UNIVERSITAS INDONESIA

PERBANDINGAN PENAKSIR NILAI AKTUAL DENGAN BENTUK MODIFIKASINYA PADA METODE *CLASSIC* DALAM REGRESI KALIBRASI

SKRIPSI

ADITYA NURUL YASIN
0706261505

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PERBANDINGAN PENAKSIR NILAI AKTUAL DENGAN BENTUK MODIFIKASINYA PADA METODE *CLASSIC* DALAM REGRESI KALIBRASI

SKRIPSI

Skripsi ini diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

ADITYA NURUL YASIN
0706261505

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Aditya Nurul Yasin
NPM	: 0706261505
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 12 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Aditya Nurul Yasin
NPM	: 0706261505
Program Studi	: Sarjana Matematika
Judul Skripsi	: Perbandingan Penaksir Nilai Aktual dengan Bentuk Modifikasinya pada Metode *Classic* dalam Regresi Kalibrasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra Saskya Mary Soemartojo M.Si	(..............................)
Penguji I	: Dr. Dian Lestari, DEA	(..............................)
Penguji II	: Dra Ida Fithriani, MSI	(..............................)
Penguji III	: Dra Titin Siswantining, DEA	(..............................)

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 13 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini diselesaikan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan skripsi ini maupun selama penulis kuliah, yaitu kepada :

1) Orang tua penulis yang telah mengasuh penulis sampai saat ini dan selalu memberikan dukungan moril maupun materiil, serta tak pernah berhenti mendoakan penulis.
2) Ibu Dra. Saskya Mary, M. Si selaku dosen pembimbing. Terima kasih sebesar-besarnya untuk semua bantuan, saran, kritik dan dorongan yang luar biasa yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3) Ibu Dra. Yahma Wisnani M. Kom selaku pembimbing akademis. Terima kasih untuk bantuan, dorongan, bimbingan, dan perhatian untuk penulis selama masa kuliah.
4) Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku ketua departemen, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu proses penyelesaian skripsi ini.
5) Bu Rianti, Bu Sarini, Bu Mila, Bu Ida, Bu Titin, Bu Fevi, dan seluruh staf pengajar departemen Matematika UI yang tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan. Semoga penulis dapat menggunakan ilmu tersebut dengan sebaik-baiknya.

6) Mas Salman, Mba Rusmi, Mba Santi, dan seluruh karyawan departemen Matematika UI, terima kasih atas segala bantuan dan kemudahan yang telah diberikan untuk penulis.
7) Abang Syarifudin dan Mba Wie, Mas Bowo dan Mba Ning, Mas Rudi dan Mba Sarah, Bang Awie dan Mba Indah serta Mas Aduz dan Mba Ita, terima kasih atas doa dan dukungannya.
8) Emil, terima kasih untuk semua perhatian, dukungan, saran, dan doanya, 16 September 2004, Eluva.
9) Keponakan Penulis Bang Opal, Nabila, Afrah, Kiki, Aulia, Dede Salby n Dede Qay, senyum kalian menjadikan tetesan keringat Om ini menjadi segar adanya semoga Kalian bisa masuk UI suatu saat nanti.
10) Andi, Sav, Wid, Nene, Hanip, Hikmah, Manda, Danar, terima kasih untuk semua saat-saat indah yang kita lalui bersama, spesial Thanx untuk Nene dan Hanip atas segenap usahanya dalam membantu penyelesaian skripsi ini.
11) Teman – teman mahasiswa Matematika UI angkatan 2007 Adigunaryo, Anggun, Winda, Arip, Ashari, Bowo, Putuwira, Siska, Yos, Farah, Iki, Zul dan lain - lain. Masa kuliah ini tak akan bisa dilupakan.
12) Semua mahasiswa Matematika UI angkatan 2005, 2006, 2008, dan 2009.
13) Anak belakang asuhan Iday, Boim, Aiy, Piyu, Uwik, dan Cengir. Makasih buat semangat kalian, semoga kita sukses di jalan masing-masing.
14) Semua pihak yang telah membantu pengerjaan skripsi ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu per satu, penulis mengucapkan terima kasih.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan pada skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dapat membantu memperbaiki kekurangan tersebut. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi yang membacanya.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI SKRIPSI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Aditya Nurul Yasin
NPM	: 0706261505
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Jenis karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Perbandingan Penaksir Nilai Aktual dengan Bentuk Modifikasinya pada Metode *Classic* dalam Regresi Kalibrasi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalty Nonekslusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 12 Juli 2011

Yang menyatakan

(Aditya Nurul Yasin)

ABSTRAK

Nama : Aditya Nurul Yasin
Program Studi : Matematika
Judul : Perbandingan Penaksir Nilai Aktual dengan Bentuk Modifikasinya pada Metode *Classic* dalam Regresi Kalibrasi

Berdasarkan *Vocabulary Of International Metrology* (VIM), kalibrasi merupakan serangkaian kegiatan yang membentuk hubungan antara nilai yang ditunjukkan oleh instrumen (alat) ukur atau nilai observasi, dengan nilai yang sudah diketahui atau nilai aktual yang berkaitan dengan besaran yang diukur dalam kondisi tertentu. Salah satu metode yang digunakan untuk menaksir nilai aktual adalah metode *classic*. Ekspansi Deret Taylor digunakan untuk menunjukkan bahwa taksiran nilai aktual pada metode *classic* merupakan taksiran yang asimtotik *unbiased*. László J. Naszódi melakukan modifikasi penaksir nilai aktual dari metode *classic*. Dengan Ekspansi Deret Taylor ditunjukkan bahwa taksiran tersebut merupakan taksiran yang asimtotik *unbiased* namun lebih efisien.

Kata Kunci : Ekspansi Deret Taylor, Kalibrasi, Teknik Estimasi László J. Naszódi, Metode *Classic*, Regresi Kalibrasi
xiv + 56 halaman : 5 tabel, 4 gambar
Bibliografi : 11 (1967 – 2009)

ABSTRACT

Name : Aditya Nurul Yasin
Program Study : Mathematics
Tittle : Comparison between Actual Value Estimator and Its Modified Form on The Classic Method in Calibration Regression

Based on the Vocabulary of International Metrology (VIM), calibration is a series of activities that forms the relationship between values indicated by the measurement instrument (tool) or the observation value, with a known value or actual value related to the quantity that is measured under certain conditions. One method that is used to estimate the actual value is the classic method. The Taylor series expansion is used to indicate that the estimated actual value on the classic method is an asymptotically unbiased estimate. László J. Naszódi modified the estimated actual value of the classic method. By the Taylor series expansion, it is shown that these estimates are asymptotically unbiased estimates, but more efficient.

Keyword : Taylor series expansion, Calibration, László J. Naszódi Estimator, Classic Method, Regression Calibration.
xiv + 56 pages : 5 tables, 4 pictures
Bibliography : 11 (1967 – 2009)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS iii
LEMBAR PENGESAHAN iv
KATA PENGANTAR v
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH vii
ABSTRAK viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR LAMPIRAN xiv

BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Perumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Pembatasan Masalah 4
1.5 Sistematika Penulisan 4

BAB 2 LANDASAN TEORI 5
2.1 Peubah *Random* dan Fungsi Probabilitas 5
2.2 Ekspektasi Variabel *Random* 6
2.3 Variansi Variabel *Random* 6
2.4 Kovariansi Variabel *Random* 7
2.5 *Moment – Generating Function* (M.G.F.) 8
2.6 Penaksir Tidak Bias 8
2.7 Distribusi *Normal* 8
2.8 Regresi Linear Sederhana 9
2.8.1 Sifat – sifat Penaksir dengan Metode *Least-Square* 11
2.9 Bentuk Metode *Classic* pada Regresi Kalibrasi 13
2.9.1 Regresi Kalibrasi 13
2.9.2 Metode *Classic* 14
2.9.3 Penaksir Nilai Aktual Metode *Classic* 15

BAB 3 PERBANDINGAN PENAKSIR NILAI AKTUAL DENGAN BENTUK MODIFIKASINYA 18
3.1 Pembuktian Penaksir Nilai aktual ($\hat{x}_0$) Bersifat Bias 18
3.1.1 Ekspansi Deret Taylor (N Variabel) 21
3.2 Modifikasi Bentuk Penaksir Nilai Aktual ($\tilde{x}_0$) 24
3.2.1 Sifat Modifikasi Penaksir Nilai Aktual ($\tilde{x}_0$) 25
3.3 Perbandingan Penaksir Nilai Aktual ($\hat{x}_0$) Dengan Bentuk Modifikasi ($\tilde{x}_0$) 29
3.3.1 Variansi Dari Penaksir Nilai aktual ($\hat{x}_0$) 29

3.3.2 Perbandingan Variansi Dari Penaksir Nilai Aktual $(\hat{x}_0)$ Dengan Variansi Dari Modifikasi Bentuk Penaksir Nilai Aktual $(\tilde{x}_0)$ 33

BAB 4 ANALISA DATA **40**
4.1 Metode *Classic* 41
4.2 Perbandingan Penaksir Nilai Aktual $(\hat{x}_0)$ Dengan Modifikasi Bentuk Penaksir Nilai Aktual $(\tilde{x}_0)$ 44

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN **47**
5.1 Kesimpulan 47
5.2 Saran 47

DAFTAR PUSTAKA 48
LAMPIRAN 49

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Umur aktual dan observasi dari spesimen / benda purbakala 40

Tabel 4.2. Anova untuk model regresi dari penaksir *classic* 41

Tabel 4.3. *Summary* untuk model regresi dari penaksir *classic* 42

Tabel 4.4. *Coefficients* untuk model regresi dari penaksir *classic* 42

Tabel 4.4. *Coefficients* untuk model regresi dari penaksir *classic* 42

Tabel 4.1.4. *Residuals Statistics* model regresi dari penaksir *classic* 42

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1.1. *Normal Probability Plot Residual* Metode *Classic* 40

Gambar 4.1.2. *Scatterplot* SRESID vs ZPRED
Metode *Classic* 40

Gambar 4.2.1. Grafik Nilai Aktual vs Penaksir Nilai Aktual...................... 40

Gambar 4.2.1. Pembesaran (200 %) dari
Grafik Nilai Aktual vs Penaksir Nilai Aktual...................... 40

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program untuk mencari taksiran nilai aktual metode *classic* dan modifikasi metode *classic*............................ 40

Lampiran 2 Output program.. 40

Lampiran 3 Pembuktian $\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = \sqrt{n}(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right)$, saat n menuju tak hingga.. 40

Lampiran 4 Bentuk Modifikasi dari taksiran nilai aktual metode *Classic* 40

Lampiran 5 Uji konvergensi dan Big O.. 40

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Regresi linier sederhana merupakan metode umum untuk mendapatkan bentuk fungsi linier dua variabel yang berhubungan, yaitu variabel dependen dan variabel independen. Variabel yang dipengaruhi oleh variabel lain disebut dengan variabel dependen, sedangkan variabel yang mempengaruhi variabel dependen disebut dengan variabel independen.

Model regresi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \qquad (1.1.1)$$

dimana,

β_0 (intersep) dan β_1 (slope koefisien) merupakan parameter yang tidak diketahui atau koefisien regresi serta ε merupakan merupakan variabel acak yang disebut sebagai *random error*.

Terdapat beberapa asumsi dasar untuk regresi linear, diantaranya :

1. *Error* memiliki nilai harapan nol atau $E(\varepsilon) = 0$,
2. *Error* memiliki variansi berharga sama (konstan),
3. *Error* saling bebas,
4. *Error* berdistribusi *normal*.

Jika parameter dalam model regresi di atas berhubungan secara linear dengan variabel dependennya maka disebut model regresi linear.

Statistik kalibrasi secara ilmiah memiliki kesepahaman pengertian dengan regresi linear yang telah diuraikan di atas. Pada permasalahan regresi linear, baik yang melibatkan estimasi atau prediksi, biasanya akan ditentukan berapa nilai y yang bersesuaian bila nilai x diberikan. Namun demikian apabila yang terjadi sebaliknya, yaitu akan ditentukan berapa nilai x yang bersesuaian bila nilai y diberikan . Dalam hal ini kita lebih mengenalnya sebagai invers regresi.

Kalibrasi adalah kegiatan yang menghubungkan nilai yang ditunjukkan oleh instrumen ukur atau nilai yang diwakili oleh bahan ukur dengan nilai-nilai yang sudah diketahui tingkat kebenarannya. Nilai yang sudah diketahui ini biasanya merujuk ke suatu nilai dari kalibrator atau standar, yang tentunya harus memiliki akurasi yang lebih tinggi daripada alat ukur yang di-tes, biasa disebut *unit under test* atau UUT "(ISO/IEC *Guide* (17025:2005) dan *Vocabulary of International Metrology* (VIM)*"*

Pengembangan konsep penelitian ini diterapkan pada sebuah studi kasus, dimana seorang peneliti (arkeolog) memiliki beberapa kumpulan benda purbakala, selanjutnya akan dinamakan dengan spesimen, untuk ditentukan umur benda tersebut dengan teknik *luminesensi* waktu. Arkeolog tersebut memiliki 2 alat pengukur dimana keluaran (*output*) yang dihasilkan akan menentukan umur dari spesimen tersebut. Alat A dengan ketelitian pengukuran yang cukup tinggi, atau dengan kata lain telah terkalibrasi, namun menghabiskan biaya yang cukup mahal dalam penggunaannya dan secara perlahan dapat mengakibatkan kerusakan pada spesimen yang akan diteliti. Di sisi lain, Alat B membutuhkan biaya yang cukup murah sekaligus tidak merusak spesimen yang diteliti dalam hal penggunaannya. Akan tetapi, dalam hal keakuratan, alat B tidak seakurat hasil pengukuran yang ditunjukkan oleh alat A.

