UNIVERSITAS INDONESIA

SIFAT – SIFAT MATRIKS SUDOKU

TESIS

SHOBAH SALAMAH
0906573351

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

SIFAT – SIFAT MATRIKS SUDOKU

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar magister

SHOBAH SALAMAH
0906573351

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINILITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : SHOBAH SALAMAH

NPM : 0906573351

Tandatangan :

Tanggal : 10 Januari 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama : SHOBAH SALAMAH

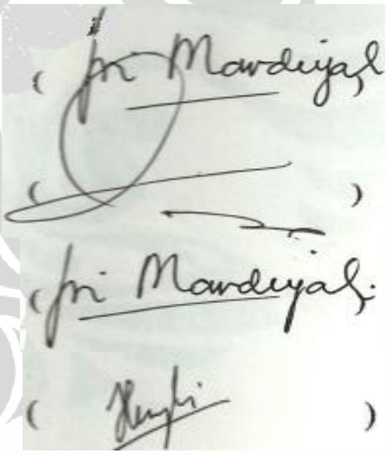
NPM : 0906573351

Program Studi : Matematika

Judul Tesis : Sifat-Sifat Matriks Sudoku

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI



Pembimbing : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom

Pembimbing : Prof. Dr. Djati Kerami

Penguji : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom

Penguji : Dr. Hengki Tasman

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 10 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah *Subhanahu Wata'alaa*, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan tesis ini, dan meraih gelar Magister Sains di Departemen Matematika FMIPA UI. Salawat serta salam tetap tercurah kepada junjungan besar Rasulullah Muhammad SAW, beserta para keluarga dan sahabatnya serta para pengikutnya yang Insya Allah senantiasa istiqamah hingga akhir zaman.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku pembimbing tesis yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan tesis ini;
2. Keluarga tercinta, Bapak Abd. Kariem (Alm) dan Ibu Tsuroyya Zaini selaku orangtua, serta adik-adik (Zaini, Anwar, Opik, Sa'adah, Sa'idah, Puput) yang telah memberikan semangat untuk berjuang dalam tesis ini;
3. Prof. Dr. Djati Kerami; Prof. Dr. Belawati H. Widjaja; Dr. Kiki Ariyanti Sugeng; Dr. Sri Mardiyati, MKom.; Dr. Yudi Satria; Dr. Hengki Tasman; Dr. rer nat. Hendri Murfi, M.Kom; dan Dr. Dian Lestari, DEA., selaku Dosen di departemen Matematika yang telah banyak membimbing saya selama belajar di program Magister Matematika, FMIPA – Universitas Indonesia ;
4. Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA UI, yang telah membantu penulis selama proses registrasi seminar;
5. Keluarga besar di Jakarta yang telah banyak memberi dukungan, semangat serta do'a dalam menyelesaikan tesis ini;
6. Dina, Ias, Bu Endang, Bu Leni, dan my niece (Ummu, Aam, Babay) yang telah banyak membantu kelancaran sidang dan selalu memberikan semangat;
7. Teman-teman S2 Matematika UI angkatan 2009 dan 2010;
8. Teman-teman S1 Matematika UB angkatan 2003 (phiyo, alvy, happy, kiki).
9. Semua guru dan dosen yang telah memberikan semua ilmunya.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas dukungan dan do'anya.

Akhir kata, saya berharap Allah SWT senantiasa membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis. Semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, Januari 2012

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Shobah Salamah
NPM	:	0906575531
Program Studi	:	Magister Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Sifat-Sifat Matriks Sudoku

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 10 Januari 2012

Yang Menyatakan

(Shobah Salamah)

ABSTRAK

Nama : Shobah Salamah
NPM : 0906573351
Program Studi : Matematika
Judul : Sifat-Sifat Matriks Sudoku

Tesis ini membahas mengenai sifat-sifat matriks yang terdapat pada suatu matriks Sudoku. Matriks Sudoku merupakan matriks yang memenuhi aturan yang berlaku pada permainan Sudoku. Jika diberikan suatu matriks Sudoku tertentu, maka dengan menggunakan operasi elementer, transpos, dan operasi rotasi 90° searah jarum jam, dapat dibentuk matriks-matriks Sudoku yang lain. Sedangkan sifat-sifat yang dikaji adalah sifat-sifat umum yang terdapat pada suatu matriks seperti, determinan, transpos, nilai eigen, simetri atau tidak simetri, normal atau non normal.

Kata Kunci: Matriks Sudoku, Transpos, Determinan, Nilai eigen, Simetri, Non normal.

ABSTRACT

Name : Shobah Salamah
NPM : 0906573351
Program : Mathematics
Title : Properties of Sudoku Matrix

This thesis discussed about properties of Sudoku matrix. Sudoku matrix is a matrix which is verified by a rule of Sudoku game. If a Sudoku matrix is given, then the other Sudoku matrices can be obtained by using an elementary operation, transpose, and rotation 90°. This thesis also explored about properties of matrix such as, determinant, transpose, eigenvalues, symmetric or nonsymmetric, normal or nonnormal.

Keywords: Sudoku Matrix, Transpose, Determinant, Eigenvalues, Symmetric, Non normal.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Sudoku merupakan suatu permainan penempatan angka yang berdasar pada logika kombinatorial. Tujuan dari permainan ini adalah mengisi kotak atau grid yang biasanya berukuran 9 x 9 dengan suatu angka sehingga setiap kolom, setiap baris dan setiap kotak atau sub grid yang berukuran 3 x 3 berisi semua angka dari 1 sampai 9. Dalam setiap permainan akan ada beberapa angka yang diberikan, angka-angka dan posisi angka tersebut yang akan menentukan tingkat kesulitan dari permainan Sudoku ini.

		4	8					
	9		4	6			7	
	5					6	1	4
2	1		6			5		
5	8		7		9		4	1
					8		6	9
3	4	5					9	
	6			3	7		2	
					4	1		

Sudoku pertama kali diciptakan oleh Howard Grans pada tahun 1979 dan diterbitkan dalam *Dell Magazine* dengan nama *Number Place*. Tetapi saat itu permainan tersebut kurang populer. Kemudian permainan tersebut dibeli oleh perusahaan game dari Jepang pada tahun 1986, dan diberi nama “Sudoku” yang artinya “ *single number*”.

