UNIVERSITAS INDONESIA

MENCARI TAKSIRAN *MEAN* POPULASI
PADA *REMAINDER SYSTEMATIC SAMPLING*

SKRIPSI

TRIAN RISMANTO
0305010653

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

MENCARI TAKSIRAN *MEAN* POPULASI
PADA *REMAINDER SYSTEMATIC SAMPLING*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

TRIAN RISMANTO

0305010653

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Trian Rismanto
NPM	: 0305010653
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 8 Juni 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Trian Rismanto
NPM	: 0305010653
Program Studi	: Sarjana Matematika
Judul Skripsi	: Mencari Taksiran *Mean* Populasi pada *Remainder Systematic Sampling*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Rianti Setiadi, M.Si	( )
Pembimbing	: Dra. Rustina	( )
Penguji	: Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si	( )
Penguji	: Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Penguji	: Sarini Abdullah, M.Stats	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 8 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur Alhamdulillahi Rabbil'alamin senantiasa dipanjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dan meraih gelar Sarjana Sains di Departemen Matematika FMIPA UI. Salawat serta salam tetap tercurah kepada junjungan besar Rasulullah Muhammad SAW, beserta para keluarga dan sahabatnya serta para pengikutnya yang Insyaallah senantiasa istiqamah hingga akhir zaman.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunan tugas akhir ini telah melibatkan banyak pihak, oleh karena itu dengan penuh kerendahan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membantu penulis, baik berupa materil, moril, dan doa. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si, dan Ibu Dra. Rustina selaku pembimbing skripsi yang telah memberikan banyak waktu dan perhatiannya kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terhadap keduanya penulis mengucapkan terima kasih karena telah menjadi orangtua bagi penulis selama berada di kampus dan atas segala ilmu, bimbingan, nasihat, saran, serta motivasi selama penyusunan tugas akhir ini.
2. Para dosen Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan ilmu dan motivasi yang berguna bagi penulis, terutama kepada Ibu Dra. Saskya Mary, M.Si, Dr. Dian Lestari, Dra. Siti Nurrohmah, M.Si, Rahmi Rusin, S.Si, MSc.Tech, Mila Novita, S.Si, M.Si, Sarini Abdullah, M.Stats, dan Fevi Novkaniza, M.Si.
3. Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA UI, terutama Mbak Rusmi, Mbak Santi, Pak Saliman, dan Pak Turino yang telah membantu penulis selama proses registrasi seminar.
4. Keluarga tercinta, Bapak Sumarno dan Ibu Suprapti selaku orangtua penulis, kakak kandung penulis yaitu Selpi Pratiwi dan Dwi Martiningsih, kakak ipar

penulis yaitu Jaka Maulana dan Erik Joakim Fogstrand, serta keponakan penulis yaitu Hamizan Dzikra Rabbani, Hilya Kamila, dan Ihsan Aidan Fogstrand yang telah memberikan semangat kepada penulis untuk berjuang dalam tugas akhir ini.

5. Tante Maryanti dan Om Bandi yang telah berbaik hati mengijinkan penulis untuk bertamu dan memanfaatkan fasilitas internet dalam proses penyelesaian tugas akhir ini.
6. Sepupu-sepupu penulis terutama Andri, Awan, Puput, Alam, dan Ruli yang telah banyak memberikan motivasi, serta Mba Ijah yang telah membantu keperluan bagi penulis.
7. Mba Ias yang telah menjadi tutor dan motivator bagi penulis.
8. Kak Spina 2004, Mba Dewi 2004, May 2005, dan Mba Dina 2004 yang telah memberikan motivasi serta membantu dalam proses penyusunan tugas akhir ini.
9. Teman-teman 2005, terutama yaitu Aris, Uun, Rifkos, Hamdan, Shaly, Desti, Nurma, Amri, Triharjuni, serta teman-teman seperjuangan dalam menyusun tugas akhir yaitu Asep, Ranti, Trisya, Rara, dan Mery.
10. Seluruh teman-teman angkatan 2006, 2007, 2008, 2009, dan 2010 terima kasih atas motivasi dan dukungannya.
11. Seluruh staf pengajar, lokasi Bintaro dan BSD, serta penjadwalan Nurul Fikri Aksel terutama Pak Marwan, Pak Imam, Pak Moko, Mas Indra, Mas Jun, Mas Robbi, Mba Farah, Mba Dita, Mba Elly, dan Mba Anita yang telah memberikan motivasi kepada penulis.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap Allah SWT senantiasa membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Trian Rismanto
NPM	:	0305010653
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Mencari Taksiran *Mean* Populasi pada *Remainder Systematic Sampling*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 8 Juni 2011

Yang Menyatakan

(Trian Rismanto)

ABSTRAK

Nama : Trian Rismanto
Program Studi : Matematika
Judul : Mencari Taksiran *Mean* Populasi pada *Remainder Systematic Sampling*

Remainder systematic sampling adalah suatu metode pengambilan sampel yang merupakan perluasan dari metode *systematic sampling* untuk kasus dimana ukuran populasi bukan merupakan kelipatan dari ukuran sampel. Taksiran *mean* yang didapat dengan *remainder systematic sampling* adalah taksiran yang takbias. Contoh penerapan akan diberikan untuk menunjukkan hal tersebut.

Kata Kunci : taksiran *mean*; *systematic sampling*; metode *remainder systematic sampling*
xii+40 halaman ; 6 tabel
Daftar Pustaka : 5 (1977-2009)

ABSTRACT

Name : Trian Rismanto
Study Program : Mathematic
Title : Finding the Mean Estimated Population in Remainder Systematic Sampling

Remainder systematic sampling is an extension of the systematic sampling that applied to cases where population size is not a multiple of the sample size. Estimated mean obtained by remainder systematic sampling is unbiased estimator. Examples of the application will be given.

Keywords : Estimated mean; systematic sampling; remainder systematic sampling method
xii+40 pages ; 6 tables
Bibliography : 5 (1977-2009)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu penelitian biasanya menggunakan data sampel yang diambil dari suatu populasi yang akan diteliti dengan tujuan tertentu. Jika sampel yang diambil mewakili populasi maka hasil penelitian dapat dipertanggungjawabkan kebenarannya. Oleh sebab itu, dibutuhkan teknik pengambilan sampel yang tepat, sesuai dengan keadaan populasi. Adapun populasi dibedakan menjadi 3 jenis yaitu populasi acak, terurut, dan periodik. Populasi acak adalah keadaan populasi dimana nilai-nilai unit dalam populasi tersebut tersusun acak. Populasi terurut adalah keadaan populasi dimana nilai-nilai unit dalam populasi tersebut tersusun secara berurutan berdasarkan ukuran satuan tertentu. Sedangkan populasi periodik adalah keadaan populasi dimana nilai-nilai unit dalam populasi tersebut tersusun secara periodik.

