UNIVERSITAS INDONESIA

BAGAN KENDALI *EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE* UNTUK MEAN PROSES

SKRIPSI

KRISTINA INTAN KARTIKA PUTRI
0606067446

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

BAGAN KENDALI *EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE* UNTUK MEAN PROSES

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

KRISTINA INTAN KARTIKA PUTRI
0606067446

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Kristina Intan Kartika Putri
NPM	: 0606067446
Tanda Tangan	:
Tanggal	: Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Kristina Intan Kartika Putri
NPM	: 0606067446
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk Mean Proses

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Dian Lestari, DEA.	( )
Penguji	: Mila Novita, M.Si.	( )
Penguji	: Sarini Abdullah, M.Stats.	( )
Penguji	: Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si.	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: Desember 2011

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala kasih dan tuntunanNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada

(1) Orangtua yang telah membesarkan penulis hingga saat ini. Terima kasih papa dan mama karena telah sabar dan memberi semangat kepada penulis untuk menyelesaikan studi di matematika. Terima kasih untuk doa yang tiada henti untuk penulis. Penulis juga berterima kasih kepada adik – adik penulis.

(2) Ibu Dr. Dian Lestari sebagai pembimbing penulis, yang telah memberikan banyak ilmu maupun saran kepada penulis dan juga begitu sabar dalam membimbing penulis dari awal hingga skripsi ini selesai.

(3) Ibu Dra. Nora Hariadi, M.Si selaku pembimbing akademis penulis yang telah memberikan tuntunan selama studi dan juga memberikan masukan mengenai pengerjaan skripsi penulis.

(4) Kepala Departemen Matematika Dr. Yudi Satria, M.T dan Sekretaris Departemen Matematika Rahmi Rusin, M.Stech.

(5) Seluruh dosen Departemen Matematika UI yang telah memberikan penulis ilmu yang bermanfaat untuk masa depan penulis.

(6) Teman – teman seperjuangan dalam penyelesaian skripsi ini yaitu Misdawita, Adi , Riski , Syahrul, Stefano , Hikmah , Putri, Deni , Zulfalah , Siti , Andi , Yosanda , Sisca A. Perjuangan belum berakhir, hari esok masih menanti. Semangat selalu teman – teman.

(7) Sahabat – sahabat penulis selama masa perkuliahan yang selalu memberi semangat dan membantu penulis selama masa perkuliahan, Laninca , Novianty , Roni Tua, Rahanti , Stefani.

(8) Seluruh teman – teman angkatan 2006 . Masa studi di matematika adalah masa – masa indah penulis karena ada kalian yang selalu menemani. Sukses selalu untuk semua.

(9) Seluruh teman – teman angkatan 2007, 2008, 2009, 2010. Terkhusus untuk Agnes ,Citra , Eka (2008) terima kasih untuk doa, semangat, juga kebersamaan yang indah selama penulis studi di matematika. Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada Rezza (2009) karena telah membantu penulis dalam penyelesaian skripsi dan juga sidang akhir.

(10) Karael yang selalu menemani penulis dan memberikan semangat agar penulis menyelesaikan skripsi ini.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, Desember 2011

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Kristina Intan Kartika Putri
NPM	: 0606067446
Program Studi	: S1 Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk Mean Proses.
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : Desember 2011

Yang menyatakan

(Kristina Intan Kartika Putri)

ABSTRAK

Nama : Kristina Intan Kartika Putri

Program Studi : Sarjana Matematika

Judul : Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk Mean Proses

Dalam suatu proses produksi pasti terdapat variasi atau keberagaman dari hasil produksi. Variasi dari suatu produk mempengaruhi kualitas dari produk tersebut. Maka agar kualitas produk tetap terjamin, haruslah variasi dari produk diminimalisir. Pengendalian kualitas statistik atau *Statistical Quality Control* (SQC) adalah sekumpulan perangkat statistik yang berguna untuk mengontrol agar proses produksi berjalan dengan stabil dan meningkatkan kemampuan produksi melalui pengurangan variasi hasil produksi. Perangkat statistik yang biasa digunakan untuk tujuan tersebut adalah bagan kendali. Bagan kendali yang umum digunakan untuk mengontrol proses produksi adalah bagan kendali Shewhart $\bar{X}$ dan R atau S. Namun, bagan kendali Shewhart $\bar{X}$ kurang efektif dalam mendeteksi pergeseran nilai mean proses yang kecil karena tidak memperdulikan informasi dari data yang terdahulu ketika titik terbaru digambarkan pada bagan. Oleh karena itu, dibutuhkanlah bagan kendali lain yang dapat mengatasi permasalahan tersebut. Bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) untuk mean proses sangat efektif dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil. Pada bagan *Exponentially Weighted Moving Average*, data yang terbaru berhubungan dengan data yang telah ada sebelumnya di mana setiap data diberikan bobot λ. Bobot bergerak secara eksponensial dari data terbaru ke data sebelumnya.

Kata Kunci : *Exponentially Weighted Moving Average* , pengendalian mutu statistik, bagan kendali, mean proses

xiv+58 halaman : 14 gambar , 2 tabel

Daftar Pustaka : 7 (1959-2008)

ABSTRACT

Name : Kristina Intan Kartika Putri

Program Study : Mathematics

Title : Exponentially Weighted Moving Average Control Chart for Mean Process

There are variations or diversity of products in a production. Variations of a product affects the quality of the product. To keep the quality control of product, the variation of the product should be minimized. Statistical Quality Control (SQC) is a collection of useful statistical tools to control the production process. Statistical tool commonly used for this purpose is the control charts. Control chart that commonly used to control the production process are Shewhart $\bar{X}$and R or S control chart. Shewhart $\bar{X}$ control charts are less effective in detecting small shift in mean because they do not take information from the past data when a new point is plotted. Thus, we need a control chart that can solve these problems. The Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control chart for mean process is very effective in detecting small mean shifts. On Exponentially Weighted Moving Average chart, the new data is related to the earlier data by using weighting factor λ. The weight λ moves exponentially from the latest data to earlier.

Key Words : *Exponentially Weighted Moving Average,* statistical quality control, control chart, mean process

xiv+58 pages : 14 pictures; 2 tables

Bibliography : 7 (1959-2008)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Tidak ada dua atau lebih unit produk yang dihasilkan oleh suatu produksi identik sama. Tidak dapat dihindari adanya variasi. Misalnya untuk produksi minuman botol 1 liter ternyata volume produk yang dihasilkan tidaklah semuanya tepat 1 liter, ada yang kurang atau ada yang lebih. Jika volume lebih besar dari 1 liter maka mungkin tidak berdampak pada konsumen. Sebaliknya volume yang lebih besar dari 1 liter ini membuat rugi produsen. Akan tetapi jika volume kurang dari 1 liter maka konsumen mungkin tidak menginginkan dan tidak menerima produk tersebut. Variasi atau keragaman ini disebabkan antara lain oleh perbedaan cara pembuatan peralatan, maupun juga perbedaan cara operator mengoperasikan pekerjaan mereka. Oleh karena itu diperlukanlah alat untuk mengontrol agar proses produksi berjalan dengan stabil serta meminimalkan variasi atau keragaman hasil produksi.

Bagan kendali adalah salah satu alat yang dapat mengontrol proses produksi agar berjalan dengan stabil dan meminimalisir keragaman hasil produksi. Bagan kendali yang biasa digunakan untuk mengontrol nilai rata-rata hasil produksi adalah bagan kendali Shewhart $\bar{X}$. Namun jika dalam produksi terdapat pergeseran – pergeseran nilai mean yang kecil maka bagan kendali Shewhart $\bar{X}$ kurang baik mendeteksinya. Oleh karena itu dibutuhkanlah bagan kendali lain yang dapat mengatasi masalah keragaman hasil produksi saat adanya pergeseran-pergeseran kecil dalam produksi. Bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* atau dapat disingkat EWMA yang diperkenalkan oleh S.W. Robert (1959) adalah salah satu bagan kendali yang dapat mengontrol produksi saat adanya pergeseran-pergeseran nilai mean yang kecil dalam produksi.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah : Bagaimana cara kerja bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas mengenai cara kerja bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah tugas akhir ini adalah ukuran subgrup yang digunakan adalah sama.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi lima bab, yaitu :

BAB 1	Membahas tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika Penulisan.
BAB 2	Membahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam membahas bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk mean proses.
BAB 3	Membahas cara membentuk bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk mean proses.
BAB 4	Membahas aplikasi dari bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* untuk mean proses.
BAB 5	Berisi kesimpulan yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini juga saran untuk penelitian di masa mendatang.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Dalam suatu proses produksi pasti terdapat variasi atau keberagaman dari hasil produksi. Variasi yang besar dari suatu produk menunjukkan kualitas dari produk tersebut rendah. Maka agar kualitas produk tetap terjamin, haruslah variasi dari produk diminimalisir. Pengendalian kualitas statistik atau *Statistical Quality Control* (SQC) adalah sekumpulan perangkat statistik yang berguna untuk mengontrol agar proses produksi berjalan dengan stabil dan meningkatkan kemampuan produksi melalui pengurangan variasi hasil produksi (Montgomery,1995).

Terdapat dua jenis faktor penyebab variasi hasil produksi yang dapat muncul selama produksi berlangsung, yaitu:

1. Faktor acak (*random causes*) : faktor yang kehadirannya pada proses produksi tidak dapat dihindari, sehingga terjadi keragaman alami
2. Faktor terusut (*assignable causes*) : faktor yang kehadirannya dalam proses produksi dapat dideteksi dan ditelusuri serta diupayakan untuk dihilangkan. Variasi yang disebabkan oleh faktor terusut yaitu perbedaan dalam material, perbedaan dalam penampilan, perbedaan volume atau berat, perbedaan cara pembuatan peralatan, maupun juga perbedaan cara operator mengoperasikan pekerjaan mereka.

Suatu proses produksi di mana terdapat faktor terusut maka dikatakan proses produksi tersebut tidak terkendali dan jika hanya ada faktor acak dalam proses produksi, maka proses produksi tersebut dikatakan terkendali. Tujuan pokok pengendalian kualitas statistik adalah menyelidiki dengan cepat terjadinya faktor terusut atau pergeseran proses sedemikian sehingga penyelidikan terhadap proses itu dan tindakan koreksi dapat dilakukan sebelum terlalu banyak unit yang tak sesuai diproduksi. Bagan kendali merupakan salah satu alat yang biasa digunakan untuk tujuan tersebut. Bagan kendali yang paling umum dikenal adalah bagan kendali Shewhart.

2.1 Bagan Kendali Shewhart

Bagan kendali Shewhart merupakan bagan pengendali kualitas hasil produksi yang paling sering digunakan. Bagan kendali Shewhart diperkenalkan pertama kali oleh Walter A.Shewhart pada sekitar tahun 1924. Hal ini membuat Walter A.Shewhart disebut sebagai bapak dari statistik pengendali mutu. Bagan kendali merupakan gambaran grafik dari karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung dari sampel subgrup dibandingkan dengan urutan subgrup atau waktu. Terdapat tiga garis penting pada bagan kendali yaitu :

- Sebuah garis horizontal yang berada di tengah yang menyatakan nilai rata-rata dari karakteristik kualitas suatu hasil produksi atau disebut garis tengah atau *Center Line* (CL).
- Sebuah garis horizontal yang terletak di bagian atas garis tengah, yaitu batas kendali atas atau *Upper Control Limit* (UCL).
- Sebuah garis horizontal yang terletak di bagian bawah garis tengah, yaitu batas kendali bawah atau *Lower Control Limit* (LCL).

Jika titik – titik sampel berada di dalam batas kendali maka proses dikatakan terkendali dan tidak ada tindakan koreksi yang perlu dilakukan. Jika terdapat titik berada di luar batas kendali maka dikatakan proses tidak terkendali dan diperlukan penyelidikan serta tindakan koreksi untuk mencari dan mengeliminasi faktor terusut penyebab dari masalah ini. Tetapi ternyata meskipun jika semua titik –titik berada di dalam batas kendali namun jika titik-titik tersebut membentuk suatu pola tertentu atau tidak tersebar secara acak, maka hal tersebut merupakan indikasi proses tidak terkendali dan harus dilakukan penyelidikan dan koreksi untuk mengatasi masalah tersebut.

Bagan kendali Shewhart dikategorikan menjadi dua kelompok yaitu:

1. Bagan kendali atribut yaitu bagan kendali untuk karakteristik kualitas hasil produksi yang dikelompokkan ke dalam apakah hasil produksi tersebut rusak atau tidak rusak dan sesuai atau tidak sesuai dengan spesifikasi. Bagan kendali yang termasuk dalam jenis ini adalah :
   - Bagan kendali p yaitu bagan kendali untuk melihat bagian karakteristik kualitas hasil produksi yang ditolak.
   - Bagan kendali np yaitu bagan kendali untuk jumlah yang ditolak.
   - Bagan kendali c yaitu bagan kendali untuk jumlah ketaksesuaian.
   - Bagan kendali u yaitu bagan kendali untuk jumlah ketaksesuaian perunit.

   Bagan kendali jenis atribut baik digunakan pada kasus:
   - Jika karakteristik kualitas hasil produksi tidak dapat dinyatakan dalam bentuk angka, tetapi hanya bisa dinyatakan dalam cacat atau tidaknya suatu produk.
   - Jika dalam satu unit produk banyak karakteristik kualitas yang ingin dikontrol sehingga dibutuhkan banyak bagan kendali untuk variabel yang harus dibuat dan hal itu tidaklah efektif.
2. Bagan kendali untuk variabel, yaitu bagan kendali untuk karakteristik kualitas hasil produksi yang dapat diukur dan dinyatakan dalam angka, contoh: berat, volum, suhu, dan lain-lain.
   Bagan kendali yang termasuk dalam jenis ini adalah:
   - Bagan kendali $\bar{X}$, yaitu bagan kendali untuk mengontrol mean proses.
   - Bagan kendali X, yaitu bagan kendali individual, bagan ini digunakan untuk melihat apakah produk sesuai dengan spesifikasi atau tidak.
   - Bagan kendali R, yaitu bagan kendali untuk mengontrol variabilitas proses.
   - Bagan kendali S, yaitu bagan kendali untuk mengontrol variabilitas proses.

Bagan R atau S digunakan untuk melihat seberapa besar keragaman kualitas hasil produksi. Biasanya bagan kendali $\bar{X}$, dibuat secara bersamaan dengan bagan kendali R atau S. Bagan $\bar{X}$ dan R digunakan apabila ukuran sampel kecil $n \leq 10$. Jika n besar bagan R kurang efektif dalam melihat penyebaran atau keragaman proses karena informasi keragaman proses hanya berdasarkan ujung – ujung data saja, yaitu berdasarkan nilai data terbesar dan data terkecil. Oleh karena itu untuk $n > 10$ digunakanlah bagan S bersamaan dengan bagan $\bar{X}$ karena bagan S memperhatikan informasi dari setiap data yang ada sehingga lebih baik dalam melihat penyebaran atau keragaman proses. Bagan $\bar{X}$dan R lebih sering digunakan dalam praktek daripada bagan $\bar{X}$ dan S, karena penghitungannya lebih mudah dipahami oleh orang awam.