Sudoku ini telah dikembangkan hingga ukuran $n \times n$, dimana $n = m^2, m \geq 2$, sedemikian hingga setiap kolom, setiap baris dan setiap subgrid ukuran $n^{1/2} \times n^{1/2}$ memuat semua angka dari 1 sampai n. Permainan Sudoku ini telah menarik banyak minat dalam kurun waktu 12 tahun hingga sekarang. Sudoku ini telah banyak dimuat dalam berbagai majalah dan penelitian-penelitian matematika dengan menambahkan berbagai variasi agar lebih menarik. Permainan ini tersedia dalam berbagai tingkat kesulitan. Secara matematik, permainan Sudoku ini menarik, karena baik logika yang sederhana maupun yang rumit dapat diterapkan dalam menyelesaikan permainan ini. Selain itu, permainan ini juga dapat dipandang sebagai suatu masalah pewarnaan graf dan tentu memiliki beberapa aspek kombinatorial.

Dalam tugas akhir ini tidak membahas Sudoku dari sudut teori graf maupun kombinatorik dan tidak membicarakan mengenai jumlah minimum solusi yang mungkin. Tetapi tugas akhir ini akan membahas tentang matriks Sudoku, sifat-sifat determinannya, transpos, hubungannya terhadap nilai eigen, simetri atau tidak, dan normalitasnya.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Sifat-sifat matriks apa sajakah yang terdapat dalam matriks yang merupakan representasi dari solusi Sudoku (Matriks Sudoku) ?

1.3 TUJUAN PENULISAN

Menjelaskan sifat-sifat matriks yang merupakan representasi dari solusi Sudoku (Matriks Sudoku) seperti determinan, nilai eigen, transpos, simetri dan normalitas.

1.4 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

- Bab I berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.
- Bab II membahas tentang landasan teori (definisi matriks dan sifat-sifat yang berlaku pada matriks).
- Bab III membahas sifat-sifat atau karakteristik dari matriks yang merupakan representasi dari solusi Sudoku.
- Bab IV berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1

Suatu matriks A berukuran $m \times n$ atas suatu lapangan F ($\mathbb{C}$ atau $\mathbb{R}$) adalah suatu susunan elemen-elemen dalam F yang disusun dalam m baris dan n kolom,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Matriks A juga dapat dinotasikan sebagai $A = \left(a_{i,j}\right), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (Ortega, 1987).

Ukuran dari suatu matriks disebut sebagai order, misalnya matriks A di atas dikatakan sebagai matriks berorder $m \times n$. Jika $n = m$ maka A disebut matriks persegi berorder n (Ortega, 1987).

Definisi 2.2

Submatriks dari A adalah sebarang matriks yang dapat diperoleh dengan menghapus baris atau kolom tertentu (Ortega, 1987).

Secara umum, matriks A di atas (2.1) dapat dinyatakan dalam beberapa submatriks.

Contoh :

Perhatikan matriks-matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks B, C dan D merupakan submatriks dari matriks A. Matriks B diperoleh dengan menghapus baris pertama, baris kelima, kolom pertama, kelima dan keenam pada matriks A. Matriks C merupakan kolom pertama matriks A, dan matriks D merupakan baris kelima matriks A.

Definisi 2.3

Pandang pembagian matriks seperti bentuk berikut,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

dimana setiap $A_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ merupakan suatu matriks dan ordernya harus konsisten, artinya semua matriks yang ada pada baris yang sama harus mempunyai banyak baris yang sama, dan semua matriks yang ada pada kolom yang sama harus mempunyai banyak kolom yang sama, $A_{i,j}$ ini dinamakan matriks blok (Ortega, 1987).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}$$

dimana,

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, A_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, A_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}, A_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, A_{2,2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4

Diagonal utama dari suatu matriks A berorder $m \times n$ adalah barisan dari entri-entri $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{k,k}$, dimana $k = \min\{m, n\}$ (Roman, 2008).

2.2 Operasi-operasi pada matriks

Definisi 2.5

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan (Anton, 1994).

Definisi 2.6

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan c (Anton, 1994).

Definisi 2.7

Jika A adalah suatu matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri-entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Definisi perkalian matriks mengharuskan bahwa banyaknya kolom dari faktor pertama A harus sama seperti banyaknya baris dari faktor kedua B

supaya membentuk hasil kali AB. Jika kondisi ini tidak dipenuhi maka hasil kali tersebut tidak dapat didefinisikan (Anton, 1994).

Definisi 2.8 (Operasi baris elementer)

Pada suatu matriks A, dapat dilakukan beberapa operasi, diantaranya :

1. Perkalian suatu baris dengan suatu konstanta tak nol.
2. Pertukaran dua baris.
3. Penjumlahan suatu baris yang dikalikan dengan suatu konstanta terhadap suatu baris yang lain.

Ketiga operasi di atas dinamakan dengan operasi baris elementer.

Definisi 2.9 (Transpos)

Transpos dari matriks A berukuran $m \times n$ (2.1) dinotasikan dengan A^T adalah matriks berukuran $n \times m$, dimana elemen-elemen pada kolomnya adalah elemen-elemen pada baris matriks A dan elemen-elemen pada barisnya adalah elemen-elemen pada kolom matriks A.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

(Ortega, 1932).

Definisi 2.10 (Simetri)

Suatu matriks A dikatakan simetri jika $A = A^T$ (Ortega, 1987).

2.3 Determinan

Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan dengan det, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Nilai dari $\det(A)$ dinamakan determinan A (Anton, 1994).

Berikut ini adalah sifat-sifat yang berlaku pada determinan :

1. Jika sebarang dua baris atau kolom dari matriks A sama, maka $\det(A) = 0$.
2. Jika A mempunyai satu baris atau kolom yang semua entrinya 0, maka $\det(A) = 0$.

3. Jika A' adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan satu baris di A dengan konstanta k, maka $\det(A') = k.\det(A)$.
4. Jika A' adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris di A dipertukarkan, maka $\det(A') = -\det(A)$.
5. Jika A^T adalah transpos dari A maka $\det(A^T) = \det(A)$. (Anton, 1994).

2.4 Nilai eigen

Jika A merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$,maka vektor tak nol x dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika memenuhi persamaan,

$$Ax = \lambda x \tag{2.4}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Persamaan 2.5 dapat ditulis kembali sebagai,

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{2.5}$$

Persamaan tersebut akan mempunyai penyelesaian jika $A - \lambda I$ singular. atau,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.6}$$

dan persamaan 2.7 dinamakan sebagai persamaan karakteristik. Secara ekivalen, vector eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari $(A - \lambda I)x = 0$. Ruang pemecahan ini dinamakan sebagai ruang eigen (eigenspace) dari A yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1994).