Mekanisme yang digunakan oleh Arkeolog dalam penelitian ini memiliki 2 tahap pengukuran, yaitu pertama mengukur n spesimen (x_i,y_i) data berpasangan menggunakan kedua alat ukur (alat A dan B) dimana x merepresentasikan nilai sebenarnya (*fixed*) dari spesimen yang akan diteliti diukur menggunakan alat A dan y merepresentasikan nilai observasi hasil pengukuran menggunakan alat B. Mekanisme tersebut dilakukan menggunakan metode regresi yang telah dijelaskan sebelumnya dan diharapkan dapat memberikan pengetahuan lebih dalam akan hubungan antara x dan y. Studi lebih lanjut ditemukan fakta bahwa peneliti lebih mementingkan aspek biaya disertai pengurangan resiko terhadap kerusakan benda dalam proyek penelitian ini sehingga hanya pemakaian alat B yang akan digunakan dalam penelitian ini. Dengan kata lain, untuk penentuan umur spesimen selanjutnya, diharapkan bahwa peneliti sanggup untuk mengukur secara tepat (katakan x_0) didasari oleh data observasi melalui penggunaan alat B (katakan y_0).

Uraian di atas merupakan prinsip mengenai statistik kalibrasi dimana penelitian beralih dari memutuskan y|x menjadi x|y, selanjutnya hal ini lebih dikenal sebagai regresi kalibrasi.

Untuk merumuskan permasalahan regresi kalibrasi secara umum dilakukan dalam 2 tahap, yaitu :

1. Sampel didapatkan sebanyak n data berpasangan (x_i,y_i), dimana x dan y telah dijelaskan sebelumnya. Model pada tahapan ini diasumsikan :

$$y_{1,i} = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_{1,i} \qquad \text{untuk i =1,2,...,n}$$

2. Tahap selanjutnya diberikan m pengulangan observasi, $y_{2,1}$,...,$y_{2,m}$ untuk suatu nilai x_0 yang tidak diketahui.

$$y_{2,j} = \alpha + \beta x_0 + \varepsilon_{2,j} \qquad \text{untuk j =1,2,...,m}$$

dengan $\varepsilon_{1,i}$ (i.i.d) N(0,σ_1^2) dan $\varepsilon_{2,j}$ (i.i.d) N(0,σ_2^2).

Diasumsikan bahwa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, meskipun hal ini terkadang menjadi perdebatan. Berkson (1969) memberikan sebuah argumen bahwa σ_1 akan memiliki nilai lebih kecil jika dibandingkan σ_2. Hal tersebut disebabkan standar deviasi dari tahap percobaan pertama dibawah kondisi kontrol yang lebih akurat dalam pengerjaannya dibandingkan pada tahap kedua.

Dalam penelitian atau tugas akhir Sonny Afriansyah (2009) yang berjudul "Perbandingan Metode *Classic* dan Metode *Inverse* pada Regresi Kalibrasi", telah dilakukan regresi kalibrasi untuk estimasi nilai sebenarnya atau nilai aktual dari nilai observasi dengan metode *classic* dan metode *inverse* serta estimasi interval kepercayaan berdasarkan metode Graybill. Studi lebih lanjut, *Joseph Berkson* (technometrics, 11) menemukan bahwa penaksir nilai aktual dalam metode *classic* bersifat bias.

Pada tugas akhir ini akan ditunjukkan bahwa penaksir nilai aktual metode *classic* dalam regresi kalibrasi bersifat bias serta teknik dalam memodifikasi penaksir nilai aktual metode *classic* (*Naszódi's estimator, corrected for bias*) untuk mendapatkan penaksir yang lebih baik.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang menjadi bahasan dalam skripsi ini adalah bagaimana memodifikasi penaksir nilai aktual dalam metode *classic* agar mendapatkan taksiran yang lebih efisien.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah tersebut, maka penulisan skripsi ini bertujuan untuk :

- Membahas sifat – sifat penaksir nilai aktual metode *classic*.
- Membuat modifikasi penaksir nilai aktual pada metode *classic* melalui teknik yang diperkenalkan oleh László J. Naszódi.
- Membandingkan kedua bentuk penaksir di atas.

1.4. Pembatasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, regresi kalibrasi dibatasi pada bentuk regresi univariat yang memiliki hubungan linear antara nilai aktual (x) dengan nilai observasi (y) serta metode-metode yang dibahas hanya penaksir dalam metode *classic*.

1.5. Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari lima bab. BAB 1 berisi Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan. BAB 2 berisi Landasan Teori. BAB 3 berisi Pembahasan, yaitu mengenai sifat sifat penaksir nilai aktual metode *classic* serta teknik dalam memodifikasi penaksir tersebut demi mendapatkan taksiran yang lebih efisien. BAB 4 berisi Aplikasi yang menerapkan data simulasi untuk menaksir nilai aktual metode *classic* serta bentuk modifikasi metode *classic* lalu dibandingkan dalam segi keefisienannya. BAB 5 berisi Kesimpulan dan Saran.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Peubah *Random* dan Fungsi Probabilitas

Definisi 2.1 a

Misalkan $\mathcal{C}$ adalah ruang sampel dari eksperimen (percobaan) *random*. Peubah *random* X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap elemen dalam ruang sampel, $c \in \mathcal{C}$, pada satu dan hanya satu bilangan riil sedemikian sehingga $X(c) = x$, dengan $x \in R$. Range dari X adalah $\mathcal{A} = \{x \in R : x = X(c), c \in \mathcal{C}\}$.

(R.V. Hogg dan A.T. Craig, 1995)

Definisi 2.1 b

Misalkan X adalah peubah *random* dengan *one-dimensional space* $\mathcal{A}$, yang terdiri dari suatu interval atau gabungan interval. Misalkan f(x) sedemikian sehingga adalah fungsi yang non negatif, $x \in \mathcal{A}$ dan

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)dx = 1$$

dimana probabilitas himpunan fungsi P(A), $A \subset \mathcal{A}$, dapat dituliskan dalam f(x) dengan

$$P(A) = Pr(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

maka X disebut dengan peubah *random* kontinu, sementara f(x) disebut dengan *probability density function (p.d.f.)* dari X.

(R.V. Hogg dan A.T. Craig, 1995)

2.2 Ekspektasi Variabel *Random*

Definisi 2.2

Misalkan *X* adalah variabel *random* yang mempunyai *p.d.f.* f(x) sedemikian sehingga dimiliki kekonvergenan absolut; dalam kasus kontinu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

konvergen ke suatu batas berhingga.

Ekspektasi dari suatu variabel *random* adalah

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx,$$

dalam kasus kontinu.

(Thomas N. Herzog, 1999)

sifat 2.1

a. E(aX) = aE(X), dengan a adalah sebuah konstanta.

Bukti 2.1

a. E(aX) $= \int_{-\infty}^{\infty} ax\, f(x)\, dx$, definisi ekspektasi untuk peubah *random* kontinu

$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$= a\, E(X)$

2.3 Variansi Variabel *Random*

Definisi 2.3

Misalkan X adalah variabel *random* yang mempunyai p.d.f. f(x). Variansi dari X adalah suatu ekspektasi matematika dari (X - E[X])^2 dinyatakan dengan

$$Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

(Thomas N. Herzog, 1999)

<u>sifat 2.3</u>

a. $Var(aX) = a^2 Var(X)$, dengan a adalah sebuah konstanta

<u>Bukti 2.2</u>

a. $Var(aX) = E([aX-a\mu]^2)$, definisi variansi

$= E([a(X-\mu)]^2)$, sifat bilangan riil

$= E(a^2(X-\mu)^2)$, sifat pangkat

$= a^2E(X-\mu)^2$, sifat ekspektasi (2.1 a)

$= a^2Var(X)$

2.4 Kovariansi Variabel *Random*

<u>Definisi 2.4</u>

Misalkan X dan Y adalah variabel *random*. Kovariansi antara X dan Y, dinyatakan dengan $\mathrm{Cov}(X, Y)$, adalah

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

(Jonathan D. Cryer, 2008)

<u>Definisi 2.5</u>

Misalkan X dan Y adalah variabel *random* dan $Cov(X, Y)$ adalah kovariansi antara X dan Y, maka berlaku sifat-sifat berikut :

1. Jika variabel *random* X dan Y saling bebas, maka $Cov(X, Y) = 0$
2. $Cov(a + bX, c + dY) = bd\, Cov(X, Y)$
3. $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X, Y)$
4. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
5. $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
6. $Cov(X, X) = Var[X]$
7. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

2.5 *Moment-Generating Function* (M.G.F.)

Definisi 2.6

Misalkan ada bilangan positif h dengan $-h<t<h$ dimana ada ekspektasi matematika $E(e^{tX})$, maka

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx,$$

Jika X peubah *Random* Kontinu.
Ekspektasi tersebut dinamakan *moment-generating function (m.g.f.)* dari X dan dilambangkan dengan M(t). Jadi $M(t)= E(e^{tX})$.

(R.V. Hogg dan A.T. Craig, 1995)

2.6 Penaksir Tidak Bias

Definisi 2.7

Suatu statistik $\hat{\theta}$ bila ekspektasi matematiknya sama dengan parameter yang diestimasi (θ), dikatakan $\hat{\theta}$ sebagai penaksir yang tidak bias dari parameter θ, yaitu $E(\hat{\theta}) = \theta$.

(R.V. Hogg dan A.T. Craig, 1995)

2.7 Distribusi *Normal*

Definisi 2.8

Peubah *random* kontinu X dikatakan berdistribusi *normal* apabila memiliki *p.d.f.* :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

dan *m.g.f* :

$$M(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$$

dikatakan memiliki distribusi *normal* dengan mean (μ) dan variansi (σ^2) dinotasikan dengan $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Apabila peubah *random* kontinu X memiliki distribusi *normal* dengan mean $\mu = 0$ dan variansi $\sigma^2 = 1$ maka *p.d.f.* yang dimiliki adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

dan memiliki *m.g.f* :

$$M(t) = \exp\left[\frac{t^2}{2}\right]$$

peubah *random* kontinu X tersebut dikatakan memiliki distribusi *normal* standar dengan notasi $X \sim N(0,1)$.

2.8 Regresi Linear Sederhana

Definisi 2.9

Regresi linear adalah salah satu metode analisis statistik untuk mencari hubungan antara variabel respon Y dengan satu atau lebih variabel penjelas X. Hubungan linear yang dimaksud dalam hal ini ialah linear antara parameter dengan variabel respon Y.

Dalam regresi linear sederhana, peubah penjelas X yang digunakan adalah satu peubah. Model pada regresi linier sederhana adalah :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Model tersebut dinamakan juga model regresi linier dengan koefisien regresi β_0 (*intercept*) dan β_1 (*slope*) merupakan parameter yang tidak diketahui, sedangkan ε adalah *random error.*

Asumsi dalam regresi linier sederhana adalah :

1. *Error* memiliki nilai harapan atau ekspektasi nol, $E(\varepsilon) = 0$.
2. *Error* memiliki variansi bernilai sama atau konstan, $Var(\varepsilon) = \sigma^2$.
3. *Error* saling bebas.

4. *Error* berdistribusi *normal*.

Untuk mengestimasi koefisien regresi, digunakan n data berpasangan $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$. Model yang didapat untuk n data berpasangan adalah :

$$y_i = \beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

dengan asumsi *error*-nya memenuhi *normally, identic and independently distributed* serta $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ atau dinotasikan $\varepsilon_i \sim NIID(0,\sigma^2)$.

Dengan metode *least squares* akan diestimasi koefisien regresi sedemikian sehingga jumlah kuadrat antara selisih nilai observasi y_i dengan nilai prediksi $\hat{y}_i$ adalah minimum. Langkahnya adalah sebagai berikut :

$$S(\beta_0\,,\beta_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

dimana koefisien regresi, $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, harus memenuhi :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0 \rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \qquad (2.9.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0 \rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)x_i = 0 \qquad (2.9.2)$$

Sederhanakan persamaan (2.9.1) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\hat{\beta}_1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \qquad (2.9.3)$$

dimana

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Kemudian sederhanakan persamaan (2.9.2) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \tag{2.9.4}$$

dengan

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i),$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Dari persamaan (2.9.3) dan (2.9.4) diperoleh bahwa penaksir *least squares* untuk koefisien regresi, $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$, adalah $\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ - $\hat{\beta}_1 \bar{x}$ dan $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$.

Sehingga estimasi dari model regresi di atas adalah :

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

2.8.1 Sifat – sifat penaksir dengan metode *Least-Squares*

Penaksir *least-square* , $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$, memiliki beberapa sifat penting. Dari persamaan (2.9.3) dan (2.9.4) diketahui bahwa $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$merupakan kombinasi linear dari observasi y_i,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

Dimana $c_i = (x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2)$ untuk $i = 1,2, \dots, n$, serta

$\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ - $\hat{\beta}_1 \bar{x}$

Sehingga $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$ juga merupakan variabel *random*.

- $E(\hat{\beta}_1) = E(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, E(y_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\, E(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

karena disumsikan bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$, maka

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\, (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

$$= \beta_0 \sum_{i=1}^{n} c_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

lalu akan dicari nilai dari $\sum_{i=1}^{n} c_i$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i{}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right) = \left(\frac{n\bar{x} - n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right) = 0$$

sementara

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right) x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i{}^2 - x_i\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i{}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)} \right)$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i{}^2 - x_i\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2} \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2} \right) = 1$$

sehingga

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \qquad (2.9.5)$$

- Variansi $\hat{\beta}_1$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i{}^2 \mathrm{Var}(y_i)$$

Karena $\mathrm{Var}(y_i) = \sigma^2$ maka

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}{}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

- $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$
- Variansi $\hat{\beta}_0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_0\right) &= \mathrm{Var}\left(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}\right)\\ &= \mathrm{Var}\,(\bar{y}) + \bar{x}^2 \mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right) - 2\bar{x}\mathrm{Cov}\left(\bar{y}, \hat{\beta}_1\right)\\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{S_{xx}} - 2\bar{x}\mathrm{Cov}\left(\bar{y}, \hat{\beta}_1\right)\end{aligned}$$

dengan

$$\mathrm{Cov}\left(\bar{y}, \hat{\beta}_1\right) = \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,, \sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} c_j \mathrm{Cov}\left(y_i, y_j\right)$$

Karena y_i merupakan sampel *random* maka $\mathrm{Cov}\left(y_i, y_j\right) = 0\ \forall\ i \neq j$, maka

$$\mathrm{Cov}\left(\bar{y}, \hat{\beta}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} c_i \mathrm{Var}(y_i) = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = 0,$$

oleh karena itu

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_0\right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \quad \text{dan} \quad \hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

sehingga $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$, merupakan penaksir tak bias dari parameter β_0 dan β_1.