Teknik pengambilan sampel dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu *nonprobability sampling* dan *probability sampling*. *Nonprobability sampling* adalah suatu teknik pengambilan sampel dimana peluang terpilihnya setiap anggota sampel tidak dapat ditentukan, sedangkan *probability sampling* adalah suatu teknik pengambilan sampel dimana peluang terpilihnya setiap anggota sampel dapat ditentukan. Salah satu metode pada *probability sampling* yang sering digunakan adalah *systematic sampling*.

Systematic sampling adalah suatu cara pengambilan sampel yang diperoleh dengan memilih secara acak (*random*) satu elemen dari *k* elemen pertama pada *frame* dan setiap elemen ke-*k* setelahnya. Sampel yang diperoleh disebut 1 dalam *k* *systematic sample*. Biasanya pada *systematic sampling*, untuk mencari taksiran *mean* populasi digunakan $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ dimana y_i adalah elemen dari *systematic sample* ukuran *n*. Jika *N* adalah ukuran populasi dan $N = nk$ maka $\overline{y}$ adalah taksiran takbias untuk *mean* populasi. Akan tetapi, jika $N \neq nk$ atau dengan perkataan lain ukuran populasi bukan merupakan kelipatan dari ukuran sampel maka taksiran *mean* di atas, merupakan taksiran yang bias untuk *mean* populasi.

Oleh sebab itu, untuk mendapatkan taksiran takbias untuk *mean* populasi dengan prinsip *systematic sampling*, dalam tugas akhir ini akan diperkenalkan metode *remainder systematic sampling*. Metode *remainder systematic sampling* merupakan perluasan dari metode *systematic sampling* untuk kasus dimana ukuran populasi bukan merupakan kelipatan dari ukuran sampel. Taksiran *mean* yang didapat dengan *remainder systematic sampling* adalah taksiran yang takbias. Sedangkan variansi dan taksiran variansi dari taksiran *mean* yang diperoleh dengan metode *remainder systematic sampling* dapat dicari.

1.2 Perumusan Masalah

- Bagaimana cara pengambilan sampel dengan metode *remainder systematic sampling*.
- Bagaimana mencari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling*.
- Bagaimana mencari formula variansi dan taksiran variansi dari taksiran *mean* yang diperoleh.

1.3 Tujuan Penulisan

- Menjelaskan cara pengambilan sampel dengan metode *remainder systematic sampling*.
- Mencari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling*.
- Mencari formula variansi dan taksiran variansi dari taksiran *mean* yang diperoleh.

1.4 Metode yang digunakan

Metode yang digunakan pada tugas akhir ini adalah studi literatur.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada tugas akhir ini dibagi menjadi 5 bab, yaitu

Bab 1 : Pendahuluan
Membahas latar belakang penulisan, perumusan masalah, tujuan penulisan, metode yang digunakan, dan sistematika penulisan.

Bab 2 : Landasan Teori
Membahas teori yang digunakan pada pembahasan *remainder systematic sampling*

Bab 3 : *Remainder Systematic Sampling*
Mencari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling*.

Bab 4 : Contoh penerapan pada *remainder systematic sampling*.

Bab 5 : Kesimpulan dan saran.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang teori-teori yang menjadi dasar pembahasan dalam tugas akhir ini. Adapun teori-teori tersebut yaitu penaksiran *mean* pada *simple random sampling,* penaksiran *mean* pada *systematic sampling,* dan penaksiran *mean* dengan taksiran Horvitz-Thompson.

2.1 Penaksiran *Mean* pada *Simple Random Sampling*

Simple random sampling (SRS) adalah suatu cara pengambilan sampel berukuran *n* yang diambil dari suatu populasi yang berukuran *N*, dengan cara sedemikian sehingga setiap sampel yang mungkin, mempunyai probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi sampel.

Pada metode *simple random sampling (SRS)*, pengambilan sampel dapat dilakukan dengan dua cara yaitu pengambilan sampel dengan pengembalian dan tanpa pengembalian. Karena unit yang sama tidak menambahkan informasi apapun sehingga yang sering digunakan adalah metode s*imple random sampling (SRS)* tanpa pengembalian.

Teorema 2.1

Pada *simple random sampling*, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah sama yaitu $\frac{n}{N}$, dimana *N* adalah ukuran populasi sedangkan *n* adalah ukuran sampel yang diambil.

Bukti:

Misalkan diketahui nilai-nilai dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$

Didefinisikan:

$p_j = P_r$(Kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-*j*) ; $j = 1, 2, ..., n$

Misalkan

$A_j =$ Kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-j ; $j = 1, 2, \ldots, n$

$A_j' =$ Kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-j ; $j = 1, 2, \ldots, n$

Untuk j = 1, maka

$$p_1 = P_r(A_1)$$

$$p_1 = \frac{1}{N}$$

Untuk j = 2, maka

$p_2 = P_r$(Kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan
Kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-2)

$$p_2 = P_r(A_1' \cap A_2)$$

$$p_2 = P_r(A_1').P_r\left(A_2 \mid A_1'\right)$$

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right).\left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \left(\frac{N-1}{N}\right).\left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{N}$$

Untuk j = 3, maka

$p_3 = P_r$(Kejadian u_1 tidak muncul hingga pada pengambilan ke-2 dan
Kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-3)

$$p_3 = P_r(A_1' \cap A_2' \cap A_3)$$

$$p_3 = P_r(A_1' \cap A_2').P_r\left(A_3 \mid A_1' \cap A_2'\right)$$

$$p_3 = P_r(A_1').P_r\left(A_2' \mid A_1'\right).P_r\left(A_3 \mid A_1' \cap A_2'\right)$$

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{N}\right).\left(1 - \frac{1}{N-1}\right).\left(\frac{1}{N-2}\right)$$

$$p_3 = \left(\frac{N-1}{N}\right).\left(\frac{N-2}{N-1}\right).\left(\frac{1}{N-2}\right)$$

$$p_3 = \frac{1}{N}$$

Dengan cara yang sama hingga untuk $j = n$, maka akan diperoleh

$p_j = \frac{1}{N}$; $j = 1, 2, ..., n$.

Hal tersebut dapat juga dilakukan untuk setiap u_i ; $i = 1, 2, ..., N$.

Selanjutnya, misalkan

$\pi_1 = P_r(u_1$ terpilih dalam sampel)

$A_j =$ Kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-j ; $j = 1, 2, ..., n$

maka

$\pi_1 = P_r(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$

Karena kejadian A_j merupakan kejadian yang saling lepas, sehingga

$$\pi_1 = P_r(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$$
$$\pi_1 = P_r(A_1) + P_r(A_2) + ... + P_r(A_n)$$
$$\pi_1 = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N}$$
$$\pi_1 = \frac{n}{N}$$

Hal yang sama juga berlaku untuk nilai-nilai $u_1, u_2, ..., u_N$.

Dengan demikian terbukti bahwa pada s*imple random sampling*, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah sama yaitu $\frac{n}{N}$.