Suatu nilai eigen mempunyai dua jenis multiplisitas, yaitu multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri.

Definisi 2. 11

Misal λ adalah nilai eigen dari suatu matriks A.

1. Multiplisitas aljabar dari λ adalah pengali dari λ sebagai akar-akar dari polynomial karakteristiknya.

2. Multiplisitas geometri dari λ adalah dimensi dari ruang eigennya (Roman, 2008).

Definisi 2.12

Suatu nilai eigen dari matriks A dinamakan nilai eigen dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari nilai-nilai eigen yang lainnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan vektor eigen dominan (Anton, 1994).

BAB 3

Sifat-Sifat Matriks Sudoku

Sudoku secara umum merupakan matriks berukuran 9×9, dengan aturan yang sederhana yaitu, mengisi elemen-elemen matriks dengan suatu angka sedemikian hingga setiap baris, setiap kolom dan setiap matriks blok yang berukuran 3×3 memuat angka 1 sampai 9 tepat satu kali. Dalam setiap permainan yang diberikan, terdapat beberapa angka yang sudah diketahui. Angka dan posisi angka yang diberikan dalam matriks Sudoku menentukan tingkat kesulitan permainan.

Ide permainan ini dapat dikembangkan dalam ukuran yang lain. Tentu saja Sudoku dengan ukuran 4×4 lebih mudah dibandingkan Sudoku ukuran 16×16.

Secara umum, sebarang Sudoku ukuran $n \times n$ dapat dibuat dimana $n = m^2$ dan $m \geq 2$.

Sebelum membahas sifat-sifat matriks Sudoku, terlebih dahulu akan didefinisikan matriks Sudoku.

3.1. Pengertian matriks Sudoku dan operasinya.

Definisi 3.1

Matriks Sudoku S merupakan suatu matriks persegi yang berorder $n = m^2$, dimana $m \geq 2$ dan memenuhi sifat-sifat berikut :

1. Setiap baris pada S memuat bilangan positif 1 sampai n tepat satu kali.
2. Setiap kolom pada S memuat bilangan positif 1 sampai n tepat satu kali.
3. Setiap matriks blok yang berukuran $n^{1/2} \times n^{1/2}$ pada S memuat bilangan positif 1 sampai n tepat satu kali (definisi matriks blok sesuai dengan definisi 2.4 di bab 2).

$s_{i,j}$ menotasikan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j pada matriks Sudoku S, dengan $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

Untuk selanjutnya matriks Sudoku dinotasikan dengan S.

Berikut ini adalah salah satu contoh dari matriks Sudoku.

Perhatikan matriks berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks S di atas merupakan matriks Sudoku berorder 9, dimana $9 = 3^2, 3 \geq 2$, dan memenuhi sifat-sifat matriks Sudoku yang didefinisikan pada definisi 3.1. :

1. Setiap baris pada matriks S di atas memuat semua bilangan 1 sampai 9, misal, perhatikan baris ketiga,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ \color{red}{6} & \color{red}{5} & \color{red}{8} & \color{red}{1} & \color{red}{9} & \color{red}{3} & \color{red}{7} & \color{red}{2} & \color{red}{4} \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

   Entri-entri pada baris tersebut adalah 6,5,8,1,9,3,7,2,4, dimana memuat bilangan 1 sampai 9 dan tidak ada yang berulang. Begitu pula untuk baris-baris yang lain.

2. Setiap kolom pada matriks S di atas memuat semua bilangan 1 sampai 9, misalnya, perhatikan kolom kedua,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Entri-entri pada baris tersebut adalah 4,2,5,9,6,1,8,3,7, dimana memuat bilangan 1 sampai 9 dan tidak ada yang berulang. Begitu pula untuk kolom-kolom yang lain.

3. Setiap matriks blok yang berukuran 3×3 pada matriks S di atas memuat semua bilangan 1 sampai 9, misalnya, perhatikan matriks blok kedua pada S,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Entri-entri pada matriks blok tersebut adalah 2,5,8,4,6,7,1,9,3, dimana memuat bilangan 1 sampai 9 dan tidak ada yang berulang. Begitu pula untuk matriks blok yang lain.

Berdasarkan sifat 1 dan sifat 2 pada definisi matriks Sudoku, maka sesuai dengan sifat deret aritmetika dengan suku pertama adalah 1 dan beda adalah 1, didapat bahwa jumlahan entri-entri pada setiap baris dan setiap kolom dalam matriks Sudoku dapat dituliskan sebagai berikut :

- Untuk baris ke-i

$$\sum_{j=1}^{n} S_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \leq i \leq n$$

- Untuk kolom ke-j

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \leq j \leq n$$

Definisi 3.2

Pandang matriks S berikut,

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jika barisan $s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{n,n}$ disebut sebagai diagonal utama dari matriks S, maka barisan $s_{1,n}, s_{2\,,n-1}, \dots, s_{n,1}$, disebut sebagai diagonal kedua dari matriks S.

Berdasarkan pengertian diagonal utama dan diagonal kedua, berikut ini akan didefinisikan salah satu jenis matriks Sudoku.

Definisi 3.3

Suatu matriks Sudoku S yang berukuran $n \times n$, dengan entri-entri pada diagonal utama dan diagonal keduanya memuat semua bilangan 1 sampai n, dinamakan sebagai matriks Sudoku X.

Berikut ini adalah salah satu contoh dari matriks Sudoku X,

Contoh :

$$X = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Selain operasi-operasi yang biasa berlaku pada matriks seperti yang telah didefinisikan di bab 2, di sini juga akan didefinisikan suatu operasi yang dapat dilakukan pada suatu matriks yaitu operasi rotasi 90° searah jarum jam.

Definisi 3.4

Diberikan suatu matriks A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Operasi rotasi 90°searah jarum jam (A^R) adalah merotasi posisi entri-entri pada matriks A sejauh 90°searah jarum jam seperti berikut,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\circlearrowright\downarrow$$

$$A^R = \begin{bmatrix} a_{m,1} & a_{m-1,1} & \cdots & & a_{2,1} & a_{1,1} \\ a_{m,2} & a_{m-1,2} & \cdots & & a_{2,2} & a_{1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,n-1} & a_{m-1,n-1} & & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} \\ a_{m,n} & a_{m-1,n} & & \cdots & a_{2,n} & a_{1,n} \end{bmatrix}.$$

3.2. Pembentukan matriks Sudoku.

Dengan beberapa operasi yang telah didefinisikan pada matriks, dapat diperoleh suatu hubungan bahwa suatu matriks Sudoku dapat dibentuk atau diperoleh dengan melakukan beberapa operasi tertentu terhadap satu matriks yang diberikan.

