UNIVERSITAS INDONESIA

POTENSIAL LISTRIK DI SUATU MEDIA

SKRIPSI

YOSSANDHA LIMITHA RAMADHANI
0706262022

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

POTENSIAL LISTRIK DI SUATU MEDIA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

YOSSANDHA LIMITHA RAMADHANI
0706262022

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Yossandha Limitha Ramadhani
NPM	: 0706262022
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 15 Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Yossandha Limitha Ramadhani
NPM	: 0706262022
Program Studi	: Sarjana Matematika
Judul Skripsi	: Potensial Listrik di Suatu Media

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	( )
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	: Dr. Hengki Tasman, M.Si	( )
Penguji	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 15 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Puji syukur senantiasa saya panjatkan kepada Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulisan skripsi ini dapat diselesaikan. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Dr. Sri Mardiyati, M.Kom pembimbing saya, yang telah memberikan banyak ilmu bermanfaat kepada saya dalam penulisan skripsi ini.
(2) Dra. Suarsih Utama, M.Si, Dra. Nora Hariadi, M.Si, Dr. Alhadi Bustamam, Prof. Dr. Djati Kerami, dan Suryadi MT, M.T yang telah hadir pada SIG 1 dan SIG 2 dan telah memberikan saran yang membangun.
(3) Dra. Ida Fithriani, M.S selaku pembimbing akademis saya.
(4) Dr. Yudi Satria, M.T selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech selaku Sekertaris Departemen Matematika FMIPA UI.
(5) Dr. Dian Lestari, DEA selaku koordinator pendidikan Departemen Matematika FMIPA UI
(6) Seluruh dosen Departemen Matematika UI yang telah memberikan saya ilmu yang bermanfaat untuk masa depan penulis.
(7) Papa dan Mama yang telah membesarkan saya hingga saat ini.
(8) Kurnia Fajar Yossyandha dan Rakha Xena Praditya, adik-adik saya.
(9) Shanti Septiani yang selalu menghibur penulis dalam berbagai macam keadaan.
(10) Zulfalah “sujul” Zainudin, teman seperjuangan dan seperbimbingan saya.
(11) Seluruh rekan-rekan angkatan 2007 yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.

(12) Rekan-rekan mahasiswa Matematika UI, angkatan 2003, 2004, 2005, 2006, 2008, 2009, dan 2010 yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu.

(13) Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA-UI yang telah membantu semua proses administrasi.

(14) Dan seluruh civitas akademika Universitas Indonesia yang telah membantu saya dari awal masuk perkuliahan sampai saya selesai kuliah.

Saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, saya mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Saya berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 15 Desember 2011

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Yossandha Limitha Ramadhani
NPM	: 0706262022
Program Studi	: S1 Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Potensial Listrik di Suatu Media

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.
Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	: Depok
Pada tanggal	: 15 Desember 2011
Yang menyatakan	:

(Yossandha Limitha Ramadhani)

ABSTRAK

Nama : Yossandha Limitha Ramadhani

Program Studi : Matematika

Judul : Potensial Listrik di Suatu Media

Metode resistivitas listrik merupakan salah satu metode eksplorasi sumber daya alam. Metode ini digunakan untuk menyelidiki kondisi materi di bawah permukaan bumi dengan cara mengalirkan arus listrik ke dalam tanah melalui sepasang elektroda listrik kemudian menghitung beda potensial di antara dua elektroda potensial dengan menggunakan *voltmeter*. Hasil pengukuran beda potensial ini dapat digunakan untuk menaksir konduktivitas di dalam bumi. Pada proses penaksiran ini diperlukan cara menghitung potensial listrik di suatu media. Berkaitan dengan masalah tersebut, maka pada skripsi ini akan dibahas model potensial listrik di suatu media dan mencari solusi dari model tersebut.

Kata Kunci : potensial listrik, resistivitas listrik, konduktivitas listrik.

xi+26 halaman : 3 gambar

Daftar Pustaka : 12 (1962-2005)

ABSTRACT

Name : Yossandha Limitha Ramadhani

Program Study : Mathematics

Title : Electrical Potential on A Media

Electrical resistivity method is an exploration method which is used to investigate the nature of the structures below the surface by employing current source. The current is injected on the surface by using the current electrodes and the electrical potential differeneces are measured by using voltmeter at the potential electrodes. The potential difference measurements can be used to estimate the conductivity in the earth. In the estimation process, the calculated electrical potential in a medium is needed. So in this skripsi, a model of the electrical potential in a medium will be discussed and solved.

Key Words : electrical potential, electrical resistivity, electrical conductivity.

xi+26 pages : 3 pictures

Bibliography : 12 (1962-2005)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang masalah

Jumlah penduduk dunia yang semakin bertambah, serta pesatnya perkembangan teknologi, mengakibatkan kebutuhan manusia seperti air bersih, minyak dan gas bumi, ataupun mineral lainnya akan meningkat. Akibatnya, peningkatan kuantitas pencarian sumber daya alam harus dilakukan. Tetapi terbatasnya jumlah sumber daya alam yang ada, disertai pemanfaatan sumber daya alam secara terus menerus berakibat sulitnya menemukan lokasi sumber daya alam yang baru. Sehingga para ilmuwan diharapkan mengembangkan metode-metode baru berkaitan dengan eksplorasi dan eksploitasi sumber daya alam untuk mengatasi hal tersebut.