2.1.1 Taksiran *Mean* Populasi

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai dari suatu populasi yang diamati dan misalkan μ adalah *mean* populasi seperti telah diketahui

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

Misalkan pula $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$.

Pandang suatu statistik yaitu :

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Maka akan dibuktikan bahwa:

1) $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi.

2) $Var\left(\bar{y}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dimana $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu\right)^2}{N}$

3) $\widehat{Var}\left(\bar{y}\right) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dimana $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang takbias untuk $Var\left(\bar{y}\right)$.

Pembuktian:

1) $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi yaitu μ.

Bukti:

Misalkan $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$. Definisikan variabel indikator z_i, dimana

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ jika unit ke-}i \text{ terpilih dalam sampel} \\ 0, \text{ jika unit ke-}i \text{ tidak terpilih dalam sampel} \end{cases} \quad ; i = 1,2,...,N$$

maka $y_i = u_i z_i$ dimana y_i adalah nilai dari u_i untuk suatu i yang terpilih dalam sampel.

$$E\left(z_i\right) = 0.\Pr(z_i = 0) + 1.\Pr(z_i = 1)$$
$$E\left(z_i\right) = 1.\Pr(\text{unit ke-}i \text{ terpilih dalam sampel})$$

Karena pada *simple random sampling* tanpa pengembalian telah terbukti bahwa probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{n}{N}$, maka diperoleh:

$E(z_i) = 1.\Pr(\text{unit ke-}i \text{ terpilih dalam sampel})$

$E(z_i) = 1.\frac{n}{N}$

$E(z_i) = \frac{n}{N}$

Maka

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} E(u_i z_i)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.E(z_i)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.\frac{n}{N}$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}.\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$E(\bar{y}) = \mu$$

Jadi, terbukti bahwa $\bar{y}$ adalah taksiran takbias untuk μ.

2) $Var(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dimana $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2}{N}$

Bukti:

Sebelum mencari variansi $\bar{y}$ terlebih dahulu akan dicari variansi dan kovariansi dari variabel indikator z_i.

$$E\left(z_i^{\,2}\right) = 0^2.\Pr(z_i = 0) + 1^2.\Pr(z_i = 1)$$
$$E\left(z_i^{\,2}\right) = 0.\Pr(z_i = 0) + 1.\Pr(z_i = 1)$$
$$E\left(z_i^{\,2}\right) = 1.\Pr(z_i = 1)$$
$$E\left(z_i^{\,2}\right) = 1.\frac{n}{N}$$
$$E\left(z_i^{\,2}\right) = \frac{n}{N} \tag{2.1.1}$$
$$E\left(z_i z_j\right) = 0.0\Pr(z_i = 0, z_j = 0) + 1.0\Pr(z_i = 1, z_j = 0)$$
$$+\,0.1\Pr(z_i = 0, z_j = 1) + 1.1\Pr(z_i = 1, z_j = 1)$$
$$E\left(z_i z_j\right) = 1.\Pr(z_i = 1, z_j = 1)$$
$$E\left(z_i z_j\right) = \Pr(z_i = 1, z_j = 1)$$
$$E\left(z_i z_j\right) = \Pr(u_i \text{ dan } u_j \text{ terpilih dalam sampel})$$
$$E\left(z_i z_j\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \tag{2.1.2}$$

Maka diperoleh

$$Var\left(z_i\right) = E\left(z_i^{\,2}\right) - \left(E\left(z_i\right)\right)^2$$
$$Var\left(z_i\right) = \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2$$
$$Var\left(z_i\right) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \tag{2.1.3}$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = E\left(z_i z_j\right) - E\left(z_i\right).E\left(z_j\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n}{N}.\frac{n}{N}$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = \frac{n}{N}\left(\frac{N(n-1) - n(N-1)}{N(N-1)}\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = \frac{n}{N}\left(\frac{-(N-n)}{N(N-1)}\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = -\frac{n}{N}.\frac{1}{N-1}\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(z_i, z_j\right) = -\frac{n}{N}.\frac{1}{N-1}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \qquad (2.1.4)$$

Dengan demikian,

$$Var\left(\overline{y}\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$Var\left(\overline{y}\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$Var\left(\overline{y}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$Var\left(\overline{y}\right) = \frac{1}{n^2}\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)^2 - \left[E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)\right]^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right) = \frac{1}{n^2}\left[E\left(\sum_{i=1}^{N}\left(u_i z_i\right)^2 + \sum_{i \neq j}^{N} u_i u_j z_i z_j\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} E\left(u_i z_i\right)\right]^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\left[\sum_{i=1}^{N}E\left(u_iz_i\right)^2+\sum_{i\neq j}^{N}E\left(u_iu_jz_iz_j\right)\right]-\left[\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(u_iz_i\right)\right]^2+\sum_{i\neq j}^{N}E\left(u_iz_i\right)E\left(u_jz_j\right)\right]\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}E\left(u_iz_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(u_iz_i\right)\right]^2+\sum_{i\neq j}^{N}E\left(u_iu_jz_iz_j\right)-\sum_{i\neq j}^{N}E\left(u_iz_i\right)E\left(u_jz_j\right)\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(u_iz_i\right)^2-\left[E\left(u_iz_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\left[E\left(u_iu_jz_iz_j\right)-E\left(u_iz_i\right)E\left(u_jz_j\right)\right]\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}\left[u_i^2E\left(z_i\right)^2-u_i^2\left[E\left(z_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\left[u_iu_jE\left(z_iz_j\right)-u_iu_jE\left(z_i\right)E\left(z_j\right)\right]\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}u_i^2\left[E\left(z_i\right)^2-\left[E\left(z_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}u_iu_j\left[E\left(z_iz_j\right)-E\left(z_i\right)E\left(z_j\right)\right]\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}u_i^2\,\mathrm{var}\left(z_i\right)+\sum_{i\neq j}^{N}u_iu_j\,\mathrm{cov}\left(z_i,z_j\right)\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}u_i^2\,\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)+\sum_{i\neq j}^{N}u_iu_j\left(-\frac{n}{N}.\frac{1}{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\right)\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\sum_{i\neq j}^{N}u_iu_j\left(\frac{1}{N-1}\right)\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{Nn}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\sum_{i\neq j}^{N}\frac{u_iu_j}{N-1}\right]$$

Karena bentuk $\sum_{i\neq j}^{N}u_iu_j=\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N}(u_i)^2$

Maka

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{Nn}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N}(u_i)^2}{N-1}\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{Nn}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\frac{N.\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2}{N-1}\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{Nn}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\frac{N.\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2}{N-1}\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{Nn}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[N.\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-N.\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i\right)^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-N.\mu^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-2N\mu^2+N\mu^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-2\mu N\mu+N\mu^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-2\mu.N.\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\mu^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i\right)^2-2\mu\sum_{i=1}^{N}u_i+\sum_{i=1}^{N}\mu^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^2-2\mu u_i+\mu^2\right)\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i-\mu\right)^2\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i-\mu\right)^2}{N}\right]$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\sigma^2$$

$$Var\left(\overline{y}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad (2.1.5)$$

Dengan demikian diperoleh $Var\left(\overline{y}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dimana $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i-\mu\right)^2}{N}$.

