultra high density*, akibat adanya tekanan yang tinggi pada fase materi nuklir. Pada keadaan ini, memungkinkan terbentuknya tekanan degenerasi quark gas Fermi [13].

Pada tahun 1965, Ivanenko-e Kordgelaide mengusulkan adanya *quarkian core* dalam bintang yang sangat rapat. Pada era tahun 1970-an, muncul gagasan bahwa bintang neutron merupakan kandidat kuat dimana fase materi quark dapat terjadi, dan pada tahun ini pula timbul gagasan tentang bintang quark, murni quark.

Arnold Bodmer, pada tahun 1971, mengajukan ide tentang runtuhnya inti menjadi quark *up*, *down*, dan *strange*. Bodmer juga menyatakan bahwa runtuhnya inti terjadi pada keadaan temperatur sangat tinggi, dan akibat runtuhnya inti, dapat menyebabkan terjadinya pembentukan *compact massive black*, yang merupakan kandidat untuk pembentukan *dark matter* [4].

Ketika materi nuklir berada pada kondisi tekanan yang sangat besar, materi nuklir diperkirakan menuju fase transisi ke keadaan materi quark yang tidak terkurung (*deconfined quark metter*) [14], sehingga proses URCA yang berlangsung pada bintang quark

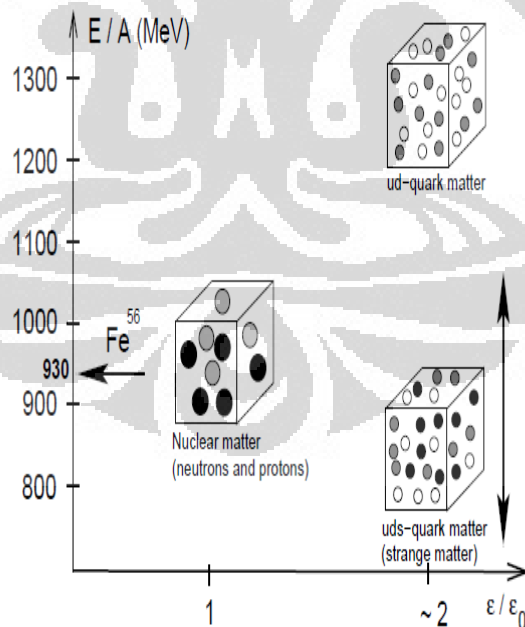


dari reaksi tersebut, maka

$$\mu_d = \mu_s \rightarrow \mu_u + \mu_{e^-} + \mu_{\bar{\nu}_e}.
 \tag{2.2}$$

Kehadiran quark *strange* di dalam bintang kompak diajukan oleh Bodmer 1971, dan kemudian teori tentang quark *strange* dikembangkan lagi oleh Terazawa dan Witten [4, 33]. Secara teori, kehadiran quark *strange* akan menyebabkan energi ikat sistem menjadi turun, akibatnya sistem akan lebih stabil dibandingkan materi nuklir, sebagaimana yang diilustrasikan oleh Gambar 2.1.

Kehadiran quark *strange*, seperti diilustrasikan oleh Gambar 2.1, disebut dengan *strange quark hypothesis* [33], dimana energi per barion uds quark akan lebih kecil dibandingkan energi per barion ud quark dan ^{56}Fe . Inilah dasar keyakinan orang tentang adanya bintang quark yang stabil.



Gambar 2.1: Perbandingan energi per barion ^{56}Fe , dengan uds quark dan ud quark. Gambar diambil dari ref. [33].

2.2 Persamaan Keadaan Materi Quark

Salah satu masalah yang dihadapi oleh fisikawan, yaitu tentang materi nuklir pada kerapatan tinggi [27] atau materi quark, yang diagram fase dari materi quark itu sendiri masih banyak belum yang dimengerti, baik secara teori maupun eksperimen [29].

Untuk mempelajari materi quark, khususnya dalam hal ini quark didalam bintang, maka kita harus mempelajari persamaan keadaan yang menggambarkan variabel variabel yang berada didalam sistem tersebut, seperti tekanan, energi, kerapatan, komposisi sistem, dan temperatur [15], sehingga didapatkan informasi tentang fenomena-fenomena apa yang terjadi pada sistem. Dengan menggunakan relasi termodinamika, kerapatan energi, tekanan, dan kerapatan quark, dimana f menyatakan *flavor* quark

$$\begin{aligned}\sum_f \epsilon_f &= \sum_f \frac{\gamma_f}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k \sqrt{k^2 + m_f^2} (f_+ + f_-), \\ \sum_f p_f &= \sum_f \frac{1}{3} \frac{\gamma_f}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_f^2}} (f_+ + f_-), \\ \sum_f \rho_f &= \sum_f \frac{1}{3} \frac{\gamma_f}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k (f_+ - f_-),\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan fungsi distribusi Fermi Dirac partikel,

$$f_+ = (\exp\{[E(k) - \mu_f]/T\} + 1)^{-1},$$

dan fungsi distribusi Fermi Dirac antipartikel,

$$f_- = (\exp\{[E(k) + \mu_f]/T\} + 1)^{-1},$$

$$E(k) = \sqrt{k^2 + m_f^2},$$

$\gamma_f \equiv$ faktor *degeneracy* quark=6.

Sistem, dalam hal ini bintang quark, bila berada pada keadaan seimbang, maka terjadi keseimbangan β , yang terdiri dari netralitas muatan

$$\sum_f q_f \rho_f - \sum_l q_l \rho_l = 0,\tag{2.4}$$

dan keseimbangan potensial kimia dari quark [24]

$$\begin{aligned}\mu_u &= \frac{1}{3} \left[\mu_n - 2(\mu_e - \mu_{\nu_e}) \right], \\ \mu_d &= \mu_s = \frac{1}{3} \left[\mu_n + (\mu_e - \mu_{\nu_e}) \right],\end{aligned}\tag{2.5}$$

dengan l menyatakan lepton.

Selain relasi termodinamika, dan keseimbangan β , diperlukan pula model yang cocok untuk menghubungkan persamaan keadaan keseluruhan sistem tersebut, yang kemudian dari model itu, diperoleh hubungan $p(\epsilon)$ yang merupakan input persamaan TOV.

Pada kerapatan tinggi, maka setidaknya ada beberapa model yang diper-
timbangkan, dua model yang paling dikaji orang, yaitu:

1. Model *bag* MIT.
2. Model Nambu Jona-Lasinio (model NJL).

Pada penelitian yang dilakukan oleh penulis, penulis menggunakan model *bag* MIT. Model *bag* MIT didasari pada fenomena kurungan (*confinement*), model ini banyak digunakan untuk menggambarkan materi quark-gluon pada temperatur dan kerapatan tinggi. Pada model *bag* MIT, hadron terdiri dari quark bebas, yang terkurung dalam ruang terbatas yang disebut *bag* [5]. Model *bag* MIT menganggap massa quark konstant, dapat dilihat pada Tabel 2.1, dan quark terkurung didalam wilayah atau kurungan terbatas, yang besarnya diparameterisasi oleh suatu konstanta fenomenologis, yang disebut konstanta *bag* B , sehingga semua informasi yang belum diketahui mengenai sistem quark, seperti interaksi antar quark, tersimpan didalam konstanta *bag* tersebut. *Bag* distabilkan oleh bentuk $g^{\mu\nu}B$ yang dimasukkan ke tensor energi-momentum $T^{\mu\nu}$. Konstanta *bag*, bernilai negatif untuk $\epsilon_{\text{vacuum}} = -B$, dan positif untuk $p_{\text{vacuum}} = B$, sehingga untuk tekanan total konstituen p_f , dan kerapatan energi total ϵ diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_f p_f &= p + B, \\ \epsilon &= \sum_f \epsilon_f + B, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $145 \text{ MeV} < B^{1/4} < 162 \text{ MeV}$ [25].

Sedangkan pada model NJL, massa quark dan parameter *bag* tidaklah konstan, melainkan bergantung pada kerapatan [16, 19]

$$\begin{aligned} M_i &= m_{0i} - 4g_s\theta_i - 2g_t\theta_j\theta_k, \\ B_{eff} &= B_0 - B, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nama	Massa (MeV)	q(muatan)	bilangan barion
u	5	2/3	1/3
d	7	-1/3	1/3
s	150	-1/3	1/3

Tabel 2.1: Massa quark, muatan, dan bilangan barionnya.

dengan

$$\begin{aligned}
 B &= \eta N_c \sum_i \int_0^{\Lambda_0} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \left(\sqrt{k^2 + M_i^2} - \sqrt{k^2 + m_{oi}^2} \right) \\
 &\quad - 2g_s \sum_i \langle \bar{\psi}\psi \rangle_i^2 - 4g_t \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle, \\
 B_0 &= B_{\rho_u=\rho_d=\rho_s=0}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Indeks i,j,k, menunjukkan permutasi siklik, untuk lebih jelas mengenai model NJL, dapat dilihat pada referensi [5]. Tetapi untuk perhitungan secara numerik, kami membatasi diri hanya berkonsentrasi dengan model *bag* MIT.

2.2.1 Temperatur $T = 0$

Pada temperatur $T = 0$, relasi persamaan termodinamika dapat ditentukan dengan menghilangkan kontribusi antipartikel, dan distribusi Fermi Dirac menjadi fungsi theta, sehingga persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{aligned}
 \sum_f \epsilon_f &= \sum_f \gamma_f \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E(k) = \sum_f \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_f^2} \\
 &= \sum_f \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \frac{1}{4} \left[k_F (k_F^2 + m_f^2)^{3/2} - \frac{1}{2} m_f^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m_f^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} m_f^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m_f^2} + k_F}{m_f} \right) \right], \\
 \sum_f p_f &= \sum_f \frac{\gamma_f}{3} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_f^2}} = \sum_f \frac{1}{3} \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_f^2}} \\
 &= \sum_f \frac{\gamma_f}{6\pi^2} \frac{1}{4} \left[k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m_f^2} - \frac{3}{2} m_f^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m_f^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} m_f^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m_f^2} + k_F}{m_f} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pada proses pendinginan bintang, lintasan bebas rata-rata dari neutrino semakin besar dibandingkan radius bintang, maka pada $T = 0$, neutrino dianggap tidak terperangkap, $\nu_e = 0$, sehingga persamaan (2.5) menjadi

$$\begin{aligned}\mu_u &= \frac{\mu_n - 2\mu_e}{3}, \\ \mu_d &= \mu_s = \frac{\mu_n + \mu_e}{3},\end{aligned}\quad (2.10)$$

dengan menggunakan persamaan (2.4), maka netralitas muatan untuk $T = 0$

$$\sum_f \left(q_f \frac{k_f^3}{\pi^2} \right) - \frac{k_e^3}{3\pi^2} - \frac{k_\mu^3}{3\pi^2} = 0, \quad (2.11)$$

kemudian dengan menggunakan metode numerik, maka didapatkan hubungan potensial kimia elektron μ_e potensial kimia neutron μ_n yang ditunjukkan oleh Gambar 2.2.

Jika kita mencoba dengan pendekatan analitik, $m_u = m_d = m_e = 0$, dan kontribusi muon diabaikan pada persamaan keadaannya, maka diperoleh hasil

$$\mu_e \cong \frac{m_s^2}{4\mu} = \frac{3m_s^2}{4\mu_n}, \quad (2.12)$$

dengan

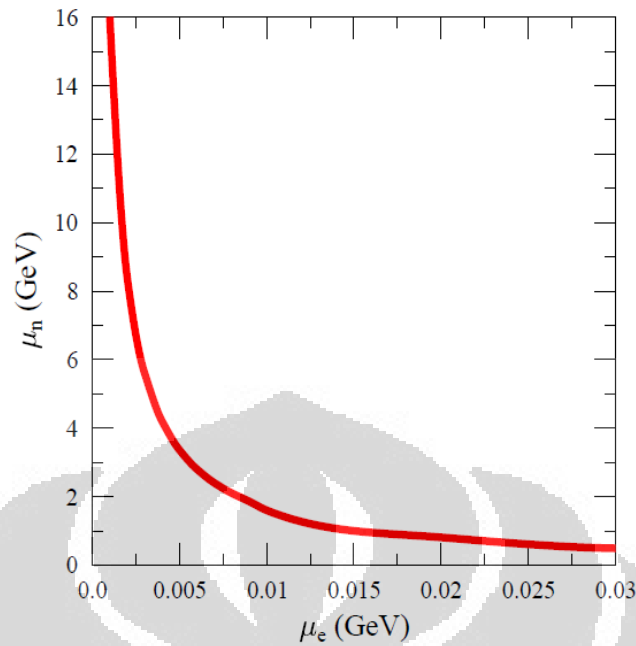
$$\mu = \frac{(\mu_u + \mu_d + \mu_s)}{3},$$

kedua hasil tersebut, baik secara analitik yang ditunjukkan oleh persamaan (2.12), menunjukkan hasil yang hampir sama bila kita memasukkan massa quark *up* dan *down*, serta memasukkan kontribusi muon pada proses perhitungan dengan metode numerik. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.2.