(Douglas C. Montgomery, 2001).

2.9 Bentuk Metode *Classic* pada Regresi Kalibrasi

Dalam sub-bab ini akan dibahas mengenai metode *classic* untuk melakukan estimasi nilai aktual pada regresi kalibrasi.

2.9.1 Regresi Kalibrasi

Dalam banyak masalah regresi yang melibatkan estimasi atau prediksi, biasanya akan ditentukan berapa nilai y yang bersesuaian bila nilai x diberikan.

Namun ada yang terjadi sebaliknya, yaitu akan ditentukan berapa nilai x yang bersesuaian bila nilai y diberikan. Sebagai ilustrasi, misalnya akan dikalibrasi sebuah alat ukur suhu yaitu *thermocouple*, dimana diasumsikan bahwa suhu observasi atau nilai yang terbaca pada *thermocouple* memiliki hubungan linear dengan suhu atau nilai aktual yang diukur. Misalkan model regresi linier populasinya sebagai berikut :

$$\text{Suhu observasi} = \beta_0 + \beta_1 \text{ (suhu aktual)} + \varepsilon$$

atau

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Bila pada regresi biasa, akan diberikan suhu aktual (x) kemudian ditentukan suhu observasi (y) yang bersesuaian. Namun demikian pada masalah kalibrasi yang terjadi adalah sebaliknya yaitu bila diberikan suhu observasi (y) akan ditentukan suhu aktual (x) yang bersesuaian. Masalah yang terjadi tersebut dikenal dengan masalah kalibrasi dan sering juga disebut dengan regresi kalibrasi. Estimasi nilai aktual atau suhu aktual pada regresi kalibrasi dapat dilakukan dengan metode *classic* dan metode *inverse*.

2.9.2 Metode *Classic*

Dengan menggunakan model (1.1.1) dan sejumlah n data suhu berpasangan serta diasumsikan *error*nya memenuhi asumsi regresi linier sederhana yaitu *normally, identic and independently distributed* dengan $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ atau dengan perkataan lain $\varepsilon_i \sim NIID(0,\sigma^2)$, model tersebut dapat dinyatakan sebagai model regresi linier sampel sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,...,n$$

dimana parameter β_0 dan β_1 akan diestimasi dengan metode *least squares*. Dari persamaan (2.9.3) dan (2.9.4) didapat $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$ dan $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ sehingga didapat penaksir regresi

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \tag{2.9.5}$$

Persamaan regresi kalibrasi yang bersesuaian dengan (2.9.5) menjadi

$$x = \frac{y - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

Apabila diberikan suhu observasi (y_0) yang terbaca pada *thermocouple*, maka estimasi suhu aktual (x_0) berdasarkan metode *classic* adalah

$$\hat{x}_0 = \frac{y_0 - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

2.9.3 Estimasi Nilai Aktual Metode *Classic*

Setelah estimasi titik nilai aktual dilakukan menggunakan metode *Classic* selanjutnya akan dilakukan estimasi titik nilai aktual berdasarkan pendekatan Graybill.

Pada persamaan regresi kalibrasi sebelumnya pada metode *classic*, model dasarnya adalah persamaan (1.1.1) sebagai berikut :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim NID(0,\sigma^2) \qquad (2.9.4.1)$$

Pada metode Graybill dilakukan dua langkah guna mendapatkan persamaan regresi kalibrasi. Pertama mendefinisikan ulang x pada persamaan (1.1.1) sebagai deviasi dari rata-ratanya, yaitu $x - \bar{x}$, sehingga model regresi tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$y = \gamma_0 + \gamma_1(x - \bar{x}) + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \qquad (2.9.4.2)$$

dimana γ_0 dan γ_1 adalah parameter yang tidak diketahui nilainya.
Kedua model tersebut, yaitu model pada persamaan (2.9.4.1) dan (2.9.4.2), adalah ekivalen bila didefinisikan

$$\gamma_1 = \beta_1$$

dan

$$\beta_0 = \gamma_0 - \gamma_1\bar{x}.$$

Langkah kedua yang dilakukan pada metode Graybill adalah dengan dilakukan observasi tambahan sebanyak $k \geq 1$ pada suhu aktual x_0, sedemikian sehingga sampel yang didapat menjadi n+k data berpasangan yang dinotasikan sebagai berikut :

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),(x_0,y_{n+1}),(x_0,y_{n+2}),\ldots,(x_0,y_{n+k})$$

observasi tambahan sebanyak k yang dinotasikan dengan $y_{n+1},y_{n+2},\ldots,y_{n+k}$ tersebut , dengan mengacu (2.9.4.2) diasumsikan merupakan sampel *random* berdistribusi *normal* dengan mean $\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x}_0 - \bar{\mathrm{x}})$ dan variansi σ^2 dengan $\mathrm{x}_0, \gamma_0, \gamma_1, \sigma^2$ tidak diketahui.

2.9.4.1 Estimasi γ_0, γ_1, dan x_0

Estimasi γ_1 pada model persamaan (2.9.4.2) sama dengan hasil estimasi parameter β_1 pada model persamaan (2.9.4.1), yaitu

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\beta}_1$$

dari persamaan (2.9.4) didapat

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Estimasi parameter γ_0 sebagai berikut

$$\hat{\gamma}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_1\bar{x}$$

diketahui $\hat{\gamma}_1 = \beta_1$ dan $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x}$, sehingga

$$\hat{\gamma}_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x} + \beta_1\bar{x} = \bar{y}$$

dengan

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i)$$

Asumsi *normalitas* pada ε di persamaan (2.9.4.2) mengimplikasikan $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ berdistribusi *normal* juga.

Selanjutnya, akan diestimasi x_0 dengan n+k data

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),(x_0,\bar{y}_0)$$

berdasarkan metode *classic*, yaitu

$$\hat{x}_0 = \frac{\bar{y}_0 - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

Karena $\hat{\beta}_1 = \hat{\gamma}_1$ serta $\hat{\beta}_0 = \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1\bar{x}$, maka

$$\hat{x}_0 = \frac{\bar{y}_0 - (\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1\bar{x})}{\hat{\gamma}_1}$$

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{\bar{y}_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$$

diketahui $\overline{\mathrm{y}} = \hat{\gamma}_0$, sehingga

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{\overline{\mathrm{y}}_0 - \overline{\mathrm{y}}}{\hat{\gamma}_1}$$

dengan

$$\overline{\mathrm{y}}_0 = \frac{1}{\mathrm{k}} \sum_{i=n+1}^{n+k} (y_i)$$

BAB 3
PERBANDINGAN PENAKSIR NILAI AKTUAL DENGAN BENTUK MODIFIKASINYA

Bab ini terbagi dalam tiga sub bab. Pada sub bab 3.1 akan dibahas mengenai sifat penaksir nilai aktual ($\hat{x}_0$) metode *classic* dalam regresi kalibrasi bersifat bias dan konsisten. Pada sub bab 3.2 akan dibahas teknik dalam memodifikasi penaksir nilai aktual ($\hat{x}_0$) (*Naszódi's* penaksir, *corrected for bias*) untuk mendapatkan penaksir yang lebih baik ($\tilde{x}_0$). Pada sub bab 3.3 akan dibahas mengenai perbandingan penaksir nilai aktual ($\hat{x}_0$) dan bentuk modifikasinya.

3.1 Pembuktian Penaksir Nilai Aktual ($\hat{x}_0$) Bersifat Bias

Pada pembahasan sebelumnya dalam subbab 2.9.4 telah didapatkan bentuk taksiran (nilai aktual) metode *classic* dalam regresi kalibrasi sebagai berikut :

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{\mathrm{y}_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}, \qquad (3.1.1)$$

Dimana y_0 diasumsikan berasal dari sampel *random* berdistribusi *normal* dengan mean $\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x}_0 - \bar{\mathrm{x}})$ dan variansi σ^2, yakni

$$\mathrm{y}_0 \sim \mathrm{N}\left(\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x}_0 - \bar{x}), \sigma^2\right) \qquad (3.1.2)$$

serta

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1 &= \hat{\beta}_1 \qquad (3.1.3)\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})(\mathrm{y_i})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_0 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_1\bar{x}\\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}\\ &= \bar{\mathrm{y}} - \hat{\beta}_1\bar{x} + \hat{\beta}_1\bar{x}\\ &= \bar{\mathrm{y}} \qquad (3.1.4)\end{aligned}$$

Melalui kedua persamaan di atas (3.1.3 dan 3.1.4) akan dibuktikan bahwa :

1. $\hat{\gamma}_0 \sim N\left(\gamma_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ serta $\hat{\gamma}_1 \sim N\left(\gamma_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$.
2. $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$saling bebas.

Bukti (1) akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ keduanya berdistribusi *Normal*. $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ merupakan bagian penjumlahan dari distribusi *normal* , yaitu $\hat{\gamma}_0 = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ dan $\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i)(x_i - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$ sehingga $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$juga berdistribusi *Normal*.

Selanjutnya akan ditelusuri *mean* dan variansi dari $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$.

(a) $$E(\hat{\gamma}_0) = E(\bar{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(y_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_0 + \gamma_1(x_i - \bar{x})\right) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

$$= \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}\right) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n}(n\bar{x} - n\bar{x})$$

$$= \gamma_0$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\gamma}_0) = \mathrm{Var}(\bar{y}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(y_i)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

(b) $$E(\hat{\gamma}_1) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i)(x_i - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right), \qquad c_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\, E(y_i)$$

Melalui persamaan 3.1.2 didapatkan

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\gamma_0 + \gamma_1(x_i - \bar{x})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\,\gamma_1(x_i - \bar{x})$$

$$= \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} c_i + \gamma_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)$$

dalam subbab 2.8.1 telah dibuktikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ serta $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1$ sehingga

$$E(\hat{\gamma}_1) = \gamma_1$$

$$\text{Var}(\hat{\gamma}_1) = Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Sehingga didapatkan bahwa

$$\therefore \hat{\gamma}_0 \sim N\left(\gamma_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{serta} \quad \hat{\gamma}_1 \sim N\left(\gamma_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right).$$

Bukti (2), dari bagian bukti (1) telah ditunjukkan bahwa $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ berdistribusi *Normal*.

$$Cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = \text{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right), \text{dengan } c_j = \frac{(x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} c_j \text{Cov}(y_i, y_j)$$

Karena yi merupakan sampel *random* dengan $\text{Cov}(y_i, y_j) = 0 \;\forall\; i \neq j$, maka

$$Cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} c_i \text{Var}(y_i) = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i,$$

kemudian di dalam subbab 2.8.1 telah dibuktikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$, sehingga

$$Cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$$

Teorema 3.1.1

Misalkan X dan Y berdistribusi bivariat normal dengan mean μ_1, μ_2, variansi positif $\sigma_1{}^2$, $\sigma_2{}^2$, dan koefisien korelasi ρ. Maka X dan Y saling bebas jika dan hanya jika $\rho = 0$.

(R.V. Hogg dan A.T. Craig, 1995)

Karena $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$ keduanya berdistribusi *Normal* serta memiliki nilai $Cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = 0$, atau secara tidak langsung menunjukkan bahwa nilai koefisien korelasi kedua variabel $(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1)$ $\rho = 0$, maka $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$ dapat dikatakan saling bebas.

3.1.1 Ekspansi Deret Taylor (N Variabel)

Ekspansi Deret Taylor merupakan representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik.

Deret Taylor dari sebuah fungsi riil atau fungsi kompleks *f*(*x*) yang terdeferensialkan tak hingga dalam persekitaran sebuah bilangan riil atau kompleks *a* adalah :

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

yang dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dengan $n!$ melambangkan faktorial dari n serta $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a. Turunan ke-nol dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, sementara $(x - a)^0$ dan 0! didefinisikan sebagai 1.

Deret Taylor dapat dikembangkan untuk sebuah fungsi dengan kondisi lebih dari satu variabel, bentuk umumnya sebagai berikut :

$$Y(x_1,\dots,x_d)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\dots\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{(x_i-a_1)^{n_1}\dots(x_d-a_d)^{n_d}}{n_1!\dots n_d!}\left(\frac{\partial^{n_1+\dots+n_d}f}{\partial x_1{}^{n_1}\dots\partial x_d{}^{n_d}}\right)(a_1,\dots,a_d). \quad (3.1.5)$$

Ekspansi deret Taylor memiliki peran penting membangun sebuah fungsi dari estimasi (nilai aktual) yang terdiri dari beberapa variabel *random* disekitaran parameternya.

Dari persamaan (3.1.1) bentuk taksiran (nilai aktual) metode *classic*

$$\hat{x}_0=\bar{x}+\frac{y_0-\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$$

terdiri dari 3 variabel *random* berdistribusi *Normal* yaitu $(y_0,\hat{\gamma}_0,\hat{\gamma}_1)$. Selanjutnya untuk mencari pendekatan distribusi dari taksiran nilai aktual $(\hat{x}_0)$ akan digunakan ekspansi Deret Taylor dengan 3 variabel yang akan diturunkan dari persamaan (3.1.5).