3) $\widehat{Var}\left(\overline{y}\right)=\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dimana $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang takbias untuk $Var\left(\overline{y}\right)$.

Bukti:

Sebelum menunjukkan bahwa $E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}\right)\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=Var\left(\overline{y}\right)$ akan dicari terlebih dahulu $E\left(s^2\right)$ yaitu:

$$E\left(s^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left((y_i-\mu)-\left(\overline{y}-\mu\right)\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2-n\left(\overline{y}-\mu\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(y_i-\mu\right)^2-n.E\left(\overline{y}-\mu\right)^2\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}Var\left(y\right)-n.Var\left(\overline{y}\right)\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[n.Var\left(y\right)-n.Var\left(\overline{y}\right)\right]\text{ karena } Var\left(\overline{y}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right),\text{ maka}$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[n.\sigma^2-n.\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}.\left[n.\sigma^2-\sigma^2\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}.\left[\sigma^2\left(\frac{nN-n-N+n}{N-1}\right)\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}.\left[\sigma^2\left(\frac{(n-1)N}{N-1}\right)\right]$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{n-1}.(n-1).\sigma^2\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\sigma^2\left(\frac{N}{N-1}\right)\qquad(2.1.6)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}\right)\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=Var\left(\overline{y}\right)$ yaitu,

$$E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}\right)\right)=E\left(\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right)$$

$$E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}\right)\right)=\frac{1}{n}.\left(\frac{N-n}{N}\right).E\left(s^2\right)$$

$$E\left(\widehat{Var}\left(\bar{y}\right)\right)=\frac{1}{n}.\left(\frac{N-n}{N}\right).\sigma^2\left(\frac{N}{N-1}\right)$$
$$E\left(\widehat{Var}\left(\bar{y}\right)\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$
$$E\left(\widehat{Var}\left(\bar{y}\right)\right)=Var\left(\bar{y}\right)$$

Sehingga terbukti bahwa taksiran variansi tersebut merupakan taksiran yang takbias.

2.2 Penaksiran *Mean* pada *Systematic Sampling*

Systematic sampling adalah suatu cara pengambilan sampel yang diperoleh dengan memilih secara acak (*random*) satu elemen dari *k* elemen pertama pada *frame* dan setiap elemen ke-*k* setelahnya. Sampel yang diperoleh disebut 1 dalam *k* *systematic sample*. Metode *systematic sampling* sangat sederhana dan mudah dalam penggunaannya.

2.2.1 Taksiran *Mean* Populasi

Misalkan $\{u_1,u_2,...,u_N\}$ adalah nilai-nilai dari suatu populasi. Definisikan mean populasi yaitu:

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

Misalkan pula $S=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ adalah s*ystematic sample* berukuran *n* yang diperoleh dengan memilih secara acak satu elemen dari *k* elemen pertama pada *frame* dan setiap elemen ke-*k* setelahnya dari suatu populasi $\{u_1,u_2,...,u_N\}$ yang berukuran *N*, dimana *N=nk*.

Pandang taksiran mean populasi yaitu :

$$\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Akan dibuktikan bahwa:

1) $\overline{y}_{sy}$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi (μ),

2) $Var(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$ dimana $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i-\mu\right)^2}{N}$ merupakan variansi *mean* populasi dan ρ adalah korelasi antara pasangan-pasangan elemen dalam *systematic sample* yang sama.

3) Karena tidak diperoleh taksiran yang takbias untuk $Var(\overline{y}_{sy})$, maka biasa digunakan $\widehat{Var}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}$ sebagai taksiran untuk $Var(\overline{y}_{sy})$.

Akan dibuktikan bahwa

$\widehat{Var}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang bias untuk $Var(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$

Pembuktian:

1) $\overline{y}_{sy}$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi (μ),

Bukti:

Misalkan $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *systematic sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ dengan ukuran $n = \frac{N}{k}$.

Definisikan variabel indikator z_i , dimana

$$z_i = \begin{cases} 1 \text{, jika unit ke-}i\text{ terpilih dalam sampel} \\ 0 \text{, jika unit ke-}i\text{ tidak terpilih dalam sampel} \end{cases} \quad ; i = 1,2,...,N$$

maka $y_i = u_i z_i$ dimana y_i adalah nilai dari u_i untuk suatu *i* yang terpilih dalam sampel.

$$E(z_i) = 0.\Pr(z_i = 0) + 1.\Pr(z_i = 1)$$

$$E(z_i) = 1.\Pr(\text{unit ke-}i\text{ terpilih dalam sampel})$$

Karena pada *systematic sampling* probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{1}{k}$, maka diperoleh:

$$E(z_i) = 1.\Pr(\text{unit ke-i terpilih dalam sampel})$$

$$E(z_i) = 1.\frac{1}{k}$$

$$E(z_i) = \frac{1}{k}$$

Maka

$$E(\overline{y}_{sy}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$E(\overline{y}_{sy}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$E(\overline{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} E(u_i z_i)$$

$$E(\overline{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.E(z_i)$$

$$E(\overline{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.\frac{1}{k}$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right)=\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right)=\mu$$

Jadi, terbukti bahwa $\overline{y}_{sy}$ adalah taksiran takbias untuk μ.

2) Akan dibuktikan $Var(\overline{y}_{sy})=\frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$ dimana $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i-\mu\right)^2}{N}$ merupakan variansi dari *mean* populasi dan ρ adalah korelasi antara pasangan-pasangan elemen dalam *systematic sample* yang sama.

Bukti:

Pandang suatu *systematic sample* ukuran *n* sebagai suatu *cluster* ukuran *n* yang dipilih dari *k cluster* yang mungkin dimana ukuran populasi $N=nk$.

Tabel 2.2 Seluruh kemungkinan *systematic sample* yang terbentuk

Cluster	1	2	3	…	*n*	*Mean*
1	y_{11}	y_{12}	y_{12}	…	y_{12}	$\overline{y}_1$
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	…	y_{2n}	$\overline{y}_2$
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
k	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}	…	y_{kn}	$\overline{y}_k$

Misalkan y_{pi} menyatakan anggota ke-*i* dari *systematic sample* ke-*p* dimana $p = 1, 2, 3 ... k$; $i = 1, 2, ..., n$ dan y_{pj} menyatakan anggota ke-*j* dari *systematic sample* ke-*p* dimana $p = 1, 2, 3 ... k$; $j = 1, 2, ..., n$ dengan $i < j$. Sedangkan ρ adalah koefisien korelasi diantara elemen-elemen dalam *cluster* yang sama.