Dari hasil yang diperoleh dengan kedua metode tersebut, maka momentum Fermi setiap quark

$$\begin{aligned}k_u &= \mu_u \cong \mu - \frac{2\mu_e}{3} = \mu - \frac{m_s^2}{6\mu}, \\ k_d &= \mu_d \cong \mu + \frac{\mu_e}{3} = \mu + \frac{m_s^2}{12\mu}, \\ k_s &= \left(\mu_s^2 - m_s^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \mu - \frac{5m_s^2}{12\mu}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) menunjukkan jangkauan momentum Fermi antar quark berjarak $\frac{m_s^2}{4\mu}$, diilustrasikan oleh Gambar 2.3.



Gambar 2.2: Hubungan potensial kimia neutron dengan potensial elektron.

Sehingga apabila $m_s = \mu_e = 0$, maka setiap quark akan memiliki momentum Fermi yang sama μ , yang menunjukkan sistem berada pada keadaan netral [25].

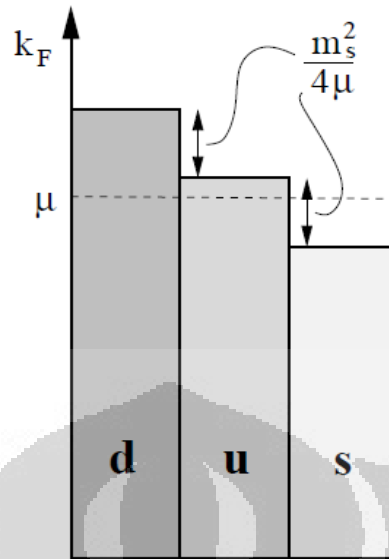
Dengan mengabaikan kontribusi dari lepton, maka didapat tekanan total konstituen p_f

$$\begin{aligned}
 \sum_f p_f &= p_u + p_d + p_s = \frac{\mu_u^4}{4\pi^2} + \frac{\mu_d^4}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fs}} dk k^4 \frac{1}{\sqrt{k^2 + m_s^2}} \\
 &\approx \frac{\mu^4}{4\pi^4} - \frac{\mu^2 m_s^2}{6\pi^2} + \frac{\mu^4}{4\pi^4} + \frac{\mu^2 m_s^2}{12\pi^2} + \frac{\mu^4}{4\pi^2} - \frac{2\mu^2 m_s^2}{3\pi^2} \\
 &\approx \frac{3\mu^4}{4\pi^2} - \frac{3\mu^2 m_s^2}{4\pi^2},
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

sehingga tekanan total p

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_f p_f - B \\
 &\approx \frac{3\mu^4}{4\pi^2} - \frac{3\mu^2 m_s^2}{4\pi^2} - B.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dengan cara yang sama, sebagaimana cara untuk mencari tekanan total sistem, maka untuk menentukan energi total sistem, perlu terlebih dahulu



Gambar 2.3: Jarak momentum Fermi antar quark. Diambil dari ref [25]

menentukan energi total konstituen ϵ_f

$$\begin{aligned}
 \sum_f \epsilon_f &= \epsilon_u + \epsilon_d + \epsilon_s = \frac{3\mu_u^4}{4\pi^2} + \frac{3\mu_d^4}{4\pi^2} + \frac{3}{\pi^2} \int_0^{k_{Fs}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_s^2} \\
 &\cong \frac{3\mu^4}{4\pi^2} - \frac{\mu^2 m_s^2}{2\pi^2} + \frac{3\mu^4}{4\pi^2} + \frac{\mu^2 m_s^2}{4\pi^2} + \frac{3\mu^4}{4\pi^2} - \frac{\mu^2 m_s^2}{2\pi^2} \\
 &\cong \frac{9\mu^4}{4\pi^2} - \frac{3\mu^2 m_s^2}{4\pi^2},
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

dari persamaan (2.6), maka energi total sistem

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \sum_f \epsilon_f + B \\
 &\cong \frac{9\mu^4}{4\pi^2} - \frac{3\mu^2 m_s^2}{4\pi^2} + B.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sehingga hubungan tekanan dengan energi total

$$p = \frac{\epsilon - 4B}{3} - \frac{\mu^2 m_s^2}{2\pi^2}. \tag{2.18}$$

Persamaan (2.15) memiliki bentuk yang hampir sama dengan persamaan yang ada pada referensi [2] yang melakukan perhitungan dengan beberapa faktor koreksi yang lebih rumit, yakni:

$$p = \frac{3\mu^4}{4\pi^2} a_4 - \frac{3\mu^2}{4\pi^2} a_2 - B, \tag{2.19}$$

dengan faktor $a_4 = (1 - c)$, c merupakan faktor koreksi QCD. Jika koreksi QCD dimasukkan kedalam perhitungan, maka $c \neq 0$ [2], koreksi pada QCD, memberikan besar $c = \frac{2\alpha_s}{\pi}$ [25], dengan α_s konstanta kopling interaksi kuat. Berdasarkan perhitungan yang dilakukan oleh [2], maka $c \cong 0.37$. Untuk materi quark yang terdiri dari 3 *flavors* yang tidak saling berinteraksi, maka $c=0$, sehingga $a_4 = 1$.

Koefisien $a_2 = (m_s^2 - 4\Delta^2)$, Δ merupakan energi *gap* yang muncul pada peristiwa superkonduktivitas pada quark. Superkonduktivitas pertama kali dikenal pada bidang materi terkondensasi yang terjadi ketika temperatur sangat rendah yang mengakibatkan gaya tarik menarik antar partikel sangat lemah. Teori mikroskopik mengenai superkonduktivitas pertama kali dikemukakan oleh Bardeen, Cooper dan Schrieffer [6], yang dikenal dengan teori BCS. Tetapi, peristiwa superkonduktivitas pada quark lebih rumit, karena tidak hanya memasukkan efek muatan, tetapi juga efek warna (*color-superconductivity*), untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada referensi [26].

2.2.2 Temperatur $T \neq 0$

Ketika awal pembentukan bintang, temperatur bintang dapat mencapai $T \sim 10^{11} K$ [25]. Pada saat temperatur tinggi tersebut, lintasan bebas rata-rata dari neutrino akan lebih kecil dibandingkan radius bintang, sehingga terjadi proses penangkapan neutrino (*neutrino trapping*) [30]. Proses evolusi bintang didominasi oleh proses difusi neutrino yang berpengaruh pada proses deleptonisasi dan pendinginan bintang [21], sehingga bila terjadi penangkapan neutrino, maka

$$\begin{aligned} Y_{Le} &= Y_e + Y_{\nu e} = 0.4, \\ Y_{L\mu} &= Y_\mu + Y_{\nu\mu} = 0, \\ \mu_e - \nu_e &= \mu_\mu - \nu_\mu. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Komposisi materi ketika terjadi penangkapan neutrino, secara signifikan berubah, yang disebabkan karena $Y_{Le} \sim 0.4$ [20]. Sehingga keseimbangan potensial kimia ditunjukkan oleh persamaan (2.10). Namun apabila pada $T \neq 0$, tidak ada penangkapan neutrino, maka keseimbangan potensial kimia ditunjukkan oleh persamaan (2.5). Jika kita melihat diagram fase QCD, maka pada temperatur T jauh lebih besar dari kerapatannya, dengan kata lain $T \gg \mu$, maka terjadi fase quark gluon plasma (QGP) [3].

Pada persamaan (2.3), jika kita menganggap semua massa quark dan lepton nol, maka

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_f (p_{T_{ID}} + p_{T_D}) - B, \\
 p_{T_{ID}} &= \sum_f \frac{\mu_f^4}{4\pi^2}, \\
 p_{T_D} &= \sum_f \frac{\gamma_f}{6\pi^2} \int_0^\infty k \frac{\partial E_f}{\partial k} \left[\frac{1}{e^{\frac{k-\mu_f}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{k+\mu_f}{T}} + 1} \right] k^2 dk \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_f \left[\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{k-\mu_f}{T}} + 1} + \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{k+\mu_f}{T}} + 1} \right] k^3 dk \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_f \left[\int_0^\infty \frac{(xT + \mu_f)^3}{e^x + 1} T dx + \int_0^\infty \frac{(x'T - \mu_f)^3}{e^{x'} + 1} T dx' \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_f \left[\int_0^\infty \frac{((xT)^3 + \mu_f^3 + 3(xT)^2\mu_f + 3xT\mu_f^2)}{e^x + 1} T dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{((x'T)^3 - \mu_f^3 - 3(x'T)^2\mu_f + 3x'T\mu_f^2)}{e^{x'} + 1} T dx' \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_f \int_0^\infty \frac{2(xT)^3 + 6xT\mu_f^2}{e^x + 1} T dx \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_f \left(2T^4 \frac{7\pi^4}{120} + 6T^2 \mu_f^2 \frac{\pi^2}{12} \right) = \sum_f \left(\frac{7\pi^2 T^4}{60} + \frac{T^2 \mu_f^2}{2} \right),
 \end{aligned}$$

sehingga

$$p = \sum_f \left(\frac{\mu_f^4}{4\pi^2} + \frac{7\pi^2 T^4}{60} + \frac{T^2 \mu_f^2}{2} \right) - B. \quad (2.21)$$

Sedangkan untuk energi total ϵ

$$\epsilon = \sum_f (\epsilon_{T_{ID}} + \epsilon_{T_D}) + B,$$

$$\epsilon_{T_{ID}} = \sum_f \frac{3\mu_f^4}{4\pi^2},$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{T \neq 0} &= \sum_f \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^\infty E_f \left[\frac{1}{e^{\frac{k-\mu_f}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{k+\mu_f}{T}} + 1} \right] k^2 dk \\
 &= \frac{3}{\pi^2} \sum_f \left[\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{k-\mu_f}{T}} + 1} + \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{k+\mu_f}{T}} + 1} \right] k^3 dk \\
 &= 3p_{T \neq 0},
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh hubungan tekanan p dan energi ϵ

$$\epsilon = 3p + 4B. \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) menunjukkan linearitas antara tekanan dengan kerapatan energi dengan kemiringan 3, dan konstanta $4B$. Jika $m_s = 0$ pada $T = 0$, maka persamaan (2.18) pun menjadi persamaan (2.22), sehingga persamaan (2.22) berlaku umum untuk semua temperatur bila massa quark diabaikan.

2.3 Persamaan TOV

Bintang kompak merupakan bintang yang dibentuk setelah peristiwa ledakan supernova, dan memiliki kerapatan yang sangat tinggi [25]. Bintang pada keadaan seimbang, maka tekanan yang berasal dari gravitasi memiliki besar yang sama dengan tekanan yang berasal dari materi nuklir atau quark yang berada di dalam bintang tersebut.

Dengan mengkontruksi tensor kurvatur Riemann, pada tahun 1915, Albert Einstein berhasil mengemukakan teori relativitas umumnya, yang berisikan penjelasan tentang distribusi materi pada suatu medan. Persamaan medan Einstein memiliki tiga kemungkinan [7], yaitu:

1. $G^{\mu\nu} = 0$, menyatakan ketidakhadiran distribusi materi.
2. $G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$, menyatakan kehadiran distribusi materi.
3. $G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}$, menyatakan kehadiran distribusi materi ditambah konstanta kosmologi.

Dalam ruang kosong, diluar bintang

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= 0 \\ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R &= 0 \\ g_{\alpha\mu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\nu}R &= 0 \\ R_{\alpha}^{\nu} &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\nu}R, \end{aligned}$$

jika $\alpha = \nu$, maka

$$R = 2R \implies R = 0 \implies R^{\mu\nu} = 0. \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) menunjukkan bahwa tidak ada distribusi materi, solusi dari persamaan ini disebut solusi Schwarzschild.

Pada bagian dalam bintang, terdapat distribusi materi, maka $G^{\mu\nu} \neq 0$, sehingga tensor momentum-energi $T^{\mu\nu} \neq 0$. $T^{\mu\nu}$ fluida sempurna

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}.$$

Pada Tahun 1939, Tolman Oppenheimer dan Volkoff berhasil memecahkan problem dari persamaan medan Einstein untuk bintang relativistik, statik, dan simetrik bola.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{(\epsilon + p)(M + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2M)}, \\ \frac{dM}{dr} &= 4\pi\epsilon r^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

dengan $G \equiv c \equiv \hbar = 1$. Detail penurunan persamaan (2.24) dapat dilihat di Lampiran A.