Akan ditunjukkan beberapa operasi yang dapat dilakukan terhadap matriks Sudoku berdasarkan order dan jenis dari matriks Sudoku.

3.2.1. Matriks Sudoku order 4 (bukan Sudoku X).

Dengan melakukan beberapa operasi berikut terhadap suatu matriks Sudoku order 4 yang diberikan, akan diperoleh matriks Sudoku order 4 yang lainnya yang berbeda.

1. Operasi elementer.

Matriks yang dihasilkan dari operasi baris atau operasi kolom terhadap suatu matriks Sudoku order 4 merupakan matriks Sudoku juga yang berbeda dengan matriks sebelumnya.

Perhatikan contoh-contoh berikut :

Ambil suatu matriks Sudoku S berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Lakukan operasi $B_{1,2}$ pada matriks S di atas yaitu, menukar baris ke-1 dengan baris ke-2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{1,2}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Lakukan operasi $K_{1,2}$ pada matriks S di atas yaitu, menukar kolom ke-1 dengan baris ke-2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{1,2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Perhatikan dua matriks hasil operasi $B_{1,2}$ dan $K_{1,2}$ di atas. Kedua matriks tersebut merupakan matriks Sudoku yang berbeda dengan matriks sebelumnya. Dengan melakukan semua operasi baris dan operasi kolom yang mungkin terhadap matriks S di atas akan diperoleh 12 matriks Sudoku order 4 yang lain.

2. Transpos.

Transpos dari suatu matriks Sudoku juga merupakan matriks Sudoku.

Perhatikan contoh berikut :

Ambil suatu matriks Sudoku S berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi transpos pada matriks tersebut,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan, dari contoh di atas dapat dilihat bahwa transpos dari matriks Sudoku juga tetap merupakan matriks Sudoku.

3. Operasi rotasi 90° searah jarum jam.

   Matriks hasil operasi rotasi 90° searah jarum jam terhadap suatu matriks Sudoku merupakan matriks Sudoku juga.

   Perhatikan contoh :

   Ambil suatu matriks Sudoku S berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Lakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam pada matriks tersebut,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   Perhatikan, dari contoh di atas dapat dilihat bahwa matriks hasil operasi rotasi 90° searah jarum jam juga tetap merupakan matriks Sudoku.

Jadi, secara umum untuk matriks Sudoku order 4, operasi-operasi di atas, yaitu operasi elementer, operasi rotasi 90°, dan transpos, matriks hasil operasinya tetap merupakan matriks Sudoku.

3.2.2. Matriks Sudoku X order 4.

Untuk mendapatkan matriks-matriks Sudoku X yang lain dari suatu matriks Sudoku X yang diberikan, dapat dilakukan beberapa operasi berikut.

1. Operasi elementer $\left(B_{i.j} \text{dan } K_{i,j}\right)$.

   Berbeda dengan matriks Sudoku order 4 yang bukan matriks Sudoku X, untuk mendapatkan matriks-matriks Sudoku X yang lain yang berbeda harus dilakukan sepasang operasi elementer, yaitu operasi baris $B_{i.j}$ dan operasi kolom $K_{i,j}$.

Ambil matriks Sudoku X berikut,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

a. Lakukan operasi baris elementer $B_{1,2}$dan $K_{1,2}$, yaitu menukar baris ke-1 dengan baris ke-2 dan menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-2. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{1,2},K_{1,2}} Y_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Lakukan operasi baris elementer $B_{1,3}$dan $K_{1,3}$, yaitu menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 dan menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-3. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{1,3},K_{1,3}} Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Lakukan operasi baris elementer $B_{1,4}$dan $K_{1,4}$, yaitu menukar baris ke-1 dengan baris ke-4 dan menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-4. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{1,4},K_{1,4}} Y_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Lakukan operasi baris elementer $B_{2,3}$dan $K_{2,3}$, yaitu menukar baris ke-2 dengan baris ke-3 dan menukar kolom ke-2 dengan kolom ke-3. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{2,3},K_{2,3}} Y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e. Lakukan operasi baris elementer $B_{2,4}$dan $K_{2,4}$, yaitu menukar baris ke-2 dengan baris ke-4 dan menukar kolom ke-2 dengan kolom ke-4. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{2,4},K_{2,4}} Y_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

f. Lakukan operasi baris elementer $B_{3,4}$dan $K_{3,4}$, yaitu menukar baris ke-3 dengan baris ke-4 dan menukar kolom ke-3 dengan kolom ke-4. Sehingga diperoleh,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{3,4},K_{3,4}} Y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa pada satu matrik Sudoku X jika dilakukan pasangan operasi elementer $B_{i,j}$dan $K_{i,j}$ akan diperoleh matriks Sudoku X yang berbeda sebanyak 6.

2. Transpos.

Transpos dari matriks Sudoku X juga merupakan matriks Sudoku X.

Berikut ini akan dilakukan transpos pada matriks X dan matriks-matriks Sudoku X hasil operasi elementer di atas.

a. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b. $Y_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_8 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

c. $Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_9 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

d. $Y_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_{10} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

e. $Y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

f. $Y_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

g. $Y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{transpos} Y_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$

3. Operasi rotasi 90° searah jarum jam.

Akan dilihat kemungkinan diperolehnya matriks Sudoku X lain berdasarkan operasi rotasi 90° searah jarum jam. Untuk itu akan dilakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam pada matriks-matriks yang dihasilkan dari operasi-operasi sebelumnya di atas.

a. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks X di atas, sehingga diperoleh

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{15} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{15} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{16} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_1 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = Y_{13}.$$

c. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_2 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{17} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{17} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{18} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{18} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = Y_{12}$$

d. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_3 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{19} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{19} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = Y_4$$

e. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_4 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{20} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{20} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = Y_3$$

f. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_5 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = Y_9$$

g. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_6 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = Y_8$$

h. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_7 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{23} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{23} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{24} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{24} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{25} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

i. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_8 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_8 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{26} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{26} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} Y_{27} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{27} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = Y_6$$

j. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_9 di atas, sehingga diperoleh

$$Y_9 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = Y_5$$

k. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_{10} di atas, sehingga diperoleh

$$Y_{10} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{28} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{28} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = Y_{11}$$

l. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_{11} di atas, sehingga diperoleh