Definisikan yaitu:

$$\rho = \frac{E\left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right)}{\sqrt{E\left(y_{pi} - \mu\right)^2} . \sqrt{E\left(y_{pj} - \mu\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{E\left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right)}{\sigma . \sigma}$$

$$\rho = \frac{E\left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right)}{\sigma^2} \qquad (2.2.1)$$

Terlebih dahulu akan dicari $E\left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right)$ yaitu,

$$E\left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{i<j}^{n} \left(y_{pi} - \mu\right)\left(y_{pj} - \mu\right) . \mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right)$$

dengan $\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right)$ menyatakan probabilitas y_i dan y_j ada dalam *systematic sample* ke-*p*

Nilai dari $\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right)$ dapat dicari sebagai berikut:

karena banyaknya kombinasi $\left(y_i, y_j\right)$ dari sampel berukuran *n* adalah

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

dan karena banyaknya *systematic sample* adalah *k*, maka

$$\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right) = \frac{1}{k} . \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right) = \frac{1}{k}.\frac{2}{n(n-1)}$$

$$\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right) = \frac{2}{kn(n-1)}$$

maka diperoleh

$$E\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right).\mathrm{P}\left(y_{pi}, y_{pj}\right)$$

$$E\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right).\frac{2}{kn(n-1)}$$

$$E\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right) = \frac{2}{kn(n-1)}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right) \qquad (2.2.2)$$

Substitusikan (2.2.2) ke (2.2.1), maka diperoleh:

$$\rho = \frac{E\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)}{\sigma^2}$$

$$\rho = \frac{\frac{2}{kn(n-1)}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)}{\sigma^2}$$

$$\rho = \frac{2}{kn(n-1)\sigma^2}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)$$

Maka diperoleh

$$kn(n-1)\sigma^2\rho = 2\sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)$$

Kemudian pandang:

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=n^2k\left[\frac{\sum_{p=1}^{k}\left(\overline{y}_p-\mu\right)^2}{k}\right]$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=n^2\left[\sum_{p=1}^{k}\left(\overline{y}_p-\mu\right)^2\right]$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}n^2\left(\overline{y}_p-\mu\right)^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[n\left(\overline{y}_p-\mu\right)\right]^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left(n\overline{y}_p-n\mu\right)^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[n.\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{pi}}{n}-n\mu\right]^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}y_{pi}-n\mu\right)^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[\left(y_{p1}+y_{p2}+...+y_{pn}\right)-\left(\mu+\mu+...+\mu\right)\right]^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[\left(y_{p1}-\mu\right)+\left(y_{p2}-\mu\right)+...+\left(y_{pn}-\mu\right)\right]^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\right]^2$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)^2+2\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)\right]$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)^2+2\sum_{p=1}^{k}\sum_{i<j}^{n}\left(y_{pi}-\mu\right)\left(y_{pj}-\mu\right)$$

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right)=N\sigma^2+kn(n-1)\sigma^2\rho$$

Maka

$$n^2kVar\left(\overline{y}_{sy}\right) = N\sigma^2 + kn(n-1)\sigma^2\rho$$

$$Var\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{N\sigma^2 + kn(n-1)\sigma^2\rho}{n^2k}$$

$$Var\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{N\sigma^2 + N(n-1)\sigma^2\rho}{n.nk}$$

$$Var\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{N\sigma^2 + N(n-1)\sigma^2\rho}{n.N}$$

$$Var\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{\sigma^2 + (n-1)\sigma^2\rho}{n}$$

$$Var\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 + (n-1)\rho\right]$$

3) Akan dibuktikan $\widehat{Var}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ merupakan taksiran yang bias dari

$$Var(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$$

Bukti:

$$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = E\left(\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right)$$

$$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = E\left(\frac{s^2}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

$$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)E\left(s^2\right)$$

berdasarkan pada persamaan $(2.1.6)$, maka $E\left(s^2\right)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

$$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Jika $\rho = 0$, maka $Var(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}(1+[n-1].0) = \frac{\sigma^2}{n}$, tetapi

$E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \neq \frac{\sigma^2}{n}$. Sehingga untuk $\rho = 0$, $E\left(\widehat{Var}(\overline{y}_{sy})\right) \neq Var(\overline{y}_{sy})$.

Jadi, terbukti bahwa $\widehat{Var}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ merupakan taksiran yang bias untuk $Var(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}(1+[n-1]\rho)$. Adapun teknik pengambilan sampel dengan *systematic sampling* lebih cocok digunakan untuk tipe populasi terurut.

Jika $N \neq nk$ maka $\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ belum tentu merupakan taksiran yang takbias untuk μ. Hal ini akan ditunjukkan dengan contoh sebagai berikut:

Misalkan diketahui populasi:

7, 3, 2, 4, 5, 1, 6

dimana

$N = 7$

$\mu = 4$

Misalkan $N \neq nk$ dan misalkan $k = 3$ maka $n = \frac{N}{k} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, sehingga ukuran sampel dapat bernilai 2 dan 3.

Adapun sampel yang mungkin sebagai berikut:

Tabel 2.3 Kemungkinan sampel yang terpilih

1	2	3
7 4 6	3 5	1 2
$\overline{y}_1 = \frac{17}{3}$	$\overline{y}_2 = 4$	$\overline{y}_3 = \frac{3}{2}$

Probabilitas terpilihnya satu sampel dari seluruh kemungkinan sampel yang terpilih adalah $\frac{1}{3}$.

Maka

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{17}{3} + 4 + \frac{3}{2}\right)$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right) = \frac{1}{3}.\left(\frac{67}{6}\right)$$

$$E\left(\overline{y}_{sy}\right) = 3,7222$$

Jadi, $E\left(\overline{y}_{sy}\right) = 3,7222 \neq 4 = \mu$

2.3 Taksiran *Mean* Horvitz-Thompson

Taksiran Horvitz-Thompson merupakan taksiran yang dapat digunakan untuk menaksir *mean* populasi dimana unit-unit dalam populasi tersebut memiliki probabilitas yang berbeda untuk terpilih sebagai sampel.

Misalkan diketahui nilai-nilai dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ dengan ukuran N, dan sebut nilai-nilai sampel yang terpilih adalah $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ dimana probabilitas terpilihnya unit ke-*i* dari populasi sebagai sampel adalah π_i ; *i = 1,2,...,N*. Taksiran Horvitz-Thompson untuk *mean* populasi didefinisikan sebagai $\overline{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\overline{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi.

Pembuktian:

Akan dibuktikan $\overline{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$ adalah taksiran yang takbias untuk *mean* populasi.