Untuk memecahkan persamaan TOV, persamaan (2.24), maka diperlukan input berupa ϵ (kerapatan energi) dan p (tekanan), dan dengan menyelesaikan persamaan TOV tersebut, maka akan diperoleh massa dan radius bintang.

Kondisi awal ditentukan dari pusat bintang, $r = 0$, dengan kata lain $M(r = 0) = 0$, dan pada permukaan $p = 0$, maka solusi dari persamaan TOV dapat dicari dengan proses iterasi dari $p(r = 0) \neq 0$ sampai $p(r = R) = 0$.

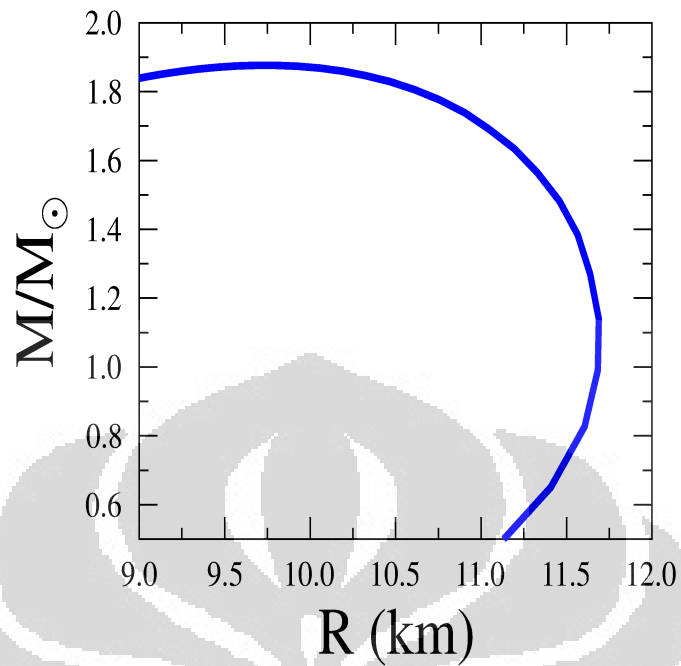
Sebagai contoh, bintang neutron, tanpa *crust*, dengan menggunakan relasi persamaan termodinamika [28], dan Lampiran B

$$dE = dQ - pdV,$$

pada $T = 0$, maka

$$\begin{aligned} p &= -\left. \frac{dE}{dV} \right|_{T=0} = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn}, \\ \epsilon &= nm_N A/Z + \epsilon_e(k_f). \end{aligned} \quad (2.25)$$

$A/Z \equiv$ jumlah nucleon per elektron, untuk ^{56}Fe , $A/Z = 2, 15$. Dengan menghitung persamaan keadaan bintang neutron, persamaan (2.25), maka didapat massa, dan radius bintang neutron, seperti pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4: Massa-radius bintang Neutron.

Dari persamaan keadaan persamaan (2.25), maka diperoleh massa maksimum bintang neutron $1.1 M_{\odot}$, dan radius sekitar 11.75 Km.

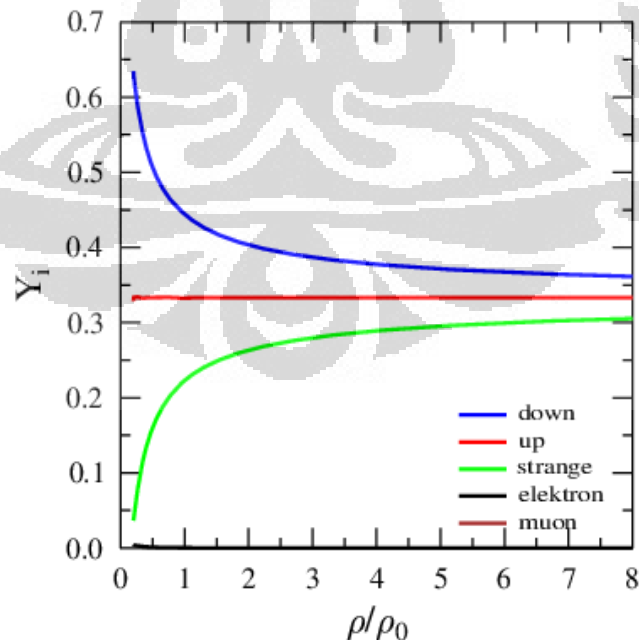
Untuk kasus bintang neutron yang lebih detail dan realistis dapat dilihat pada referensi [11, 22], sedangkan untuk kasus bintang quark dapat dilihat pada referensi [17, 19].

Bab 3

Hasil dan Pembahasan

3.1 Temperatur $T = 0$

Pada seksi 2.2, telah dijelaskan persamaan keadaan materi quark pada temperatur $T = 0$, maka pada seksi ini akan dibahas hasil yang diperoleh dari persamaan keadaan pada $T = 0$. Dengan menggunakan keseimbangan β , diperoleh fraksi untuk setiap quark yang ditunjukkan oleh Gambar 3.1. Pada Gambar 3.1, jumlah quark *up* menunjukkan harga konstan, sekitar 33%, sedangkan jumlah quark *down* turun dari 65% menuju 38%, turunnya quark



Gambar 3.1: Fraksi setiap quark $T = 0$ MeV.

down diikuti oleh quark *strange* yang naik dari 0% menuju 28% terhadap kenaikan kerapatan quark total dibarion. Turunnya jumlah quark *down*, dan naiknya quark *strange*, dikarenakan sistem ingin mencapai keadaan netralitas, sebagaimana diilustrasikan oleh Gambar. 2.3, dan persamaan (2.13). Pada $T = 0$ diperoleh jumlah elektron yang sangat kecil, dan jumlah muon hampir tidak ada, hal ini menunjukkan pada $T = 0$, lepton tidak terlalu memainkan peranan untuk mencapai keadaan netralitas sistem.

Pada Gambar 3.2, tekanan bernilai negatif pada potensial kimia neutron $0- \sim 900$ MeV, yang menunjukkan pada keadaan tersebut, sistem berada pada keadaan tidak stabil, dan hal ini disebabkan oleh kontribusi kontanta *bag* pada energi momentum tensor yang masih lebih besar dibandingkan tekanan konstituen. Pada Gambar 3.2 pula, kita melihat hubungan linearitas antara kerapatan energi ϵ dengan tekanan p .

Gambar 3.3 menunjukkan pengaruh massa quark *strange* m_s terhadap radius dan massa bintang dengan $B^{1/4} = 145$ MeV pada $T = 0$. Jika $m_s = 150$ MeV, maka radius bintang sekitar 10.5 Km dan massanya sekitar $1.8 M_{\odot}$. Namun, jika $m_s = 0$ MeV, maka radius bintang sekitar 11.7 Km dan massanya sekitar $2.0 M_{\odot}$.

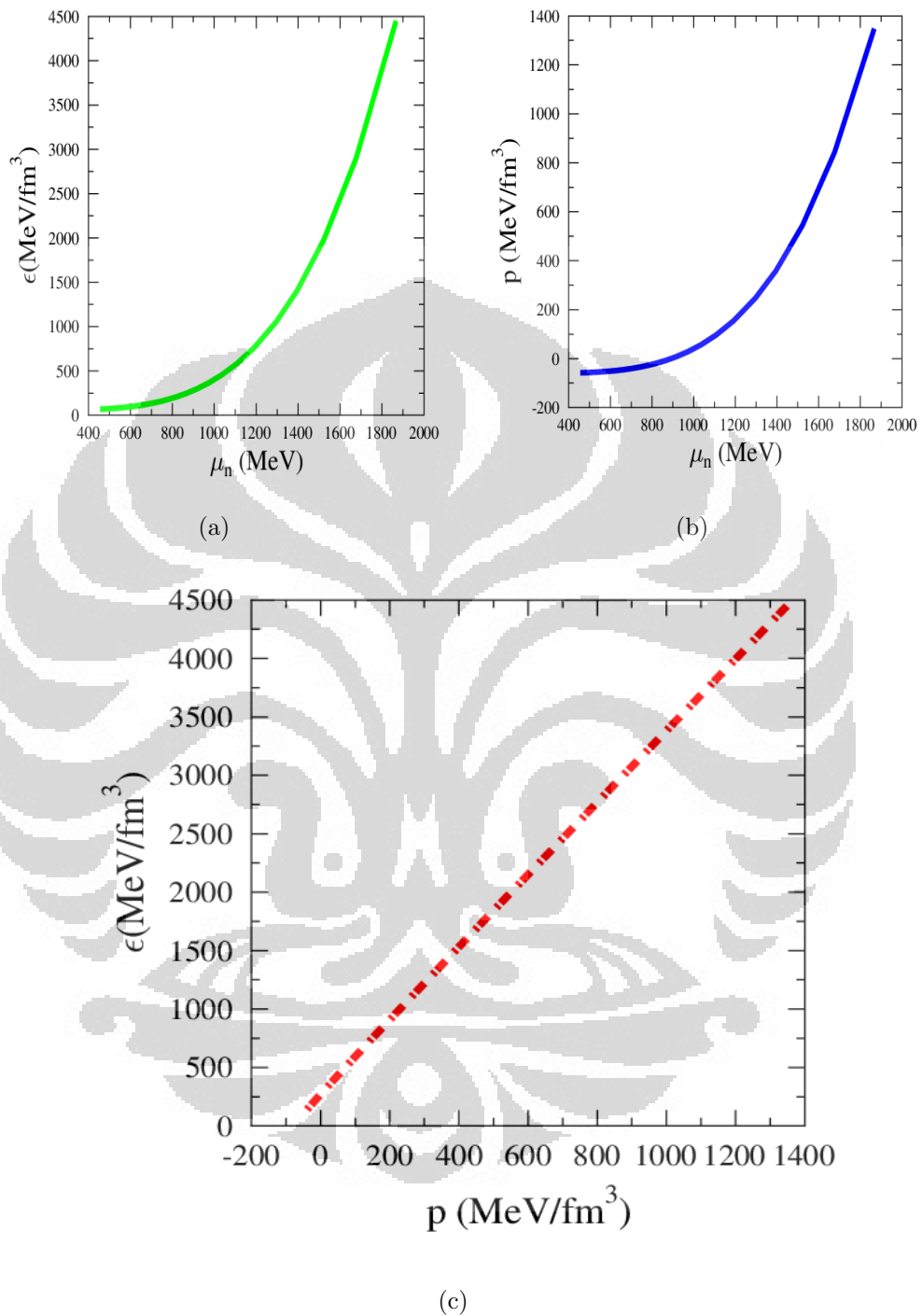
Pada pembahasan di bab 2, $T = 0$, terdapat faktor koreksi $a_4 = (1 - c)$, dengan nilai $c \sim 0.3$. Bila faktor c dimasukkan ke perhitungan, maka dihasilkan radius dan massa bintang yang ditunjukkan oleh Gambar 3.4.

Gambar 3.4 menunjukkan efek c yang cukup besar terhadap radius dan massa bintang, untuk $c = 0.3$, maka radius bintang sekitar 11.7 Km dan massanya sekitar $2.0 M_{\odot}$. Hasil ini menunjukkan bahwa untuk nilai konstanta *bag* yang sama, diperoleh radius dan massa bintang yang hampir sama dengan $m_s = 0$ MeV, dan $c = 0$.

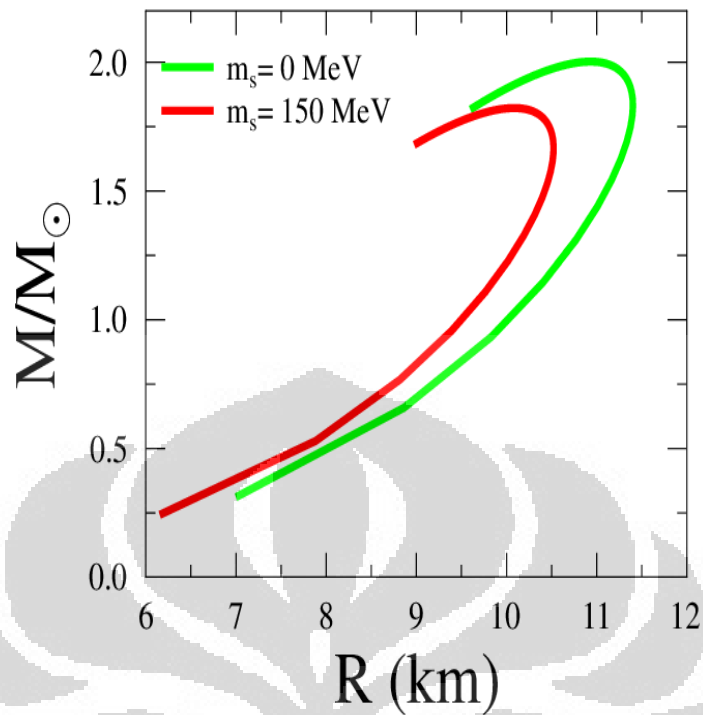
Pada persamaan (3.17), terdapat pula faktor koreksi $a_2 = m_s^2 - 4\Delta^2$, dengan nilai $\Delta \sim 10 - 100$ MeV [1]. Perhitungan yang dilakukan pada referensi [1, 25], menunjukkan hasil bahwa efek Δ tidak terlalu mengubah radius dan massa bintang.