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{29} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{29} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = Y_{10}$$

m. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_{12} di atas, sehingga diperoleh

$$Y_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = Y_2$$

n. Lakukan operasi 90° searah jarum jam pada matriks Y_{13} di atas, sehingga diperoleh

$$Y_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{30} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{30} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} Y_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rotasi\ 90°} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = Y_1$$

3.2.3. Matriks Sudoku order 9 (bukan Sudoku X)

1. Operasi elementer.

   Matriks yang dihasilkan dari operasi baris atau operasi kolom terhadap suatu matriks Sudoku order 9 merupakan matriks Sudoku juga yang berbeda dengan matriks sebelumnya.

   Perhatikan matriks Sudoku berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

   a. Lakukan operasi $B_{1,2}$ pada matriks S di atas yaitu, menukar baris ke-1 dengan baris ke-2.

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

   b. Lakukan operasi $K_{1,2}$ pada matriks S di atas yaitu, menukar kolom ke-1 dengan baris ke-2.

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_{1,2}} \begin{bmatrix} 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Perhatikan dua matriks hasil operasi $B_{1,2}$ dan $K_{1,2}$ di atas. Kedua matriks tersebut merupakan matriks Sudoku yang berbeda dengan matriks sebelumnya.

2. Transpos.

Transpos dari suatu matriks Sudoku juga merupakan matriks Sudoku.

Perhatikan matriks Sudoku berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi transpos pada matriks tersebut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{transpos} \begin{bmatrix} 9 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 5 & 4 & 2 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 9 & 8 & 7 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 9 & 4 & 3 & 7 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 9 & 4 \\ 1 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga, dari contoh di atas dapat dilihat bahwa transpos dari matriks Sudoku juga tetap merupakan matriks Sudoku.

3. Operasi rotasi 90° searah jarum jam.

Matriks hasil operasi rotasi 90° searah jarum jam terhadap suatu matriks Sudoku merupakan matriks Sudoku juga.

Perhatikan matriks Sudoku berikut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam pada matriks tersebut,

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 & 9 \\ 7 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 9 & 2 & 4 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 9 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 9 & 8 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Perhatikan contoh di atas, dapat dilihat bahwa matriks hasil operasi rotasi 90° searah jarum jam juga tetap merupakan matriks Sudoku.

3.2.4. Matriks Sudoku X order 9.

1. Operasi elementer.

   Berbeda dengan matriks-matriks sebelumnya, untuk matriks Sudoku X order 9 ini, tidak ada operasi elementer yang dapat menghasilkan matriks Sudoku X juga.

   Perhatikan matriks Sudoku X berikut,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

   a. Lakukan operasi $B_{1,2}$ pada matriks X di atas yaitu, menukar baris ke-1 dengan baris ke-2.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_{1,2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

b. Lakukan operasi $K_{1,2}$ pada matriks X di atas yaitu, menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-2.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_{1,2}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Dari dua contoh di atas, disimpulkan bahwa matriks Sudoku hasil operasi elementer baik $B_{i,j}$ maupun $K_{i,j}$ tidak lagi merupakan matriks Sudoku X.

Selanjutnya akan dilihat jika dilakukan sepasang operasi elementer $B_{i,j}$dan $K_{i,j}$.

c. Lakukan operasi $B_{1,2}$ dan $K_{1,2}$ pada matriks X di atas yaitu, menukar baris ke-1 dengan baris ke-2 dan menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-2.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_{1,2}K_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas, dapat dilihat bahwa meskipun dilakukan sepasang operasi elementer, matriks hasil operasinya tidak lagi merupakan matriks Sudoku X.

2. Transpos.

Transpos dari matriks Sudoku X order 9 tetap merupakan matriks Sudoku X.

Perhatikan matriks Sudoku X berikut,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi transpos pada matriks tersebut,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{transpos} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 9 & 6 \\ 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 9 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 6 & 3 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 1 & 4 & 2 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 9 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 1 & 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Perhatikan matriks hasil transpos di atas, dapat dilihat bahwa transpos dari matriks Sudoku X juga tetap merupakan matriks Sudoku X.

3. Operasi rotasi 90° searah jarum jam.

   Suatu matriks Sudoku X order 9, jika dioperasikan dengan operasi rotasi 90° searah jarum jam tetap merupakan matriks Sudoku X.

   Perhatikan matriks Sudoku X berikut,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

   Lakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam pada matriks tersebut,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{rotasi\ 90^\circ} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 9 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 9 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 5 & 3 & 6 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 9 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 8 & 1 & 4 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Perhatikan matriks hasil operasi di atas, dapat dilihat bahwa matriks hasil operasi rotasi 90° searah jarum jam juga tetap merupakan matriks Sudoku X.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat disimpulkan bahwa :

1. Untuk matriks Sudoku yang bukan Sudoku X, baik order 4 maupun order 9, dengan melakukan operasi-operasi di atas (operasi elementer, transpos, dan rotasi 90° searah jarum jam) pada matriks tersebut akan dihasilkan matriks Sudoku yang lain yang berbeda dengan matriks Sudoku sebelumnya.
2. Untuk matriks Sudoku X order 4, untuk menghasilkan matriks Sudoku X yang lain dapat dilakukan sepasang operasi elementer ($B_{i,j}$dan $K_{i,j}$), transpos, dan rotasi 90° searah jarum jam.
3. Untuk matriks Sudoku X order 9, untuk memperoleh matriks Sudoku X yang lain hanya dapat dilakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam dan transpos, sedangkan operasi elementer tidak dapat menghasilkan matriks Sudoku X.

3.3. Determinan Sudoku

Secara umum, karena matriks S merupakan matriks persegi maka dapat dihitung nilai determinan dari matriks tersebut.

$\mathrm{Det}(S)$ akan memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $\mathrm{Det}(S) \in \mathbb{Z}^*$ atau $\det(S) \in \mathbb{Z}$.

   Dimana $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $\mathbb{Z}^*$ adalah himpunan bilangan bulat tanpa nol, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Karena entri dari matriks S adalah bilangan bulat maka $\det(S)$ pasti merupakan bilangan bulat.