Bukti:

Misalkan $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah nilai-nilai sampel yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$. Definisikan variabel indikator z_i, dimana

$$z_i = \begin{cases} 1\text{, jika unit ke-}i\text{ terpilih dalam sampel} \\ 0\text{, jika unit ke-}i\text{ tidak terpilih dalam sampel} \end{cases} \qquad i = 1,2,...,N$$

maka $y_i = u_i z_i$ dimana y_i adalah nilai dari u_i untuk suatu i yang terpilih dalam sampel.

$$E(z_i) = 0.\Pr(z_i = 0) + 1.\Pr(z_i = 1)$$
$$E(z_i) = 1.\Pr(\text{unit ke-}i\text{ terpilih dalam sampel})$$
$$E(z_i) = 1.\pi_i$$
$$E(z_i) = \pi_i$$

sehingga diperoleh:

$$E(\overline{y}_{HT}) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}\right)$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i z_i}{\pi_i}\right)$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\frac{u_i z_i}{\pi_i}\right)$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}.E(z_i)$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}.\pi_i$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$
$$E(\overline{y}_{HT}) = \mu$$

Karena telah terbukti bahwa $E(\overline{y}_{HT}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i = \mu$, maka $\overline{y}_{HT}$ merupakan taksiran yang takbias untuk μ.

Pada *systematic sampling* dimana $N = nk$ didapat $\pi_i = \frac{1}{k}$ untuk setiap i=1,2,3...N

maka $\overline{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{1/k} = \overline{y}_{sy}$.

BAB 3
REMAINDER SYSTEMATIC SAMPLING

Pada bab ini akan dibahas tentang cara pengambilan sampel pada *remainder systematic sampling*, taksiran takbias untuk *mean* populasi serta mencari formula variansi dan taksiran variansi dari taksiran *mean* yang diperoleh.

3.1 Cara Pengambilan Sampel

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai dari suatu populasi berukuran *N*. Kemudian dari populasi tersebut akan dipilih sampel berukuran n . Pada bab 2.2, telah dijelaskan bahwa pada *systematic sampling*, jika $N \neq nk$ dapat ditunjukkan bahwa $\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ merupakan taksiran yang bias untuk μ . Salah satu metode untuk mengatasi hal tersebut adalah dengan metode *remainder systematic sampling*. Dalam metode ini sampel diambil dengan cara sebagai berikut:

1. Pilih $k = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$, maka secara umum dapat dituliskan $N = nk + r$, dimana $0 \leq r < n$ dan N, n, r, k merupakan bilangan *integer*.
2. Bagi populasi menjadi dua strata, strata pertama mengandung $(n - r)k$ unit pertama dari populasi dan strata kedua mengandung $r(k + 1)$ unit sisanya.
3. Pada strata pertama, buat $(n - r)$ grup yang tiap grupnya terdiri dari k unit. Kemudian pilih secara acak k_1 dimana $1 \leq k_1 \leq k$, selanjutnya pilih elemen ke- k_1 di grup pertama sebagai titik awal dan pilih setiap unit ke- k setelah k_1 pada strata pertama sebagai unit sampel. Berarti, dari strata pertama diambil sampel dengan ukuran $(n - r)$ dengan cara k- *systematic*. Pada strata pertama didapat $N_1 = (n - r)k$, dimana ukuran populasi pada strata pertama

merupakan kelipatan dari ukuran sampel di strata pertama. Sebut s' adalah himpunan semua sampel yang mungkin terbentuk pada strata pertama.

4. Pada strata kedua, buat *r* grup yang tiap grupnya terdiri dari (*k* + 1) unit. Kemudian pilih secara acak k_2 dimana $1 \leq k_2 \leq k+1$, selanjutnya pilih elemen ke-k_2 di grup pertama sebagai titik awal dan pilih setiap unit ke- (*k* + 1) setelah k_2 pada strata kedua sebagai unit sampel. Berarti, dari strata kedua diambil sampel dengan ukuran *r* dengan cara *(k+1)- systematic*. Pada strata kedua didapat $N_2 = r\left(k+1\right)$, dimana ukuran populasi pada strata kedua merupakan kelipatan dari ukuran sampel di strata kedua. Sebut $s"$ adalah himpunan semua sampel yang mungkin terbentuk pada strata kedua.

Dengan demikian dapat diperoleh suatu himpunan *s* yang merupakan gabungan kombinasi elemen-elemen di s' dan $s"$.

Contoh:

Misalkan suatu populasi terdiri dari 20 pengamatan (*N* = 20), sebut saja $\{u_1, u_2, ..., u_{20}\}$, selanjutnya akan diambil sampel berukuran *n* = 6. Maka $k = \left\lfloor \frac{20}{6} \right\rfloor = 3$, sehingga didapat

$$r = N - nk = 20 - 6.3 = 20 - 18 = 2$$

Selanjunya, langkah – langkah pengambilan sampel pada *remainder systematic sampling* adalah sebagai berikut:

1. Bagi populasi menjadi dua strata, strata pertama mengandung (*n* – *r*)*k* = (6 – 2)3 = 12 unit pertama dari populasi yaitu $\{u_1, u_2, ..., u_{12}\}$ dan strata kedua mengandung *r*(*k* + 1) = 2(3 + 1) = 8 unit sisanya yaitu $\{u_{13}, u_{14}, ..., u_{20}\}$.
2. Pada strata pertama, buat menjadi (*n* – *r*) = (6 – 2) = 4 grup dimana masing-masing grup terdiri *k* = 3 unit, yaitu sebagai berikut:

$$u_1, u_2, u_3 \,|\, u_4, u_5, u_6 \,|\, u_7, u_8, u_9 \,|\, u_{10}, u_{11}, u_{12}$$

Kemudian pilih secara acak k_1 dimana $1 \leq k_1 \leq k = 3$, sebagai titik awal. Misalkan k_1 yang diperoleh yaitu $k_1 = 2$, sehingga sampel yang terpilih pada strata pertama adalah u_2, u_5, u_8, u_{11}.

3. Pada strata kedua, buat menjadi r = 2 grup dimana masing-masing grup terdiri *(k+1)* = 4 unit, yaitu sebagai berikut:

$$u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16} \,|\, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}$$

Kemudian pilih secara acak k_2 dimana $1 \leq k_2 \leq k + 1 = 4$, sebagai titik awal. Misalkan k_2 yang diperoleh yaitu $k_2 = 3$, sehingga sampel yang terpilih pada strata kedua adalah u_{15}, u_{19}.

Dari pengambilan sampel pada kedua strata di atas, maka unit-unit yang terpilih dalam sampel adalah $u_2, u_5, u_8, u_{11}, u_{15}, u_{19}$.