3.2 Temperatur $T \neq 0$

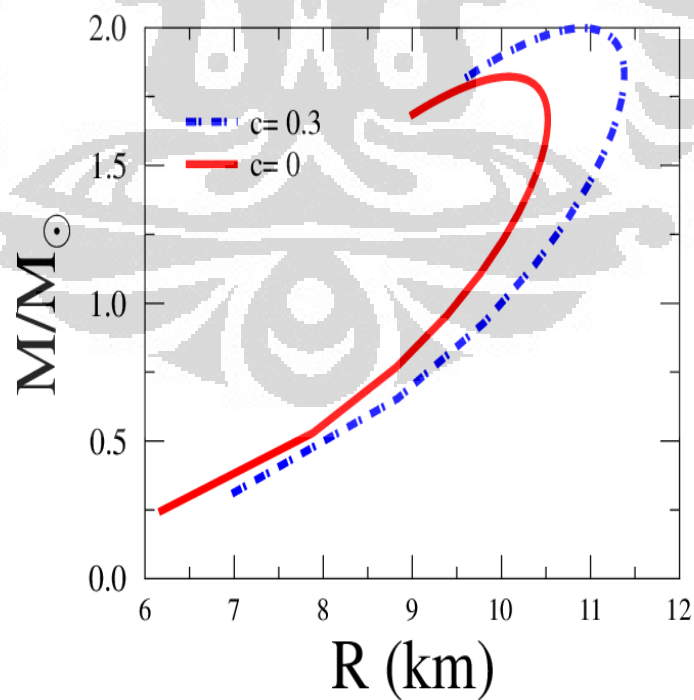
Pada proses pembentukan bintang, tekanan gravitasi dari luar menyebabkan reaksi nuklir didalam bintang, yang berakibatnya meningkatnya temperatur bintang. Dengan menggunakan persamaan keadaan untuk $T \neq 0$ (seksi 2.2),



Gambar 3.2: (a) Hubungan kerapatan energi ϵ terhadap potensial kimia neutron μ_n , (b) kerapatan tekanan p terhadap potensial kimia neutron μ_n , (c) kerapatan energi ϵ terhadap kerapatan tekanan p pada $T = 0$



Gambar 3.3: Pengaruh massa *strange* terhadap radius massa bintang dengan $B^{1/4} = 145$ MeV.



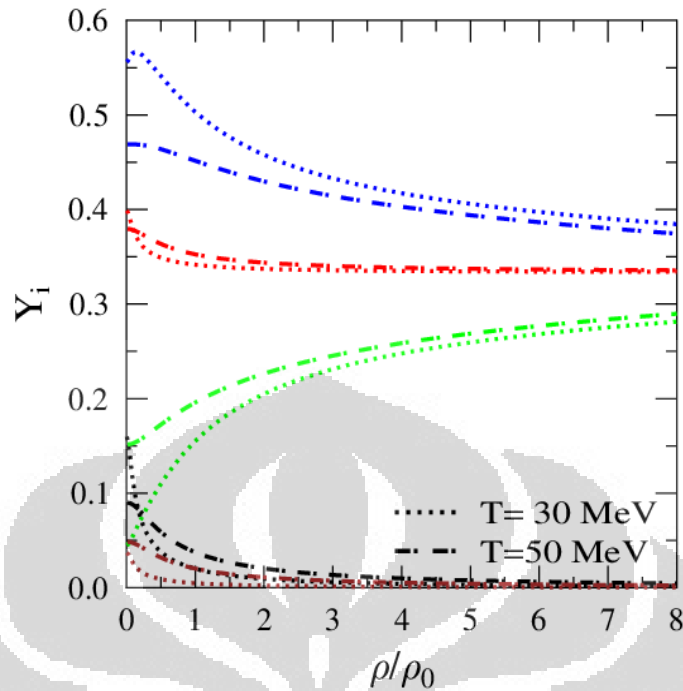
Gambar 3.4: Perbandingan radius-massa bintang akibat efek c .

diperoleh fraksi setiap konstituen pada bintang quark. Gambar 3.5, menunjukkan fraksi setiap konstituen untuk $T = 30$ MeV, dengan $T = 50$ MeV. Pada kedua temperatur tersebut, jumlah quark *up* menunjukkan besar yang sama, sekitar 33%, sedangkan jumlah quark *down* pada $T = 30$ MeV memiliki harga yang lebih besar dibandingkan $T = 50$ MeV. Jumlah quark *down* yang besar pada kerapatan rendah, menyebabkan jumlah quark *strange* pada keadaan ini sedikit. Sama halnya ketika membahas $T = 0$ MeV, quark *down* dan quark *strange* saling berhubungan untuk mencapai netralitas, jika jumlah quark *down* menurun, maka jumlah quark *strange* naik.

Kenaikan temperatur menyebabkan netralitas antar quark menjadi terganggu, sehingga lepton memainkan peranan untuk menjaga netralitas. Jika kita melihat Gambar 3.5, $T = 30$ MeV, elektron dan muon mulai muncul, tidak seperti pada $T = 0$ MeV yang menunjukkan kontribusi yang hampir nol. Kemunculan lepton ini, berhubungan dengan jumlah quark *down* yang besar diikuti dengan jumlah quark *strange* yang kecil pada keadaan awal, sehingga lepton menjaga agar netralitas pada keadaan awal tidak terganggu. Ketika jumlah quark *down* menurun dan quark *strange* naik, untuk mencapai netralitas, maka jumlah lepton mulai menurun sampai nol, dimana netralitas sudah terjadi. Sama halnya pada $T = 30$ MeV, pada $T = 50$ MeV terjadi hal yang sama, perbedaannya, jumlah muon pada $T = 50$ MeV mengalami peningkatan dibandingkan $T = 30$ MeV, hal ini untuk menjaga netralitas antar konstituen. Gambar 3.6 menunjukkan hasil radius dan massa bintang pada $T = 30$ MeV, dan $T = 50$, dengan $B^{1/4} = 145$ MeV. Dari gambar tersebut menunjukkan radius dan massa bintang quark yang sama, radius bintang sekitar 11.7 Km dan massanya sekitar $2.0 M_{\odot}$. Jika kita membandingkan radius dan massa bintang pada $T = 0$ MeV, dengan $c = 0.3$, maka hasil tersebut memberikan hasil yang sama pada kasus $T \neq 0$.

Pada kasus $T \neq 0$ dengan peristiwa penangkapan neutrino, maka jumlah quark *up* meningkat dari 33% menjadi sekitar 42%, kenaikan jumlah quark *up*, menyebabkan elektron dan neutrino elektron meningkat dengan jumlah fraksi elektron dan neutrino ~ 0.4 . Gambar 3.7.

Gambar 3.8 menunjukkan efek penangkapan neutrino pada bintang quark. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa akibat terperangkapnya neutrino menyebabkan bintang memiliki radius 6.5 Km dan massa $0.75 M_{\odot}$. Selain itu penangkapan neutrino memberi informasi bahwa bintang jauh lebih mampat dibandingkan tanpa peristiwa penangkapan neutrino.



Gambar 3.5: Perbandingan fraksi tiap konstituen pada $T = 30$ MeV, dengan $T = 50$ MeV. Merah=quark *up*, biru=quark *down*, hijau=quark *strange*, hitam=elektron, dan coklat=muon.

3.3 *Bag* dan Massa Quark Sebagai Fungsi Kerapatan

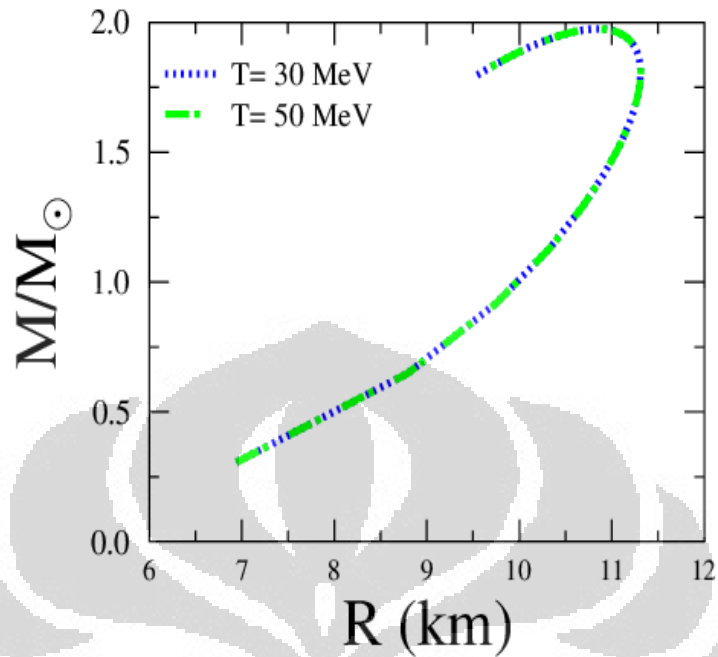
Pada pembahasan sebelumnya, kita menggunakan *bag* konstan dalam perhitungan persamaan keadaan bintang quark, namun pada kenyataannya, besarnya parameter konstanta *bag* bergantung pada konstituent yang berada di dalam bag tersebut, sehingga secara tidak langsung parameter *bag* merupakan fungsi kerapatan.

Bag fungsi kerapatan yang digunakan pada skripsi ini diperoleh dari perumusan yang diajukan oleh Burgio dan rekannya. Mereka menggunakan data CERN SPS pada *heavy ion collision* untuk menentukan *bag* fungsi kerapatan [23, 32] sebagai:

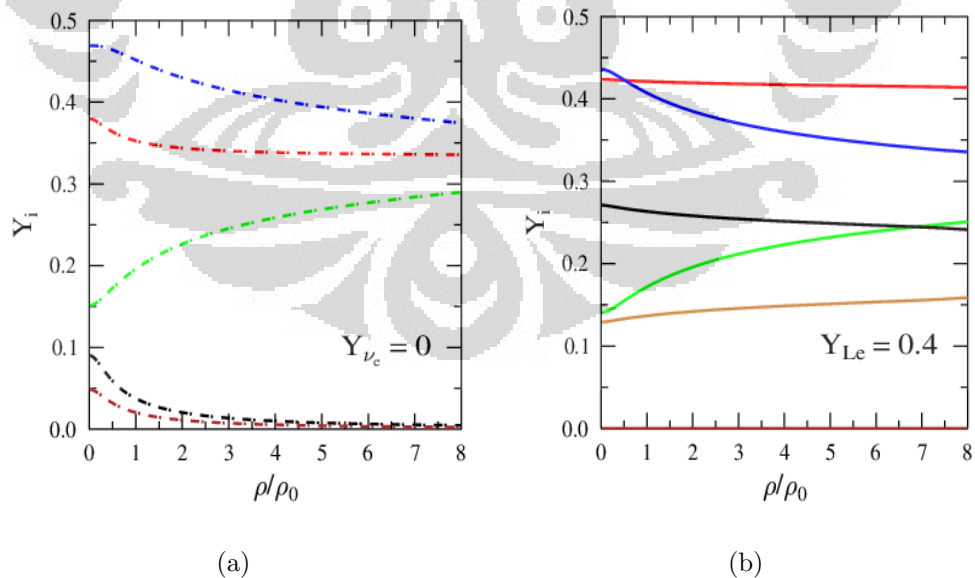
$$B(\rho) = B_{as} + (B_0 - B_{as}) \exp(-\beta x^2). \quad (3.1)$$

$$B_{as} = 38 \text{ MeV/fm}^3, B_0 = 200 \text{ MeV/fm}^3, \beta = 0.14, x = \rho/\rho_0.$$

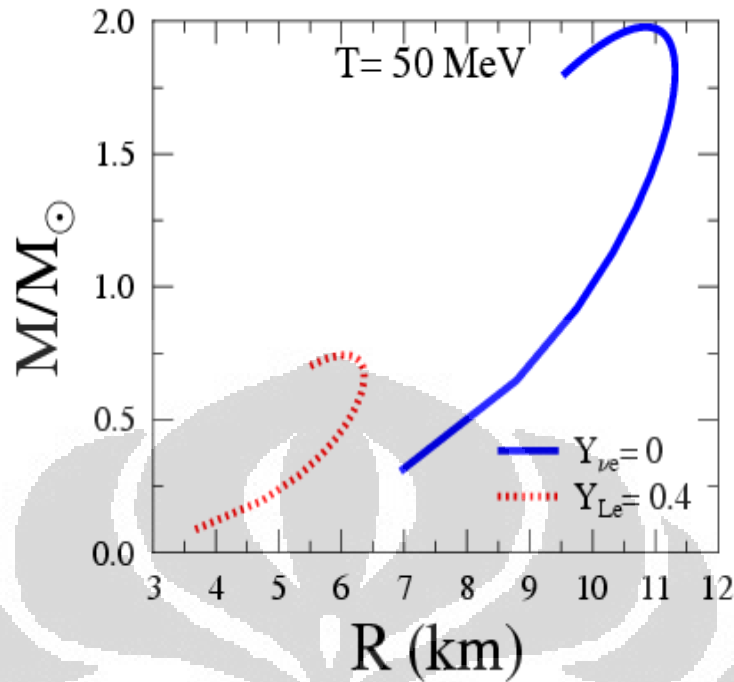
Dari Gambar 3.9 (kanan), menunjukkan *bag* fungsi kerapatan, dengan *bag*



Gambar 3.6: Perbandingan radius dan massa untuk $T = 30$ MeV, $T = 50$ MeV; $B^{1/4} = 145$ MeV.