2.1.1 Bagan Kendali Shewhart $\bar{X}$

Hal – hal yang harus dilakukan sebelum pembuatan bagan kendali yaitu:

1. Menentukan tujuan pembuatan bagan, misalnya untuk menganalisis suatu proses produksi. Selanjutnya menentukan prosedur produksi juga prosedur pemeriksaan dan juga menyediakan informasi yang dibutuhkan untuk mengambil keputusan kapan proses produksi dibiarkan berlanjut atau kapan berhenti untuk mengambil tindakan dalam mengatasi faktor terusut.
2. Pemilihan variabel atau karakteristik hasil produksi yang ingin dikontrol kualitasnya.
3. Penentuan dasar pembentukan subgrup. Subgrup biasanya dipilih sedemikian hingga dalam setiap subgrup sedapat mungkin datanya homogen sedangkan heterogen untuk satu subgrup ke subrup lainnya.
4. Menentukan ukuran dan frekuensi subgrup.
5. Membuat format pengumpulan data.
6. Menentukan metode pengukurannya.

Bagan kendali $\bar{X}$ merupakan bagan untuk melihat apakah nilai rata-rata proses bervariasi atau tidak dari waktu ke waktu, dan melihat apakah rata-rata proses dipengaruhi faktor terusut seperti misalnya pergantian mesin, operator, bahan baku, kelelahan operator dan lain-lain. Misalkan X, karakteristik kualitas yang diamati berdistribusi normal dengan mean μ dan standar deviasi σ. Pada skripsi ini subgrup yang diambil adalah subgrup yang berukuran sama yaitu n. Jika $X_{m1}, X_{m2}, \ldots, X_{mn}$ adalah sampel dari subgrup ke- m berukuran n, maka rata-rata dari subgrup ke- m ini adalah

$$\bar{X}_m = \frac{X_{m1} + X_{m2}, \ldots + X_{mn}}{n} \qquad (2.1)$$

Jika X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2, maka $\bar{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Jika X berdistribusi sembarang dengan ukuran n besar, maka berdasarkan teorema limit pusat sebaran $\bar{X}$ mendekati distribusi normal. Oleh karena itu maka secara umum batas – batas kendali untuk bagian $\bar{X}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

Batas kendali atas (*Upper Central Limit*)

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} \qquad (2.2)$$

Batas kendali bawah (*Lower Central Limit*)

$$LCL = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} \qquad (2.3)$$

Di mana:

μ adalah rata – rata proses

$\sigma_{\bar{X}}$ adalah standar deviasi dari $\bar{X}$ di mana $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

α adalah probabilitas melakukan kesalahan tipe I.

Untuk populasi berdistribusi normal, 99,7% data berada pada interval $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dan $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau pada interval $-Z_{0,0015}$ dan $Z_{0,0015}$ maka besarnya nilai $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dapat digantikan dengan 3, sehingga batas-batas kendalinya menjadi:

Batas kendali atas

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \qquad (2.4)$$

Batas kendali bawah

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}} \qquad (2.5)$$

Dalam pembuatan bagan kendali nilai μ dan σ, dapat diketahui ataupun tidak diketahui. Beberapa kemungkinan besarnya nilai μ dan σ yang dapat digunakan adalah:

- Nilai μ dan σ telah diketahui sebelumnya yang merupakan suatu nilai yang telah ditentukan oleh perusahaan ataupun diperoleh dari pengalaman terdahulu yang dianggap bagus untuk dijadikan standar.
- Nilai μ dan σ tidak diketahui sebelumnya, μ ditaksir dengan nilai $\bar{\bar{X}}$ dan σ ditaksir dengan nilai $\bar{R}$ di mana $\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots+\bar{X}_m}{m}$, $\bar{\bar{R}} = \frac{\bar{R}_1+\bar{R}_2+\cdots+\bar{R}_m}{m}$ dengan m adalah banyaknya subgrup, $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ dan $R_1, R_2, \dots, R_m$ masing – masing merupakan mean dan range dari subgrup ke 1,2,...,m yang masing-masing berukuran n.
- Nilai μ dan σ tidak diketahui sebelumnya, μ ditaksir dengan nilai $\bar{\bar{X}}$ dan σ ditaksir dengan nilai $\bar{S}$ di mana $\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots+\bar{X}_m}{m}$, $S = \frac{S_1+S_2+\cdots+S_m}{m}$ dengan m adalah banyaknya subgrup , $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ dan $S_1, S_2, \dots, S_m$ masing – masing merupakan mean dan standar deviasi dari subgrup ke 1,2,...,m yang masing-masing berukuran n.

2.1.1.1 Bagan Kendali $\bar{\boldsymbol{X}}$ Untuk Nilai μ dan Nilai σ Diketahui

Nilai μ dan nilai σ telah diketahui sebelumnya dimana kedua nilai itu dapat berasal dari nilai yang ditentukan oleh perusahaan atau diperoleh dari pengalaman pembuatan bagan sebelumnya. Misalkan nilai μ ditetapkan sebesar μ_0 dan nilai σ ditentukan sebesar σ_0 , garis tengah dan batas – batas kendali untuk bagan $\bar{X}$ adalah :

$$CL = \mu_0 \tag{2.6}$$

$$UCL = \mu_0 + 3\sigma_0 \tag{2.7}$$

$$LCL = \mu_0 - 3\sigma_0 \tag{2.8}$$

2.1.1.2 Bagan Kendali $\bar{X}$ Untuk Nilai μ dan Nilai σ Ditaksir dengan $\bar{X}$ dan $\bar{R}$

Dalam prakteknya, kebanyakan μ dan σ tidak diketahui, dan terlebih dahulu harus ditaksir dari sampel awal yang diambil dari proses produksi. Jika $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_m$ adalah mean dari subgrup ke 1,2,...,m yang masing-masing subgrup berukuran n maka μ dapat ditaksir dari rata-rata seluruh mean subgrup dan didefinisikan dengan $\bar{\bar{X}}$ yang dihitung dengan:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2, \ldots + \bar{X}_m}{m} \tag{2.9}$$

Nilai $\bar{\bar{X}}$ akan digunakan sebagai *center line* atau garis tengah dari bagan kendali $\bar{X}$.

Dalam penentuan batas – batas kendali untuk bagan $\bar{X}$ diperlukan juga nilai σ. Apabila σ belum diketahui sebelumnya, maka nilai σ dapat diduga dari range subgrup. Hal ini biasa digunakan untuk ukuran subgrup kecil yaitu $n \leq 10$. Jika $X_{J1}, X_{j2}, \ldots, X_{jn}$ adalah sampel dari subgrup ke- *j* berukuran *n* dengan $j = 1,2,\ldots,m$ maka range subgrup ke- *j* adalah selisih dari observasi terbesar dengan yang terkecil dari subgrup ke- *j* tersebut, yaitu :

$$R_j = X_{j(max)} - X_{j(min)} \tag{2.10}$$

R_j adalah range dari subgrup ke- j dengan $j = 1,2,\ldots,m$.

Jika $R_1, R_2, \ldots, R_m$ adalah range dari *m* subgrup, maka rata-rata range adalah

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_m}{m} \tag{2.11}$$

Nilai σ ditaksir dengan menggunakan rumus $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, dimana nilai d_2 merupakan faktor yang menyatakan rasio antara nilai harapan dari *R* dengan σ yang nilainya tergantung dari ukuran sampel *n*. Nilai d_2 dapat diperoleh pada lampiran 1.

Jika $\bar{\bar{X}}$ sebagai penaksir μ dan $\bar{R}/d_2$, sebagai penaksir σ, maka diperoleh garis tengah dan batas- batas kendali untuk bagan $\bar{X}$ adalah:

$$CL = \bar{\bar{X}} \tag{2.12}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{R}}{\sqrt{n}d_2} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \tag{2.13}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{R}}{\sqrt{n}d_2} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \tag{2.14}$$

A_2 menyatakan jarak antara batas kendali atas (*UCL*) dan batas kendali bawah (*LCL*) dengan garis tengah (*CL*) dengan nilai $A_2 = \frac{3}{\sqrt{n}d_2}$ dan dapat dilihat pada lampiran 2.

2.1.1.3 Bagan Kendali $\bar{\boldsymbol{X}}$ Untuk Nilai μ dan Nilai σ Ditaksir dengan $\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}$ dan $\bar{\boldsymbol{S}}$

Selain nilai σ dapat ditaksir dengan range subgrup, nilai σ dapat juga ditaksir dengan menggunakan standar deviasi subgrup. Hal ini digunakan apabila ukuran subgrup besar yaitu $n > 10$. Jika $X_{J1}, X_{J1}, X_{j2}, \ldots, X_{jn}$ adalah sampel dari subgrup ke- *j* berukuran *n* dengan $j = 1,2,..,m$ dan $\bar{X}_j$ adalah mean dari subgrup ke- *j* maka standar deviasi subgrup ke- *j* dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ji} - \bar{X}_j\right)^2}{n-1}} \tag{2.15}$$

Jika $S_1, S_2, \ldots, S_m$ adalah standar deviasi dari *m* buah subgrup yang masing – masing berukuran *n* maka

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_m}{m} \tag{2.16}$$

Sehingga taksiran untuk nilai σ adalah $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4}$, di mana C_4 merupakan sebuah faktor yang menyatakan rasio antara nilai harapan dari *S* dengan σ dan nilai C_4 dapat diperoleh dari lampiran 1.

Jadi, jika nilai σ ditaksir dengan standar deviasi subgrup, maka garis tengah dan batas – batas kendali untuk bagan $\bar{X}$ adalah:

$$CL = \mu = \bar{\bar{X}} \tag{2.17}$$

$$UCL = \mu + \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} \tag{2.18}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{C_4\sqrt{n}} \tag{2.19}$$

Biasanya nilai $\frac{3}{C_4\sqrt{n}}$ diganti dengan nilai A_3 yang menyatakan jarak antara batas kendali atas (UCL) dengan garis tengah (CL) dan batas kendali bawah (LCL) dengan garis tengah (CL). Nilai A_3 dapat dilihat pada lampiran 3.

2.1.2 Bagan Kendali Shewhart *R*

Dalam membuat bagan kendali $\bar{X}\&R$, terlebih dahulu harus dibuat bagan R karena batas – batas kendali bagan $\bar{X}$ bergantung pada keragaman proses. Bagan R menggambarkan penyebaran atau perubahan variabilitas proses produksi. Range subgrup berhubungan dengan penaksiran nilai standar deviasi proses, maka dengan membuat plot nilai – nilai R sesuai urutan subgrupnya, pada bagan kendali dapat dilihat perubahan keragaman proses produksi. Jika $R_1, R_2, \ldots, R_m$ adalah range dari subgrup ke 1,2,..,m maka garis tengah dan batas – batas kendali untuk bagan R adalah :

$$CL_R = \bar{R} \tag{2.20}$$

$$UCL_R = \bar{R} + 3\sigma_R \tag{2.21}$$

$$LCL_R = \bar{R} - 3\sigma_R \tag{2.22}$$

dimana $\bar{R} = \frac{R_1+R_2+\cdots+R_m}{m}$ merupakan rata-rata range subgrup dan σ_R adalah standar deviasi dari range subgrup. Seringkali nilai $\bar{R}$ lebih kecil dari nilai $3\sigma_R$ sehingga penghitungan batas kendali bawah pada persamaan (2.22) menghasilkan nilai negatif. Akan tetapi nilai rentangan tidak mungkin negatif, sehingga apabila dari penghitungan didapatkan nilai negatif maka batas kendali bawah bagan R diganti dengan nol.

Selain itu dapat juga digunakan rumus berikut untuk menghitung batas- batas bagan R , yaitu:

$$UCL_R = D_4\bar{R} \tag{2.23}$$

$$LCL_R = D_3\bar{R} \tag{2.24}$$

D_3 merupakan faktor pengali dari $\bar{R}$ untuk menentukan batas kendali bawah dan D_4 merupakan faktor pengali dari $\bar{R}$ untuk menentukan batas kendali atas pada bagan kendali R. Nilai D_3 dan D_4 diperoleh dari lampiran 2.

2.1.3 Bagan Kendali Shewart $\boldsymbol{S}$

Bagan kendali S menggambarkan penyebaran atau keragaman proses produksi dan digunakan apabila ukuran subgrup n besar, yaitu $n > 10$. Jika n besar, R kurang efektif untuk menaksir nilai σ. Maka untuk itu digunakan nilai S untuk menaksir nilai σ. Jika $S_1, S_2, \ldots, S_m$ adalah standar deviasi dari m subgrup yang masing – masing berukuran n , maka garis tengah dan batas kendali untuk bagan kendali S adalah:

$$CL_S = \bar{S} \tag{2.25}$$

$$UCL_S = \bar{S} + 3\sigma_S \tag{2.26}$$

$$LCL_S = \bar{S} - 3\sigma_S \tag{2.27}$$

Akan tetapi dalam penghitungan batas kendali bawah untuk bagan ini seringkali menghasilkan nilai negatif. Karena nilai standar deviasi tidak mungkin negatif maka digunakan rumus berikut

$$UCL_S = B_4\bar{S} \tag{2.28}$$

$$LCL_S = B_3\bar{S} \tag{2.29}$$

B_3 merupakan pengali dari $\bar{S}$ untuk menentukan batas kendali bawah pada bagan kendali S dan B_4 merupakan pengali dari $\bar{S}$ untuk menentukan batas kendali atas pada bagan kendali S. Nilai B_3 dan B_4 dapat diperoleh dari lampiran 3.

2.1.4 Analisis Pola Bagan Kendali

Kriteria yang digunakan untuk melihat apakah proses dalam keadaan tidak terkendali adalah:

- Terdapat titik –titik observasi yang berada di luar batas – batas kendali UCL dan LCL
- Titik – titik observasi tidak acak dan menunjukkan kecenderungan membentuk kurva kontinu ataupun tren atau siklis
- Dari 7 titik observasi yang berurutan , semua terletak pada sisi yang sama dari garis pusat
- 2 dari 3 titik observasi yang berurutan berada di zona 2σ sampai 3σ pada sisi yang sama dari garis pusat
- 4 dari 5 titik observasi yang berurutan berada di bawah zona 1σ

(Grant, 1996)

2.2 Variabel Random

Percobaan random didefinisikan sebagai suatu percobaan yang hasilnya tidak dapat diketahui secara pasti tetapi koleksi dari semua hasil yang mungkin diketahui. Percobaan ini dapat dilakukan berulang – ulang di bawah kondisi yang sama dan saling bebas. Koleksi dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan acak disebut ruang sampel $\mathcal{C}$. Sebuah fungsi X memetakan setiap $c \in \mathcal{C}$ ke sebuah bilangan riil $X(c) = x$, maka fungsi itu disebut dengan variabel random. Ruang hasil dari X adalah himpunan dari bilangan riil $\mathcal{A} = \{x: x = X(c), c \in \mathcal{C}\}$. Apabila elemen – elemen dari $\mathcal{A}$ merupakan bilangan yang diskrit maka X disebut variabel random diskrit. Sedangkan, apabila elemen – elemen dari $\mathcal{A}$ dinyatakan dalam bentuk interval maka X disebut variabel random kontinu. Misalkan A adalah subset dari $\mathcal{A}$, C subset dari $\mathcal{C}$ sedemikian sehingga $C = \{c \in \mathcal{C} \text{ dan } X(c) \in A\}$. Jadi elemen – elemen C berada di $\mathcal{C}$ untuk setiap nilai variabel random X mempunyai nilai di A. Hal tersebut berarti

$Pr(X\epsilon\ A) = P(C)$ dengan $C = \{c\ \in\ \mathcal{C}$ dan $X(c) \in\ A\}$. $Pr(X\epsilon\ A)$ sering kali dinotasikan juga dengan $P_X(\ A)$. Sehingga $Pr(X\epsilon\ A) = P_X(\ A) = P(C)$ dimana $C = \{c \in \mathcal{C}$ dan $X(c) \epsilon\ A\}$.