3.2 Taksiran *Mean* Populasi

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai dari suatu populasi berukuran *N*. Kemudian misalkan μ adalah *mean* populasi yang didefinisikan:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

Misalkan diambil *remainder systematic sample* berukuran *n*. Sebut nilai-nilai sampel yang terpilih dengan *remainder systematic sampling* sebagai $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

dimana:

N_1 : ukuran populasi pada strata pertama dimana $N_1 = (n - r)k$

N_2 : ukuran populasi pada strata kedua dimana $N_2 = r(k+1)$

μ_1 : mean populasi pada strata pertama

μ_2 : mean populasi pada strata kedua

$\bar{y}_1$: mean sampel yang terpilih (secara *systematic sampling*) pada strata pertama

$\overline{y}_2$: mean sampel yang terpilih (secara *systematic sampling*) pada strata kedua

Karena tepilihnya tiap unit sampel berbeda (tergantung dari strata mana unit sampel tersebut terpilih) maka taksiran *mean* populasi akan dicari dengan taksiran Horvitz-Thomson sebagai berikut:

Sebut

π_i = Probabilitas u_i terpilih dalam sampel

Dalam *remainder systematic sampling* didapat

$$\pi_i = \frac{1}{k} \quad \text{; Jika unit ke-}i\text{ berasal pada strata pertama}$$

$$= \frac{1}{k+1} \quad \text{; Jika unit ke-}i\text{ berasal pada strata kedua}$$

Maka dengan taksiran Horvitz-Thompson didapat:

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$$

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{(n-r)}\frac{y_i}{\pi_i} + \sum_{i=(n-r)+1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}\right)$$

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{(n-r)}\frac{y_i}{\left(1/k\right)} + \sum_{i=(n-r)+1}^{n}\frac{y_i}{\left(1/(k+1)\right)}\right)$$

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\left(k\sum_{i=1}^{(n-r)} y_i + (k+1)\sum_{i=(n-r)+1}^{n} y_i\right)$$

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\left((n-r)k.\frac{1}{(n-r)}\sum_{i=1}^{(n-r)} y_i + r(k+1).\frac{1}{r}\sum_{i=(n-r)+1}^{n} y_i\right)$$

$$\overline{y}_{rsys} = \frac{1}{N}\left(N_1\overline{y}_1 + N_2\overline{y}_2\right)$$

Pada bab 2.3 telah dibuktikan bahwa $\overline{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$ merupakan taksiran takbias untuk μ. Jadi, $\overline{y}_{rsys}$ adalah taksiran takbias untuk μ.

3.3 Variansi dari Taksiran *Mean* Populasi

Selanjutnya akan dicari formula variansi dari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling* yaitu:

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right) = Var\left(\frac{1}{N}\left(N_1\overline{y}_1 + N_2\overline{y}_2\right)\right)$$

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{N^2}\left(N_1^{\,2}.Var\left(\overline{y}_1\right) + N_2^{\,2}.Var\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{N^2}\left(\left((n-r)k\right)^2.Var\left(\overline{y}_1\right) + \left(r(k+1)\right)^2.Var\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

karena $\overline{y}_1$ adalah taksiran *mean* pada strata pertama yang diperoleh dengan cara *systematic sampling*, maka

$$Var\left(\overline{y}_1\right) = E\left(\overline{y}_1 - \mu_1\right)^2$$

$$Var\left(\overline{y}_1\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{y}_{1i} - \mu_1\right)^2$$

selanjutnya, karena $\overline{y}_2$ adalah taksiran *mean* pada strata kedua yang diperoleh dengan cara *systematic sampling*, maka

$$Var\left(\overline{y}_2\right) = E\left(\overline{y}_2 - \mu_2\right)^2$$

$$Var\left(\overline{y}_2\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\overline{y}_{2i} - \mu_2\right)^2$$

maka diperoleh

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left(\left(n-r\right)k\right)^2.Var\left(\overline{y}_1\right)+\left(r\left(k+1\right)\right)^2.Var\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left(n-r\right)^2k^2\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{y}_{1i}-\mu_1\right)^2\right)+r^2\left(k+1\right)^2\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\overline{y}_{2i}-\mu_2\right)^2\right)\right)$$

Sehingga diperoleh formula variansi dari taksiran *mean* populasi yaitu:

$$Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left(n-r\right)^2k^2\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{y}_{1i}-\mu_1\right)^2\right)+r^2\left(k+1\right)^2\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\overline{y}_{2i}-\mu_2\right)^2\right)\right)$$

3.4 Taksiran Variansi dari Taksiran *Mean* Populasi

Adapun taksiran variansi dari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling* sebagai berikut:

karena $Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)=Var\left(\frac{1}{N}\left(N_1\overline{y}_1+N_2\overline{y}_2\right)\right)$

maka taksiran variansi dari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling* yang sering digunakan adalah:

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(N_1^{\,2}.\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)+N_2^{\,2}.\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left(\left(n-r\right)k\right)^2.\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)+\left(r\left(k+1\right)\right)^2.\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

dimana $\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)$ adalah taksiran variansi *systematic sampling* di strata pertama dan biasanya digunakan taksiran variansi yaitu

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)=\frac{s_1^{\,2}}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1}\right)$$

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)=\frac{s_1^{\,2}}{n-r}\left(\frac{\left(n-r\right)k-\left(n-r\right)}{\left(n-r\right)k}\right) \text{ dengan } s_1^{\,2}=\frac{\sum_{i=1}^{(n-r)}\left(y_i-\overline{y}_1\right)^2}{(n-r)-1}$$

sedangkan $\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)$ adalah taksiran variansi *systematic sampling* di strata kedua dan biasanya digunakan taksiran variansi yaitu:

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)=\frac{s_2^{\ 2}}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2}\right)$$

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)=\frac{s_2^{\ 2}}{r}\left(\frac{r\left(k+1\right)-r}{r\left(k+1\right)}\right) \text{ dengan } s_2^{\ 2}=\frac{\sum_{i=(n-r)+1}^{n}\left(y_i-\overline{y}_2\right)^2}{r-1}$$

maka

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left((n-r)k\right)^2.\widehat{Var}\left(\overline{y}_1\right)+\left(r\left(k+1\right)\right)^2.\widehat{Var}\left(\overline{y}_2\right)\right)$$

$$\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)=\frac{1}{N^2}\left(\left(n-r\right)^2k^2\frac{s_1^{\ 2}}{n-r}\left(\frac{(n-r)k-(n-r)}{(n-r)k}\right)+r^2\left(k+1\right)^2\frac{s_2^{\ 2}}{r}\left(\frac{r\left(k+1\right)-r}{r\left(k+1\right)}\right)\right)$$

berdasarkan pada bab 2, taksiran variansi yang diperoleh di strata pertama dan kedua merupakan taksiran yang bias, sehingga $\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)$ merupakan taksiran yang bias.

BAB 4
CONTOH PENERAPAN
PADA *REMAINDER SYSTEMATIC SAMPLING*

Pada bab sebelumnya telah dibahas bagaimana cara mengambil sampel dengan metode *remainder systematic sampling* yang menghasilkan taksiran takbias untuk *mean* populasi, serta dapat dicari formula variansi dari taksiran *mean* tersebut dan taksiran variansinya. Pada bab ini akan ditunjukkan contoh penerapan *remainder systematic sampling*.