Bentuk umum perluasan Deret Taylor order ketiga dari $Y = f(X_1, X_2, X_3)$ disekitar $\mu = (\mu_1\mu_2\mu_3) = (E(X_1), E(X_2), E(X_3))$ adalah :

$$\begin{aligned}Y=&f(\mu)+(X_1-\mu_1)f_1(\mu)+(X_2-\mu_2)f_2(\mu)+(X_3-\mu_3)f_3(\mu)\\&+\frac{1}{2}[(X_1-\mu_1)^2f_{11}(\mu)+(X_2-\mu_2)^2f_{22}(\mu)+(X_3-\mu_3)^2f_{33}(\mu)]\\&+(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)f_{12}(\mu)+(X_1-\mu_1)(X_3-\mu_3)f_{13}(\mu)\\&+(X_2-\mu_2)(X_3-\mu_3)f_{23}(\mu)\\&+\frac{1}{3}[(X_1-\mu_1)^3f_{111}(\mu)+(X_2-\mu_2)^3f_{222}(\mu)+(X_3-\mu_3)^3f_{333}(\mu)]\\&+(X_1-\mu_1)^2(X_2-\mu_2)f_{112}(\mu)+(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)^2f_{122}(\mu)\\&+(X_1-\mu_1)^2(X_3-\mu_3)f_{113}(\mu)+(X_1-\mu_1)(X_3-\mu_3)^2f_{133}(\mu)\\&+(X_2-\mu_2)^2(X_3-\mu_3)f_{223}(\mu)+(X_2-\mu_2)(X_3-\mu_3)^2f_{233}(\mu).\end{aligned}$$

(Casella and Berger, 2002)

Sehingga bentuk Ekspansi Deret Taylor order ketiga dari

$$\hat{x}_0=f(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_0,y_0)=\bar{x}+\frac{(y_0-\hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1}$$

disekitar $\mu = \left(E(\hat{\gamma}_1),E(\hat{\gamma}_0),E(y_0)\right)$ dengan beberapa penurunan

$$f(\mu)=f\left(E(\hat{\gamma}_1),E(\hat{\gamma}_0),E(y_0)\right)=\bar{x}+\frac{E(y_0)-\gamma_0}{\gamma_1}$$

$$f_1(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \gamma_1} = \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^2}, \quad f_{11}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_1^2} = \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3},$$

$$f_{111}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_1^3} = -\frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^4}$$

$$f_2(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \gamma_0} = -\frac{1}{\gamma_1}, \quad f_{22}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_0^2} = 0, \quad f_{222}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_0^3} = 0$$

$$f_3(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)} = \frac{1}{\gamma_1}, \quad f_{33}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)^2} = 0, \quad f_{333}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)^3} = 0$$

$$f_{21}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_0} = \frac{1}{{\gamma_1}^2}, \quad f_{31}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_1 \partial \mathrm{E}(y_0)} = -\frac{1}{{\gamma_1}^2}$$

$$f_{211}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_1^2 \partial \gamma_0} = \frac{1}{{\gamma_1}^3}, \quad f_{311}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_1^2 \mathrm{E}(y_0)} = -\frac{1}{{\gamma_1}^3}$$

memiliki bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(y_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = \hat{\mathrm{x}}_0 = \bar{\mathrm{x}} &+ \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^2}(\Delta\hat{\gamma}_1) - \frac{1}{\gamma_1}(\Delta\hat{\gamma}_0) + \frac{1}{\gamma_1}(\Delta y_0) \\ &+ \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3}(\Delta\hat{\gamma}_1)^2 - \frac{1}{{\gamma_1}^2}(\Delta\hat{\gamma}_1)(\Delta y_0) + \frac{1}{{\gamma_1}^2}(\Delta\hat{\gamma}_1)(\Delta\hat{\gamma}_0) \\ &- \frac{\mathrm{E}(Y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^4}(\Delta\hat{\gamma}_1)^3 + \frac{1}{{\gamma_1}^3}(\Delta\hat{\gamma}_1)^2(\Delta y_0) - \frac{1}{{\gamma_1}^3}(\Delta\hat{\gamma}_1)^2(\Delta\hat{\gamma}_0) + \cdots \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dimana

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\gamma}_1 &= \hat{\gamma}_1 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_1) = \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \\ \Delta\hat{\gamma}_0 &= \hat{\gamma}_0 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_0) = \hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \\ \Delta y_0 &= y_0 - \mathrm{E}(y_0) \end{aligned}$$

Jika kita menghitung Ekspektasi dari ekspansi $\mathrm{f}(y_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1)$ di dalam persamaan (3.1.6) akan diperoleh bahwa $\hat{\gamma}_1 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_1)$, $\hat{\gamma}_0 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_0)$, serta $y_0 - \mathrm{E}(y_0)$ memiliki ekspektasi 0, maka bagian yang memiliki order ganjil (bagian kedua, ketiga, keempat, keenam, ketujuh, kedelapan, kesembilan hingga kesepuluh) akan bernilai 0. Oleh karena itu, nilai ekspektasi dari persamaan (3.1.6) tersebut mendekati

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\mathrm{x}}_0) &\cong E\left[\bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3}(\Delta\hat{\gamma}_1)^2\right] \\ &= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} E[(\Delta\hat{\gamma}_1)^2] \end{aligned}$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} Var[\hat{\gamma}_1]$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y_i}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})}{\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{x_j} - \bar{\mathrm{x}})^2}\right]$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} Var \sum_{i=1}^{n} c_i\,(\mathrm{Y_i})$$

$$\text{dimana } c_i = \left[\frac{(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})}{\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{x_j} - \bar{\mathrm{x}})^2}\right]$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, Var\,(\mathrm{Y_i})$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, \sigma^2$$

$$= \bar{x} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}\right)$$

persamaan (3.1.2) menunjukkan bahwa $\mathrm{y_0} \sim \mathrm{N}\left(\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x_0} - \bar{x}), \sigma^2\right)$ sehingga

$$= \bar{x} + \frac{\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x_0} - \bar{x}) - \gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\gamma_0 + \gamma_1(\mathrm{x_0} - \bar{x}) - \gamma_0}{{\gamma_1}^3} \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}\right)$$

$$= \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) + \frac{(x_0 - \bar{x})}{{\gamma_1}^2} \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}\right),$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{x}}_0) = x_0 + (x_0 - \bar{x}) \frac{m_i^2}{{\gamma_1}^2},$$

dimana

$$m_i^2 = Var(\hat{\gamma}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2} = \frac{\sigma^2}{\mathrm{S_{xx}}} = \frac{\sigma^2}{(\mathrm{n} - 1)\sigma_{\mathrm{x}}^2} \qquad (3.1.7)$$

dengan σ_{x}^2 merupakan sampel variansi dari nilai $\mathrm{x_i}$ untuk $\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$.

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa $\hat{\mathrm{x}}_0 = \bar{\mathrm{x}} + \frac{(Y_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1}$ merupakan taksiran yang bias untuk nilai aktual $\mathrm{x_0}$ dengan fungsi bias

$$T(\mathrm{x_0}) = (x_0 - \bar{x}) \frac{m_i^2}{{\gamma_1}^2} = (x_0 - \bar{x}) \frac{\sigma^2}{{\gamma_1}^2(\mathrm{n} - 1)\sigma_{\mathrm{x}}^2},$$

namun untuk jumlah sampel n yang besar,

$$\lim_{n\to\infty} T(\mathrm{x}_0) = \lim_{n\to\infty} (x_0 - \bar{x}) \frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2(\mathrm{n}-1)\sigma_{\mathrm{x}}^2} = 0,$$

penaksir nilai aktual metode *classic* tidak bias (*unbiased*) secara asimtotik.

Fungsi bias dari penaksir untuk x_0 juga akan mengecil saat $x_0 \to \bar{x}$, atau bahkan akan hilang sama sekali saat terjadi kondisi dimana $x_0 = \bar{x}$.

3.2 Modifikasi Bentuk Penaksir Nilai Aktual ($\tilde{x}_0$)

Dalam sub bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa

$$\hat{\mathrm{x}}_0 = \bar{\mathrm{x}} + \frac{(Y_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1}$$

memberikan taksiran yang bias untuk x_0 dengan fungsi bias

$$T(\mathrm{x}_0) = (x_0 - \bar{x}) \frac{m_i^2}{\gamma_1{}^2} = (x_0 - \bar{x}) \frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2(\mathrm{n}-1)\sigma_{\mathrm{x}}^2}. \qquad (3.2.1)$$

László J. Naszódi dalam jurnalnya '*Elimination of the Bias in the Course of Calibration*' mengemukakan suatu teknik modifikasi yang bertujuan untuk meminimalisasi fungsi bias yang terdapat dalam taksiran nilai aktual ($\hat{\mathrm{x}}_0$).
Dari persamaan (3.1.8) dimisalkan taksiran fungsi bias nilai aktual ($\hat{\mathrm{x}}_0$) :

$$\hat{T}(\mathrm{x}_0) = (x_0 - \bar{x}) \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}.$$

Ide utama dalam teknik modifikasi (László J. Naszódi) ialah mengurangi bentuk taksiran nilai aktual ($\hat{\mathrm{x}}_0$) dengan taksiran dari fungsi biasnya. Seperti yang terlihat di bawah ini bahwa bentuk penaksir x_0 baru didapatkan melalui bentuk modifikasi ialah

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \hat{x}_0 - \hat{T}(\mathrm{x}_0). \\ &= \bar{\mathrm{x}} + \frac{(Y_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1} - (x_0 - \bar{x}) \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2} \\ &= \bar{x} + \frac{(\mathrm{y}_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}}. \end{aligned}$$

3.2.1 Sifat Modifikasi Penaksir Nilai Aktual ($\tilde{x}_0$)

Teknik Modifikasi yang telah dijelaskan dalam sub bab 3.2 menghasilkan bentuk taksiran dari nilai aktual yang baru, yaitu

$$\tilde{x}_0 = \bar{\mathrm{x}} + \frac{(\mathrm{y}_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^{\ 2}}}. \qquad (3.2.1.1)$$

Menurut Naszódi taksiran tersebut selain dapat dengan mudah diturunkan dari taksiran sebelumnya ($\hat{x}_0$) juga bersifat *unbiased* secara asimtotik serta lebih efisien. Untuk mengetahui sifat tersebut akan dilakukan kembali ekspansi deret taylor dari taksiran nilai aktual ($\tilde{x}_0$), dimana ekspansi deret taylor ini masih menggunakan bentuk dari tiga variabel ($\mathrm{y}_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$).

Bentuk perluasan Deret Taylor order ketiga dari persamaan 3.2.1.1 disekitar μ = $\left(E(\hat{\gamma}_1), E(\hat{\gamma}_0), E(y_0)\right)$ dengan beberapa penurunan

$$f(\mu) = f\left(E(\hat{\gamma}_1), E(\hat{\gamma}_0), E(y_0)\right) = \bar{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}$$

$$f_1(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \gamma_1} = \frac{2\gamma_1\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{3{\gamma_1}^4\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2},$$

$$f_{11}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_1^2} = \frac{2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{18{\gamma_1}^3\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{18{\gamma_1}^6\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3}$$

$$\begin{aligned} f_{111}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_1^3} = & - \frac{2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} \\ & - \left(\frac{\left(54{\gamma_1}^2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2\right) - \left(108{\gamma_1}^5\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^4}\right) \\ & - \left(\frac{\left(108{\gamma_1}^5\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3\right) - \left(162{\gamma_1}^8\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^6}\right) \end{aligned}$$

$$f_2(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \gamma_0} = -\frac{1}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}, \qquad f_{22}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \gamma_0^2} = 0, \qquad f_{222}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \gamma_0^3} = 0$$

$$f_3(\mu) = \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)} = \frac{1}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}, \qquad f_{33}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)^2} = 0, \qquad f_{333}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial \mathrm{E}(y_0)^3} = 0$$

$$f_{21}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial\gamma_1 \partial\gamma_0} = -\frac{2\gamma_1}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} + \frac{3{\gamma_1}^4}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2},$$

$$f_{31}(\mu) = \frac{\partial^2 f(\mu)}{\partial\gamma_1 \partial \mathrm{E}(y_0)} = \frac{2\gamma_1}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{3{\gamma_1}^4}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2}$$

$$f_{211}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial\gamma_1^2 \partial\gamma_0} = -\frac{2}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} + \frac{18{\gamma_1}^3}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} + \frac{18{\gamma_1}^6}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3},$$

$$f_{311}(\mu) = \frac{\partial^3 f(\mu)}{\partial\gamma_1^2 \mathrm{E}(y_0)} = \frac{2}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{18{\gamma_1}^3}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{18{\gamma_1}^6}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3}.$$

memiliki bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(\mathrm{Y}_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) = \tilde{x}_0 = \bar{\mathrm{x}} &+ \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}} + \left(\frac{2\gamma_1\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{3{\gamma_1}^4\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2}\right)(\Delta\hat{\gamma}_1) \\
&- \frac{1}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{{\gamma_1}^2}}(\Delta\hat{\gamma}_0) + \frac{1}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{{\gamma_1}^2}}(\Delta y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{18{\gamma_1}^3\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{18{\gamma_1}^6\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3}\right](\Delta\hat{\gamma}_1)^2 \\
&+ \left(\frac{2\gamma_1}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{3{\gamma_1}^4}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2}\right)(\Delta\hat{\gamma}_1)(\Delta y_0) \\
&- \left(-\frac{2\gamma_1}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} + \frac{3{\gamma_1}^4}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2}\right)(\Delta\hat{\gamma}_1)(\Delta\hat{\gamma}_0) - \frac{2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} \\
&- \left(\frac{\left(54{\gamma_1}^2\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2\right) - \left(108{\gamma_1}^5\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^4}\right) \\
&- \left(\frac{\left(108{\gamma_1}^5\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3\right) - \left(162{\gamma_1}^8\left(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0\right)\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2\right)}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^6}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Delta\hat{\gamma}_1)^3 + \left(\frac{2}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} - \frac{18{\gamma_1}^3}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{18{\gamma_1}^6}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3}\right)(\Delta\hat{\gamma}_1)^2(\Delta y_0) \\
&+ \left(-\frac{2}{{\gamma_1}^3 + m_i^2} + \frac{18{\gamma_1}^3}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^2} + \frac{18{\gamma_1}^6}{\left({\gamma_1}^3 + m_i^2\right)^3}\right)(\Delta\hat{\gamma}_1)^2(\Delta\hat{\gamma}_0) \quad (3.2.1.2)
\end{aligned}$$

dimana

$$\Delta\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_1 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_1) = \hat{\gamma}_1 - \gamma_1,$$
$$\Delta\hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_0 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_0) = \hat{\gamma}_0 - \gamma_0,$$
$$\Delta y_0 = y_0 - \mathrm{E}(y_0)$$