Misalkan suatu fungsi $f(x)$ yang memetakan setiap $c \in \mathcal{C}$ ke sebuah bilangan riil memenuhi

- $f(x) > 0,\ x \in A$
- $\sum_{\mathcal{A}} f(x) = 1$ untuk X variabel random diskrit atau $\int_{\mathcal{A}} f(x) = 1$ untuk X variabel random kontinu
- $P(A) = Pr(X\epsilon\ A) = \sum_{\mathcal{A}} f(x)$ untuk X variabel random diskrit atau $P(A) = Pr(X\epsilon\ A) = \int_{\mathcal{A}} f(x)\,dx$ untuk X variabel random kontinu

Jika fungsi $f(x)$ memenuhi 3 syarat di atas, maka fungsi $f(x)$ disebut *probability densitiy function* (pdf).

2.2.1 Ekspektasi dari variabel Random

Misalkan X adalah variabel random diskrit dengan pdf $f(x)$. Misalkan $\sum_x |x| f(x)$ konvergen ke suatu nilai limit berhingga maka ekspektasi untuk variabel random diskrit adalah :

$$E(X) = \sum_x x f(x) \tag{2.30}$$

Misalkan X adalah variabel random kontinu dengan pdf $f(x)$. Misalkan $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$ konvergen ke suatu nilai limit berhingga maka ekspektasi untuk variabel random kontinu adalah :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.31}$$

Sifat – sifat dari ekspektasi yaitu:

- Jika k konstanta maka $E(k) = k$
- Jika k konstanta dan v suatu fungsi, maka $E(kv) = kE(v)$
- Jika $k_1, k_2, \dots, k_n$ konstanta – konstanta dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ fungsi – fungsi, maka $E(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n) = k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) + \cdots k_n E(v_n)$

Nilai mean dari suatu distribusi X adalah

$$\mu = E(X) \tag{2.32}$$

Nilai variansi dari suatu distribusi X adalah

$$\sigma^2 = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \tag{2.33}$$

$$= E((X - \mu)^2)$$

$$= (X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

Sedangkan σ disebut standar deviasi dari X.

2.3 Distribusi Normal

Jika X adalah variabel random yang berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka pdf dari X adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty \tag{2.34}$$

(Hogg dan Craig,1995).

Parameter dari distribusi normal adalah μ $(-\infty < \mu < \infty)$ dan variansi $\sigma^2 > 0$. Distribusi normal digunakan secara luas sehingga sering digunakan notasi khusus untuk menyatakannya yaitu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ yang berarti X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. Bentuk visual distribusi normal adalah simetrik pada μ, berbentuk lonceng.

Teorema 1:

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2 > 0$, maka variabel random $W = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

(Hogg dan Craig,1995)

Bukti:

Fungsi distribusi dari W adalah

$$\begin{aligned} G(w) &= Pr(W \le w) \\ &= Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le w\right) \\ &= Pr(X \le w\sigma + \mu)\ , \sigma > 0 \\ &= \int_{-\infty}^{w\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

Misalkan

$$y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$dy = \frac{1}{\sigma} dx$$

Batas integral :

$x = -\infty$ menjadi $y = -\infty$

$x = w\sigma + \mu$ menjadi $y = \frac{w\sigma+\mu-\mu}{\sigma} = w$

Jadi

$$G(w) = \int_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)} dy, \tag{2.36}$$

Berarti pdf dari W adalah $g(w) = G'(w)$ yaitu

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{w^2}{2}\right)},\ \infty < w < \infty \tag{2.37}$$

$\therefore W \sim N(0,1)$ ■

2.4 Teorema Limit Pusat

Teorema limit pusat :

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ dinotasikan sebagai observasi sampel random dari sebuah distribusi dengan mean μ dan variansi $\sigma^2 > 0$ maka variabel random $Y_n = \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ memiliki limit distribusi normal dengan $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

(Hogg dan Craig,1995).

Bukti :

Asumsikan terdapat mgf dari X yaitu $M(t) = E(e^{tx}), -h < t < h.$

Fungsi $m(t) = E\left[e^{t(x-\mu)}\right] = e^{-\mu t}M(t)$ juga ada untuk $-h < t < h.$

Karena $m(t)$ adalah mgf untuk $X - \mu$ maka $m(0) = 1, m'(0) = E(X - \mu\ ) = 0$ dan $m''(0) = E[X - \mu\ ]^2 = \sigma^2.$

Dengan formula Taylor, terdapat suatu bilangan ξ antara 0 dan t sedemikian sehingga

$$m(t) = m(0) + m'(0) + \frac{m''(\xi)t^2}{2}$$

$$= 1 + \frac{m''(\xi)t^2}{2}$$

Jika $\frac{(\sigma^2 t^2)}{2}$ ditambahkan dan dikurangi pada persamaan di atas maka

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2]t^2}{2}$$

Berikutnya pandang $M(t; n)$ dimana

$$M(t;n) = E\left[exp\left(t\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= E\left[exp\left(t\frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) exp\left(t\frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \dots exp\left(t\frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= E\left[exp\left(t\frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\ E\left[exp\left(t\frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \dots E\left[exp\left(t\frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \left\{E\left[exp\left(t\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\}^n$$

$$= \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n, -h < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < h$$

Pada persamaan $m(t)$, ganti t dengan $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ untuk mendapatkan

$$m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m'(\xi) - \sigma^2]t^2}{2n\sigma^2}$$

dimana sekarang ξ antara 0 dan $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ dengan $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.

Sehingga, $M(t;n) = \left\{1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m"(\xi)-\sigma^2]t^2}{2n\sigma^2}\right\}^n$

Karena $m"$(t) kontinu pada $t = 0$ dan karena $\xi \to 0$ untuk $n \to \infty$ maka $\lim_{n\to\infty}[m"(\xi) - \sigma^2] = 0$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = e^{\frac{t^2}{2}}$ untuk setiap nilai t.

Hal ini membuktikan bahwa variabel random $Y_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}$ mempunyai limit distribusi normal standar.

■

Universitas Indonesia

BAB 3

BAGAN KENDALI *EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE*

Bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* atau dapat disingkat EWMA diperkenalkan pertama kali oleh S.W Roberts pada tahun 1959 dan digunakan untuk memonitor proses dan mendeteksi adanya faktor terusut yang terlihat dari adanya pergeseran terus menerus dalam suatu proses. Bagan EWMA ini terutama digunakan untuk mendeteksi adanya pergeseran nilai mean yang kecil dalam suatu proses produksi. Dalam suatu proses produksi tertentu, pergeseran nilai mean dari suatu ukuran hasil produksi memiliki pengaruh yang cukup besar baik terhadap biaya produksi atau kualitas dari hasil produksi itu sendiri.

Berdasarkan penelitian Box dan Jenkins pada tahun 1976 serta Montogomery dan Johnson pada tahun 1976, bagan kendali EWMA digunakan secara luas dalam pemodelan *time series* dan *forecasting*. Hunter (1986), Crowder (1987), Lucas dan Saccucci (1987), dan Singh Narinderjit (2006) adalah beberapa dari para peneliti yang tertarik untuk meneliti bagan kendali EWMA dan sifat – sifatnya. Topik mengenai bagan kendali EWMA tampaknya menarik untuk diteliti bahkan hingga saat ini.

3.1 Definisi *Exponentially Weighted Moving Average*

Misalkan Z_j didefinisikan sebagai berikut,

$$Z_j = \lambda \bar{x}_j + (1 - \lambda) Z_{j-1} \tag{3.1}$$

dengan,

- j merupakan waktu atau subgrup, $j = 1,2,3, \ldots$
- $\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ merupakan rata – rata sampel hasil produksi pada waktu ke - j dengan n adalah jumlah sampel dalam satu waktu.

- Z_0 merupakan nilai awal, nilai yang diharapkan pada hasil produksi dimana nilainya dapat berasal dari :
  - Penetapan sebelumnya oleh produsen sebagai nilai target,
    $Z_0 = \mu_0$
  - Atau dapat berasal dari perhitungan sebagai berikut,
    $Z_0 = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j}{m}$, dengan m adalah banyaknya subgrup
- λ merupakan faktor bobot dari EWMA dimana nilainya $0 < \lambda \leq 1$

Dari persamaan (3.1) Z_j dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_j &= \lambda\bar{x}_j + (1-\lambda)Z_{j-1} \\ &= \lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + (1-\lambda)^2 Z_{j-2} \\ &= \lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + (1-\lambda)^2\left[\lambda\bar{x}_{j-2} + (1-\lambda)Z_{j-3}\right] \\ &= \lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + (1-\lambda)^3 Z_{j-3} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Selanjutnya persamaan (3.2) dapat dijabarkan lagi untuk $Z_{j-k}, k = 4,5,6, \ldots, j$ sehingga Z_j dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} Z_j = {} & \lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + \cdots \\ & + \lambda(1-\lambda)^{j-2}\bar{x}_{j-(j-2)} + \lambda(1-\lambda)^{j-1}\bar{x}_{j-(j-1)} + (1-\lambda)^j Z_{j-j} \\ = {} & \lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + \cdots \\ & + \lambda(1-\lambda)^{j-2}\bar{x}_2 + \lambda(1-\lambda)^{j-1}\bar{x}_1 + (1-\lambda)^j Z_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Maka secara sederhana untuk $j = 1,2,3, \ldots$ Z_j dapat dinyatakan dengan

$$Z_j = \lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k} + (1-\lambda)^j Z_0 \tag{3.4}$$

Selanjutnya perhatikan persamaan-persamaan berikut

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)Z_0 \\
&= \frac{\bar{x}_1}{1/\lambda} + (1-\lambda)Z_0 \\
Z_2 &= \lambda\bar{x}_2 + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_1 + (1-\lambda)Z_0 \\
&= \frac{\bar{x}_2}{1/\lambda} + \frac{\bar{x}_1}{1/\big(\lambda(1-\lambda)\big)} + (1-\lambda)Z_0 \\
Z_3 &= \lambda\bar{x}_3 + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_2 + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_1 + (1-\lambda)Z_0 \\
&= \frac{\bar{x}_3}{1/\lambda} + \frac{\bar{x}_2}{1/\big(\lambda(1-\lambda)\big)} + \frac{\bar{x}_1}{1/(\lambda(1-\lambda)^2)} + (1-\lambda)Z_0
\end{aligned}
$$

Untuk $j = m$

$$
\begin{aligned}
Z_m &= \lambda\bar{x}_m + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{m-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{m-2} + \cdots \\
&\quad + \lambda(1-\lambda)^{m-2} + \lambda(1-\lambda)^{m-1}\bar{x}_1 + (1-\lambda)Z_0 \\
&= \frac{\bar{x}_m}{1/\lambda} + \frac{\bar{x}_{m-1}}{1/\big(\lambda(1-\lambda)\big)} + \frac{\bar{x}_{m-2}}{1/(\lambda(1-\lambda)^2)} + \cdots \\
&\quad + \frac{\bar{x}_2}{1/(\lambda(1-\lambda)^{m-2})} + \frac{\bar{x}_1}{1/(\lambda(1-\lambda)^{m-1})} + (1-\lambda)Z_0
\end{aligned}
$$

Pada saat $j = 1$, bentuk $\frac{\bar{x}_m}{1/\lambda}$ merupakan *average* pada Z_1. Selanjutnya pada saat $j = 2$, bentuk $\frac{\bar{x}_2}{1/\lambda}$ dan $\frac{\bar{x}_1}{1/\big(\lambda(1-\lambda)\big)}$ merupakan average pada Z_2 . Terlihat adanya pergerakan *average* yaitu bentuk *average* tidak hanya untuk $\bar{x}_1$ namun untuk data yang terbaru $\bar{x}_2$. Untuk $j = 3$, bentuk *average* menjadi tiga bentuk yaitu $\frac{\bar{x}_3}{1/\lambda}, \frac{\bar{x}_2}{1/\big(\lambda(1-\lambda)\big)}$, dan $\frac{\bar{x}_1}{1/(\lambda(1-\lambda)^2)}$. Begitu juga seterusnya untuk $j = m$ dengan m adalah suatu bilangan bulat positif, maka bentuk *average* akan sebanyak m. Berarti terlihat adanya pergerakan *average* dari setiap Z_j sehingga Z_j disebut persamaan *moving average.*

Selain itu terlihat juga pada persamaan (3.3) bahwa bobot dari rata – rata data terbaru hingga ke rata – rata data awal bergerak secara eksponensial yaitu $\lambda(1-\lambda)^0, \lambda(1-\lambda)^1, \lambda(1-\lambda)^2, \ldots, \lambda(1-\lambda)^{j-2}, \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.
Untuk lebih jelas melihat pergerakan rata – rata secara eksponensial, akan ditunjukkan dengan menggunakan contoh berikut.

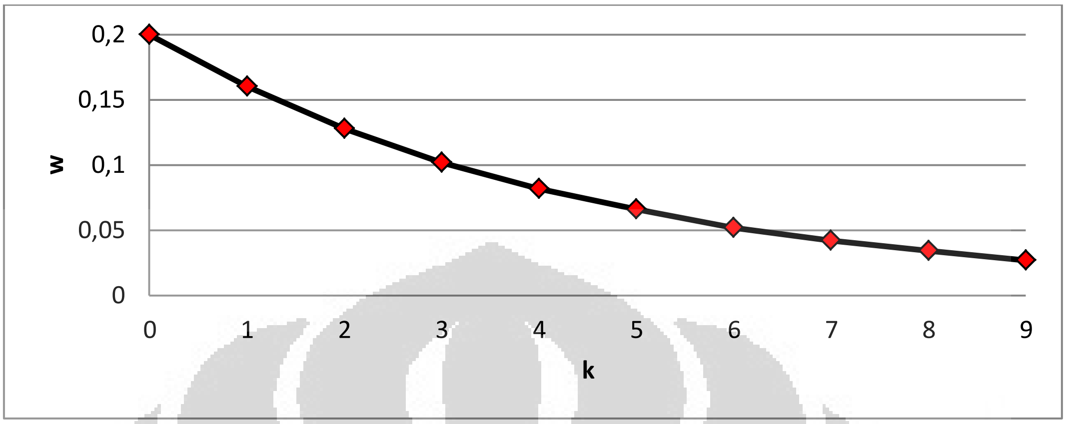
Misalkan bobot dari $\bar{x}_{j-k}$ dinyatakan sebagai $w_{\bar{x}_{j-k}} = \lambda(1-\lambda)^k$, untuk $j = 1,2,3, \ldots$ dan $k = 0,1,2, \ldots, j-1$. Misalkan $j = 10$ maka $k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ dan misalkan $\lambda = 0,2$.