2. $\det(S)(mod\ 2) = 0\ \vee \det(S)(mod\ 2) = 1$.

   Karena berdasarkan sifat 1 di atas maka determinan matriks S dapat berupa bilangan genap atau bilangan ganjil.

Berikut ini akan ditunjukkan kemungkinan diperolehnya $\det(S) = 0$ berdasarkan ukuran dari matriks S.

1. Untuk $n = 4$

   Akan dilihat pada 2 tipe matriks, yaitu matriks Sudoku X dan matriks bukan Sudoku X :

   i. Matriks Sudoku X.

   Untuk setiap matriks Sudoku X, determinannya selalu sama dengan nol.

   Perhatikan,

   Ambil sebarang matriks Sudoku X,

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi $B_{3,4}$dan $K_{3,4}$, yaitu menukar baris ke-3 dengan baris ke-4 dan menukar kolom ke-3 dengan kolom ke-4 didapat

$$Y = \begin{bmatrix} a & b & d & c \\ c & d & b & a \\ b & a & c & d \\ d & c & a & b \end{bmatrix}$$

dan Y merupakan matriks Sudoku X.

Kemudian lakukan operasi $B_{1,2}$ dan $K_{1,2}$, yaitu menukar baris ke-1 dengan baris ke-2 dan menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-2 didapat,

$$Z = \begin{bmatrix} d & c & a & b \\ b & a & c & d \\ c & d & b & a \\ a & b & d & c \end{bmatrix}$$

dan Z juga merupakan matriks Sudoku X.

Selanjutnya akan dihitung nilai determinan untuk matriks-matriks di atas,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(Y) &= \begin{vmatrix} a & b & d & c \\ c & d & b & a \\ b & a & c & d \\ d & c & a & b \end{vmatrix} \\ &= \big((ad-bc).(bc-ad)\big) - \big((bc-ad).(ad-bc)\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat determinan (subbab 2.3) maka $\det(X) = \det(Y) = 0$, dan $\det(Z) = \det(X) = 0$.

Dan karena setiap matriks Sudoku X order 4 yang lain dapat diperoleh dari hasil operasi-operasi yang telah dijelaskan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa semua determinan dari matriks Sudoku X berorder 4 selalu sama dengan nol.

ii. Bukan Matriks Sudoku X.

Untuk matriks Sudoku yang bukan merupakan Sudoku X, determinannya ada yang sama dengan nol dan ada yang tidak sama dengan nol.

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 80$$

2. Untuk $n = 9$,

Perhatikan contoh-contoh berikut ini :

(i) Matriks Sudoku yang merupakan Sudoku X, dengan determinan tidak sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -9484290$$

(ii) Matriks Sudoku yang merupakan Sudoku X, dengan determinan sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 6 & 9 & 3 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 9 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 1 & 9 & 2 & 5 & 3 \\ 8 & 9 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 9 & 8 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) Matriks Sudoku yang bukan Sudoku X, dengan determinan tidak sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -5361390 \neq 0$$

(iv) Matriks Sudoku yang bukan Sudoku X, dengan determinan sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 9 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 7 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 6 & 9 & 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

□

Sehingga tidak ada kondisi khusus yang dapat ditentukan untuk matriks Sudoku order 9 baik matriks Sudoku X maupun yang bukan matriks Sudoku X.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Suatu matriks Sudoku X berorder 4 nilai determinannya selalu sama dengan nol.
2. Matriks yang bukan Sudoku X order 4 nilai determinannya tidak dapat dipastikan.
3. Matriks Sudoku berorder 9, baik yang merupakan Sudoku X maupun yang bukan Sudoku X, nilai determinannya tidak dapat dipastikan.

□

Dan dapat disimpulkan pula bahwa nilai determinan dari suatu matriks sebarang tidak dapat dijadikan sebagai syarat cukup untuk menyimpulkan bahwa matriks tersebut merupakan matriks Sudoku atau bukan.

3.4. Nilai eigen matriks Sudoku

Nilai eigen dari matriks S, dinotasikan dengan λ, diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\det(S - \lambda I) = 0$, yang berupa suatu polinomial berderajat n sesuai dengan order matriksnya seperti berikut,

$$\det(S - \lambda I) = \alpha\lambda^n + \beta\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$$

Teorema 3.5 (Teorema Frobenius-Perron)

Misalkan B adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya adalah real nonnegatif. Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku :

1. B mempunyai nilai eigen dominan real nonnegatif.
   Jika semua entri matriks B positif, maka nilai eigen dominannya, $\lambda(B)$, mempunyai multiplisitas 1.
2. Jika entri-entri B positif, maka $\lambda(B)$ positif dan mempunyai multiplisitas 1, serta bersesuaian dengan vektor eigen yang dapat dinormalisasi sehingga entri-entrinya positif.
3. Jika B mempunyai vektor eigen v yang entri-entrinya positif, maka v bersesuaian dengan suatu nilai eigen yang merupakan nilai eigen dominan dari B (Khim, 2007).

Bukti :

Bukti dari teorema ini dapat dibaca pada paper tersendiri yaitu “The Frobenius-Perron Theorem” yang ditulis oleh Suyeon Khim pada tahun 2007.

Teorema 3.6

Jika sebarang matriks persegi semua entrinya positif dan jumlahan entri-entri pada setiap baris serta setiap kolomnya sama, maka nilai eigen dari matriks itu sama dengan jumlah tersebut (Luca, 2011).

Bukti :

Berdasarkan teorema Frobenius-Perron pada butir 3 di atas, jika B mempunyai vektor eigen v yang entri-entrinya positif, maka v bersesuaian dengan suatu nilai eigen yang merupakan nilai eigen dominan dari B.

Akan ditunjukkan B mempunyai vektor eigen v yang entri-entrinya positif.

Diketahui B adalah matriks persegi dengan semua entrinya positif.

Misal $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, v_i > 0, 1 < i < n$.

Maka, $v = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = C. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, dan matriks diagonal tersebut dinotasikan dengan C, dengan $C^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_n^{-1} \end{bmatrix}$.

Selanjutnya,

$$B.v = \lambda_v .v$$

$$B.C. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_v .C. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}.B.C. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_v . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entri-entri pada $C^{-1}.B.C$ positif dan notasikan $C^{-1}.B.C$ sebagai matriks D. Matriks B dan matriks D similar, dan dua matriks yang similar mempunyai polinomial karakteristik yang sama sehingga kedua matriks tersebut mempunyai nilai eigen yang sama. Jadi dapat diperoleh bahwa $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen positif dari B.