Jika kita menghitung Ekspektasi dari ekspansi $\mathrm{f}(y_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1)$ dari persamaan (3.2.1.2) di atas akan diperoleh $\hat{\gamma}_1 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_1)$, $\hat{\gamma}_0 - \mathrm{E}(\hat{\gamma}_0)$, serta $y_0 - \mathrm{E}(y_0)$ memiliki ekspektasi 0, maka bagian yang memiliki order ganjil (bagian kedua, ketiga, keempat, keenam, ketujuh, kedelapan, kesembilan hingga kesepuluh) juga akan bernilai 0. Oleh karena itu, nilai ekspektasi dari persamaan (3.2.1.2) tersebut mendekati

$$E(\tilde{x}_0) \cong E\left[\bar{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{2(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\gamma_1{}^3 + m_i^2} - \frac{18\gamma_1{}^3(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{18\gamma_1{}^6(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^3}\right](\Delta\hat{\gamma}_1)^2\right]$$

$$= \bar{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}} + \left[\frac{(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\gamma_1{}^3 + m_i^2} - \frac{9\gamma_1{}^3(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{9\gamma_1{}^6(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^3} E[(\Delta\hat{\gamma}_1)^2]\right]$$

$$= \bar{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}} + \left(\frac{(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\gamma_1{}^3 + m_i^2} - \frac{9\gamma_1{}^3(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^2} - \frac{9\gamma_1{}^6(\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0)}{\left(\gamma_1{}^3 + m_i^2\right)^3}\right) Var[\hat{\gamma}_1]$$

Melalui persamaan (3.1.7) telah didapatkan

$$Var[\hat{\gamma}_1] = m_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2} = \frac{\sigma^2}{\mathrm{S_{xx}}} = \frac{\sigma^2}{(\mathrm{n}-1)\sigma_{\mathrm{x}}^2}$$

sehingga

$$E(\tilde{x}_0) \cong \bar{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{E}(y_0) - \gamma_0}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}$$

$$+\left(\frac{(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{{\gamma_1}^3+m_i^2}-\frac{9{\gamma_1}^3(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^2}-\frac{9{\gamma_1}^6(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^3}\right)m_i^2.$$

Jika kita gunakan jumlah sampel n yang besar maka

$$\lim_{n\to\infty} m_i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{(\mathrm{n}-1)\sigma_{\mathrm{x}}^2}=0,$$

oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty}\{E(\tilde{x}_0)\}\cong\lim_{n\to\infty}\left\{\bar{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0}{\gamma_1+\frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{{\gamma_1}^3+m_i^2}-\frac{9{\gamma_1}^3(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^2}-\frac{9{\gamma_1}^6(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^3}\right)m_i^2\right\}$$

Melalui hukum limit

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\bar{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0}{\gamma_1+\frac{m_i^2}{\gamma_1^2}}\right\}$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{{\gamma_1}^3+m_i^2}-\frac{9{\gamma_1}^3(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^2}-\frac{9{\gamma_1}^6(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+m_i^2\right)^3}\right)m_i^2\right\}$$
$$=\left\{\bar{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0}{\gamma_1+\frac{\lim_{n\to\infty} m_i^2}{\gamma_1^2}}\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{{\gamma_1}^3+\lim_{n\to\infty} m_i^2}-\frac{9{\gamma_1}^3(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+\lim_{n\to\infty} m_i^2\right)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{9{\gamma_1}^6(\mathrm{E}(y_0)-\gamma_0)}{\left({\gamma_1}^3+\lim_{n\to\infty} m_i^2\right)^3}\right)\lim_{n\to\infty} m_i^2\right\}$$
$$=\left\{\bar{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{E}(\mathrm{y}_0)-\gamma_0}{\gamma_1}\right\}=\bar{\mathrm{x}}+\frac{\gamma_1(\mathrm{x}_0-\bar{\mathrm{x}})}{\gamma_1}=\bar{\mathrm{x}}+(\mathrm{x}_0-\bar{\mathrm{x}})=\mathrm{x}_0$$

Dari uraian di atas telah ditunjukkan bahwa $\tilde{x}_0$ merupakan sebuah penaksir nilai aktual yang bersifat tidak bias (*Unbiased*) secara asimtotik.

3.3 Perbandingan Penaksir Nilai Aktual ($\hat{x}_0$) dengan Bentuk Modifikasi ($\tilde{x}_0$)

Dalam sub bab 3.1 dan 3.2 telah dijelaskan bahwa terdapat bentuk estimasi (nilai aktual) metode *classic* dalam permasalahan kalibrasi, yakni

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$$

serta bentuk modifikasi

$$\tilde{x}_0 = \bar{x} + \frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}}.$$

Kedua bentuk estimasi tersebut merupakan taksiran yang tidak bias (*Unbiased*) secara asimtotik, namun Naszódi memberi pendapat bahwa penaksir $\tilde{x}_0$ tersebut lebih efisien dibandingkan penaksir $\hat{x}_0$. Untuk membuktikan hal tersebut akan dicari nilai dari variansi kedua bentuk estimasi lalu akan dicari nilai dari variansi yang paling minimum.

3.3.1 Variansi dari Penaksir Nilai Aktual ($\hat{x}_0$)

Melalui hukum variansi :

$$Var(\hat{x}_0) = E[(\hat{x}_0)^2] - (E[\hat{x}_0])^2 \qquad (3.3.1.1)$$

dimana

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$$

$$(\hat{x}_0)^2 = \bar{x}^2 + \frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2} + 2\bar{x}\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$$

$$E[\hat{x}_0] = x_0 + \frac{(x_0 - \bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2}$$

$$(E[\hat{x}_0])^2 = x_0{}^2 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2 m_i^4}{\gamma_1^4} + 2\frac{x_0(x_0 - \bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2}$$

kemudian persamaan (3.3.3.1) di atas menjadi

$$Var(\hat{x}_0) = E\left[\bar{x}^2 + 2\bar{x}\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1} + \frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right]$$

$$-\left({x_0}^2 + \frac{(x_0-\bar{x})^2 m_i^4}{\gamma_1^4} + 2\frac{x_0(x_0-\bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2} \right)$$

$$= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\underbrace{E\left[\frac{y_0-\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right]}_{(1)} + \underbrace{E\left[\frac{(y_0-\hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right]}_{(2)} - \left({x_0}^2 + \frac{(x_0-\bar{x})^2 m_i^4}{\gamma_1^4} + 2\frac{x_0(x_0-\bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2} \right)$$

(1) Karena $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ saling bebas, maka

$$E\left[\frac{y_0-\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right] = E[y_0-\hat{\gamma}_0]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right]$$

Juga dalam subbab 3.1 telah ditunjukkan bahwa

$$y_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, \sigma^2) \sim N(\gamma_0 + \gamma_1(x_0-\bar{x}), \sigma^2)$$

$$\hat{\gamma}_0 \sim N\left(\gamma_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

kedua hal tersebut mengimplikasikan

$$y_0 - \hat{\gamma}_0 \sim N\left\{\gamma_1(x_0-\bar{x}), \sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \qquad (3.3.1.2)$$

$$\rightarrow E(y_0-\hat{\gamma}_0) = \gamma_1(x_0-\bar{x})$$

Selanjutnya dengan kondisi $\hat{\gamma}_1 \sim N(\gamma_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$, maka $E\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right)$ diaproksimasi menggunakan ekspansi deret Taylor. (Ott and Myers (1968), Shukla (1972), Berkson (1969)).

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1} = \frac{1}{\gamma_1} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1) + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^2 - \cdots$$

Pada lampiran telah ditunjukkan bahwa

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_1-\beta_1) = \sqrt{n}(\hat{\gamma}_1-\gamma_1) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right), \;\; n \to \infty$$

Dengan mengambil ekspektasi dari persamaan di atas, untuk n yang besar dan mengabaikan $0(1/n^2)$ akan didapat :

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right] = E\left[\frac{1}{\gamma_1} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1) + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^2 - \cdots\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{\gamma_1}\right] - E\left[\left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)\right] + E\left[\left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{\gamma_1} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right) E[\hat{\gamma}_1 - \gamma_1] + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right) E\left[(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right) Var[\hat{\gamma}_1] - \cdots$$

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right] \approx \frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)[m_i^2] \qquad (3.3.1.3)$$

Dari persamaan (3.3.1.2) dan (3.3.1.3) didapatkan

$$E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right] = E[y_0 - \hat{\gamma}_0] E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right] = \gamma_1(x_0 - \bar{x})\left[\frac{1}{\gamma_1} + \frac{m_i^2}{\gamma_1^3}\right]$$

(2) Cara serupa seperti bagian (1) kita lakukan kembali untuk mencari

$$E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right]$$

Melalui hukum variansi diketahui :

$$Var(y_0 - \hat{\gamma}_0) = E[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2] - \left(E[y_0 - \hat{\gamma}_0]\right)^2$$

$$Var(y_0 - \hat{\gamma}_0) + \left(E[y_0 - \hat{\gamma}_0]\right)^2 = E[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2]$$

Mengingat kembali bahwa

$$y_0 - \hat{\gamma}_0 \sim N\left\{\gamma_1(x_0 - \bar{x}), \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

maka,

$$E[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2] = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \{\gamma_1(x_0 - \bar{x})\}^2$$

$$E[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2] = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \{\gamma_1{}^2(x_0 - \bar{x})^2\}$$

Untuk mencari $E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2}\right]$ dilakukan ekspansi deret taylor dari variabel *random* $\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2}$ yaitu :

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2} = \frac{1}{\gamma_1{}^2} - \left(\frac{2}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2 - \cdots$$

Pada lampiran telah ditunjukkan bahwa $\sqrt{n}(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right)$ untuk $n \to \infty$

Selanjutnya hitung ekspektasi dari persamaan di atas, untuk n yang besar dan mengabaikan $0(1/n^2)$ akan didapat :

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2}\right] = E\left[\frac{1}{{\gamma_1}^2} - \left(\frac{2}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2 - \cdots\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{{\gamma_1}^2}\right] - E\left[\left(\frac{2}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)\right] + E\left[\left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{{\gamma_1}^2} - \left(\frac{2}{\gamma_1^3}\right)E[\hat{\gamma}_1 - \gamma_1] + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)E\left[(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{{\gamma_1}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)Var[\hat{\gamma}_1] - \cdots$$

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2}\right] \approx \frac{1}{{\gamma_1}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2] \qquad (3.3.1.4)$$

Sehingga

$$E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right] = E\left[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2\right].E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1^2}\right]$$

$$= \left\{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left\{{\gamma_1}^2(x_0 - \bar{x})^2\right\}\right\}.\left\{\frac{1}{{\gamma_1}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]\right\}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{{\gamma_1}^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2] + (x_0 - \bar{x})^2$$

$$+(x_0 - \bar{x})^2\frac{3}{{\gamma_1}^2}[m_i^2]$$

Kembali ke permasalahan :

$$Var(\hat{x}_0) = \bar{x}^2 + E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right] + 2\bar{x}E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right]$$

$$- \left({x_0}^2 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2 m_i^4}{\gamma_1^4} + 2\frac{x_0(x_0 - \bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2}\right)$$

$$= \bar{x}^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{{\gamma_1}^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2] + (x_0 - \bar{x})^2$$

$$+(x_0 - \bar{x})^2\frac{3}{{\gamma_1}^2}[m_i^2]$$

$$+2\bar{x}\gamma_1(x_0 - \bar{x})\left[\frac{1}{\gamma_1} + \frac{m_i^2}{\gamma_1^3}\right] - \left({x_0}^2 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2 m_i^4}{\gamma_1^4} + 2\frac{x_0(x_0 - \bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2}\right)$$

$$= \bar{x}^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{{\gamma_1}^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2] + {x_0}^2 - 2x_0\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$+(x_0 - \bar{x})^2\frac{3}{{\gamma_1}^2}[m_i^2]$$

$$+2\bar{x}(x_0-\bar{x})+2\bar{x}(x_0-\bar{x})\frac{m_i^2}{\gamma_1{}^2}-\;x_0{}^2-\frac{(x_0-\bar{x})^2m_i^4}{\gamma_1^4}-2\frac{x_0(x_0-\bar{x})m_i^2}{\gamma_1^2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]+(x_0-\bar{x})^2\frac{3}{\gamma_1{}^2}[m_i^2]$$

$$-\frac{(x_0-\bar{x})^2m_i^4}{\gamma_1^4}+2\{\bar{x}-x_0\}\left[(x_0-\bar{x})\frac{m_i^2}{\gamma_1{}^2}\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]+3\left[(x_0-\bar{x})^2\frac{1}{\gamma_1{}^2}[m_i^2]\right]$$

$$-2\left[(x_0-\bar{x})^2\frac{1}{\gamma_1{}^2}[m_i^2]\right]-(x_0-\bar{x})^2\frac{2m_i^4}{\gamma_1^4}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2}+(x_0-\bar{x})^2\frac{m_i^2}{\gamma_1{}^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]-(x_0-\bar{x})^2\frac{2m_i^4}{\gamma_1^4}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}+\frac{3\sigma^2}{\gamma_1{}^2S_{xx}}+\frac{3\sigma^2}{n\gamma_1{}^2S_{xx}}+(x_0-\bar{x})^2\frac{2\sigma^2}{\gamma_1^2S_{xx}{}^2}\right)$$

$$Var(\hat{x}_0)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{\gamma_1{}^2}+(x_0-\bar{x})^2\frac{m_i^2}{\gamma_1{}^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3\sigma^2}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]-(x_0-\bar{x})^2\frac{2m_i^4}{\gamma_1^4}$$

3.3.2 Perbandingan Variansi dari Penaksir Nilai Aktual ($\hat{x}_0$) dengan Variansi dari Modifikasi Bentuk Penaksir Nilai Aktual ($\tilde{x}_0$)

Melalui hukum variansi didapatkan :

$$Var(\tilde{x}_0)=E[(\tilde{x}_0)^2]-(E[\tilde{x}_0])^2$$

Lalu beberapa persamaan pendukung :

$$\tilde{x}_0=\bar{x}+\frac{(y_0-\hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1+\frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}}=\bar{x}+\frac{(y_0-\hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1{}^*},\text{dimana } \hat{\gamma}_1{}^*=\hat{\gamma}_1+\frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}$$