Akan dilihat hubungan antara k dengan w sebagai berikut:

Tabel 3. 1 Hubungan Antara $\boldsymbol{k}$ dengan $\boldsymbol{w}$

k	**w=** $\lambda(1-\lambda)^{j-k} = \lambda(1-\lambda)^{10-k}$
0	$0,2.(1-0,2)^0 = 0,2$
1	$0,2.(1-0,2)^1 = 0,2.0,8^1 = 0,160$
2	$0,2.(1-0,2)^2 = 0,2.0,8^2 = 0,128$
3	$0,2.(1-0,2)^3 = 0,2.0,8^3 = 0,102$
4	$0,2.(1-0,2)^4 = 0,2.0,8^4 = 0,082$
5	$0,2.(1-0,2)^5 = 0,2.0,8^5 = 0,066$
6	$0,2.(1-0,2)^6 = 0,2.0,8^6 = 0,052$
7	$0,2.(1-0,2)^7 = 0,2.0,8^7 = 0,042$
8	$0,2.(1-0,2)^8 = 0,2.0,8^8 = 0,034$
9	$0,2.(1-0,2)^9 = 0,2.0,8^9 = 0,027$

Berdasarkan nilai k dan $w_{\bar{x}_{j-k}}$ seperti pada tabel di atas, dibuat grafik sebagai berikut



Gambar 3. 1 Grafik $\boldsymbol{k}$ dengan $\boldsymbol{w}$

Berdasarkan grafik di atas dapat disimpulkan secara umum bahwa untuk setiap $\bar{x}_{j-k}$ dengan $j = 1,2,3, \ldots$ dan $k = 0,1,2, \ldots, j-1$ nilai w atau bobot makin menurun secara eksponensial untuk nilai k makin besar. Dengan kata lain bobot akan menurun secara eksponensial dari rata – rata subgrup terdahulu ke rata – rata subgrup terbaru.

Karena pada Z_j terdapat adanya pergerakan *average* serta bobot dari rata-rata subgrup yang terbaru ke terdahulu mengalami perubahan secara eksponensial maka Z_j disebut *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA).

3.1.1 Mean dan Variansi dari $\boldsymbol{Z_j}$

Z_j juga memiliki nilai pemusatan dan penyebaran. Nilai pemusatan dari EWMA merupakan nilai mean sedangkan nilai penyebarannya merupakan nilai variansi. Berikut akan dicari dahulu nilai mean dari Z_j

$$
\begin{aligned}
E(Z_j) &= E\left[\lambda\bar{x}_j + (1-\lambda)Z_{j-1}\right] \\
&= E\left[\lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + (1-\lambda)^2 Z_{j-2}\right] \\
&= E\left[\lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + (1-\lambda)^2\left[\lambda\bar{x}_{j-2} + (1-\lambda)Z_{j-3}\right]\right] \\
&= E\left[\lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + (1-\lambda)^3 Z_{j-3}\right] \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya persamaan (3.5) dapat dijabarkan lagi untuk Z_{j-k},
$k = 4,5,6, \dots, (j-1)$ sehingga $E\left[Z_j\right]$ dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
E\left[Z_j\right] &= E\ [\lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + \cdots \\
&\quad + \lambda(1-\lambda)^{j-2}\bar{x}_{j-(j-2)} + \lambda(1-\lambda)^{j-1}\bar{x}_{j-(j-1)} + (1-\lambda)^j Z_{j-j}] \\
&= E[\lambda\bar{x}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{x}_{j-2} + \cdots \\
&\quad + \lambda(1-\lambda)^{j-2}\bar{x}_2 + \lambda(1-\lambda)^{j-1}\bar{x}_1 + (1-\lambda)^j Z_0] \\
&= \lambda\, E\left[\bar{x}_j\right] + \lambda\,(1-\lambda)E\left[\bar{x}_{j-1}\right] + \lambda\,(1-\lambda)^2 E\left[\bar{x}_{j-2}\right] + \cdots \\
&\quad + \lambda\,(1-\lambda)^{j-2}E[\bar{x}_2] + \lambda\,(1-\lambda)^{j-1}E[\bar{x}_1] + (1-\lambda)^j Z_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Untuk setiap subgrup, nilai rata – rata subgrup yang sebenarnya diharapkan merupakan nilai Z_0 atau secara matematis berarti untuk setiap subgrup i, $i = 1,2,..,(j-2),(j-1),j$ untuk $j = 1,2,3, \dots$ maka $E[\bar{x}_i] = Z_0$.
Karena $E[\bar{x}_1] = E[\bar{x}_2] = \cdots = E\left[\bar{x}_{j-1}\right] = E\left[\bar{x}_j\right] = Z_0$
dan karena Z_0 sendiri merupakan nilai yang diharapkan sehingga $E[Z_0\ ] = Z_0$
maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
E\left[Z_j\right] &= \lambda\, Z_0 + \lambda\,(1-\lambda)Z_0 + \lambda\,(1-\lambda)^2 Z_0 + \cdots \\
&\quad + \lambda\,(1-\lambda)^{j-2}Z_0 + \lambda\,(1-\lambda)^{j-1}Z_0 + (1-\lambda)^j Z_0 \\
&= \lambda\, Z_0 \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k + (1-\lambda)^j Z_0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$\sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k$ merupakan deret geometri dengan nilai awal adalah $a = 1$, perbandingan nilai kedua dengan nilai awal yaitu $r = (1-\ \lambda)$, dan banyaknya nilai yaitu $n = j$.

Sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1\left(1-(1-\lambda)^j\right)}{1-(1-\ \lambda)} = \frac{\left(1-(1-\lambda)^j\right)}{\lambda} \tag{3.8}$$

Jadi,

$$E[Z_j] = \lambda\, Z_0 \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k + (1-\lambda)^j Z_0$$

$$= \lambda\, Z_0 \frac{\left(1-(1-\lambda)^j\right)}{\lambda} + (1-\lambda)^j Z_0 \qquad (3.9)$$

$$= Z_0\left(1-(1-\lambda)^j\right) + (1-\lambda)^j Z_0$$

$$= Z_0 - Z_0(1-\lambda)^j + (1-\lambda)^j Z_0$$

$$= Z_0$$

Jadi nilai mean dari EWMA adalah Z_0 yang nilainya adalah μ_0 atau $\bar{\bar{x}}$.

Setelah mendapatkan ukuran pemusatan dari Z_j, selanjutnya akan dicari nilai penyebaran Z_j yaitu variansi.

Jika untuk setiap $\bar{x}_j$, $j = 1,2,3,\ldots$, independen dan mempunyai standar deviasi $\sigma_{\bar{x}}$ maka variansi Z_j adalah

$$\sigma^2_{Z_j} = var(Z_j)$$

$$= var\left(\lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k} + (1-\lambda)^j Z_0\right)$$

$$= var\left(\lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k}\right) + var\left((1-\lambda)^j Z_0\right)$$

$$+2cov\left(\lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k}\, , (1-\lambda)^j Z_0\right) \qquad (3.10)$$

Karena $var(c) = c$ untuk c adalah suatu konstanta maka $var\left((1-\lambda)^j Z_0\right) = 0$ dan karena setiap $\bar{x}_j$ independen maka

$$cov\left(\lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k}\, , (1-\lambda)^j Z_0\right) = 0$$

maka persamaan (3.10) menjadi

$$\sigma^2_{Z_j} = var\left(\lambda \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k}\right)$$

$$= \lambda^2 var\left(\sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^k \bar{x}_{j-k}\right)$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^{2k}\, var\left(\bar{x}_{j-k}\right)$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^{2k}\, \sigma^2_{\bar{x}_j}$$

$\sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^{2k}$ merupakan deret geometri dengan nilai awal adalah $a = 1$, perbandingan nilai kedua dengan nilai awal yaitu $r = (1- \lambda)^2$, dan banyaknya nilai yaitu $n = j$.

Sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^{2k} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{1\left(1-(1-\lambda)^{2j}\right)}{1-(1- \lambda)^2}$$

$$= \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{1-(1-2\lambda+\lambda^2)}$$

$$= \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{2\lambda-\lambda^2}$$

Jadi,

$$\sigma^2_{Z_j} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{j-1} (1-\lambda)^{2k}\, \sigma^2_{\bar{x}_j}$$

$$= \lambda^2 \sigma^2_{\bar{x}_j} \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{2\lambda-\lambda^2}$$

$$= \lambda \sigma^2_{\bar{x}_j} \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{2-\lambda} \qquad (3.11)$$

Misalkan $\sigma^2_{\bar{x}_j} = \frac{\sigma^2}{n}$ maka persamaan (3.11) menjadi

$$\sigma^2_{Z_j} = \left[\frac{\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.12}$$

Bila j makin meningkat maka $(1-\lambda)^{2j}$ mendekati nol sehingga variansi $\sigma^2_{Z_j}$ menuju ke nilai limitnya.

Untuk $j \rightarrow \infty$ maka

$$\sigma^2_{Z_j} = \lim_{j\to\infty}\left[\frac{\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}\right] = \left[\frac{[1-0]\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.13}$$

Sehingga diperoleh

$$\sigma^2_{Z} = \left[\frac{\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.14}$$

Sehingga untuk nilai j yang besar maka variansi dari Z akan konstan yaitu $\frac{\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}$.

3.2 Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average*

Bagan kendali merupakan alat pengendali kualitas statistik yang biasa digunakan untuk mengontrol agar proses produksi berjalan dengan stabil dan terutama menyelidiki dengan cepat terjadinya faktor terusut atau adanya pergeseran proses sedemikian sehingga penyelidikan terhadap proses itu juga tindakan koreksi dapat dilakukan sebelum terlalu banyak unit yang tak sesuai diproduksi. Bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* merupakan bagan kendali yang pembentukannya mengacu kepada Z_j.

3.2.1 Batas – batas Kendali pada Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average*

Seperti pada umumnya bagan kendali, pada bagan kendali EWMA juga terdapat tiga garis penting yaitu garis tengah *(Center Line)*, garis batas kendali bawah *(Lower Control Limit)*, dan batas kendali atas *(Upper Control Limit)*. Garis tengah merupakan garis yang mewakili nilai rata - rata ukuran hasil produksi dan berada di tengah bagan kendali. Pada bagan EWMA , garis tengah berada pada nilai Z_0 sedangkan untuk garis batas kendali bawah dan atas akan dijelaskan selanjutnya.

Batas kendali bawah atau *Lower Contol Limit* (LCL) untuk bagan kendali EWMA adalah

$$LCL = Z_0 - L_1 \sigma_{Z_j} \tag{3.15}$$

Z_0 merupakan nilai awal yaitu nilai yang diharapkan dalam produksi. L_1 adalah jarak batas kendali bawah dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit standar deviasi. σ_{Z_j} merupakan standar deviasi dari Z_j. Nilai L_1 yang biasa digunakan pada bagan kendali adalah 3. Untuk data $Z_j$pada saat awal-awal proses maka batas kendali bawah bagan kendali EWMA menjadi

$$LCL = Z_0 - 3\left[\lambda \sigma^2_{\bar{x}_j} \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{2-\lambda}\right] \tag{3.16}$$

Misalkan $\sigma^2_{\bar{x}_j} = \frac{\sigma^2}{n}$ maka

$$LCL = Z_0 - 3\left[\frac{\sigma^2 \lambda \left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.17}$$

Untuk j yang makin besar maka nilai σ_{Z_j}menuju nilai limitnya, sehingga batas kendali bawah bagan kendali EWMA menjadi

$$LCL = Z_0 - 3\left[\frac{\sigma^2 \lambda}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.18}$$

Batas kendali atas atau *Upper Control Limit* (UCL) untuk bagan kendali EWMA adalah

$$UCL = Z_0 + L_2 \sigma_{Z_j} \tag{3.19}$$

Z_0 merupakan nilai awal yaitu nilai yang diharapkan dalam produksi. L_2 adalah jarak batas kendali atas dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit standar deviasi. σ_{Z_j} merupakan standar deviasi dari Z_j. Nilai L_2 yang biasa digunakan pada bagan kendali adalah 3. Untuk data Z_j pada saat awal-awal proses maka batas kendali bawah bagan kendali EWMA menjadi

$$UCL = Z_0 + 3\left[\lambda \sigma_{\bar{x}_j}^2 \frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{2-\lambda}\right] \tag{3.19}$$

Misalkan $\sigma_{\bar{x}_j}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ maka

$$UCL = Z_0 + 3\left[\frac{\sigma^2\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.20}$$

Untuk j yang makin besar maka nilai σ_{Z_j} menuju nilai limitnya, sehingga batas kendali bawah bagan kendali EWMA menjadi

$$UCL = Z_0 + 3\left[\frac{\sigma^2\lambda}{(2-\lambda)n}\right] \tag{3.21}$$

3.2.2 Pembentukan Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) secara Manual

Berikut akan dijelaskan cara membuat bagan kendali EWMA secara manual, yaitu:

1. Buat garis vertikal yang menyatakan ukuran dari kualitas hasil produksi yang diteliti.
2. Buat garis horizontal yang menyatakan urutan subgrup.
3. Buat garis tengah (*center line)* yaitu sebuah garis horizontal pada nilai $\bar{\bar{x}}$ atau pada nilai Z_0.
4. Hitung Z_j, $j = 1,2,3, ...$ dan memplotnya sesuai dengan urutan subgrup dan nilai ukuran dari kualitas produksinya.

Misalkan diperoleh nilai rata – rata subgrup pada waktu ke- j.
$\bar{x}_j$, $j = 1,2,3,4,5$ yaitu $\bar{x}_1 = 0{,}5$; $\bar{x}_2 = 1{,}5$; $\bar{x}_3 = 2{,}5$; $\bar{x}_4 = 1{,}0$; $\bar{x}_5 = 1{,}5$
misalkan nilai $\lambda = 0{,}2$.
Nilai Z_0 ditetapkan sama dengan $\bar{\bar{x}}$ yaitu $\bar{\bar{x}} = \frac{0{,}5+1{,}5+2{,}5+1{,}0+1{,}5}{5} = 1{,}4$ dan
$\sigma^2_{\bar{x}_j} = 0{,}55$.

Selanjutnya akan dibuat bagan kendali EWMA berdasarkan data tersebut.