Berdasarkan teorema Frobenius-Perron di atas, maka v bersesuaian dengan suatu nilai eigen λ_v yang merupakan nilai eigen dominan, $\lambda(B)$, dari matriks B.

Selanjutnya, misal B adalah matriks persegi dan semua entrinya positif, serta jumlahan entri pada baris dan kolomnya sama. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda(B)$ sama dengan jumlahan entri-entri pada baris dan kolom matriks B tersebut.

Maka,

$$B.v = \lambda_v.v$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n.n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_v \\ \lambda_v \\ \vdots \\ \lambda_v \end{bmatrix}$$

Karena $\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$,

maka $\lambda_v = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$, atau

$$\lambda_v = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}, 1 \le i \le n.$$

□

Akibat 3.7 (Nilai Eigen S)

Suatu matriks Sudoku S dengan order n selalu memenuhi

$$\max_{\substack{1\le i\le n \\ \lambda_i\in\mathbb{R}}}|\lambda_i| = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \le i \le n.$$

Untuk tepat satu λ_i, yang merupakan nilai eigen dominan dari S.

Bukti :

Suatu matriks Sudoku S merupakan suatu matriks persegi dengan semua entrinya merupakan bilangan positif, dan jumlah dari entri-entrinya dalam satu baris dan satu kolom sama. Berdasarkan teorema 3.5 dan teorema 3.6, didapatkan bahwa nilai eigen dominan dari matriks Sudoku S sama dengan jumlah elemen dari entri-entri dalam satu baris dan satu kolom pada S dengan multiplisitas 1.

Karena jumlahan entri-entri pada setiap baris dan setiap kolom dalam matriks Sudoku dapat dituliskan sebagai berikut :

- Untuk baris ke-i

$$\sum_{j=1}^{n} S_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \le i \le n$$

- Untuk kolom ke-j

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \le j \le n$$

Maka

$$\max_{\substack{1\le i\le n \\ \lambda_i\in\mathbb{R}}}|\lambda_i| = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2}, 1 \le i \le n.$$

□

Contoh :

a. Matriks Sudoku order 4

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> S=[1 2 3 4;3 4 1 2;2 1 4 3;4 3 2 1]

S =

   1   2   3   4
   3   4   1   2
   2   1   4   3
   4   3   2   1

>> eig(S)

ans =

  10.0000
  -2.8284
  -0.0000
   2.8284
```

Dari perhitungan didapatkan nilai eigen dominannya 10 dan ini memenuhi

$$\max_{\substack{1 \le i \le 4 \\ \lambda_i \in \mathbb{R}}} |\lambda_i| = \sum_{j=1}^{4} s_{i,j} = \frac{4(4+1)}{2} = 10.$$

Dan sesuai dengan akibat 3.7, multiplisitas dari nilai eigen dominannya adalah 1.

b. Matriks Sudoku order 9

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> S=[9 4 7 2 5 8 1 3 6;1 2 3 4 6 7 9 8 5;6 5 8 1 9 3 7 2 4;8 9 5 6 4 2 3 7 1;7 6 4 9 3  1 2 5 8;3 1 2 8 7 5 4 6 9;4 8 9 7 2 6 5 1 3;2 3 6 5 1 9 8 4 7;5 7 1 3 8 4 6 9 2]

S =

    9    4    7    2    5    8    1    3    6
    1    2    3    4    6    7    9    8    5
    6    5    8    1    9    3    7    2    4
    8    9    5    6    4    2    3    7    1
    7    6    4    9    3    1    2    5    8
    3    1    2    8    7    5    4    6    9
    4    8    9    7    2    6    5    1    3
    2    3    6    5    1    9    8    4    7
    5    7    1    3    8    4    6    9    2

>> eig (S)

ans =

  45.0000
  -8.3258
  -1.1715 + 6.9490i
  -1.1715 - 6.9490i
   6.1429 + 2.5382i
   6.1429 - 2.5382i
  -2.8875
  -1.3738
   1.6443
```

Dari perhitungan didapatkan nilai eigen dominannya 10 dan ini memenuhi

$$\max_{\substack{1\le i\le 9\\ \lambda_i\in\mathbb{R}}}|\lambda_i| = \sum_{j=1}^{9} s_{i,j} = \frac{9(9+1)}{2} = 45.$$

Dan sesuai dengan akibat 3.7, multiplisitas dari nilai eigen dominannya adalah 1.

3.5. Transpos matriks Sudoku (bukti umum)

Teorema 3.8 (Transpos Matriks Sudoku)

Jika S merupakan matriks Sudoku, maka S^T juga merupakan matriks Sudoku dan $S \neq S^T$.

Bukti :

Misalkan $S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$, maka $S^T = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$

Karena S adalah matriks Sudoku, maka S memenuhi empat kondisi berikut :

1. Matriksnya berorder n sedemikian hingga $n = m^2$, dimana m sebarang bilangan positif.
2. Setiap baris dalam S memuat bilangan 1 sampai n tepat satu kali.
3. Setiap kolom dalam S memuat bilangan 1 sampai n tepat satu kali.
4. Setiap matriks blok yang berukuran $n^{1/2} \times n^{1/2}$ dalam S memuat bilangan 1 sampai n tepat satu kali.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S^T adalah matriks Sudoku.

Perhatikan definisi 3.1.

1. Karena S merupakan matriks persegi yang berorder n maka transpos nya juga berorder n, sehingga kondisi (1) terpenuhi.
2. Karena S^T merupakan transpos dari S, maka setiap elemen pada baris di S merupakan elemen pada kolom di S^T, dan setiap elemen pada kolom di S merupakan elemen pada baris di S^T. Karena S adalah matriks Sudoku maka elemen pada baris dan kolomnya tidak ada yang berulang (tepat satu kali), akibatnya elemen-elemen pada baris dan kolom di S^T juga pasti tidak berulang. Sehingga kondisi (2) dan (3) terpenuhi.
3. Karena S^T merupakan transpos dari S, maka setiap matriks blok pada S^T merupakan transpos dari matriks blok pada S. Karena S adalah matriks Sudoku, maka setiap matriks bloknya memenuhi aturan Sudoku. Akibatnya semua transpos dari matriks blok tersebut juga memenuhi aturan Sudoku. Sehingga kondisi (4) terpenuhi.