Gambar 3.7: Perbandingan fraksi tiap konstituen pada $T = 50$ MeV; (a) $Y_{\nu_e} = 0$, (b) $Y_{Le} = 0.4$. Merah=quark *up*, biru=quark *down*, hijau=quark *strange*, hitam=elektron, coklat=muon, dan emas=neutrino elektron.



Gambar 3.8: Perbandingan radius massa pada $T = 50 \text{ MeV}$; $Y_{\nu_e} = 0$ dengan $Y_{L_e} = 0.4$.

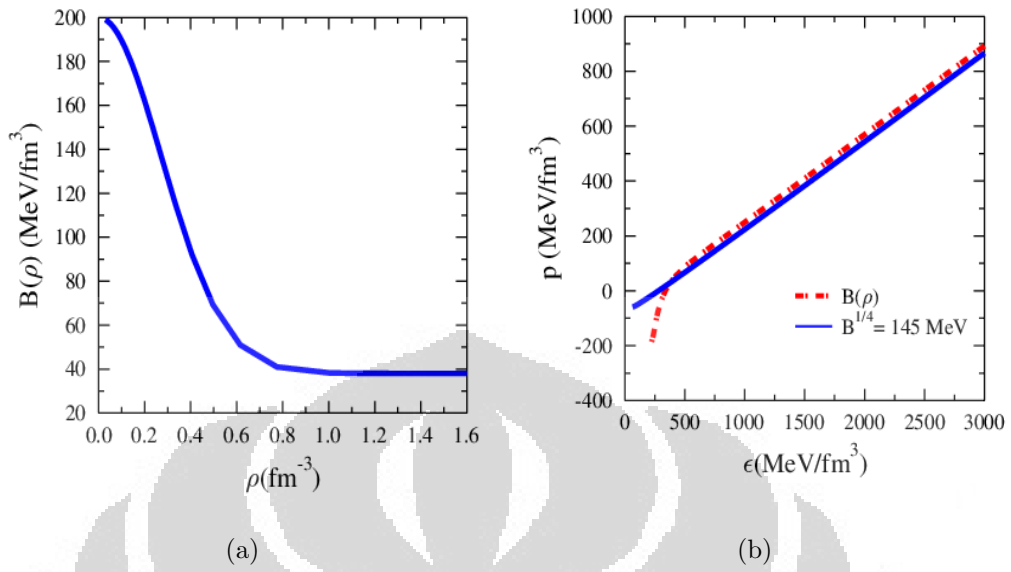
maksimum berharga $200 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ yang diparameterkan oleh B_0 , sedangkan *bag* akan menurun sampai saturasi $B_{as} = 38 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, akibatnya dari *bag* yang bergantung pada kerapatan maka grafik tekanan fungsi energi membelok mulai dari $\rho = 0$ sampai $\rho = 0.7 \text{ fm}^3$ yang ditunjukkan oleh Gambar 3.9 (a). Selanjutnya hubungan tekanan dengan energi kembali linear seperti pada keadaan dengan menggunakan konstanta *bag* Gambar 3.9 (b).

Pada referensi [34], digunakan massa quark yang tidak konstan m_q^* , dengan perumusan

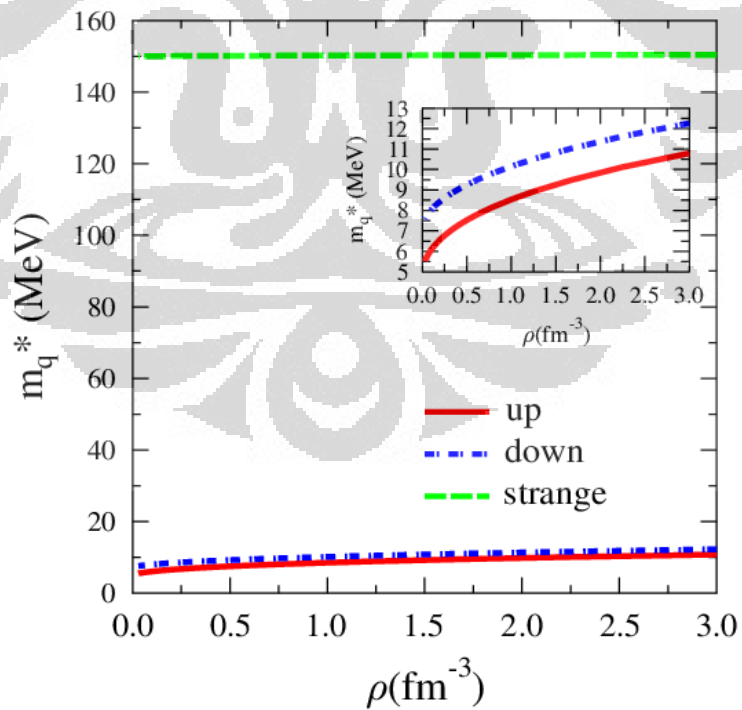
$$m_q^* = \frac{m_q}{2} + \sqrt{\frac{m_q^2}{4} + \frac{g^2 \mu_q^2}{6\pi^2}}, \quad (3.2)$$

dengan m_q merupakan massa quark (Tabel. 2.1), dan $g \sim 0.1$.

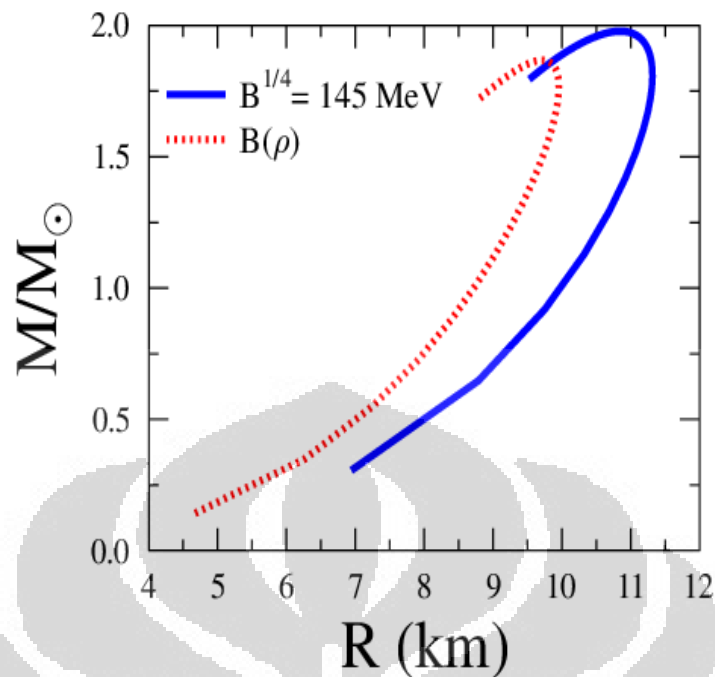
Dari persamaan (3.2), maka diperoleh grafik hubungan massa quark terhadap kerapatan quark, Gambar 3.10. Gambar tersebut menunjukkan massa quark *up* dan *down* cenderung meningkat seiring dengan meningkatnya kerapatan quark dibarion, namun massa quark *strange* cenderung konstan sekitar 150 MeV . Namun, massa quark *up* dan *down* yang berubah, tidak menyebabkan fraksi dari masing-masing quark berubah, begitu juga hubungan te-



Gambar 3.9: (a) *Bag* fungsi kerapatan, (b) perbandingan $p(\epsilon)$; *bag* konstan dengan *bag* fungsi kerapatan.



Gambar 3.10: Massa quark fungsi kerapatan.

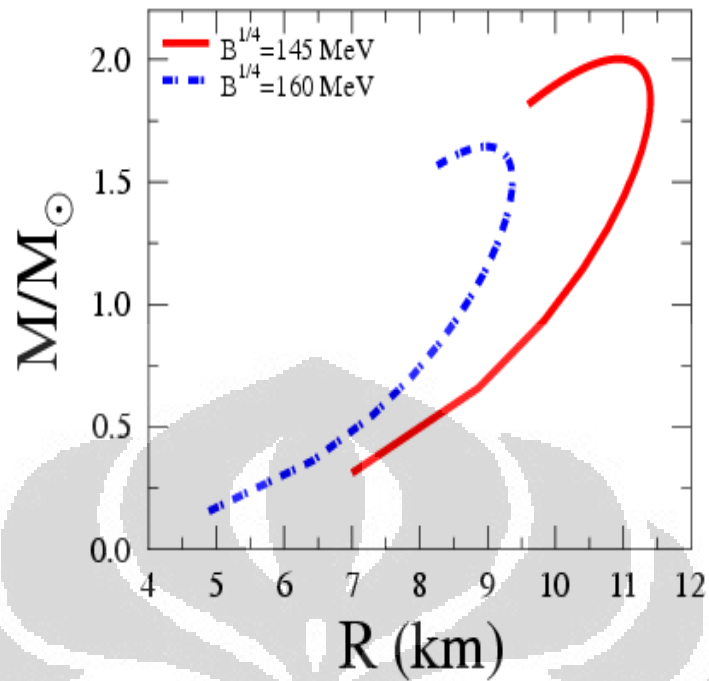


Gambar 3.11: Perbandingan radius massa bintang quark: $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ dengan $B(\rho)$.

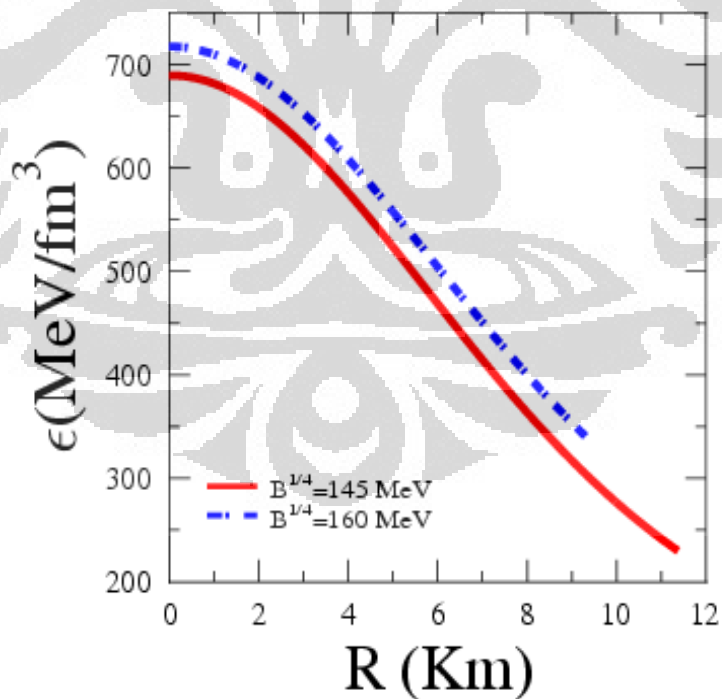
kanan dan energinya, sebagaimana yang ditunjukkan oleh Gambar 3.9.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk mempermudah proses perhitungan persamaan keadaan bintang quark dengan menggunakan model *bag* MIT, kita dapat menggunakan pendekatan massa quark konstant.

Pada Gambar 3.12 menunjukkan efek paling dominan yang menyebabkan radius dan massa bintang berubah adalah konstanta *bag*, pada gambar tersebut juga didapatkan informasi, semakin besar konstanta *bag*, maka radius dan massa bintang semakin mengecil, dengan kata lain bintang semakin mampat.