Misalkan diketahui suatu populasi terurut yang disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Data Populasi

No	Data
1	2
2	3
3	3
4	9
5	10
6	11
7	12
8	13
9	15

Dari data tersebut diketahui N=9 dan nilai *mean* populasi adalah:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\mu = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} u_i$$

$$\mu = \frac{1}{9}.78$$

$$\mu = \frac{26}{3}$$

Misalkan akan diambil sampel berukuran n = 4. Dalam hal ini, ukuran populasi bukan merupakan kelipatan dari ukuran sampel. Maka dengan *remainder systematic sampling* diperoleh $k = \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = 2$, sehingga didapat

$$r = N - nk = 9 - 4.2 = 9 - 8 = 1$$

Selanjutnya, bagi populasi menjadi dua strata, strata pertama mengandung $N_1 = (n-r)k = (4-1)2 = 6$ unit pertama dari populasi dan strata kedua mengandung $N_2 = r(k+1) = 1(2+1) = 3$ unit sisanya, adapun hasil pembagian yang diperoleh sebagai berikut:

Strata pertama	**Strata kedua**
2 3 3 9 10 11	12 13 15

(1) Pada strata pertama:

Ukuran populasi pada strata pertama adalah $(n-r)k = 6$ dan nilai *mean* populasi pada strata pertama adalah:

$$\mu_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} u_i$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} u_i$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6}(2+3+3+9+10+11)$$

$$\mu_1 = \frac{38}{6}$$

$$\mu_1 = \frac{19}{3}$$

Tabel 4.2 Kemungkinan sampel yang terpilih pada strata pertama

k	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_1$
1	2	3	10	$\bar{y}_{11} = \frac{15}{3}$
2	3	9	11	$\bar{y}_{12} = \frac{23}{3}$

$s' = \{(2\ 3\ 10), (3\ 9\ 11)\}$

(2) Pada strata kedua:

Ukuran populasi pada strata kedua $r(k+1)=3$ dan nilai *mean* populasi pada strata kedua adalah:

$$\mu_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} u_i$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} u_i$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}(12+13+15)$$

$$\mu_2 = \frac{40}{3}$$

Tabel 4.3 Kemungkinan sampel yang terpilih pada strata kedua

(k+1)	y_4	$\overline{y}_2$
1	12	$\overline{y}_{21} = 12$
2	13	$\overline{y}_{22} = 13$
3	15	$\overline{y}_{23} = 15$

$$s'' = \{(12),(13),(15)\}$$

Maka semua kemungkinan dari gabungan kombinasi elemen-elemen di s' dan s'' yaitu:

$$s = \begin{Bmatrix} (2\ 3\ 10\ 12),(2\ 3\ 10\ 13),(2\ 3\ 10\ 15), \\ (3\ 9\ 11\ 12),(3\ 9\ 11\ 13),(3\ 9\ 11\ 15) \end{Bmatrix}$$

Adapun nilai-nilai taksiran *mean* pada masing-masing sampel yang mungkin akan terpilih antara lain:

Jika sampel yang terpilih (2 3 10 12) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{15}{3} + 3.12\right) = \frac{66}{9}$

Jika sampel yang terpilih (2 3 10 13) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{15}{3} + 3.13\right) = \frac{69}{9}$

Jika sampel yang terpilih (2 3 10 15) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{15}{3} + 3.15\right) = \frac{75}{9}$

Jika sampel yang terpilih (3 9 11 12) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{23}{3} + 3.12\right) = \frac{82}{9}$

Jika sampel yang terpilih (3 9 11 13) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{23}{3} + 3.13\right) = \frac{85}{9}$

Jika sampel yang terpilih (3 9 11 15) maka $\bar{y}_{rsys} = \frac{1}{9}\left(6.\frac{23}{3} + 3.15\right) = \frac{91}{9}$

Sehingga nilai $E\left(\bar{y}_{rsys}\right)$:

$$E\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\bar{y}_{rsys_i}$$

$$E\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{66}{9} + \frac{69}{9} + \frac{75}{9} + \frac{82}{9} + \frac{85}{9} + \frac{91}{9}\right)$$

$$E\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{468}{9}\right)$$

$$E\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{26}{3}$$

Karena $E\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{26}{3} = \mu$, maka dari contoh di atas didapat bahwa $\bar{y}_{rsys}$ adalah taksiran yang takbias untuk μ.

Kemudian akan dicari nilai $Var\left(\bar{y}_{rsys}\right)$ yaitu:

$$Var\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{1}{N^2}\left((n-r)^2 k^2\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_{1i} - \mu_1\right)^2\right) + r^2(k+1)^2\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\bar{y}_{2i} - \mu_2\right)^2\right)\right)$$

$$Var\left(\bar{y}_{rsys}\right) = \frac{78}{81} = 0,96296$$

Selanjutnya pada masing-masing sampel dihasilkan nilai taksiran variansi $\overline{y}_{rsys}$ sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai taksiran variansi

No	sampel	$\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)$
1	2 3 10 12	1,40741
2	2 3 10 13	1,40741
3	2 3 10 15	1,40741
4	3 9 11 12	1,28395
5	3 9 11 13	1,28395
6	3 9 11 15	1,28395

Adapun nilai dari $E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)\right)$ adalah:

$$E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)\right)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)_i$$

$$E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)\right)=\frac{1}{6}.8,07408$$

$$E\left(\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)\right)=1,34568$$

Sedangkan nilai $Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)=0,96296$.

Jadi, dari contoh tersebut terlihat bahwa $\widehat{Var}\left(\overline{y}_{rsys}\right)$ adalah taksiran yang bias untuk $Var\left(\overline{y}_{rsys}\right)$.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- Untuk mengatasi permasalahan pada *systematic sampling* untuk kasus dimana $N \neq nk$ atau dengan perkataan lain ukuran populasi bukan merupakan kelipatan dari ukuran sampel yaitu taksiran *mean* populasi yang diperoleh adalah taksiran yang bias, maka dapat digunakan metode *remainder systematic sampling*.
- Pada metode *remainder systematic sampling* diperoleh taksiran yang takbias untuk *mean* populasi.
- Metode *remainder systematic sampling* ini memiliki kelemahan, yaitu nilai taksiran variansi yang didapat merupakan taksiran yang bias.

5.2 Saran

Karena taksiran variansi dari taksiran *mean* populasi pada *remainder systematic sampling* merupakan taksiran yang bias, maka penulis menyarankan untuk mengembangkan metode ini sehingga diperoleh taksiran *mean* serta taksiran variansi yang takbias.

DAFTAR PUSTAKA

A, Naser Alodat. (2009). *On Unequal Probability Sampling Without Replacement Sample Size 2*. Int. J. Open Problems Comp. Math., Vol. 2, No. 1

Cochran, W.G. (1977). *Sampling Techniques*, Third edition. New York: Wiley.

E, Ronald Walpole. (1995). *Pengantar Statistika*,(Edisi ke-3). Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Kuo Chung Huang And Horng Jinh Chang. (2000). *Remainder Linear Systematic Sampling*. The Indian Journal of Statistics. Vol.62, 249-256.

Rao, Poduri S.R.S. (2000). *Sampling Methodologies with Applications.* Chapman&Hall/CRC.