Kemunculan $\hat{\gamma}_1{}^*$ dimaksudkan dalam mempermudah pengoperasian aljabar yang akan diturunkan dalam beberapa persamaan pada nantinya, juga sifat ekspektasi, variansi maupun kovariansi akan disesuaikan ke dalam bentuk aslinya.

$$(\tilde{x}_0)^2 = \bar{x}^2 + \frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^{*2}} + 2\bar{x}\,\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1^{*}}$$

$$E(\tilde{x}_0) = \bar{x} + \frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1 + \frac{m_i^2}{\gamma_1^2}} + \left(\frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^{3} + m_i^2} - \frac{9\gamma_1^{4}(x_0 - \bar{x})}{(\gamma_1^{3} + m_i^2)^2} - \frac{9\gamma_1^{7}(x_0 - \bar{x})}{(\gamma_1^{3} + m_i^2)^3}\right) m_i^2$$

$$E(\tilde{x}_0) = \bar{x} + \frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^{*}} + \left(\frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^2\gamma_1^{*}} - \frac{9\gamma_1^{4}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^4\gamma_1^{*2}} - \frac{9\gamma_1^{7}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^6\gamma_1^{*3}}\right) m_i^2$$

$$E(\tilde{x}_0) = \bar{x} + \frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^{*}} + \left(\frac{(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1\gamma_1^{*}} - \frac{9\gamma_1^{4}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^4\gamma_1^{*2}} - \frac{9\gamma_1^{7}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^6\gamma_1^{*3}}\right) m_i^2$$

$$(E[\tilde{x}_0])^2 = \left(\bar{x} + \frac{\gamma_1(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^{*}} + \left(\frac{(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1\gamma_1^{*}} - \frac{9\gamma_1^{4}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^4\gamma_1^{*2}} - \frac{9\gamma_1^{7}(x_0 - \bar{x})}{\gamma_1^6\gamma_1^{*3}}\right) m_i^2\right)^2$$

Sehingga bentuk variansi dari modifikasi Penaksir metode *Classic* menjadi

$$\begin{aligned} Var(\tilde{x}_0) &= E\left[\bar{x}^2 + 2\bar{x}\,\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1^{*}} + \frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^{*2}}\right] - (E[\tilde{x}_0])^2 \\ &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\underbrace{E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1^{*}}\right]}_{(3)} + \underbrace{E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^{*2}}\right]}_{(4)} - (E[\tilde{x}_0])^2 \end{aligned}$$

(3) Akan dibuktikan vahwa $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1^{*}$ saling bebas

$$\mathrm{Cov}(\hat{\gamma}_1^{*}, \hat{\gamma}_0) = \mathrm{E}[\hat{\gamma}_1^{*}\hat{\gamma}_0] - \mathrm{E}[\hat{\gamma}_1^{*}].\mathrm{E}[\hat{\gamma}_0]$$

$$\mathrm{E}[\hat{\gamma}_1^{*}\hat{\gamma}_0] = \mathrm{E}\left[\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_0 + \frac{m_i^2\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1^{2}}\right].\mathrm{E}\left[\frac{m_i^2\hat{\gamma}_0}{\gamma_1^2}\right]$$

karena $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ saling bebas subbab 3.1 dan juga melihat hasil dalam persamaan sebelumnya didapatkan

$$\mathrm{Cov}(\hat{\gamma}_1^{*}, \hat{\gamma}_0) = \mathrm{E}[\hat{\gamma}_1^{*}\hat{\gamma}_0] - \mathrm{E}[\hat{\gamma}_1^{*}].\mathrm{E}[\hat{\gamma}_0]$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\gamma}_1^{*}, \hat{\gamma}_0) = \gamma_1\gamma_0 + m_i^2\gamma_0\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \left(\frac{3m_i^2}{\gamma_1^4}\right)\right)$$

$$-\left\{\gamma_1 + m_i^2\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \left(\frac{3m_i^2}{\gamma_1^4}\right)\right)\right\}\gamma_0$$

$$= \gamma_1\gamma_0 + m_i^2\gamma_0\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \left(\frac{3m_i^2}{\gamma_1^4}\right)\right) - \gamma_1\gamma_0$$

$$+ m_i^2\gamma_0\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \left(\frac{3m_i^2}{\gamma_1^4}\right)\right)$$

$$= 0$$

Setelah diketahui bahwa $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1{}^*$ saling bebas, maka

$$E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] = E[y_0 - \hat{\gamma}_0]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right]$$

Mengingat kembali bahwa dalam persamaan (3.3.1.2) telah ditunjukkan bahwa

$$E(y_0 - \hat{\gamma}_0) = \gamma_1(x_0 - \bar{x})$$

Selanjutnya akan dicari ekspansi deret taylor untuk $\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}$

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*} = \frac{1}{\gamma_1{}^*} - \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*) + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*)^2 - \cdots$$

Dengan mengambil ekspektasi dari persamaan di atas, untuk n yang besar dan mengabaikan $0(1/n^2)$ akan didapat :

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] = E\left[\frac{1}{\gamma_1{}^*} - \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*) + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*)^2 - \cdots\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{\gamma_1{}^*}\right] - E\left[\left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*)\right] + E\left[\left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{\gamma_1{}^*} - \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}}\right)E[\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*] + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)E\left[(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*)^2\right] - \cdots$$

$$= \frac{1}{\gamma_1{}^*} + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)Var[\hat{\gamma}_1{}^*] - \cdots$$

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] \approx \frac{1}{\gamma_1{}^*} + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)Var[\hat{\gamma}_1{}^*] \qquad (3.3.2.1)$$

Akan ditentukan nilai dari $Var[\hat{\gamma}_1{}^*]$

$$Var[\hat{\gamma}_1{}^*] = Var\left[\hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] = Var[\hat{\gamma}_1] + m_i^4 Var\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] + m_i^2 Cov(\hat{\gamma}_1, \frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2})$$

Dimana

$$Var[\hat{\gamma}_1] = m_i^2$$

$$Var\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] = E\left[\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right)^2\right] - \left(E\left[\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right)\right]\right)^2$$, Hukum Variansi subbab 2.3

Melihat hasil dalam persamaan (3.3.1.4) untuk $E\left[\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right)\right]$ didapatkan

$$Var\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] = E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^4}\right] - \left(\frac{1}{\gamma_1{}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]\right)^2$$

$$= \frac{1}{\gamma_1{}^4} + \left(\frac{10}{\gamma_1^6}\right)[m_i^2] - \left(\frac{1}{\gamma_1{}^4} + \left(\frac{9}{\gamma_1^8}\right)[m_i^2] + \left(\frac{6}{\gamma_1^6}\right)[m_i^2]\right)$$

$$= \left(\left(\frac{4}{\gamma_1^6}\right)[m_i^2] - \left(\frac{9}{\gamma_1^8}\right)[m_i^2]\right)$$

$$Cov\left(\hat{\gamma}_1, \frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right) = E\left[\hat{\gamma}_1 . \frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] - E[\hat{\gamma}_1]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right]$$

$$Cov\left(\hat{\gamma}_1, \frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right) = E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right] - E[\hat{\gamma}_1]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right]$$

Melalui hasil yang didapatkan dalam persamaan (3.3.1.3) dan (3.3.1.4) maka

$$= \left\{\frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{m_i^2}{\gamma_1^3}\right)\right\} - \left\{\gamma_1\left(\frac{1}{\gamma_1{}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{m_i^2}{\gamma_1^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{\gamma_1} + \left(\frac{3m_i^2}{\gamma_1^3}\right)\right) = -\frac{2m_i^2}{\gamma_1^3}$$

memanfaatkan hasil-hasil dalam persamaan-persamaan sebelumnya didapat

$$Var[\hat{\gamma}_1{}^*] = Var[\hat{\gamma}_1] + m_i^4 Var\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2}\right] + m_i^2 Cov(\hat{\gamma}_1, \frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^2})$$

$$= m_i^2 + m_i^4\left(\left(\frac{4m_i^2}{\gamma_1^6}\right) - \left(\frac{9m_i^4}{\gamma_1^8}\right)\right) + m_i^2\left(-\frac{2m_i^2}{\gamma_1^3}\right)$$

$$= m_i^2 - \frac{2m_i^4}{\gamma_1^3} + \frac{4m_i^6}{\gamma_1^6} - \frac{9m_i^8}{\gamma_1^8}$$

Kembali ke persamaan (3.3.2.1)

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] \approx \frac{1}{\gamma_1{}^*} + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^4}{\gamma_1^3}\right)$$

Sehingga didapatkan

$$E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] = E[y_0 - \hat{\gamma}_0]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right]$$

$$= \gamma_1(x_0 - \bar{x})\left(\frac{1}{\gamma_1{}^*} + \left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^4}{\gamma_1^3}\right)\right)$$

(4) Cara serupa seperti bagian (3) akan dilakukan kembali untuk mencari

$$E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right]$$

Dalam subbab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa

$$E\left[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2\right] = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left\{\gamma_1{}^2(x_0 - \bar{x})^2\right\}$$

Sehingga permasalahannya kini hanya tinggal mencari $E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right]$ (ekspansi deret taylor)

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}} = \frac{1}{\gamma_1{}^{*2}} - \left(\frac{2}{\gamma_1{}^{*3}}\right)\left(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*\right) + \left(\frac{3}{\gamma_1{}^{*4}}\right)\left(\hat{\gamma}_1{}^* - \gamma_1{}^*\right)^2 - \cdots$$

Dengan mengambil ekspektasi dari persamaan di atas, untuk n yang besar dan mengabaikan $0(1/n^2)$ serta cara similar dalam mendapatkan persamaan (3.3.1.4) diperoleh

$$E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right] = \frac{1}{\gamma_1{}^{*2}} + \left(\frac{3}{\gamma_1{}^{*4}}\right)Var\left[\hat{\gamma}_1{}^*\right] \approx \frac{1}{\gamma_1{}^{*2}} + \left(\frac{3}{\gamma_1{}^{*4}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^2}{\gamma_1^3}\right)$$

Sehingga

$$E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right] = E\left[(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2\right].E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right]$$

$$= \left\{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left\{\gamma_1{}^2(x_0 - \bar{x})^2\right\}\right\}.\left\{\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}} + \left(\frac{3}{\gamma_1{}^{*4}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^4}{\gamma_1^3}\right)\right\}$$

Untuk membandingkan kedua penaksir $(\hat{x}_0)$ dan $(\tilde{x}_0)$ dalam hal ke-efisienan maka hal yang akan dilakukan ialah membandingkan variansi antara kedua penaksir. Teknik yang akan digunakan ialah membandingkan bagian pertama dan kedua dalam variansi ($\hat{x}_0$) pada subbab 3.3.1 dan bagian ketiga serta keempat dalam variansi ($\tilde{x}_0$) pada subbab 3.3.2, dimana telah diketahui sebelumnya bahwa

$$\hat{\gamma}_1{}^* = \hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1{}^2},$$

hal di atas mengimplikasikan

$$\hat{\gamma}_1{}^* > \hat{\gamma}_1$$

atau

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1{}^*} < \frac{1}{\hat{\gamma}_1}$$

$$\gamma_1(x_0 - \bar{x})\frac{1}{\gamma_1{}^*} < \gamma_1(x_0 - \bar{x})\frac{1}{\gamma_1}$$

$$\gamma_1(x_0 - \bar{x})\frac{1}{\gamma_1{}^*} + \gamma_1(x_0 - \bar{x})\left(\frac{1}{\gamma_1{}^{*3}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^4}{\gamma_1^3}\right) < \gamma_1(x_0 - \bar{x})\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1(x_0 - \bar{x})\frac{m_i^2}{\gamma_1^3}$$

$$\therefore E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1{}^*}\right] < E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right] \qquad (3.3.2.3)$$

Lalu untuk persamaan selanjutnya dengan cara yang similar seperti di atas didapatkan

$$\left\{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left\{\gamma_1{}^2(x_0 - \bar{x})^2\right\}\right\}.\left\{\frac{1}{\gamma_1{}^{*2}} + \left(\frac{3}{\gamma_1{}^{*4}}\right)\left(m_i^2 - \frac{2m_i^2}{\gamma_1^3}\right)\right\}$$
$$< \left\{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left\{\gamma_1{}^2(x_0 - \bar{x})^2\right\}\right\}.\left\{\frac{1}{\gamma_1{}^2} + \left(\frac{3}{\gamma_1^4}\right)[m_i^2]\right\}$$

$$\therefore E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1{}^{*2}}\right] < E\left[\frac{(y_0 - \hat{\gamma}_0)^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right] \qquad (3.3.2.4)$$

Melalui persamaan (3.3.2.3) dan persamaan (3.3.2.4) dapat diberi kesimpulan bahwa

$$Var(\tilde{x}_0) < Var(\hat{x}_0)$$

Karena variansi dari penaksir $\tilde{x}_0$ lebih kecil dibandingkan variansi dari penaksir $\hat{x}_0$ atau dengan kata lain lebih minimum maka penaksir $\tilde{x}_0$ tersebut lebih efisien dibandingkan penaksir $\hat{x}_0$.

BAB 4
ANALISA DATA

Pada bab ini akan dibahas contoh dari penaksiran nilai aktual ($\hat{x}_0$) metode *classic* dan modifikasi estimasi nilai aktual ($\tilde{x}_0$) serta perbandingan dari kedua penaksir tersebut yang akan dilakukan dengan menggunakan bantuan *software SPSS 16* dan *Matlab* R2009a. Sebagai contoh, akan dikalibrasi alat pengukur yang berfungsi dalam menentukan umur dari kumpulan benda purbakala. Data kalibrasi yang diperoleh adalah umur aktual x, yang diukur dengan Alat A dengan ketelitian pengukuran yang cukup tinggi, dengan kata lain telah terkalibrasi, sedangkan data yang bersesuaian adalah umur observasi y, yang diukur dengan Alat B.