Tabel 3.2 Tabel Contoh Data

j	$\bar{x}_j$	$Z_j = \lambda\bar{x}_j + (1-\lambda)Z_{j-1}$	$\sigma_{Z_j} = \sqrt{\lambda\sigma^2_{\bar{x}_j}\left[\frac{1-(1-\lambda)^{2j}}{(2-\lambda)}\right]}$
1	0,5	$Z_1 = 0{,}2.0{,}5 + (1-0{,}2)1{,}4 = 1{,}22$	$\sigma_{Z_1} = \sqrt{0{,}2.0{,}55\left[\frac{1-(1-0{,}2)^{2.1}}{(2-0{,}2)}\right]} = 0{,}149$
2	1,5	$Z_2 = 0{,}2.1{,}5 + (1-0{,}2)1{,}22 = 1{,}28$	$\sigma_{Z_2} = \sqrt{0{,}2.0{,}55\left[\frac{1-(1-0{,}2)^{2.2}}{(2-0{,}2)}\right]} = 0{,}189$
3	2,5	$Z_3 = 0{,}2.2{,}5 + (1-0{,}2)1{,}28 = 1{,}52$	$\sigma_{Z_3} = \sqrt{0{,}2.0{,}55\left[\frac{1-(1-0{,}2)^{2.3}}{(2-0{,}2)}\right]} = 0{,}212$
4	1,0	$Z_4 = 0{,}2.1{,}0 + (1-0{,}2)1{,}52 = 1{,}42$	$\sigma_{Z_4} = \sqrt{0{,}2.0{,}55\left[\frac{1-(1-0{,}2)^{2.4}}{(2-0{,}2)}\right]} = 0{,}226$
5	1,5	$Z_5 = 0{,}2.1{,}5 + (1-0{,}2)1{,}42 = 1{,}43$	$\sigma_{Z_5} = \sqrt{0{,}2.0{,}55\left[\frac{1-(1-0{,}2)^{2.5}}{(2-0{,}2)}\right]} = 0{,}234$

Garis tengah dan batas – batas kendali bagan EWMA :

$CL = \bar{\bar{x}} = 1{,}4$

$UCL = Z_0 + 3\sigma_{Z_j} = 1{,}4 + 3\sigma_{Z_j}$

Untuk $j = 1$ maka $UCL = 1,4 + 3\sigma_{Z_j} = 1,4 + 3.(0,149) = 1,847$

Untuk $j = 2$ maka $UCL = 1,4 + 3\sigma_{Z_j} = 1,4 + 3.(0,189) = 1,967$

Untuk $j = 3$ maka $UCL = 1,4 + 3\sigma_{Z_j} = 1,4 + 3.(0,212) = 2,036$

Untuk $j = 4$ maka $UCL = 1,4 + 3\sigma_{Z_j} = 1,4 + 3.(0,226) = 2,078$

Untuk $j = 5$ maka $UCL = 1,4 + 3\sigma_{Z_j} = 1,4 + 3.(0,234) = 2,102$

$LCL = Z_0 - 3\sigma_{Z_j} = 1{,}4 - 3\sigma_{Z_j}$

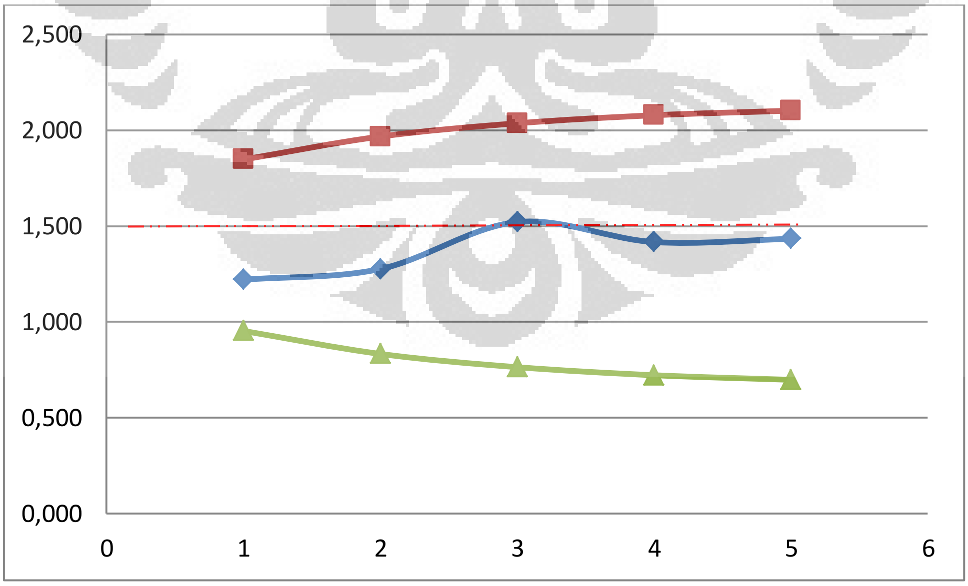
Untuk $j = 1$ maka $LCL = 1,4 - 3\sigma_{Z_j} = 1,4 - 3.(0,149) = 0,953$

Untuk $j = 2$ maka $LCL = 1,4 - 3\sigma_{Z_j} = 1,4 - 3.(0,189) = 0,833$

Untuk $j = 3$ maka $LCL = 1,4 - 3\sigma_{Z_j} = 1,4 - 3.(0,212) = 0,764$

Untuk $j = 4$ maka $LCL = 1,4 - 3\sigma_{Z_j} = 1,4 - 3.(0,226) = 0,722$

Untuk $j = 5$ maka $LCL = 1,4 - 3\sigma_{Z_j} = 1,4 - 3.(0,234) = 0,698$



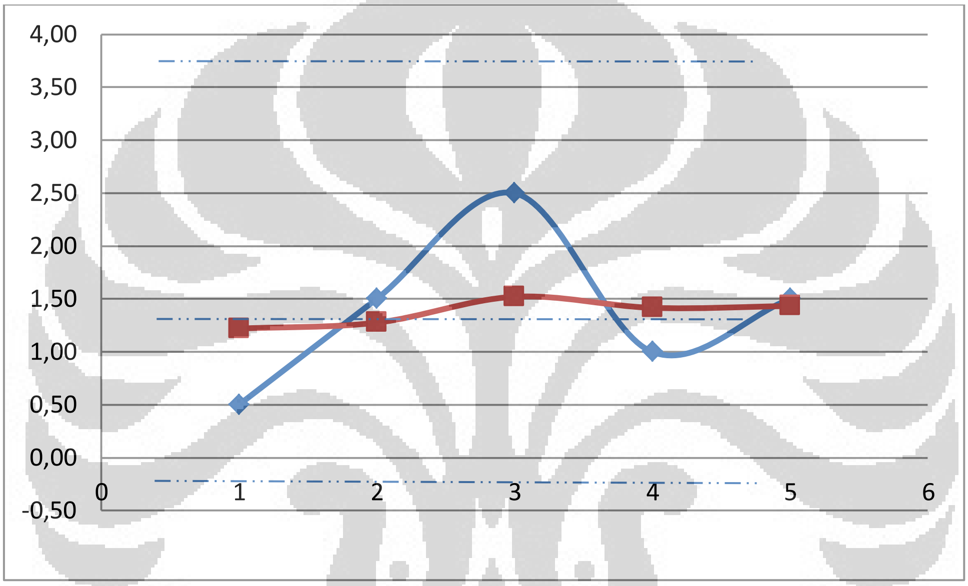
Gambar 3. 2 Bagan Kendali EWMA Secara Manual

Gambar 3.2 menunjukkan pergerakan nilai Z di sekitar garis tengah dan masih berada di antara batas kendali atas dan batas kendali bawah. Untuk melihat perbandingan pergerakan dari $\bar{x}_j$ dan Z_j untuk $j = 1,2,3,4,5$ akan diplot nilai $\bar{x}_j$ pada bagan di atas dengan garis tengah dan batas-batas kendali untuk bagan $\bar{x}_j$:

$CL = \mu_0 = \bar{\bar{x}} = 1{,}4$

$UCL = \mu_0 + 3\sigma_{\bar{x}_j} = 1{,}4 + 3.(0{,}74) = 3{,}62$

$LCL = \mu_0 - 3\sigma_{\bar{x}_j} = 1{,}4 - 3.(0{,}74) = -0{,}82$



Gambar 3. 3 Perbandingan Pergerakan Nilai $\bar{\boldsymbol{x}}_j$ dan $\boldsymbol{Z}_j$

Jika bagan kendali Shewhart dan bagan kendali EWMA digambarkan dalam 1 grafik maka hasilnya seperti gambar 3.3. Dari gambar 3.3 tersebut dapat dibandingkan pergerakan nilai $\bar{x}_j$ dan Z_j. Terlihat dari bagan di atas bahwa pergerakan antara setiap Z_j lebih kecil daripada pergerakan antara setiap $\bar{x}_j$, untuk $j = 1,2,3,4,5$ sehingga bagan kendali yang berdasarkan nilai Z_j yaitu bagan kendali EWMA dapat melihat pergeseran nilai mean proses produksi yang kecil karena pada bagan kendali EWMA pergeserannya kurang fluktuatif dibanding dengan bagan kendali Shewhart. Plot bagan kendali EWMA menunjukkan pergerakan dari rata – rata proses sedangkan plot bagan kendali Shewhart menunjukkan pergerakan rata – rata subgrup.

3.3 Kegunaan Bagan Kendali *Exponentially Weighted Moving Average*

Pada suatu proses produksi, jika terdapat perbedaan nilai mean dari karakteristik hasil produksi yang sedang diamati berarti sesungguhnya sampel-sampel karakteristik hasil produksi tersebut tidaklah berasal dari satu populasi, mungkin berasal dari dua atau lebih populasi. Hal itu yang menyebabkan proses produksi berjalan tidak stabil sehingga harus diselidiki faktor terusut dan juga dilakukan tindakan koreksi agar proses produksi menjadi stabil.

Bagan kendali yang biasa digunakan untuk mendeteksi pergeseran nilai mean karakteristik hasil produksi adalah bagan kendali Shewhart . Namun pada bagan kendali Shewhart, informasi dari data terdahulu tidak diperdulikan ketika titik data terbaru digambar sehingga informasi karakteristik hasil produksi tidak berhubungan antara titik data yang satu dengan yang lain. Hal itu menyebabkan bagan kendali Shewhart tidak efektif dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil. Sedangkan diperlukan adanya bagan kendali yang dapat mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil, khususnya bagi para produsen yang pergeseran nilai mean karakteristik hasil produksi yang kecil saja berpengaruh besar terhadap kualitas produk ataupun biaya produksi.

Perhatikan kembali persamaan berikut.

$$Z_j = \lambda \bar{x}_j + (1 - \lambda) Z_{j-1} \qquad (3.20)$$

Terlihat dari persamaan di atas bahwa titik data Z_j dipengaruhi oleh titik Z_{j-1}. Dengan kata lain data yang terbaru berhubungan dengan data – data yang terdahulu, sehingga informasi mengenail karakteristik hasil produksi lengkap. Hal itu menyebabkan bagan kendali yang mengacu kepada Z_j, yaitu bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average,* efektif dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil.

Misalkan $\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 2;\ \bar{x}_3 = 0,5;\ Z_0 = 1,5$

Jika $\lambda = 0,9$ maka

$$Z_3 = (0,9).(0,5) + (0,9).(0,1).(2) + (0,9).(0,1)^2.(1) + (0,1)^3.(1,5)$$
$$= 0,6405$$

Jika $\lambda = 0,5$ maka

$$Z_3 = (0,5).(0,5) + (0,5).(0,5).(2) + (0,5).(0,5)^2.(1) + (0,5)^3.(1,5)$$
$$= 1$$

Jika $\lambda = 0,2$ maka

$$Z_3 = (0,2).(0,5) + (0,2).(0,8).(2) + (0,2).(0,8)^2.(1) + (0,8)^3.(1,5)$$
$$= 1,316$$

Dari penjelasan di atas terlihat bahwa jika nilai λ makin kecil maka nilai Z_j semakin besar. Berarti untuk nilai λ yang semakin kecil bagan kendali EWMA lebih efektif dalam mendeteksi pergeseran nilai mean karakteristik hasil produksi yang kecil.

Jika nilai λ sama dengan 1 berarti

$$Z_j = \lambda\bar{x}_j + (1-\lambda)Z_{j-1}$$
$$= 1\bar{x}_j + (1-1)Z_{j-1}$$
$$= \bar{x}_j$$

maka bagan kendali EWMA akan sama dengan bagan kendali Shewhart sehingga kurang efektif untuk mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil. Nilai λ yang biasa digunakan adalah 0.2 sampai dengan 0.5. Jadi nilai faktor bobot λ berpengaruh terhadap kepekaan bagan kendali EWMA dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil.

Serangkaian data EWMA pada bagan cenderung bergerak perlahan ke tingkat baru sesuai dengan pergeseran dalam proses, atau akan bervariasi di sekitar garis tengah dengan fluktuasi yang kecil ketika proses berada dalam keadaan terkendali. Jadi dikatakan adanya pergeseran nilai mean yang menyebabkan proses produksi tidak terkendali pada bagan EWMA adalah jika:

- Terdapat titik (atau titik – titik) observasi yang berada di luar batas kendali atas atau batas kendali bawah EWMA
- Terdapat siklis atau suatu pola tertentu

Secara umum, sangat jarang untuk memiliki titik data berada di luar batas kendali pada bagan EWMA, sehingga deteksi pergeseran didasarkan terutama pada garis tren atau pola data. (Devor,1992).

BAB 4
CONTOH APLIKASI

Pada bab ini akan coba dijelaskan mengenai penerapan bagan kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) pada suatu contoh data fiktif. Data yang digunakan merupakan data pengukuran berat sekrup dalam satuan miligram yang terdiri dari 125 observasi yang berasal dari 25 waktu pengamatan dengan 5 pengambilan setiap waktu pengamatannya. Data dapat dilihat pada lampiran 5.