(a)



(b)

Gambar 3.12: Bintang quark dengan persamaan keadaan $\epsilon = 3p + 4B$: (a) Radius massa bintang quark, (b) kerapatan energi ϵ fungsi radius.

Bab 4

Kesimpulan

Dari hasil yang diperoleh dari bab 3, maka pada $T = 0$, jumlah quark *up* cenderung konstan, sekitar 33%, sedangkan jumlah quark *down* menurun diikuti kenaikan jumlah quark *strange* yang naik, sampai pada keadaan dimana sistem sudah berada pada keadaan netral. Sedangkan lepton pada $T = 0$, tidak terlalu memainkan peranan dalam proses netralitas. Tidak seperti kasus $T = 0$, pada $T \neq 0$ jumlah lepton mulai meningkat seiring dengan kenaikan temperatur, sehingga pada $T \neq 0$ lepton lebih memainkan peranan dalam proses netralitas. Ketika jumlah lepton meningkat pada $T \neq 0$, maka timbul kecenderungan adanya proses reaksi yang melibatkan neutrino. Pada kasus penangkapan neutrino di bintang quark, didapatkan jumlah quark *up* sekitar 42%, naik 9%, dibandingkan tanpa adanya peristiwa penangkapan neutrino. Sedangkan jumlah quark *down* dan *strange* tidak terlalu mengalami perubahan seperti pada kasus tanpa penangkapan neutrino. Pada peristiwa penangkapan neutrino, radius bintang mengecil dibandingkan tanpa adanya penangkapan neutrino, dengan kata lain bintang menjadi lebih mampat. Bila digunakan parameter *bag* sebagai fungsi kerapatan, yang diajukan oleh Burgio dan rekannya, maka didapatkan grafik tekanan dan energi yang membelok pada keadaan awal (Gambar. 3.9). Pembelokan tersebut disebabkan oleh B_0 yang masih besar sampai pada keadaan saturasi yang diparameterkan oleh B_{as} yang ditunjukkan oleh hubungan linear antara tekanan dengan energi. Dan juga perubahan massa dari quark tidak terlalu merubah persamaan keadaan bintang quark, sehingga untuk mempermudah perhitungan keadaan bintang quark dapat menggunakan massa quark konstan. Pada persamaan keadaan bintang quark, konstanta *bag* sangat dominan dalam menentukan ukuran radius dan massa bintang quark.

Lampiran A

Persamaan TOV

Persamaan TOV merupakan persamaan differensial yang digunakan sebagai pendekatan untuk kasus bintang yang memiliki keadaan statik dan bentuk *spherical*. Persamaan TOV didapat dengan mengkonstruksi tensor Einstein yang merupakan gabungan antara Ricci tensor dengan curvatur skalar.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (\text{A.2})$$

Bentuk dari tensor Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^{\rho}, \quad (\text{A.3})$$

dan jika dikali dengan metric tensor, maka diperoleh bentuk dari curvatur skalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Pada teori relativitas umum, dengan mengadopsi koordinat bola dan dianggap statik

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (\text{A.4})$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Untuk menyelesaikan tensor Ricci, maka akan digunakan simbol Cristoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (\text{A.5})$$

Jika $\mu = \nu = 0$, maka dengan menggunakan simbol Cristoffel $\Gamma_{0\alpha,0}^\alpha$, maka $\Gamma_{0\alpha}^\alpha$ dengan α bergerak dari 0 sampai 3, didapat dengan $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) \\ &= \frac{-1}{2}e^{-2\lambda(r)}\left(0 - \frac{\partial e^{2\nu(r)}}{\partial r}\right) \\ &= \nu'(r)e^{2(\nu(r)-\lambda(r))},\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\lambda}\frac{\partial e^{2\lambda}}{\partial r} \\ &= \lambda',\end{aligned}\tag{A.7}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,1}) = 0.\tag{A.8}$$

Dengan cara yang sama, maka akan didapat pula

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\lambda}, \\ \Gamma_{10}^0 &= \nu', \\ \Gamma_{23}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-2\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Mengacu pada persamaan (A.2), maka untuk $\mu = \nu = 0$,

$$R_{00} = \Gamma_{0\alpha,0}^\alpha - \Gamma_{00,\alpha}^\alpha - \Gamma_{00}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{0\beta}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta,\tag{A.10}$$

koreksi

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\alpha,0}^\alpha &= 0, \\ \Gamma_{00,\alpha}^\alpha &= \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00,0}^2 + \Gamma_{00,3}^3 \\ &= \frac{\partial v'e^{2(v-\lambda)}}{\partial r} = v''e^{2(v-\lambda)} + v'.2(v-\lambda)e^{2(v-\lambda)}, \\ \Gamma_{00}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}^\beta &= \Gamma_{00}^1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{13}^3 \\ &= \left(v'^2 + v'\lambda' + 2\frac{v'}{r}\right)e^{2(v-\lambda)}, \\ \Gamma_{0\beta}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta &= \Gamma_{01}^0\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{01}^0 \\ &= 2v'^2e^{2(v-\lambda)},\end{aligned}\tag{A.11}$$

dengan memasukkan pers (A.10) ke pers (A.9), maka didapat

$$R_{00} = \left(-v'' + \lambda'v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} \right) e^{2(v-\lambda)}. \quad (\text{A.12})$$

Untuk $R_{\mu\nu}$ dengan $\mu = \nu$ bergerak dari 1 sampai 3, maka diperoleh

$$\begin{aligned} R_{11} &= v'' - \lambda'v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= (1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Dari persamaan (A.1) maka

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} R_{\mu\nu} = e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{1}{r^2} R_{22} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33},$$

karena $R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$, maka

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} R_{\mu\nu} = e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - 2\frac{1}{r^2} R_{22}. \quad (\text{A.14})$$

Tensor Kurvatur Einstein [7]

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \quad (\text{A.15})$$

ada 3 kemungkinan dari tensor kurvatur Einstein

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= 0, \\ G^{\mu\nu} &= kT^{\mu\nu}, \\ G^{\mu\nu} &= kT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dengan Λ sangat kecil dan $T^{\mu\nu}$ merupakan tensor yang dibangun dari sifat massa dan energi suatu medium. dengan menggunakan indeks atas dan bawah pada kurvatur Einstein, maka

$$\begin{aligned} G_{\nu}^{\mu} &= g_{\nu\alpha} G^{\alpha\mu} \\ &= g_{\nu\alpha} \left(R^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} R \right) \\ &= g_{\nu\alpha} R^{\alpha\mu} - g_{\nu\alpha} \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} R \\ &= R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

dengan memasukkan harga $R_{\mu\nu}$ pada pers (A.14), maka

$$R = e^{-2\lambda} \left(-2v'' + 2\lambda'v' - 2v'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{v'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}.$$

Bila

$$R_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu},$$

maka untuk $\mu = \nu = 0$, Nilai G_{ν}^{μ}

$$\begin{aligned} G_0^0 &= R_0^0 - \frac{1}{2}R \\ &= e^{-2v} \left(-v'' + \lambda'v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} \right) e^{2(v-\lambda)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(-2v'' + 2\lambda'v' - 2v'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{v'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Hal yang sama dapat dilakukan untuk mencari G_{ν}^{μ} yang lain

$$\begin{aligned} G_1^1 &= R_1^1 - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2v'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2}, \\ G_2^2 &= R_2^2 - \frac{1}{2}R = \left(v'' + v'^2 - \lambda'v' + \frac{v' - \lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda}, \\ G_3^3 &= G_2^2, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

dengan menggunakan pers (1.16), dengan $k = -8\pi G$ dan

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

maka didapat

$$G_0^0 = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = -8\pi G\epsilon(r), \quad (\text{A.20})$$

$$G_1^1 = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2v'}{r} \right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 8\pi Gp(r), \quad (\text{A.21})$$

$$G_2^2 = \left(v'' + v'^2 - \lambda'v' + \frac{v' - \lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} = 8\pi Gp(r), \quad (\text{A.22})$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi Gp(r). \quad (\text{A.23})$$

Persamaan (A.20) dan persamaan (A.21) dikalikan dengan r^2 dan $e^{2\lambda}$ dengan $G=1$, maka

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda'r - e^{2\lambda} &= -8\pi^2\epsilon(r)r^2e^{2\lambda} \\ -2\lambda'r &= (1 - 8\pi r^2\epsilon(r))e^{2\lambda} - 1 \\ \lambda' &= \frac{-1}{2r} [(1 - 8\pi r^2\epsilon(r))e^{2\lambda} - 1], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned}
 1 + 2v'r - e^{2\lambda} &= 8\pi^2 p(r) r^2 e^{2\lambda} \\
 2v'r &= (1 + 8\pi r^2 p(r)) e^{2\lambda} - 1 \\
 v' &= \frac{1}{2r} [(1 + 8\pi r^2 p(r)) e^{2\lambda} - 1], \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

untuk mencari v'' , pertama-tama dengan menurunkan persamaan (A.25) terhadap r ,

$$\begin{aligned}
 \frac{d2v'r}{dr} &= (2\lambda' + 16\pi r p + 8\pi r^2 p' + 2\lambda' 8\pi r^2 p) e^{2\lambda} \\
 2v''r + 2v' &= [(16\pi r p + 8\pi r^2 p') + (1 + 8\pi r^2 p) 2\lambda'] e^{2\lambda}, \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

dan dengan mengalikan persamaan (A.26) dengan r

$$\begin{aligned}
 2v''r^2 + 2v'r &= [(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') + (r + 8\pi r^3 p) 2\lambda'] e^{2\lambda} \\
 &= [(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') + (1 + 8\pi r^2 p) 2\lambda' r] e^{2\lambda}, \quad (\text{A.27})
 \end{aligned}$$

kemudian substitusi persamaan (A.24), (A.25) ke persamaan (A.27)

$$\begin{aligned}
 2v''r^2 &= [(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') + (1 + 8\pi r^2 p) 2\lambda' r] e^{2\lambda} - 2v'r \\
 2v''r^2 &= [(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') + (1 + 8\pi r^2 p)((-1 + 8\pi r^2 \epsilon) e^{2\lambda} + 1)] e^{2\lambda} \\
 &\quad - (1 + 8\pi r^2 p) e^{2\lambda} + 1 \\
 &= (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 p)(-1 + 8\pi r^2 \epsilon) e^{4\lambda} + 1 \\
 v'' &= \frac{1}{2r^2} (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p') e^{2\lambda} \\
 &\quad + \frac{1}{2r^2} [(1 + 8\pi r^2 p)(-1 + 8\pi r^2 \epsilon) e^{4\lambda} + 1], \quad (\text{A.28})
 \end{aligned}$$

untuk mencari v'^2 , dengan mengkuadratkan persamaan (A.25)

$$\begin{aligned}
 (2v'r)^2 &= [(1 + 8\pi r^2 p(r)) e^{2\lambda} - 1]^2 \\
 2v'^2 r^2 &= \frac{1}{2} (1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p) e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \\
 v'^2 &= \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{2} (1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p) e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right], \quad (\text{A.29})
 \end{aligned}$$

dengan merubah bentuk $e^{2\lambda(r)}$, dapat diperoleh dari persamaan (A.20)

$$\begin{aligned}
 r^2 G_0^0 &= (1 - 2r\lambda') e^{-2\lambda} - 1 \\
 &= -\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] = -8\pi G\epsilon(r) r^2 \\
 r(1 - e^{-2\lambda}) &= \int_0^r 8\pi G\epsilon(r) r^2 dr \\
 -e^{-2\lambda} &= \frac{1}{r} \int_0^r 8\pi G\epsilon(r) r^2 dr - 1,
 \end{aligned}$$

karena $M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r)r^2 dr$, maka

$$\begin{aligned} -e^{-2\lambda} &= \frac{2GM(r)}{r} - 1 \\ e^{2\lambda} &= -\left(\frac{2GM(r)}{r} - 1\right)^{-1} \\ e^{2\lambda} &= -\frac{r}{2GM - r}. \end{aligned}$$