Jadi S^T adalah matriks Sudoku.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $S \neq S^T$.

Andaikan $S = S^T$, sehingga $s_{i,j} = s_{j,i}$ untuk $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$.

Secara umum, misal

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

Dan misalkan S tersebut simetri, maka

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

Karena S tersebut simetri, maka terdapat paling tidak satu matriks blok yang memuat elemen yang sama sehingga tidak memenuhi aturan dalam Sudoku, seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \cdots & & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \ddots & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & & \ddots & s_{n,n-1} \\ s_{n,2} & \cdots & s_{n,n-1} & & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jadi pengandaian salah, haruslah $\neq S^T$.□

Sesuai dengan sifat-sifat determinan, jika S adalah matriks Sudoku dan S^T adalah transpos dari S, maka, $\det(S) = \det(S^T)$.

3.6. Non Normality

Suatu matriks Sudoku S dikatakan hermitian jika memenuhi $S.S^T = S^T.S$.

Misal $S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$, dan $S^T = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$, maka

$S.S^T = S^T.S$

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {s_{1,1}}^2 + {s_{1,2}}^2 + \cdots + {s_{1,n}}^2 & s_{1,1}s_{2,1} + s_{1,2}s_{2,2} + \cdots + s_{1,n}s_{2,n} & \cdots & s_{1,1}s_{n,1} + s_{1,2}s_{n,2} + \cdots + s_{1,n}s_{n,n} \\ s_{2,1}s_{1,1} + s_{2,2}s_{1,2} + \cdots + s_{2,n}s_{1,n} & {s_{2,1}}^2 + {s_{2,2}}^2 + \cdots + {s_{n,n}}^2 & \cdots & s_{2,1}s_{n,1} + s_{2,2}s_{n,2} + \cdots + s_{2,n}s_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1}s_{1,1} + s_{n,2}s_{2,2} + \cdots + s_{n,n}s_{1,n} & s_{n,1}s_{2,1} + s_{n,2}s_{2,2} + \cdots + s_{n,n}s_{2,n} & \cdots & {s_{n,1}}^2 + {s_{n,2}}^2 + \cdots + {s_{n,n}}^2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} {s_{1,1}}^2 + {s_{1,2}}^2 + \cdots + {s_{n,1}}^2 & s_{1,1}s_{1,2} + s_{2,1}s_{2,2} + \cdots + s_{n,1}s_{n,2} & \cdots & s_{1,1}s_{1,n} + s_{2,1}s_{2,n} + \cdots + s_{n,1}s_{n,n} \\ s_{1,2}s_{1,1} + s_{2,2}s_{2,1} + \cdots + s_{n,2}s_{n,1} & {s_{1,2}}^2 + {s_{2,2}}^2 + \cdots + {s_{n,2}}^2 & \cdots & s_{1,2}s_{1,n} + s_{2,2}s_{2,n} + \cdots + s_{n,2}s_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n}s_{1,1} + s_{2,n}s_{2,1} + \cdots + s_{n,n}s_{n,1} & s_{1,n}s_{1,2} + s_{2,n}s_{2,2} + \cdots + s_{n,n}s_{n,2} & \cdots & {s_{1,n}}^2 + {s_{2,n}}^2 + \cdots + {s_{n,n}}^2 \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas akan terpenuhi jika :

$$\begin{cases} {s_{1,n}}^2 = {s_{n,1}}^2 \\ s_{1,2} = s_{2,1} \\ s_{n,1} = s_{1,n} \\ s_{2,n} = s_{n,2} \\ \vdots \end{cases}$$

Sehingga agar persamaan di atas terpenuhi maka haruslah $S = S^T$, tetapi berdasarkan teorema 3.9 jelas bahwa $S \neq S^T$.

Jadi, matriks Sudoku S tidak normal.

BAB 4

KESIMPULAN

4. 1. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab 3, dapat disimpulkan bahwa ;

1. Jika diberikan suatu matriks Sudoku tertentu, maka dapat diperoleh matriks-matriks Sudoku yang lain dengan melakukan beberapa operasi tertentu yaitu,
   a. Untuk matriks Sudoku yang bukan Sudoku X, baik order 4 maupun order 9, dengan melakukan operasi-operasi di atas (operasi elementer, transpos, dan rotasi 90° searah jarum jam) pada matriks tersebut akan dihasilkan matriks Sudoku yang lain yang berbeda dengan matriks Sudoku sebelumnya.
   b. Untuk matriks Sudoku X order 4, untuk menghasilkan matriks Sudoku X yang lain dapat dilakukan sepasang operasi elementer ($B_{i,j}$dan $K_{i,j}$), transpos, dan rotasi 90° searah jarum jam.
   c. Untuk matriks Sudoku X order 9, untuk memperoleh matriks Sudoku X yang lain hanya dapat dilakukan operasi rotasi 90° searah jarum jam dan transpos, sedangkan operasi elementer tidak dapat menghasilkan matriks Sudoku X.
2. Determinan matriks Sudoku X order 4 selalu sama dengan nol. Sedangkan untuk matiks Sudoku order 4 selain matriks Sudoku X nilai determinannya tidak dapat ditentukan. Dan untuk matriks Sudoku order 9 baik yang Sudoku X maupun yang bukan Sudoku X nilai determinannya juga tidak dapat ditentukan.
3. Nilai eigen dominan dari matriks Sudoku sama dengan jumlahan entri-entri pada setiap baris atau kolomnya dan multiplisitasnya 1.
4. Matriks Sudoku tidak simetri dan non normal.

DAFTAR REFERENSI

Anton, H. (1994). *Linear Algebra 7th Edition.* John Wiley & Son Inc.

Davis, Tom. (2008). T*he Mathematics of Sudoku*. Februari 20, 2011. http://www.geometer.org/mathcircle/sudoku.pdf.

Frank, Richard. (2005). *Mathematics in Sudoku.* Februari 20, 2011. http://people.brandeis.edu/-kleinboc/47a/sudoku.pdf.

Khim, S. (2007). *The Frobenius-Perron Theorem*. November 12, 2011

Luca, M. (2010). *A Sudoku Matriks Study*. Februari 4, 2011

Ortega, J. (1987). *Matrix Theory A Second Course.* Plenum Press.

Roman, S. (2008). *Graduate text in Mathematics. Advance Linear Algebra, Third Edition.* Springer.