4.1 Analisis Data

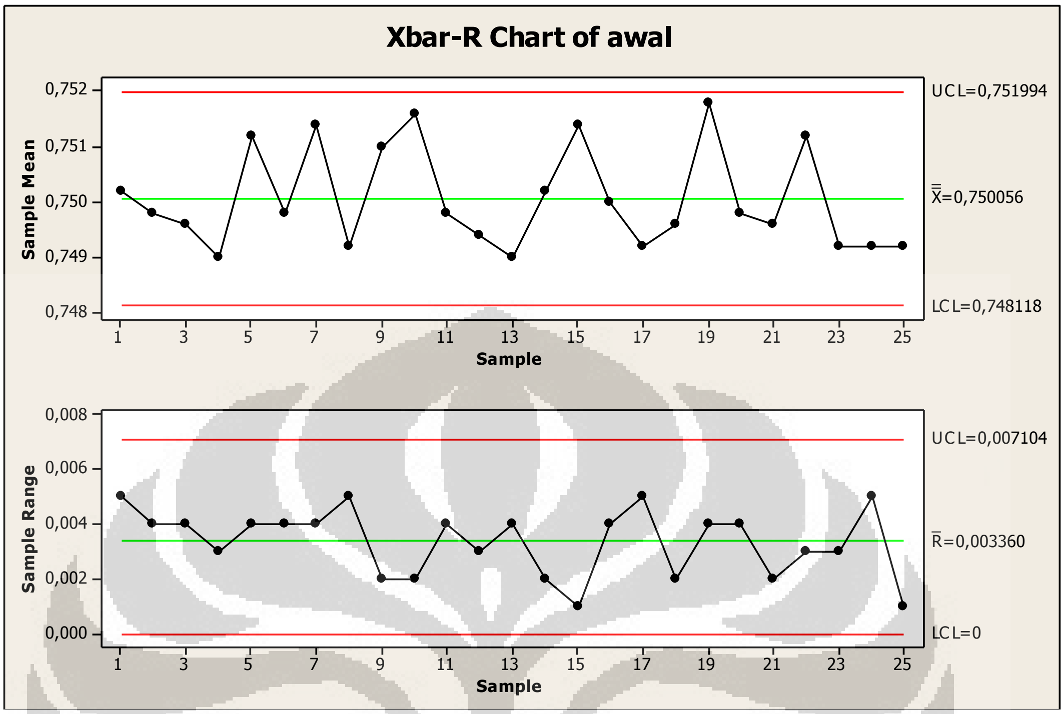
Analisi data pada skripsi ini akan dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama yaitu melihat perbedaan antara bagan Shewhart dan EWMA dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil dan bagian kedua yaitu mengenai simulasi nilai λ.

4.1.1 Perbedaan Bagan Kendali Shewhart dan Bagan Kendali EWMA

Pemilik pabrik sekrup ingin agar hasil produksinya terjaga kualitasnya khususnya dalam hal berat dari sekrup itu sendiri. Ia ingin agar proses produksinya berjalan dengan stabil dan meminimalisir variasi berat sekrup. Pemilik pabrik juga ingin biaya produksi yang dikeluarkan benar – benar efektif. Untuk memenuhi keinginan dari Sang pemilik pabrik tersebut diputuskan untuk menggunakan bagan kendali sebagai pengontrol kualitas produksi. Namun bagan kendali apakah yang efektif untuk permasalahan ini khususnya untuk melihat adanya perbedaan mean yang kecil pada proses produksi?

Langkah pertama yang akan dilakukan adalah mencoba membandingkan bagan kendali Shewhart yang biasa digunakan dan bagan kendali EWMA untuk melihat apakah proses produksi berjalan dengan stabil atau tidak berdasarkan ada atau tidak adanya perbedaan mean, khususnya perbedaan mean yang kecil.

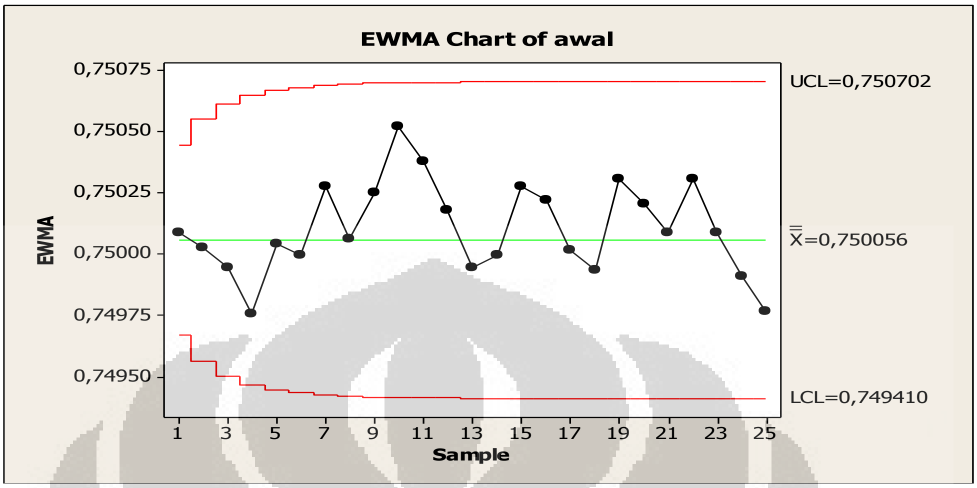
Berikut adalah bagan kendali Shewhart berat sekrup dari 125 observasi.



Gambar 4. 1 Bagan Kendali Shewhart untuk 125 observasi

Dari bagan kendali Shewhart di atas, terlihat bahwa semua titik berada di dalam batas kendali dan terlihat titik – titik pengamatan menyebar di sekitar garis tengah. Berarti tidak terlihat adanya indikasi perbedaan mean berat sekrup dari 125 observasi sehingga dapat dikatakan bahwa proses terkendali.

Selanjutnya akan dilihat bagan kendali EWMA untuk 125 observasi tersebut dengan nilai $Z_0 = \bar{\bar{x}}$ dan $\lambda = 0{,}2$.



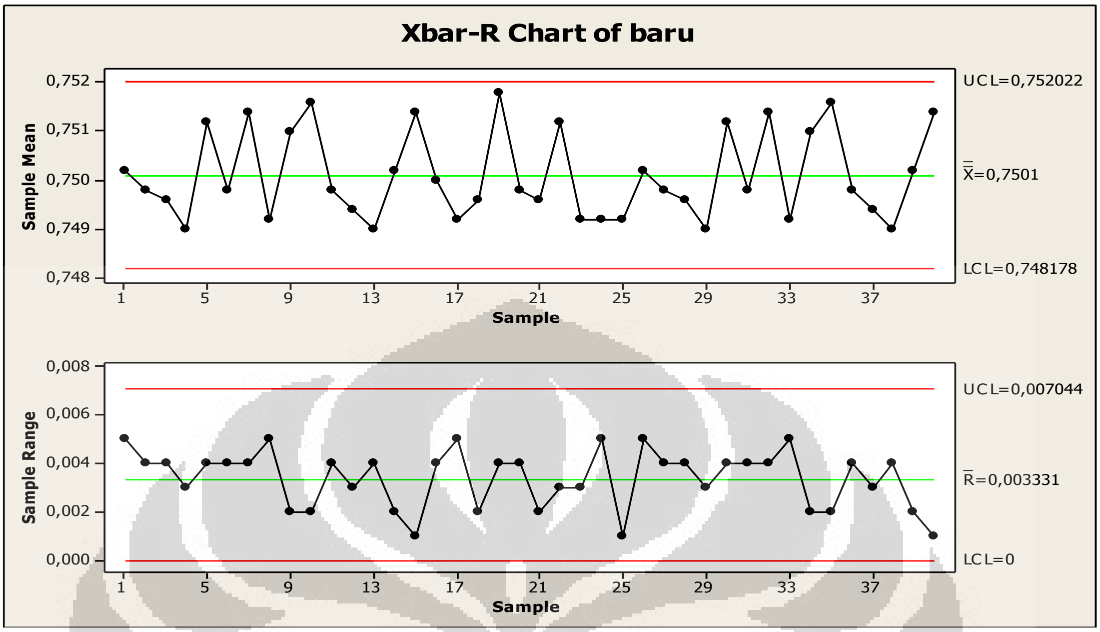
Gambar 4. 2 Bagan Kendali EWMA untuk 125 observasi

Dari bagan EWMA di atas terlihat bahwa semua titik berada di dalam batas kendali dan tidak adanya 7 titik atau lebih yang berturut-turut berada pada satu sisi garis tengah maupun tak terlihat adanya suatu pola data. Titik – titik observasi berfluktuasi di sekitar garis tengah. Berarti tidak terlihat adanya indikasi perbedaan mean dari 125 observasi sehingga dapat dikatakan bahwa proses produksi terkendali.

Berdasarkan bagan kendali Shewhart dan EWMA yang ditunjukkan di atas, tidak terlihat adanya perbedaan mean berat sekrup dari 125 sampel berarti keseluruhan observasi berasal dari satu populasi. Jadi proses produksi terkendali sehingga proses dapat dilanjutkan kembali dan tidak perlu dilakukan tindakan koreksi.

Selanjutnya proses produksi dilanjutkan dan misalnya didapatkan 75 observasi yang berasal dari 15 waktu pengamatan dengan 5 pengambilan setiap waktu yang nilainya sama dengan 75 observasi di awal. Jadi jumlah keseluruhan observasi berat sekrup saat ini adalah 200 observasi. Kemudian akan dilihat kembali apakah adanya perbedaan mean berdasarkan bagan kendali Shewhart dan bagan kendali EWMA.

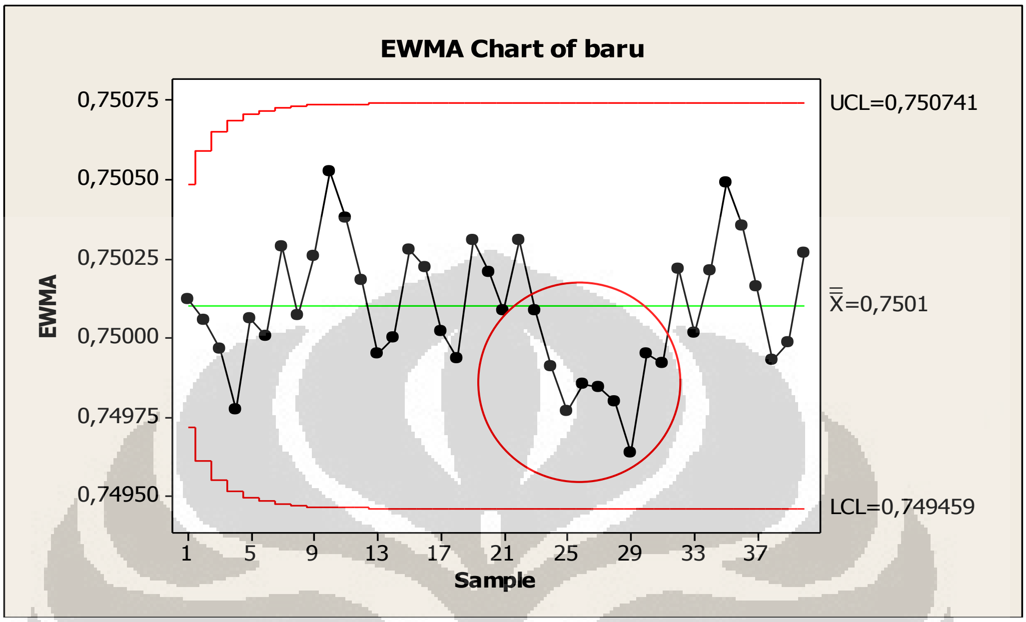
Berikut adalah bagan kendali Shewhart untuk 200 observasi.



Gambar 4. 3 Bagan kendali Shewhart untuk 200 observasi

Dari bagan kendali Shewhart di atas tidak ada data yang keluar dari bagan kendali dan terlihat titik –titik pengamatan tersebar acak. Berarti menurut bagan kendali Shewhart , tidak ada perbedaan mean dari 200 observasi yang ada dan proses produksi berjalan dengan stabil dan terkendali.

Berikut adalah bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan $Z_0 = \bar{\bar{x}}$ dan $\lambda = 0{,}2$.



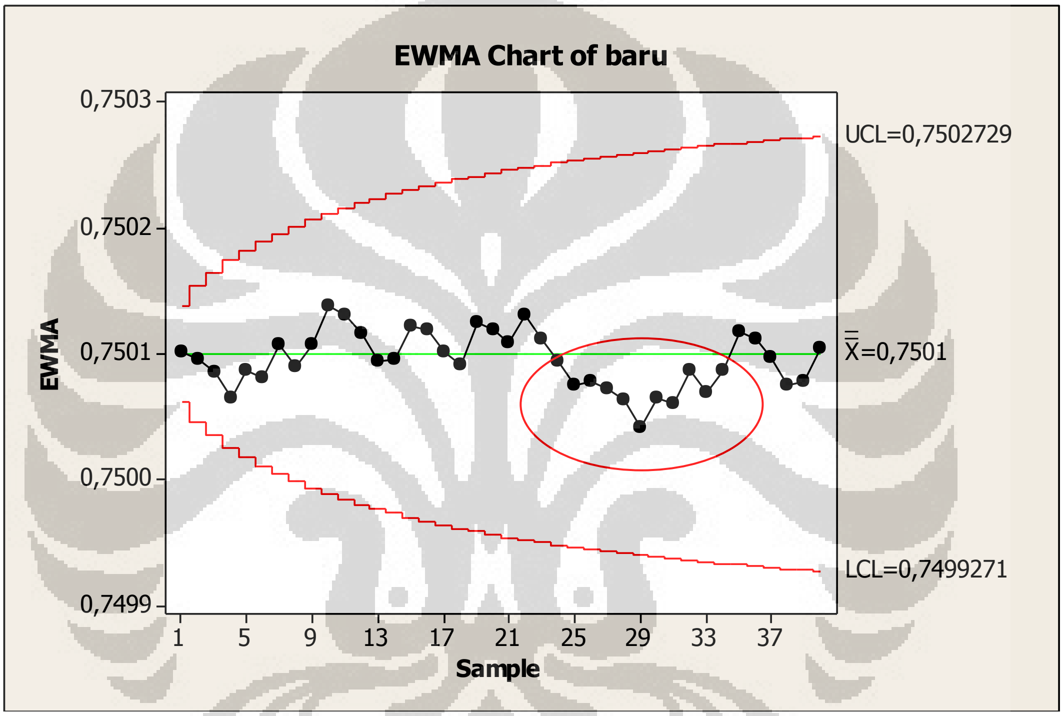
Gambar 4. 4 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi

Dari bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}2$ dan $Z_0 = \bar{\bar{x}} = 0{,}7501$ terlihat titik – titik menyebar secara acak di sekitar garis tengah. Terdapat 9 titik berturut – turut berada di bawah garis tengah yaitu mulai dari titik ke- 23 sampai titik ke- 31. Dari titik ke- 22 sampai dengan titik ke- 29 terjadi pergeseran mean yang cenderung menurun. Mulai dari titik ke- 29 sampai dengan titik ke- 32 terjadi kecenderungan peningkatan mean. Berarti mean pada titik – titik tersebut berbeda dengan titik – titik observasi yang lain atau dengan kata lain 200 observasi yang ada berasal lebih dari satu populasi sehingga dapat dikatakan bahwa proses produksi tidak stabil atau tidak terkendali.

Jadi untuk 200 observasi berat sekrup, pada bagan kendali Shewhart tidak terlihat perbedaan mean sedangkan pada bagan kendali EWMA terlihat indikasi perbedaan mean yang menyebabkan proses tidak terkendali. Berdasarkan contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa bagan kendali EWMA lebih baik daripada bagan kendali Shewhart dalam mendeteksi adanya pergeseran nilai mean yang kecil.