Data yang diperoleh berasal dari M. Thonnard (*Confidence Intervals in Inverse Regression*, Master's Thesis, 2006). Mekanisme yang digunakan oleh Arkeologis dalam penelitian ini pertama kali ialah mengukur 10 spesimen (x_i,y_i) data berpasangan menggunakan kedua alat ukur (alat A dan B), dimana x merepresentasikan nilai sebenarnya (*fixed*) dari spesimen yang akan diteliti diukur menggunakan alat A dan menghasilkan 10 nilai pengukuran, serta y merepresentasikan nilai observasi, hasil pengukuran menggunakan alat B yang diukur sebanyak 3 kali untuk setiap 1 spesimen / benda purbakala. Oleh sebab itu, kita memiliki 33 nilai pengukuran (n = 33) yang akan ditunjukkan dalam tabel 4.1

Table 4.1 : Umur aktual dan observasi dari spesimen / benda purbakala.

Observasi	Umur Aktual (alat A) x_i	Umur Observasi (alat B) y_i
1	9.71	24.276
2	9.71	24.083
3	9.71	24.276
4	8.52	20.206
5	8.52	20.199
6	8.52	20.223
7	7.96	19.773
8	7.96	19.759
9	7.96	19.765

10	6.82	16.743
11	6.82	16.587
12	6.82	16.744
13	5.85	15.081
14	5.85	15.121
15	5.85	15.274
16	4.95	12.636
17	4.95	12.641
18	4.95	12.682
19	3.91	9.869
20	3.91	9.906
21	3.91	9.883
22	2.98	7.624
23	2.98	7.592
24	2.98	7.585
25	2.07	4.638
26	2.07	4.666
27	2.07	4.649
28	1.02	2.86
29	1.02	2.859
30	1.02	2.896
31	0	0
32	0	0
33	0	0

Misalkan diperoleh nilai observasi baru yaitu umur observasi y_{01} = 1.58211, y_{02} = 1.79325 dan y_{03} = 1.78739. Akan diestimasi umur aktual x_0 dengan metode *classic* maupun dengan bentuk modifikasi metode *classic*.. Kemudian, kedua metode akan dibandingkan.

4.1 Metode *Classic*

Untuk penaksir *classic* diperoleh model regresi linear sederhana :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim NID(0,\sigma^2) .$$

dimana parameter β_0 dan β_1 diestimasi dengan metode *least squares* sebagai $\hat{\beta}_0$dan $\hat{\beta}_1$.

Tabel 4.1.1 : Tabel Anova untuk model regresi dari penaksir *classic*

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1836.956	1	1836.956	1.033E4	.000[a]
	Residual	5.511	31	.178		
	Total	1842.468	32			

a. Predictors: (Constant), Umur_Aktual_alatA

b. Dependent Variable: Umur_Observasi_alatB

Dari tabel terlihat bahwa sig = 0.000 < α = 0.05. Artinya model adalah signifikan.

Tabel 4.1.2 : Tabel *Summary* untuk model regresi dari penaksir *classic*

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. *Error* of the Estimate	Durbin-Watson
1	.999[a]	.997	.997	.421644	.806

a. Predictors: (Constant), Umur_Aktual_alatA

b. Dependent Variable: Umur_Observasi_alatB

Dari tabel terlihat bahwa R^2 = 0.997 . Artinya 99.7% variabilitas dalam umur observasi dijelaskan oleh model regresi.

Tabel 4.1.3 : Tabel *Coefficients* untuk model regresi dari penaksir *classic*

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. *Error*	Beta		
1	(Constant)	.169	.139		1.220	.232
	Umur_Aktual_alatA	2.451	.024	.999	101.649	.000

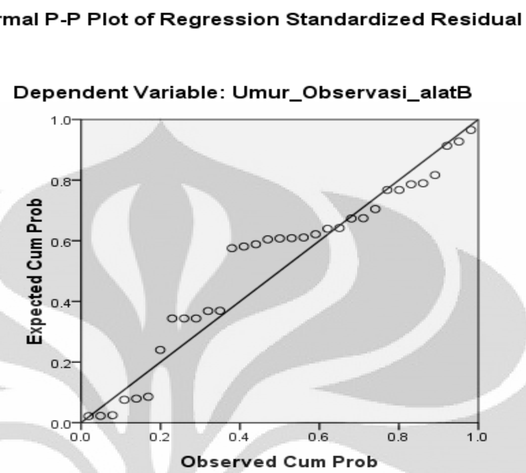
a. Dependent Variable: Umur_Observasi_alatB

Dari tabel terlihat bahwa $\hat{\beta}_0$ = 0.169 dan $\hat{\beta}_1$ = 2.451.

Sehingga diperoleh model regresi :

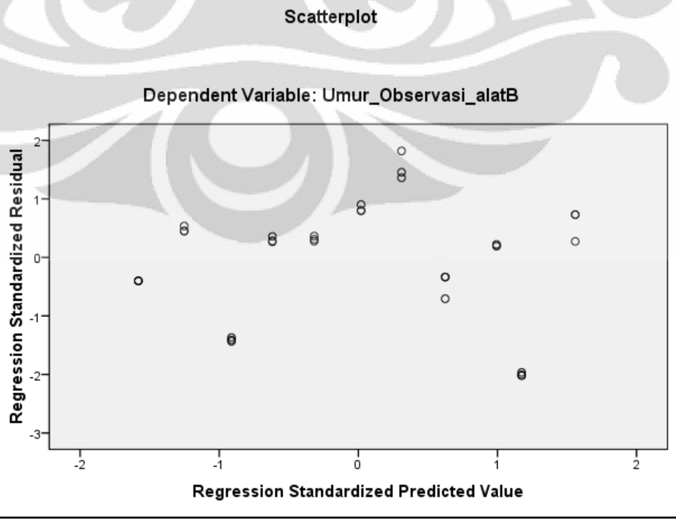
$$\hat{y} = 0.619 + 2.451x$$

Selanjutnya akan diperiksa asumsi *normal* dari *error* dengan memeriksa *probability plot residual* :



Gambar 4.1.1. : Gambar *Normal Probability Plot Residuals* Metode *Classic*

Kemudian akan diperiksa asumsi Homoskedastis dari hubungan antara nilai yang diprediksi dengan *studentized residual*-nya :



Gambar 4.1.2. : Gambar *Scatterplot* SRESID vs ZPRED Metode *Classic*

Untuk melihat apakah ada nilai yang mempengaruhi model, akan dilihat melalui *Studentized Residuals* dan *Cook's D* pada tabel berikut :

Tabel 4.1.4 : Tabel *Residuals Statistics* model regresi dari penaksir *classic*

Residuals Statistics[a]

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Stud. Residual	-2.100	1.849	-.004	1.014	33
Cook's Distance	.001	.175	.031	.049	33

a. Dependent Variable: Umur_Observasi_alatB

Pada tabel terlihat bahwa :

- *Studentized Residuals* : Nilai tertinggi adalah 1.849, yang masih dibawah batas 2.5 Berarti tidak ada *outliers*.
- *Cook's D* : Nilai tertinggi adalah 0.175, yang masih dibawah batas 1 Berarti tidak ada *outliers*.

Secara keseluruhan model memenuhi asumsi regresi linier sehingga layak digunakan untuk prediksi.

Dari persamaan (2.9.4.1.1) penaksir *classic* untuk x_0 pada $\bar{y}_0$ = (y_{01} + y_{02} + y_{01}) : 3 = (1.58211 + 1.79325 + 1.78739)/3 = 1.72092 adalah :

$$\hat{x}_0 = \bar{x} + \frac{\bar{y}_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1} = 4,89 + \frac{1.72092 - 12,5144}{2,4509} = 0,4861$$

Dan taksiran nilai aktual modifikasi metode *classic*

$$\tilde{x}_0 = \bar{x} + \frac{(\bar{y}_0 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_1 + \frac{m_1^2}{\hat{\gamma}_1{}^2}} = 4,89 + \frac{1.72092 - 12,5144}{2,4509 + \frac{0,0180}{(2,4509)^2}} = 4,89 + \frac{-10,79348}{2,4509 + 0,003}$$

$$= 0,4915$$

4.2 Perbandingan Estimasi Nilai Aktual Metode *Classic* dan Modifikasi Metode *Classic* pada Linear Kalibrasi

Dengan menggunakan bantuan *Matlab* R2009a didapatkan tabel perbandingan bias antara kedua penaksir ($\hat{x}_0$) dan ($\tilde{x}_0$) (lampiran). Sesuai dengan teori yang telah dijelaskan sebelumnya (Bab 3.2) bahwa perbedaan bias antar kedua penaksir tidak jauh berbeda satu sama lain (lampiran).

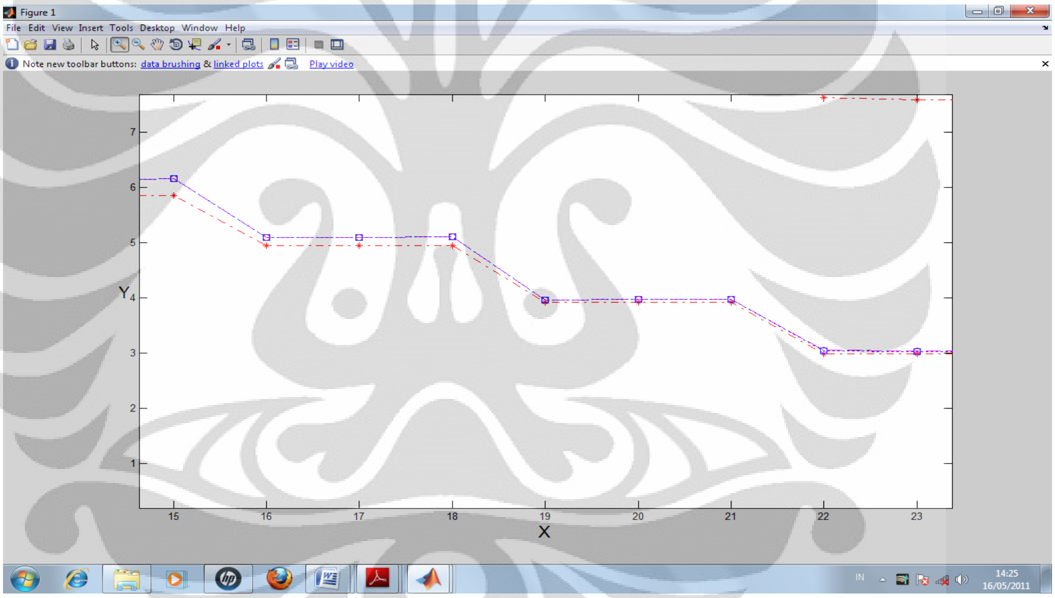
Misalkan untuk nilai X = 9,71 didapatkan

- $\hat{X}$ bias = 0,125728 > $\tilde{X}$ bias = 0,119681

Namun untuk nilai X = 8,52 didapatkan

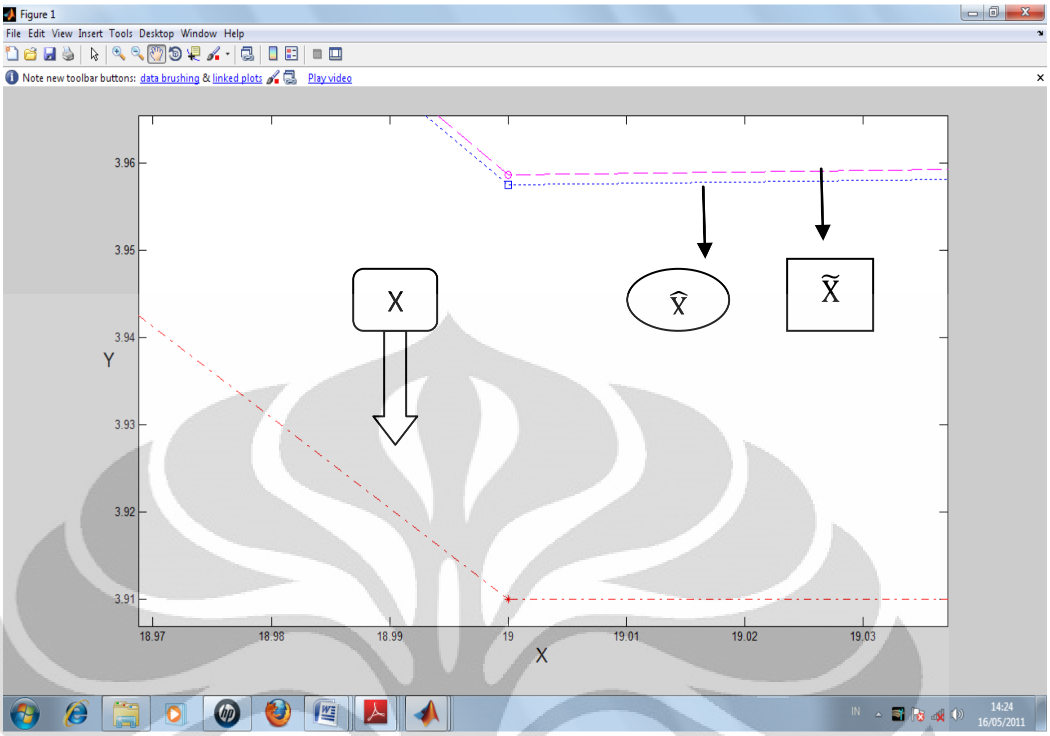
- $\hat{X}$ bias = 0,344874 < $\tilde{X}$ bias = 0,348890

Hal ini juga dapat dijelaskan dalam bentuk grafik (*Matlab* R2009a) antara nilai X yang sebenarnya dengan nilai taksiran X metode *classic* baik sebelum maupun sesudah dimodifikasi.