$G=1$, maka

$$e^{2\lambda} = -\frac{r}{2M - r}, \quad (\text{A.30})$$

kemudian nilai v' , λ' , v'' , v'^2 dan $e^{2\lambda}$ dimasukkan ke persamaan (A.22) tanpa menghilangkan bahwa $p = p(r)$ dan $\epsilon = \epsilon(r)$, sehingga persamaan (A.22) menjadi

$$\left(v'' + v'^2 - \lambda'v' + \frac{v' - \lambda'}{r}\right) = 8\pi p e^{2\lambda},$$

kemudian menjadi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2r^2}(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} + \frac{1}{2r^2}[(1 + 8\pi r^2 p)(-1 + 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} + 1] \\ &+ \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right] \\ &- \frac{1}{2r} [(1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - 1] - \frac{1}{2r} [(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1] \\ &+ \frac{\frac{1}{2r} [(1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - 1] - \frac{1}{2r} [(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1]}{r} \\ &= 8\pi p e^{2\lambda}, \end{aligned}$$

kedua ruas dikali $2r^2$, dan akan menjadi

$$\begin{aligned} &(16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 p)(-1 + 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} + 1 \\ &+ \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} [(1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - 1] [(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1] \\ &+ (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - 1 + (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - 1 \\ &= 8\pi p e^{2\lambda} 2r^2. \end{aligned}$$

Dengan merubah bentuk $(-1 + 8\pi r^2 \epsilon) = -(1 - 8\pi r^2 \epsilon)$ dan mengelompokkan

menurut derajatnya, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 & (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} \\
 & - \frac{1}{2}(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} + (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} + (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} \\
 & - (1 + 8\pi r^2 p)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} \\
 & + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} + 2 - 2 = 16\pi r^2 p e^{2\lambda},
 \end{aligned}$$

lalu disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
 & (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} \\
 & - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda} + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{4\lambda} \\
 & = 16\pi r^2 p e^{2\lambda},
 \end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dikali dengan $e^{-2\lambda}$, sehingga

$$\begin{aligned}
 & 16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p' + \frac{1}{2}(1 - 8\pi r^2 \epsilon) - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p) \\
 & - \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)(1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 + 8\pi r^2 p)^2 e^{2\lambda} \\
 & = 16\pi r^2 p,
 \end{aligned}$$

kemudian dijabarkan dan kedua ruas dibagi dengan $4\pi r^2$, maka

$$\begin{aligned}
 & 4p + 2rp' + \frac{1}{8\pi r^2} - \epsilon - \frac{1}{8\pi r^2} - p \\
 & + \left(-\frac{1}{8\pi r^2} - p + \epsilon + 8\pi r^2 \epsilon p \right) e^{2\lambda} + \left(\frac{1}{8\pi r^2} + 2p + 8\pi r^2 p^2 \right) e^{2\lambda} \\
 & = 4p.
 \end{aligned}$$

Jika persamaan diatas dijabarkan, maka akan menjadi

$$2rp' - (\epsilon + p) + (\epsilon + p)e^{2\lambda} + 8\pi r^2 p(\epsilon + p)e^{2\lambda} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Dari persamaan (A.30) nilai dari $e^{2\lambda}$ disubsitusi ke persamaan (A.31), maka

$$\begin{aligned}
 2rp' &= (\epsilon + p) - (\epsilon + p)\frac{r}{r - 2M} - 8\pi r^2 p(\epsilon + p)\frac{r}{r - 2M} \\
 p' &= \frac{(\epsilon + p)}{2r} - \frac{(\epsilon + p)}{2(r - 2M)} - \frac{4\pi r^2 p(\epsilon + p)}{(r - 2M)} \\
 p' &= -(\epsilon + p) \left[-\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(r - 2M)} + \frac{4\pi r^2 p}{(r - 2M)} \right] \\
 p' &= -(\epsilon + p) \left[-\frac{1}{2r} + \frac{(1 + 8\pi r^2 p)}{2(r - 2M)} \right] \\
 p' &= -(\epsilon + p) \left[\frac{2r(1 + 8\pi r^2 p) - 2(r - 2M)}{4r(r - 2M)} \right] \\
 p' &= -(\epsilon + p) \left[\frac{4\pi r^3 p + M}{r(r - 2M)} \right].
 \end{aligned}$$

persamaan inilah yang disebut persamaan TOV. Jika $G \equiv c \equiv \hbar = 1$, persamaan TOV menjadi

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\epsilon + p)(4\pi r^3 p + M)}{r(r - 2M)}. \quad (\text{A.32})$$

Jika kita belum memasukkan faktor relativitas umum atau melakukan pendekatan Newton, maka tekanan dapat diperoleh dengan asumsi bahwa adanya keseimbangan antara gravitasi yang menekan dari luar dan tekanan yang datang dari bintang, maka hubungan dP dengan gaya gravitasi dF

$$dp = \frac{dF}{4\pi r^2}, \quad (\text{A.33})$$

dengan

$$dF = -\frac{GM(r)dM}{r^2}, \quad (\text{A.34})$$

jika $M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r)r^2 dr$,

maka

$$dM = \epsilon(r)dV.$$

Sehingga persamaan (A.33) menjadi

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon M}{r^2}. \quad (\text{A.35})$$

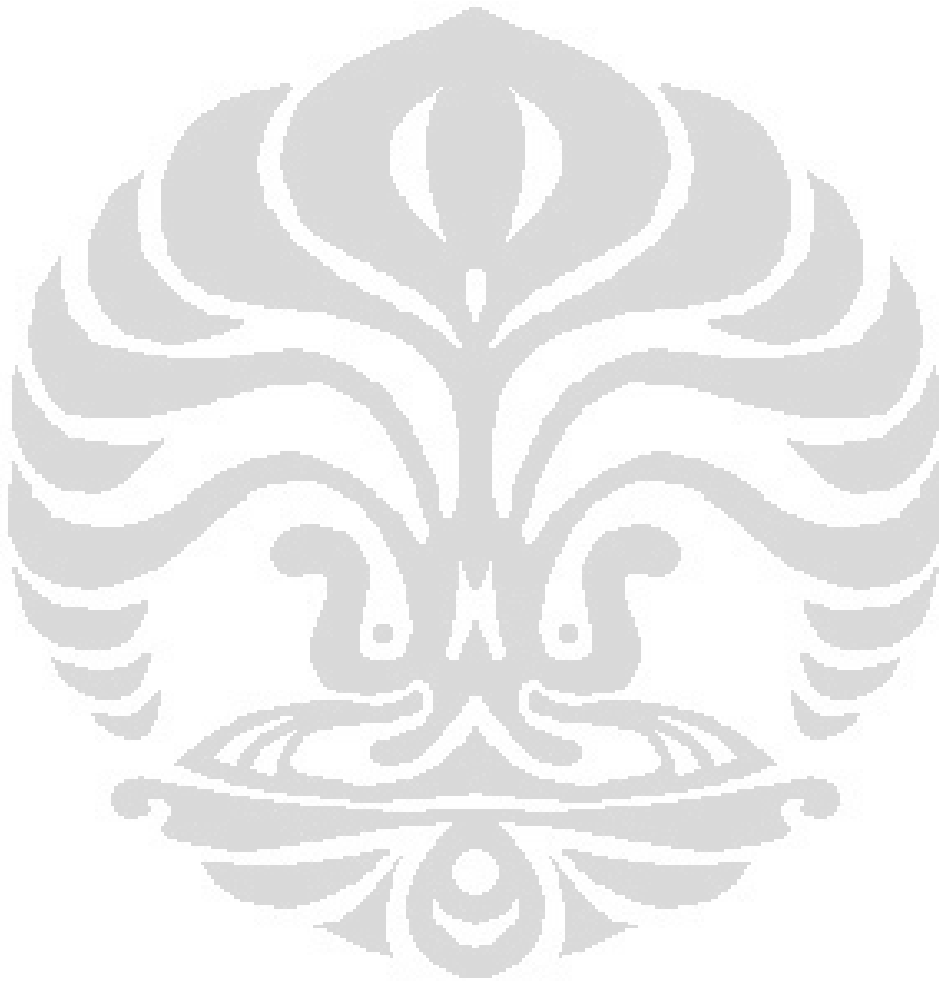
Jika persamaan (A.35) dibandingkan dengan persamaan TOV yang sudah memasukkan faktor G dan c , dimana persamaan TOV yang sudah memasukkan faktor G [25][18]

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon M}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (\text{A.36})$$

maka persamaan TOV tersebut memiliki bentuk yang hampir dengan persamaan (A.35), dengan faktor koreksi relativistik:

$$\left(1 + \frac{p}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (\text{A.37})$$

Suku $(1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$ pada persamaan (A.37), akan mengakibatkan singularitas ketika $r = 2GM$, yang mengakibatkan keruntuhan (*collapse*) bintang. Hal ini tidak muncul jika kita melakukan pendekatan Newton.



Lampiran B

Termodinamika

Beberapa kuantitas dalam termodinamik yang diperlukan pada skripsi ini akan diulas secara singkat

Energi dalam $E(S, V, N)$, energi bebas Helmholtz $F(T, V, N)$, dan energi bebas Gibbs $G(T, P, N)$ memenuhi relasi:

$$\begin{aligned}dE &= TdS - pdV + \mu dN, \\dF &= -PdV - SdT + \mu dN, \\dG &= -SdT + VdP + \mu dN,\end{aligned}\tag{B.1}$$

maka

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T}\tag{B.2}$$

Dari persamaan diatas, maka perlu adanya fungsi yang memiliki variabel (T, V, μ) , yaitu potensial termodinamika [6]

$$\begin{aligned}\Omega &= F - \mu N, \\d\Omega &= -SdT - PdV - Nd\mu,\end{aligned}\tag{B.3}$$

sehingga

$$\begin{aligned}N &= -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{TV}, \\S &= -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V\mu}, \\P &= -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T\mu}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Dengan menggunakan mekanika statistika, yang menghubungkan fungsi-fungsi termodinamika dengan hamiltonian \hat{H} banyak partikel. Untuk patikel dengan interaksi pada seluruh keadaan R [10]

$$\begin{aligned} E_R &= \sum_r n_r \epsilon_r + U \\ &= \sum_r n_r \epsilon_r + Vu(n), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dimana ϵ_r , hanya terdiri dari energi kinetik dan energi diam pada keadaan r, sedangkan U merupakan energi potensial. Sehingga fungsi partisi grand kanonik adalah

$$Z(T, V, z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(T, V, N), \quad (\text{B.6})$$

dengan $z = \exp\{\beta\mu\}$, dan

$$Z(T, V, N) = \sum_R \exp\{-\beta E_R\}, \quad (\text{B.7})$$

penjumlahan dilakukan pada semua keadaan dengan batas

$$\sum_r n_r = N. \quad (\text{B.8})$$

Dengan memasukkan (B.5) ke (B.7), kemudian hasilnya dimasukkan ke (B.6), dimana $z^N = \exp\{N\beta\mu\} = \exp\{\beta \sum_r n_r \mu\}$, dan bilangan okupasi untuk Fermion 0, dan 1, maka diperoleh fungsi partisi grand kanonik untuk Fermion

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^1 \exp \left\{ -\beta \left(\sum_r n_r (\epsilon_r - \mu) + Vu(n) \right) \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Dengan menggunakan deret Taylor,

$$u(n) = u(\bar{n}) + u'(n - \bar{n}) + \dots, \quad (\text{B.10})$$

dengan memisahkan $U(V, n)$ kedalam bentuk, $U(V, \bar{n}) = Vu(\bar{n})$, dan $Vu'(n - \bar{n}) = u'(\bar{n})\bar{N}$, yang keduanya tergantung hanya pada jumlah partikel rata-rata \bar{N} , maka energi total pada semua keadaan

$$E_R = \sum_r n_r (\epsilon_r + u'(\bar{n})) + U(V, \bar{n}) - u'(\bar{n})\bar{N}. \quad (\text{B.11})$$

Dengan menggunakan (B.11) ke (B.9), maka fungsi partisi untuk Fermion

$$\begin{aligned}
 Z(T, V, \mu) &= \exp \left\{ -\beta \left(U(V, \bar{n}) - u'(\bar{n})\bar{N} \right) \right\} \\
 &\times \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^1 \exp \left\{ -\beta \left[\sum_r (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) n_r \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\beta \left(U(V, \bar{n}) - u'(\bar{n})\bar{N} \right) \right\} \\
 &\times \prod_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n_r=0}^1 \exp \{ -\beta [\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu] n_r \} \right) \\
 &= \exp \left\{ -\beta \left(U(V, \bar{n}) - u'(\bar{n})\bar{N} \right) \right\} \\
 &\times \prod_{r=1}^{\infty} (1 + \exp \{ -\beta (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) \}). \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