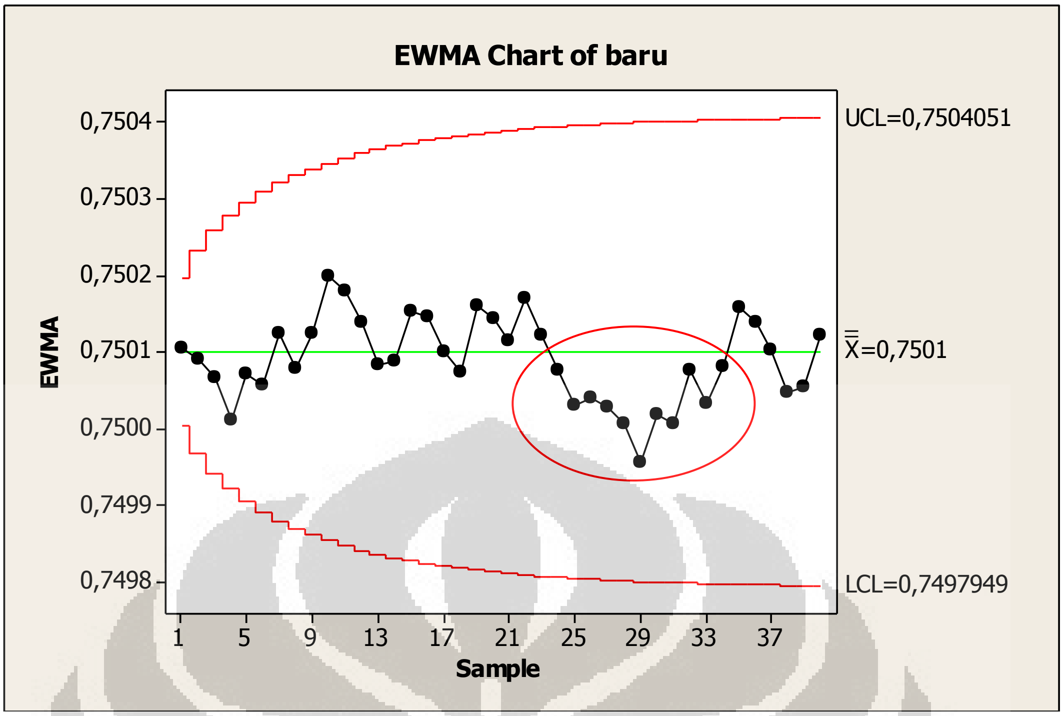
4.1.2 Simulasi Nilai $\boldsymbol{\lambda}$

Selanjutnya akan dilihat pengaruh nilai λ pada bagan kendali EWMA dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil. Bagan – bagan kendali EWMA berikut merupakan bagan kendali dari 200 observasi berat sekrup seperti yang dipakai sebelumnya dengan nilai $\lambda = 0{,}02$; $\lambda = 0{,}05$; $\lambda = 0{,}1$; $\lambda = 0{,}2$; $\lambda = 0{,}5$; $\lambda = 0{,}7$; $\lambda = 1$.



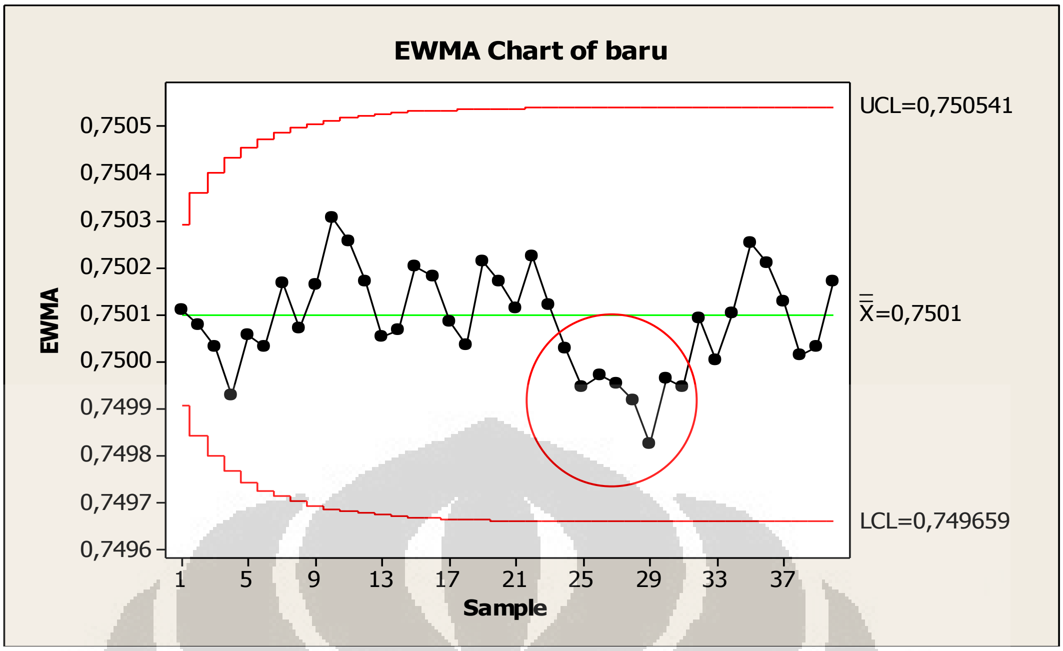
Gambar 4. 5 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,02

Dari bagan EWMA dengan $\lambda = 0{,}02$ di atas terlihat range dari batas kendali sempit dan juga terlihat adanya indikasi pegeseran mean yang kecil dari 200 observasi beradasarkan adanya pergerakan 11 titik berturut-turut yang berada di bawah garis tengah yaitu dari titik ke- 24 sampai dengan titik ke- 34.



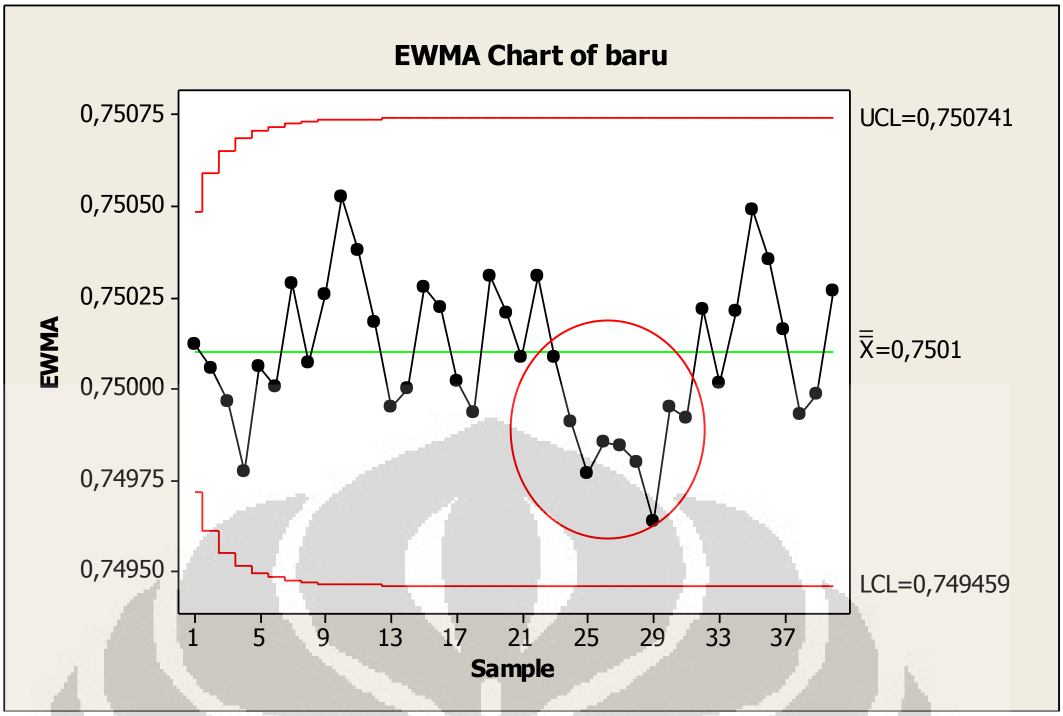
Gambar 4. 6 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,05

Untuk bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}05$ range dari batas kendali lebih lebar daripada bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}02$. Namun bagan kendali ini sama mendeteksi adanya pergeseran mean, dengan adanya pergeseran 11 titik berturut –turut yang berada di bawah garis tengah mulai titik ke- 24 hingga ke titik ke-34.



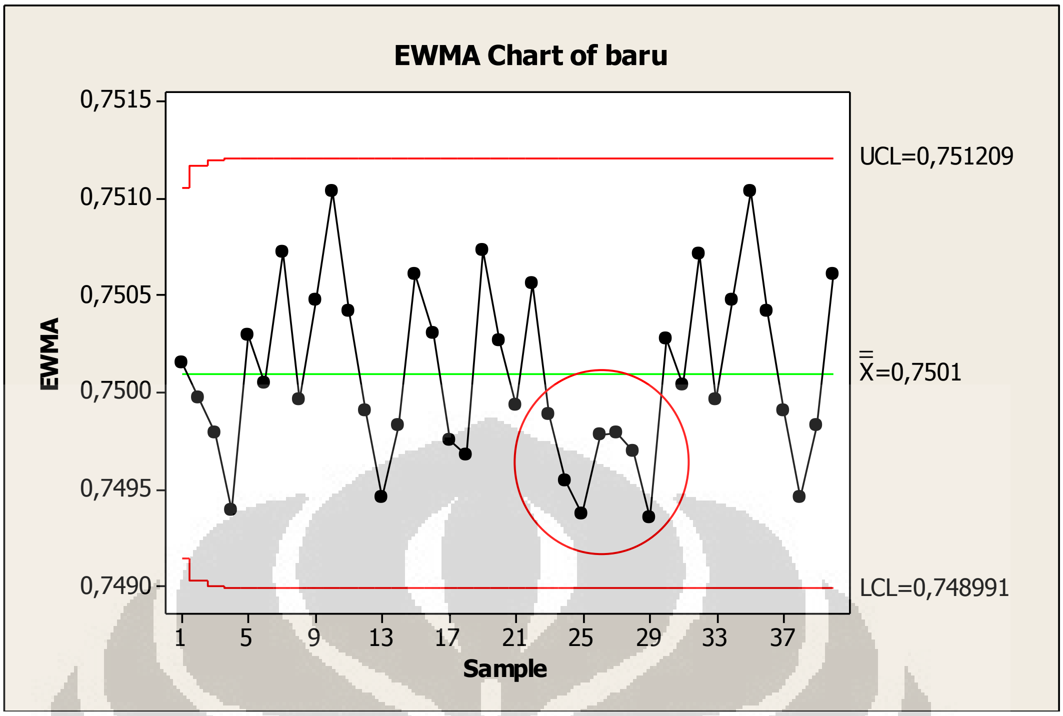
Gambar 4. 7 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,1

Untuk bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}1$ terlihat batas kendali mulai stabil pada observasi ke-21 dan adanya perbedaan mean yang kecil telihat dari pergeseran 10 titik berturut – turut yang berada di bawah garis tengah yaitu dari titik ke- 24 hingga titik ke-33.



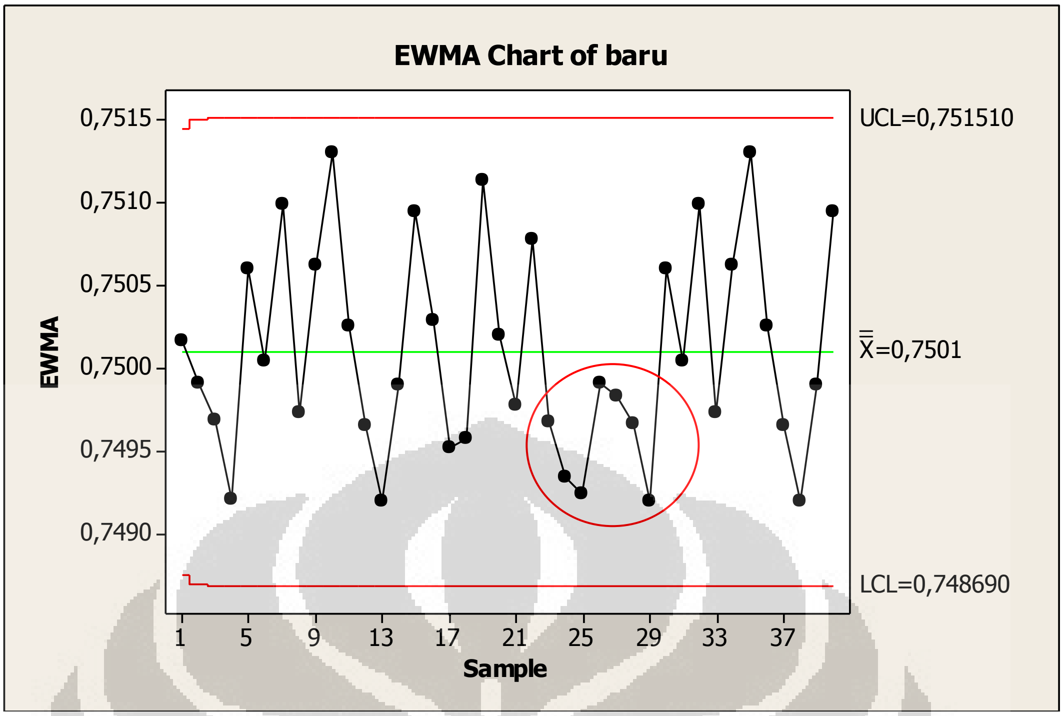
Gambar 4. 8 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,2

Dari bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}2$ di atas terlihat batas kendali mulai stabil pada observasi ke-13 dan indikasi adanya pergeseran mean yang kecil dari 200 observasi terlihat dari adanya pergeseran 9 titik berturut-turut yang berada di bawah garis tengah yaitu mulai titik ke-23 sampai dengan titik ke-31.



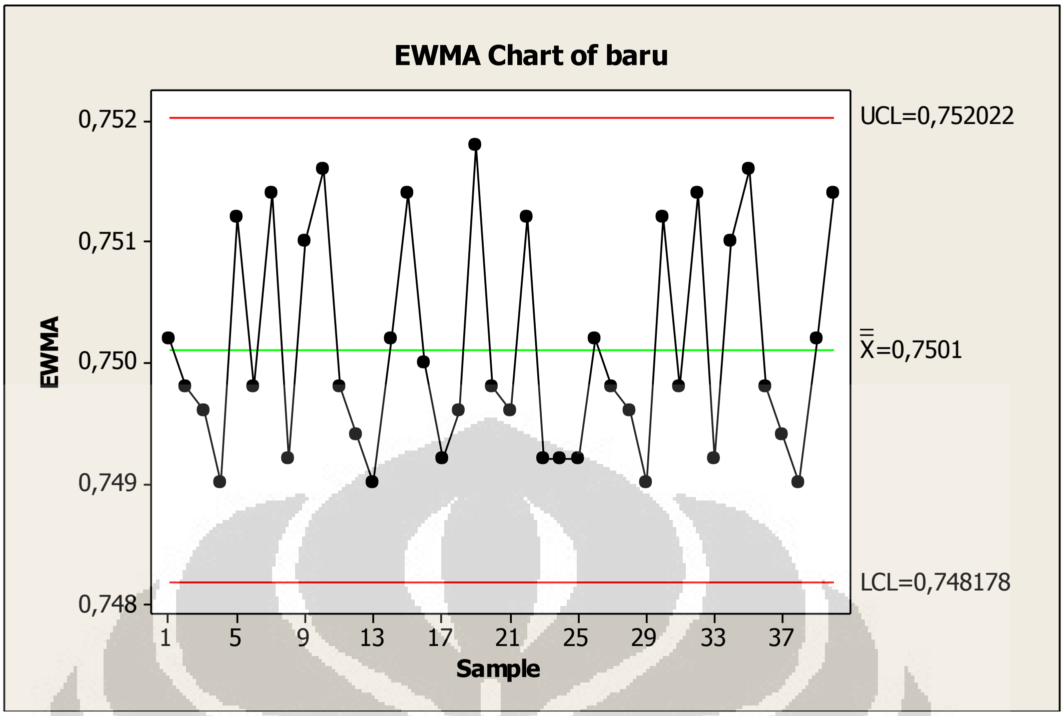
Gambar 4. 9 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,5

Dari bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}5$ di atas terlihat batas kendali mulai stabil pada observasi ke-5 dan indikasi adanya pergeseran mean yang kecil dari 200 observasi terlihat dari adanya pergeseran 7 titik berturut-turut berada di bawah garis tengah yaitu mulai titik ke-23 sampai dengan titik ke-29.