Gambar 4.2.1. Grafik Nilai Aktual vs Penaksir Nilai Aktual

Gambar di atas menjelaskan bahwa garis merah menggambarkan nilai X sebenarnya, sementara garis biru merupakan nilai $\hat{X}$ dan garis magenta melambangkan nilai $\tilde{X}$, dimana nilai $\hat{X}$ dan $\tilde{X}$ masih belum terlihat bedanya. Namun jika kita perbesar gambar tersebut didapatkan



Gambar 4.2.1. Pembesaran (200 %) dari Grafik Nilai Aktual vs Penaksir Nilai Aktual

Kemudian, akan dilihat perbandingan antara hasil penaksiran nilai aktual $(\hat{x}_0)$ dan bentuk modifikasi $(\tilde{x}_0)$ melalui hasil yang didapatkan dari program (*Matlab* R2009a) dalam hal kedua variansinya :

$$Var(\hat{x}_0) = 9{,}2945$$

$$Var(\tilde{x}_0) = 9{,}2718$$

Karena $Var(\tilde{x}_0) < (\hat{x}_0)$, maka untuk kasus ini dapat dikatakan bahwa bentuk modifikasi Penaksir Nilai Aktual Metode *Classic* Lebih baik dibandingkan Metode *Classic* pada Linear Kalibrasi.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Penaksir nilai aktual untuk metode *classic* bersifat bias namun tidak bias (*unbiased*) secara asimtotik.
2. Penaksir nilai aktual untuk modifikasi metode *classic* bersifat bias namun tidak bias (*unbiased*) secara asimtotik.
3. Penaksir nilai aktual pada modifikasi metode *classic* memberikan taksiran yang lebih efisien dibandingkan penaksir nilai aktual pada metode *classic* tanpa modifikasi.

5.2 Saran

Terdapat beberapa saran untuk pengembangan skripsi ini, yaitu:

1. Perlu dikembangkan sifat penaksir nilai aktual dari metode *inverse* dalam regresi kalibrasi.
2. Penaksir nilai aktual melalui metode maksimum *likelihood* perlu dikembangkan selain metode *classic* maupun metode *inverse*.

DAFTAR PUSTAKA

Berkson, J. (1969). *Estimation of a linear function for a calibration line. Technometrics*, 11. 649-660. American Statistical Association and American Society

Brown, Philip J. (1993). *Measurement, Regression and Calibration*. Oxford : Clarendon Press.

Dahiya R. C. and Mckeon J. J. (1991). *Modified Classical and Inverse Regression Penaksirs in Calibration*. Technometrics, 58, 48-55. Indian Statistical Institute.

D.C. Montgomery, E.A. Peck, and G.G. Vining. (2001). *Introduction to Linear Regression Analysis*. New York : Wiley third edition.

E.J. Williams. (1969). *Regression methods in calibration problems*. Int. Statist. Inst, 43:17–28. American Statistical Association and American Society.

G.K. Shukla. (1972). *On the problem of calibration*. Technometrics, 14:547–553. American Statistical Association and American Society.

Hickey, Graeme L. (2006). *The Linear Calibration Problem : A Bayesian Analysis*. 4H Dissertation Projet, Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham.

L.J. Nasz´odi. (1978). *Elimination of the bias in the course of calibration*. Technometrics, 20:201–205. American Statistical Association and American Society.

M. Thonnard (2006). *Confidence Intervals in Inverse Regression*. Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.

R.G. Krutchkoff. (1967). *Classical and Inverse Regression Methods of Calibration*. Technometrics, 9: 425–439. American Statistical Association and American Society.

Sonny Afriansyah. (2009). *Perbandingan metode classic dan metode inverse pada regresi kalibrasi*. Skripsi, Program Sarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

LAMPIRAN 1

```
load data2

X_sum=0;
for i=1:33
    X_inc=data(i);
    X_sum=X_sum+X_inc;
end
X_means=X_sum/33

Y_sum=0;
for i=1:33
    Y_inc=data(i,2);
    Y_sum=Y_sum+Y_inc;
end
Y_means=Y_sum/33

c=0;d=0;
for i=1:33
    a=(data(i,2)-Y_means)*(data(i)-X_means);
    b=(data(i)-X_means)^2;
    c=c+a;
    d=d+b;
end
beta=c/d
beta_nol=Y_means-beta*X_means

y_kep=zeros(33,1);
for i=1:33
    e=beta_nol+beta*data(i);
    y_kep(i)=e;
end

sigma=0;
for i=1:33
    f=(data(i,2)-y_kep(i))^2;
    sigma=sigma+f;
end
sigma_kuadrat=sigma/31
m1=sigma/d

X_kep=zeros(33,1);
X_kep_bias=zeros(33,1);
for i=1:33
    g=X_means+(data(i,2)-Y_means)/beta;
    X_kep_bias(i)=abs(data(i)-g);
    X_kep(i)=g;
end

X_mod=zeros(33,1);
X_mod_bias=zeros(33,1);
for i=1:33
    g=X_means+(data(i,2)-Y_means)/(beta+m1/beta^2);
    X_mod_bias(i)=abs(data(i)-g);
    X_mod(i)=g;
```

```
end

fprintf('==========================================================
=======\n');
fprintf('||NO||         X          ||        X_kep      ||      X_mod
||X_kep_bias||X_mod_bias||\n');
fprintf('==========================================================
=======\n')
for i=1:33
    fprintf('||%d||%3f        ||%3f        ||%3f    ||%3f         ||%3f
||\n',i,data(i),X_kep(i),X_mod(i),X_kep_bias(i),X_mod_bias(i));
 end
X_kep_bias;
X_mod_bias;
X_kep;
X_mod;
X_kep_bias-X_mod_bias;
X_sum=0;
X_sum1=0;
for i=1:33
    X_inc=X_kep(i);
    X_inc1=X_mod(i);
    X_sum=X_sum+X_inc;
    X_sum1=X_sum1+X_inc1;
end
X_kep_means=X_sum/33
X_mod_means=X_sum1/33

var_kep=0;
var_mod=0;
for i=1:33
    h=(X_kep(i)-X_kep_means)^2;
    var_kep=var_kep+h;
    k=(X_mod(i)-X_mod_means)^2;
    var_mod=var_mod+k;
end
Variansi_kep=var_kep/33
Variansi_mod=var_mod/33


plot(data,'-.r*'),hold on
plot(X_mod,'—mo')
plot(X_kep,':bs'),hold off
xlabel('X','FontSize',16)
ylabel('Y','FontSize',16,'Rotation',0)
```

LAMPIRAN 2

HASIL PROGRAM :

```
X_means =

    4.8900


Y_means =

   12.1544


beta =

    2.4509


beta_nol =

    0.1694


sigma_kuadrat =

    0.1778


m1 =

    0.0180
```

NO	X	X_kep	X_mod	X_kep_bias	X_mod_bias
1	9.710000	9.835728	9.829681	0.125728	0.119681
2	9.710000	9.756982	9.751032	0.046982	0.041032
3	9.710000	9.835728	9.829681	0.125728	0.119681
4	8.520000	8.175126	8.171110	0.344874	0.348890
5	8.520000	8.172270	8.168257	0.347730	0.351743
6	8.520000	8.182062	8.178037	0.337938	0.341963
7	7.960000	7.998458	7.994657	0.038458	0.034657
8	7.960000	7.992746	7.988952	0.032746	0.028952
9	7.960000	7.995194	7.991397	0.035194	0.031397
10	6.820000	6.762186	6.759897	0.057814	0.060103
11	6.820000	6.698537	6.696326	0.121463	0.123674
12	6.820000	6.762594	6.760305	0.057406	0.059695
13	5.850000	6.084073	6.082613	0.234073	0.232613
14	5.850000	6.100394	6.098914	0.250394	0.248914
15	5.850000	6.162819	6.161263	0.312819	0.311263
16	4.950000	5.086488	5.086248	0.136488	0.136248
17	4.950000	5.088528	5.088285	0.138528	0.138285
18	4.950000	5.105256	5.104993	0.155256	0.154993
19	3.910000	3.957523	3.958663	0.047523	0.048663
20	3.910000	3.972620	3.973741	0.062620	0.063741
21	3.910000	3.963235	3.964369	0.053235	0.054369

```
||22||2.980000  ||3.041540  ||3.043800 ||0.061540  ||0.063800  ||
||23||2.980000  ||3.028484  ||3.030760 ||0.048484  ||0.050760  ||
||24||2.980000  ||3.025628  ||3.027907 ||0.045628  ||0.047907  ||
||25||2.070000  ||1.823221  ||1.826971 ||0.246779  ||0.243029  ||
||26||2.070000  ||1.834646  ||1.838381 ||0.235354  ||0.231619  ||
||27||2.070000  ||1.827709  ||1.831453 ||0.242291  ||0.238547  ||
||28||1.020000  ||1.097779  ||1.102415 ||0.077779  ||0.082415  ||
||29||1.020000  ||1.097371  ||1.102008 ||0.077371  ||0.082008  ||
||30||1.020000  ||1.112467  ||1.117086 ||0.092467  ||0.097086  ||
||31||0.000000   ||-0.069131   ||-0.063068 ||0.069131   ||0.063068
||
||32||0.000000   ||-0.069131   ||-0.063068 ||0.069131   ||0.063068
||
||33||0.000000   ||-0.069131   ||-0.063068 ||0.069131   ||0.063068
||

X_kep_means =

    4.8900


X_mod_means =

    4.8900


Variansi_kep =

    9.2945


Variansi_mod =

    9.2718
```

LAMPIRAN 3

Misal

$$\text{Zn} = \hat{\beta}_1 \sim \text{N}\left(\beta_1, \sigma^2/n\sigma_x{}^2\right)$$

$$\text{Mgf } m_z(t) = \exp(\beta_1 t + \sigma^2 t^2/2n\sigma_x^2)$$

$$Yn = \sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) = \sqrt{n}\left(\text{Zn} - \beta_1\right)$$

$$M(t;n) = E\left[\exp\left\{t\left(\sqrt{n}\left(\text{Zn} - \beta_1\right)\right)\right\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left\{t\sqrt{n}\text{Zn} - t\sqrt{n}\beta_1\right\}\right]$$

$$= \exp(-t\sqrt{n}\,\beta_1)E\left[\exp\left(t\sqrt{n}Zn\right)\right]$$

$$= \exp\left(-t\sqrt{n}\beta_1\right) m_z\left(t\sqrt{n}\right)$$

$$= \exp\left(-t\sqrt{n}\beta_1\right)\exp\left(\beta_1 t\sqrt{n} + \frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}\frac{t^2 n}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}\frac{t^2 n}{2}\right)$$

$$= m_x(t),\ x \sim N(0, \sigma^2/\sigma_x^2)$$

LAMPIRAN 4

$$\tilde{x}_0 = \hat{x}_0 - \hat{T}\left(\tilde{x}_0\right)$$

$$\tilde{x}_0 = \bar{x} + \frac{\left(y_0 - \hat{\gamma}_0\right)}{\hat{\gamma}_1} - \left(\tilde{x}_0 - \bar{x}\right)\frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2}$$

$$\tilde{x}_0 = \bar{x} + \frac{\left(y_0 - \hat{\gamma}_0\right)}{\hat{\gamma}_1} - \tilde{x}_0 \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2} + \bar{x}\frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2}$$

$$\tilde{x}_0\left(1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right) = \bar{x}\left(1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2}\right) + \frac{\left(y_0 - \hat{\gamma}_0\right)}{\hat{\gamma}_1}$$

$$\tilde{x}_0 = \bar{x} + \frac{\left(y_0 - \hat{\gamma}_0\right)}{\hat{\gamma}_1 + \frac{m_i^2}{\hat{\gamma}_1^2}}$$

LAMPIRAN 5

Karena $\hat{\gamma}_0$ dan $\hat{\gamma}_1$ saling bebas, maka

$$E\left[\frac{y_0 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}\right] = E[y_0 - \hat{\gamma}_0]E\left[\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right]$$

Selanjutnya dengan kondisi $\hat{\gamma}_1 \sim N(\gamma_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$, maka $E\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\right)$ diaproksimasi menggunakan ekspansi deret Taylor. (Ott and Myers (1968), Shukla (1972), Berkson (1969)).

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1} = \frac{1}{\gamma_1} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2 - \cdots$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_1} = \frac{1}{\gamma_1} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1) + \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2 + 0\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)$$

Atau dengan kata lain akan dibuktikan bahwa

$$\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3 + \left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4 + \cdots = 0\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)$$

$$\left|\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3 + \left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4 + \cdots\right|$$

$$\leq \left|\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3\right| + \left|\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4\right| + \cdots$$

$$\leq \left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3\right|\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right| + \left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4\right|\left|\frac{1}{\gamma_1^5}\right| + \cdots$$

$$\leq \left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3\right|\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right| + \left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4\right|\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right| + \cdots$$

$$= \underbrace{\left[\left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3\right| + \left|(\hat{\gamma}_1 - \gamma_1)^4\right| + \cdots\right]}_{M}\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right| = M\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right|$$

Maka

$$\left|\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^3+\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^4+\cdots\right| \le M\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right|$$

$$\frac{\left|\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^3+\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^4+\cdots\right|}{\left|\frac{1}{\gamma_1^4}\right|} \le M$$

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^3+\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^4+\cdots}{\frac{1}{\gamma_1^4}}\right| \le M$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^3+\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^4+\cdots}{\frac{1}{\gamma_1^4}}\right| \le \lim_{n\to\infty} M = M$$

Sesuai definisi Big (0) maka

$$\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^3+\left(\frac{1}{\gamma_1^5}\right)(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)^4+\cdots = 0\left(\frac{1}{\gamma_1^4}\right)$$

Untuk suku ke n deret tersebut memiliki bentuk

$$(-1)^n \frac{\left(\hat{\gamma}_1-\gamma_1\right)^n}{\left(\gamma_1\right)^{n+1}}$$

dengan menggunakan uji rasio maka deret tersebut akan konvergen jika

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\left(\hat{\gamma}_1-\gamma_1\right)^{n+1}}{\left(\gamma_1\right)^{n+2}}\,\frac{\left(\gamma_1\right)^{n+1}}{(-1)^n\left(\hat{\gamma}_1-\gamma_1\right)^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)\left(\hat{\gamma}_1-\gamma_1\right)}{\left(\gamma_1\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\hat{\gamma}_1-\gamma_1\right)}{\left(\gamma_1\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\hat{\gamma}_1}{\gamma_1}\right| < 2$$