Potensial termodinamika Ω , dengan konstanta Boltzman $k_B = 1$, didapat

$$\begin{aligned}
 \Omega = -T \ln Z &= -T \sum_r \ln(1 + \exp \{ -\beta (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) \}) \\
 &\quad + U(V, \bar{n}) - \bar{N} u'(\bar{n}). \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (B.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right|_{T, V} \\
 &= -V \left. \frac{\partial u(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} + \bar{N} \left. \frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} + u'(\bar{n}) \left. \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right|_{T, V} \\
 &\quad + T \sum_r \frac{\exp \{ -\beta (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) \}}{1 + \exp \{ -\beta (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) \}} \left(\beta - \beta \left. \frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} \right) \\
 \bar{N} \left(1 - \left. \frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} \right) &= -V \left. \frac{\partial u(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} + u'(\bar{n}) \left. \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right|_{T, V} \\
 &\quad + \beta T \left(1 - \left. \frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} \right) \\
 &\quad \times \sum_r \frac{1}{\exp \{ -\beta (\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu) \} + 1}, \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan $du = \frac{du}{dn} dn$, dan karena u hanya tergantung pada kerapan partikel, maka

$$\left. \frac{\partial u(\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} = u'(\bar{n}) \left. \frac{\partial (\bar{n})}{\partial \mu} \right|_{T, V} = u'(\bar{n}) \frac{1}{V} \left. \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right|_{T, V}, \tag{B.15}$$

maka akan diperoleh harga rata-rata jumlah partikel

$$\bar{N} = \frac{1}{\exp\{\beta(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu)\} + 1}. \quad (\text{B.16})$$

Entropi S

$$\begin{aligned} S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T}\Big|_{\mu,V} &= -V\frac{\partial u(\bar{n})}{\partial T}\Big|_{\mu,V} + \bar{N}\frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial T}\Big|_{\mu,V} + u'(\bar{n})\frac{\partial\bar{N}}{\partial T}\Big|_{\mu,V} \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \ln\{1 + \exp\{-\beta(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu)\}\} \\ &+ T\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu)\left(-\frac{d\beta}{dT}\right) - \beta\frac{\partial u'(\bar{n})}{\partial T}}{\exp\{\beta(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu)\} + 1}\Big|_{\mu,V}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

dengan $-\frac{\beta}{T} = \frac{1}{T^2}$, maka

$$S = \sum_r \ln\{1 + \exp\{-\beta(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu)\}\} + \frac{1}{T}\sum_r \bar{n}_r(\epsilon_r + u'(\bar{n}) - \mu). \quad (\text{B.18})$$

Tekanan P , karena pada grand kanonik tidak ada perubahan volume, maka

$$P = \frac{\partial\Omega}{\partial V}\Big|_{\mu,T} = -\frac{\Omega}{V}. \quad (\text{B.19})$$

Jika tidak ada interaksi, maka $u'(\bar{n}) = 0$. Untuk kondisi ini:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_r \frac{1}{\exp\{\beta(\epsilon_r - \mu)\} + 1}, \\ S &= \sum_r \ln\{1 + \exp\{-\beta(\epsilon_r - \mu)\}\} + \frac{1}{T}\sum_r \bar{n}_r(\epsilon_r - \mu), \\ P &= -\frac{\Omega}{V}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Dari persamaan (B.20), dapat diperoleh bilangan okupasi Fermion sebagai

$$n = \frac{1}{\exp\{\beta(\epsilon_r - \mu)\} + 1}. \quad (\text{B.21})$$

Lampiran C

Model *Bag* M.I.T

Lagrangian untuk model *bag* MIT tanpa massa dan tanpa gluon [31]

$$\mathcal{L} = (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - B) - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\delta_s, \quad (\text{C.1})$$

dengan δ_s merupakan fungsi delta, bernilai nol pada permukaan.

Persamaan Dirac untuk partikel tidak bermassa

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0. \quad (\text{C.2})$$

Pada permukaan

$$i\gamma^\mu\eta_\mu\psi(x) = \psi(x), \quad (\text{C.3})$$

persamaan (C.3), dapat diperoleh dari

$$\eta_\mu = (0, -\vec{\eta}), \quad (\text{C.4a})$$

$$\gamma^\mu = (\beta, \vec{\alpha}\beta), \quad (\text{C.4b})$$

$$(i\gamma^\mu\eta_\mu)^2 = -\eta_i\eta_i(\gamma^i)^2, \quad (\text{C.4c})$$

dengan $\eta^2 = 1$, dan $(\gamma^i)^2 = -1$, maka

$$i\gamma \cdot \eta = \pm 1. \quad (\text{C.5})$$

Apabila $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, maka pada permukaan

$$i\eta_\mu j^\mu = \bar{\psi}i\gamma \cdot \eta\psi = \bar{\psi}\psi = 0, \quad (\text{C.6})$$

sehingga pada permukaan

$$\eta_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0. \quad (\text{C.7})$$

Energi momentum tensor dapat dirumuskan sebagai berikut [8]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{C.8})$$

karena $\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi})$, maka

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}'. \quad (\text{C.9})$$

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})$, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - B) + \frac{1}{2} (-i\gamma^\mu \psi \partial_\mu \bar{\psi} - B) \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \bar{\psi} - B. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Persamaan (C.10) dimasukkan ke persamaan (C.9), maka

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\nu \psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \partial_\nu \bar{\psi} - g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \bar{\psi} - B \right), \quad (\text{C.11})$$

dengan $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, $2g^{\mu\nu} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$ dan $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, maka suku

$$g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \bar{\psi} \right) = 0. \quad (\text{C.12})$$

Maka energi momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\partial}_\nu \psi - \gamma^\mu \psi \vec{\partial}_\nu \bar{\psi} \right) + Bg^{\mu\nu} \right) \theta_V, \quad (\text{C.13})$$

dengan θ_V merupakan fungsi theta, bernilai nol diluar *bag*, maka

$$\eta_\mu T^{\mu\nu} = \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}\gamma^\mu \eta_\mu \vec{\partial}_\nu \psi - \gamma^\mu \eta_\mu \psi \vec{\partial}_\nu \bar{\psi} \right) + B\eta_\mu g^{\mu\nu} \right) \theta_V. \quad (\text{C.14})$$

Dengan menggunakan relasi $\delta_s = \eta \cdot \partial \theta_V$ [31], dan dengan menggunakan sifat pada persamaan (C.3), maka

$$\left(\frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \vec{\partial}_\nu \psi + \psi \vec{\partial}_\nu \bar{\psi} \right) \right) = -B, \quad (\text{C.15})$$

sehingga

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\bar{\psi} \psi). \quad (\text{C.16})$$

Fungsi $\theta(x)$ dirumuskan [9]

$$\theta(x) = \frac{1}{-2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{-ipx}}{p + i\epsilon},$$

sehingga bila diturunkan terhadap x

$$\begin{aligned}\frac{d\theta(x)}{dx} &= \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{dx} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{-ipx}}{p + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx} = \delta.\end{aligned}\quad (\text{C.17})$$

Sehingga $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ pada permukaan. Dengan menggunakan energi momentum tensor, maka energi didalam *bag* [31]

$$P^0 = \int dV T^{00}, \quad (\text{C.18})$$

dan

$$P^0 = \int dV T^{00} = \frac{3\omega}{R} + \frac{4\pi}{3} B R^3, \quad (\text{C.19})$$

dengan $\omega = ER$, suku pertama disebabkan oleh partikel dan suku kedua disebabkan oleh *bag*.

Jika model *bag* MIT terdapat gluon, maka kerapatan lagrangian pada persamaan (C.1) menjadi

$$\mathcal{L} = \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - B \right) \theta_V - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\delta_S, \quad (\text{C.20})$$

dengan $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, dan fungsi delta δ_S , bernilai nol pada permukaan. Dengan menggunakan

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\bar{\psi}} \right) = 0, \quad (\text{C.21})$$

maka

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + g\gamma^\mu A_\mu)\psi = 0. \quad (\text{C.22})$$

Bila terdapat suku gluon, maka *Bag*, sama seperti persamaan (C.16) ditambah koreksi gluon

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\psi}\psi) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (\text{C.23})$$

Daftar Pustaka

- [1] Alford, M. *Dense Quark Matter in Compact Stars*. J. Phys. G. Part. Phys (30), 2004.
- [2] Alford, M., M. Braby, M. Paris, S. Reddy. *Hybrid Stars that Masquerade as Neutron Stars*. arXiv: nucl-th/0411016v2, 2005.
- [3] Alford, M., et al. *Color Superconductivity in Dense Quark Matter*. Rev. Mod. Phys (80), 2008.
- [4] Bombaci, I. *Quark Matter in Compact Star: Astrophysical Implication and Possible Signatures*. arXiv: gr-qc/0809.4228v1, 2008.
- [5] Buballa, M. *NJL-Model Analysis of Dense Quark Matter*. arXiv: hep-ph/0402.2348v2, 2005.
- [6] Fetter, A. L., J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many Particle System*. Mc Graw Hill, 1971.
- [7] Glendenning, N. K. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (2nd ed). Springer, 2000.
- [8] Greiner, W. *Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations* (3rd ed). Springer, 2000.
- [9] Greiner, W., J. Reinhardt *Quantum Electrodynamics*. Springer, 1992.
- [10] Greiner, W., L. Neise, dan H. Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer, 1994.
- [11] Hempel, M., G. Pagliara, dan J. S. Bielich. *Conditions for Phase Equilibrium in Supernovae, Proto Neutron, and Neutron Stars*. arXiv: astro-ph/0907.2680v1, 2009.
- [12] Johnson, K. *The M.I.T. Bag Model*. Acta Physica Polonica, 1975.
- [13] Kovách, Z., K. S. Cheng, dan T. Harko. *Can stellar mass black holes be quark stars?*. Montly Notices of The royal Astronomical Society, 2009.
- [14] Kurlela, A., P. Romatschke, dan A. Vuorinen. *Cold Quark Matter*. Phys. Rev. D (81) 105021, 2010.
- [15] Lattimer. J. M. *Neutron Stars*. SLAC Summer Institute on Particle Physics, 2005.

- [16] Lenzi, C. H., A. S. Schneider, C. Providência, dan R. M. Marinho. *Compact Star A Quark Core Within NJL Model*. arXiv: nucl-th/1001.3169v1, 2010.
- [17] Li, H., X. L. Luo, dan H. S. Zong. *Model Study of Quark Star*. arXiv: hep-ph/1101.1744v1, 2011.
- [18] Mart, T. *From Pauli Principle to Hypernucleus, Neutron Star, and Econophysics*. arXiv: nucl-th/0704.3778v1, 2007.
- [19] Menezes, D. P., C. Providência, dan D. B. Melrose . *Quark Star within Relativistic Models*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 32 1081, 2006.
- [20] Menezes, D. P., P. k. Panda, dan C. Providência . *Warm Stellar Matter with and Without Trapped Neutrinos*. 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University, 2004.
- [21] Nicotra, O. E., M. Baldo, G. F. Burgio, dan H. J. Schulze. *Hybrid Proto Neutron Stars with The MIT Bag Model*. Phys. Rev. D (74) 123001, 2006.
- [22] Nicotra, O. E., M. Baldo, G. F. Burgio, dan H. J. Schulze. *Protoneutron Stars within the Brueckner-Bethe-Goldstone Theory*. Astronomy and Astrophysics, 2006.
- [23] Prasac, N., R. S. Bhalerac. *Strange Stars with A Density Dependent Bag Parameter*. arXiv: astro-ph/0309.4728v2, 2004.
- [24] Providência, C. *Relativistic Hadronic Matter and Phase*. International Workshop X Hadron Physics
- [25] Schmitt, A. *Dense Matter in Compact Star-A Pedagogical Introduction*. Springer, 2010.
- [26] Sedrakian, A. *Astrophysics of Dense Quark Matter in Compact Stars*. Acta Physica Polonia B, 2010.
- [27] Sharma, B. K., P. K. Panda, dan S. K. Patra. *Phase Transition and Properties of Compact Star*. Phys. Rev. C (75) 035808, 2007.
- [28] Silbar, R. R., Sanjay. R. *Neutron Stars for Undergraduates*. arXiv: nucl-th/0309041v2, 2003.
- [29] Sing C. P., P. K. Srirastava, and S. K. Triwari. *QCD Phase Boundary and Critical Point in a Bag Model Calculation*. Phys Rev. D (80) 114508, 2009.
- [30] Stainer, A. W., M. Prakash, and J. M. Lattimer. *Diffusion of Neutrinos in Proto-Neutron Star Matter with Quark*. arXiv: astro-ph/0101566v1, 2008.
- [31] Thomas, A., W. Weise. *The Structure of The Nucleon*. Berlin: Wiley, 2001.
- [32] Temurgan, B., L. Ghuang-Zhou, and Z. Ming-Feng. *Properties of Hybrid Stars in Extended MIT Bag Model*. Chinese Physics C (33), 2009.

- [33] Weber, F. *Strange Quark Matter and Compact Stars*. arXiv: astro-ph/0407155v2, 2004.
- [34] Zach, J. J. *Observational Signatures of The Macroscopic Formation of Strange Matter during Core Collapse Supernovae*. The Ohio State University. Dissertation, 2003.