Gambar 4. 10 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 0,7

Dari bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 0{,}7$ di atas terlihat batas kendali mulai stabil pada observasi ke-3 dan indikasi adanya perbedaan mean yang kecil dari 200 observasi terlihat dari adanya pergeseran 7 titik berturut-turut yang berada di bawah garis tengah yaitu mulai titik ke-23 sampai dengan titik ke-29. Titik – titik yang berturut- turut berada di bawah garis tengah banyaknya menurun seiring dengan bertambah besar nilai λ.



Gambar 4. 11 Bagan kendali EWMA untuk 200 observasi dengan bobot 1

Bagan kendali EWMA dengan $\lambda = 1$ sesungguhnya merupakan bagan kendali Shewhart $\bar{X}$ $\overline{X}$ seperti pada gambar 4.3. Batas kendali stabil dan tidak terlihat adanya indikasi penurunan atau peningkatan.

Jadi terlihat bahwa semakin kecil nilai λ, semakin efektif bagan kendali EWMA dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil. Sedangkan untuk $\lambda = 1$, bagan kendali EWMA sama dengan bagan Shewhart dan kurang efektif dalam mendeteksi pergeseran mean yang kecil.

BAB 5
PENUTUP

Pada bagan kendali EWMA , data yang terbaru berhubungan dengan data yang terdahulu dan setiap data diberikan bobot dengan bobot yang lebih besar untuk data – data terdahulu dibanding dengan data terbaru. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa :

1. Bagan kendali EWMA lebih efektif dibanding dengan bagan kendali Shewhart dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil.
2. Semakin kecil nilai λ maka semakin efektif bagan kendali EWMA dalam mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil.

Saran untuk penelitian di masa mendatang adalah:

1. Untuk performa dari bagan kendali EWMA dapat dilihat *Average Run Length* (ARL) dari bagan kendali EWMA.
2. Jika karakteristik hasil produksi yang diamati lebih dari satu maka dapat digunakan bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) untuk mendeteksi pergeseran nilai mean yang kecil.

DAFTAR PUSTAKA

Carson, Polona. 2008. Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Monitoring an Analytical Process, *Ind. Eng. Chem.Res*, Vol 47, 405–411.

Devor, Richard. 1992. *Statistical Quality Design and Control*,1st ed.United States of America: Macmillan Publishing Company.

Grant, Eugenel dan Richard S. Leavenworth. 1996.*Statistical Quality Control*, 7th ed.Singapore: McGraw Hill.

Hogg, R dan Craig A. 1995.*Introduction To Mathematical Statistics*,5th ed.United States of America: Prentice-Hall,Inc.

Montgomery, Douglas C. 2001. *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th ed. Canada: John Wiley & Sons,Inc.

Roberts, S.W. 1959. Control Chart Test Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, Vol 1 no 3 ,239-250.

Singh, Narinderjit. 2006. EWMA Control Chart in Detecting and Diagnosing A Persistent Shift in a Process Mean. *Proceedings of the and IMT-GT Regional Conference on Mathematics*.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Berikut tabel faktor untuk menaksir σ

Banyak observasi pada subgrup n	Faktor d_2 $d_2 = \frac{\overline{R}}{\sigma}$	Faktor d_3 $d_3 = \frac{\sigma_R}{\sigma}$	Faktor c_2 $c_3 = \frac{\overline{\sigma}_{RMS}}{\sigma}$	Faktor c_4 $c_4 = \frac{\overline{S}}{\sigma}$
2	1,128	0,8525	0,5642	0,7979
3	1,693	0,8884	0,7236	0,8862
4	2,059	0,8798	0,7979	0,9213
5	2,326	0,8641	0,8407	0,9400
6	2,534	0,8480	0,8686	0,9515
7	2,704	0,8332	0,8882	0,9594
8	2,847	0,8198	0,9027	0,9650
9	2,970	0,8078	0,9139	0,9693
10	3,078	0,7971	0,9227	0,9727
11	3,173	0,7873	0,9300	0,9754
12	3,258	0,7785	0,9359	0,9776
13	3,336	0,7704	0,9410	0,9794
14	3,407	0,7630	0,9453	0,9810
15	3,472	0,7562	0,9490	0,9823
16	3,532	0,7499	0,9523	0,9835
17	3,588	0,7441	0,9551	0,9845
18	3,640	0,7386	0,9576	0,9854
19	3,689	0,7335	0,9599	0,9862
20	3,735	0,7287	0,9619	0,9869
21	3,778	0,7242	0,9638	0,9876
22	3,819	0,7199	0,9655	0,9882
23	3,858	0,7159	0,9670	0,9887
24	3,895	0,7121	0,9684	0,9892

25	3,931	0,7084	0,9696	0,9896
30	4,086	0,6926	0,9748	0,9914
35	4,213	0,6799	0,9784	0,9927
40	4,322	0,6692	0,9811	0,9936
45	4,415	0,6601	0,9832	0,9943
50	4,498	0,6521	0,9849	0,9949
55	4,572	0,6452	0,9863	0,9954
60	4,639	0,6389	0,9874	0,9958
65	4,699	0,6337	0,9884	0,9961
70	4,755	0,6283	0,9892	0,9964
75	4,806	0,6236	0,9900	0,9966
80	4,854	0,6194	0,9906	0,9968
85	4,898	0,6154	0,9912	0,9970
90	4,939	0,6118	0,9916	0,9972
95	4,978	0,6084	0,9921	0,9973
100	5,015	0,6052	0,9925	0,9975

Sumber:

Grant dan Leavenworth. 1999

Lampiran 2

Berikut adalah tabel faktor untuk menentukan batas – batas kendali bagan $\overline{X}$ & R

σ ditaksir dengan $\overline{R}$.

Banyak observasi dalam subgrup n	Faktor untuk bagan $\overline{X}$ A_2	Faktor untuk batas kendali bawah bagan R D_3	Faktor untuk batas kendali bawah bagan R D_4
2	1,88	0	3,27
3	1,02	0	2,57
4	0,73	0	2,28
5	0,58	0	2,11
6	0,48	0	2,00
7	0,42	0,08	1,92
8	0,37	0,14	1,86
9	0,34	0,18	1,82
10	0,31	0,22	1,78
11	0,29	0,26	1,74
12	0,27	0,28	1,72
13	0,25	0,31	1,69
14	0,24	0,33	1,67
15	0,22	0,35	1,65
16	0,21	0,36	1,64
17	0,20	0,38	1,62
18	0,19	0,39	1,61
19	0,19	0,40	1,60
20	0,18	0,41	1,59

Batas kendali atas untuk $\overline{X}$ adalah $UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_2R$

Batas kendali bawah untuk $\overline{X}$ adalah $LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_2R$

Batas kendali atas untuk R adalah $UCL_{\overline{R}} = D_4\overline{R}$

Batas kendali bawah untuk R adalah $LCL_{\overline{R}} = D_3\overline{R}$

Semua faktor pada tabel berdasarkan pada distribusi normal.

Sumber:

Grant dan Leavenworth. 1999.

Lampiran 3

Berikut adalah tabel faktor untuk menentukan batas kendali bagan $\overline{X}$ & S, σ ditaksir dengan $\overline{S}$

Banyak observasi dalam subgrup n	Faktor bagan $\overline{X}$ menggunakan σ_{RMS}, A_1	Faktor bagan $\overline{X}$ menggunakan $\overline{S}$, A_3	Batas kendali bawah B_3	Batas kendali atas B_4
2	3,76	2,66	0	3,27
3	2,39	1,95	0	2,57
4	1,88	1,63	0	2,27
5	1,60	1,43	0	2,09
6	1,41	1,29	0,03	1,97
7	1,28	1,18	0,12	1,88
8	1,17	1,10	0,19	1,81
9	1,09	1,03	0,24	1,76
10	1,03	0,98	0,28	1,72
11	0,97	0,93	0,32	1,68
12	0,93	0,89	0,35	1,65
13	0,88	0,85	0,38	1,62
14	0,85	0,82	0,41	1,59
15	0,82	0,79	0,43	1,57
16	0,79	0,76	0,45	1,55
17	0,76	0,74	0,47	1,53
18	0,74	0,72	0,48	1,52
19	0,72	0,70	0,50	1,50
20	0,70	0,68	0,51	1,49
21	0,68	0,66	0,52	1,48
22	0,66	0,65	0,53	1,47
23	0,65	0,63	0,54	1,46
24	0,63	0,62	0,55	1,45

25	0,62	0,61	0,56	1,44
30	0,56	0,55	0,60	1,40
35	0,52	0,51	0,63	1,37
40	0,48	0,48	0,66	1,34
45	0,45	0,45	0,68	1,32
50	0,43	0,43	0,70	1,30
55	0,41	0,41	0,71	1,29
60	0,39	0,39	0,72	1,28
65	0,38	0,38	0,73	1,27
70	0,36	0,36	0,74	1,26
75	0,35	0,35	0,75	1,25
80	0,34	0,34	0,76	1,24
85	0,33	0,33	0,77	1,23
90	0,32	0,32	0,77	1,23
95	0,31	0,31	0,78	1,22
100	0,30	0,30	0,79	1,21

Sumber:

Grant dan Leavenworth. 1999.

Lampiran 4

Berikut tabel faktor untuk menentukan batas kendali bagan $\overline{X}$ & R dan $\overline{X}$ & S jika diketahui σ

observasi dalam subgrup n	Faktor untuk bagan $\overline{X}$ A	Faktor untuk bagan R		Faktor untuk bagan σ_{RMS}		Faktor untuk bagan S	
		LCL D_1	UCL D_2	LCL B_1	UCL B_2	LCL B_5	UCL B_6
2	2,12	0	3,69	0	1,84	0	2,61
3	1,73	0	4,36	0	1,86	0	2,28
4	1,50	0	4,70	0	1,81	0	2,09
5	1,34	0	4,92	0	1,76	0	1,96
6	1,22	0	5,08	0,03	1,71	0,03	1,87
7	1,13	0,20	5,20	0,10	1,67	0,11	1,81
8	1,06	0,39	5,31	0,17	1,64	0,18	1,75
9	1,00	0,55	5,39	0,22	1,61	0,23	1,71
10	0,95	0,69	5,47	0,26	1,58	0,28	1,67
11	0,90	0,81	5,53	0,30	1,56	0,31	1,64
12	0,87	0,92	5,59	0,33	1,54	0,35	1,61
13	0,83	1,03	5,65	0,36	1,52	0,37	1,59
14	0,80	1,12	5,69	0,38	1,51	0,40	1,56
15	0,77	1,21	5,74	0,41	1,49	0,42	1,54
16	0,75	1,28	5,78	0,43	1,48	0,44	1,53
17	0,73	1,36	5,82	0,44	1,47	0,46	1,51
18	0,71	1,43	5,85	0,46	1,45	0,48	1,50
19	0,69	1,49	5,89	0,48	1,44	0,49	1,48
20	0,67	1,55	5,92	0,49	1,43	0,50	1,47
21	0,65	0	0	0,50	1,42	0,52	1,46
22	0,64	0	0	0,52	1,41	0,53	1,45
23	0,63	0	0	0,53	1,41	0,54	1,44
24	0,61	0	0	0,54	1,40	0,55	1,43

25	0,60	0	0	0,55	1,39	0,56	1,42
30	0,55	0	0	0,59	1,36	0,60	1,38
35	0,51	0	0	0,62	1,33	0,63	1,36
40	0,47	0	0	0,65	1,31	0,66	1,33
45	0,45	0	0	0,67	1,30	0,68	1,31
50	0,42	0	0	0,68	1,28	0,69	1,30
55	0,40	0	0	0,70	1,27	0,71	1,28
60	0,39	0	0	0,71	1,26	0,72	1,27
65	0,37	0	0	0,72	1,25	0,73	1,26
70	0,36	0	0	0,74	1,24	0,74	1,25
75	0,35	0	0	0,75	1,23	0,75	1,24
80	0,34	0	0	0,75	1,23	0,76	1,24
85	0,33	0	0	0,76	1,22	0,77	1,23
90	0,32	0	0	0,77	1,22	0,77	1,22
95	0,31	0	0	0,77	1,21	0,78	1,22
100	0,30	0	0	0,78	1,20	0,78	1,21

Sumber:

Grant dan Leavenworth. 1999.

Lampiran 5

Berikut adalah tabel data yang digunakan untuk contoh aplikasi pada bab 4.

NO	1	2	3	4	5
1	0,751	0,747	0,752	0,750	0,751
2	0,750	0,748	0,749	0,750	0,752
3	0,749	0,749	0,752	0,750	0,748
4	0,748	0,749	0,749	0,751	0,748
5	0,753	0,749	0,752	0,751	0,751
6	0,750	0,748	0,749	0,750	0,752
7	0,754	0,751	0,752	0,750	0,750
8	0,748	0,753	0,749	0,748	0,748
9	0,751	0,750	0,751	0,752	0,751
10	0,751	0,753	0,751	0,752	0,751
11	0,750	0,748	0,749	0,750	0,752
12	0,750	0,749	0,749	0,748	0,751
13	0,748	0,749	0,751	0,747	0,750
14	0,749	0,750	0,750	0,751	0,751
15	0,752	0,751	0,751	0,752	0,751
16	0,752	0,750	0,750	0,748	0,750
17	0,748	0,753	0,749	0,748	0,748
18	0,749	0,749	0,750	0,751	0,749
19	0,752	0,750	0,753	0,750	0,754
20	0,750	0,748	0,749	0,750	0,752
21	0,750	0,750	0,750	0,750	0,748
22	0,750	0,752	0,751	0,753	0,750
23	0,750	0,751	0,749	0,748	0,748
24	0,748	0,753	0,749	0,748	0,748
25	0,749	0,749	0,749	0,749	0,750