Untuk sumber daya alam yang berada di bawah permukaan bumi, metode-metode eksplorasi yang dikembangkan diantaranya adalah metode yang tidak membutuhkan observasi geologi, melainkan berkaitan dengan pengukuran fisik pada permukaan bumi yang dapat memberikan informasi mengenai struktur di bawah permukaan bumi. Salah satunya adalah metode resistivitas listrik.

Metode resistivitas listrik pertama kali dikembangkan oleh Conrad Schlumberger pada tahun 1912 di Normandy (Sharma, 1997). Metode ini digunakan untuk menyelidiki kondisi materi di bawah permukaan bumi dengan cara mengalirkan arus listrik searah ke dalam tanah melalui sepasang elektroda listrik, kemudian menghitung beda potensial di antara dua elektroda potensial. Perhitungan beda potensial tersebut dilakukan berulang kali seiring dengan perubahan jarak dari elektroda potensial ke pusat arus listrik, yang pada prakteknya menggunakan suatu alat yang disebut *voltmeter*.

Selain itu, metode resistivitas listrik juga membutuhkan nilai potensial listrik yang didapat dari penurunan sifat-sifat potensial listrik sebagai data pembanding. Hal ini memunculkan masalah baru yaitu dapatkah nilai potensial listrik dihitung secara teoritis berdasarkan sifat-sifat potensial listrik itu sendiri?

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana cara memperoleh nilai-nilai potensial listrik secara teoritis di permukaan bumi yang dialiri arus listrik searah?

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini, diasumsikan bahwa:

1. Media atau bumi bersifat isotropik, yang berarti sifat fisik materi tidak bergantung pada arah.
2. Media atau bumi bersifat homogen.
3. Media atau bumi dialiri arus listrik searah.
4. Panas yang diakibatkan dari konduksi listrik tidak berpengaruh besar terhadap resistivitas materi.

1.4 Jenis dan Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur.

1.5 Tujuan Penulisan

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk melihat model potensial listrik pada suatu media dan menghitung nilai-nilai potensial secara teoritis di suatu medium yang dialiri arus listrik searah.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Bab ini membahas landasan teori yang akan digunakan untuk menurunkan fungsi potensial listrik pada media yang homogen yang dialiri arus listrik. Pembahasan dimulai dengan pengertian Persamaan Diferensial Parsial secara umum.

Definisi 2.1

Suatu persamaan yang berisi satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial.

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Contoh: $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$, adalah persamaan diferensial dengan y fungsi dari t.

Definisi 2.2

Order dari suatu persamaan diferensial adalah order dari turunan tertinggi pada persamaan diferensial tersebut.

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Contoh: $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$ adalah persamaan diferensial dengan order 1.

Definisi 2.3

Misalkan y fungsi dari t, persamaan diferensial $F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ disebut linier jika F adalah fungsi linier dari variabel $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ yang berbentuk:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t).$$

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Definisi 2.4

Persamaan diferensial yang berisi fungsi yang bergantung hanya pada satu variabel disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Sedangkan persamaan diferensial yang berisi fungsi yang bergantung pada dua variabel atau lebih disebut persamaan diferensial parsial (PDP).

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Berikut ini didefinisikan bentuk khusus dari PDP linier order 2 yang dikenal sebagai Persamaan Laplace.

Definisi 2.5

Misalkan u merupakan fungsi dari x, y, dan z. Persamaan diferensial parsial linier order 2 yang berbentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{2.1}$$

disebut persamaan Laplace pada koordinat Cartesius.

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Definisi 2.6

Misalkan y merupakan fungsi dari satu peubah x. Persamaan diferensial biasa linier order 2 yang berbentuk

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \qquad (n = 0,1,2,\dots). \tag{2.2}$$

disebut persamaan diferensial Bessel derajat n.

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Jika dilakukan transformasi variabel bebas pada persamaan (2.2), maka hasil transformasinya juga akan berbentuk persamaan diferensial Bessel.

Teorema 2.7

Misalkan diberikan persamaan diferensial Bessel derajat n

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0.$$

Jika pada persamaan Bessel (2.2), x diganti dengan λz, dengan λ suatu konstanta, maka diperoleh persamaan berikut:

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(\lambda^2z^2-n^2)y=0. \tag{2.3}$$

Bukti:

Misalkan $x = \lambda z$, akibatnya, $\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dx}\lambda$, serta $\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\lambda\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz}\lambda=\frac{d^2y}{dx^2}\lambda\lambda=\lambda^2\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pandang persamaan diferensial Bessel berikut,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

Substitusi $x = \lambda z$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dz}$, dan $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dz^2}$, didapat

$$(\lambda z)^2\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dz^2}+\lambda z\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dz}+((\lambda z)^2-n^2)y=0$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(\lambda^2z^2-n^2)y=0 \blacksquare$$

Suatu solusi dari persamaan diferensial Bessel derajat n disebut fungsi Bessel derajat n. Berikut ini akan ditunjukkan solusi umum dari persamaan diferensial Bessel derajat nol, yaitu fungsi-fungsi yang memenuhi persamaan (2.2) untuk n = 0.

Untuk n = 0, persamaan diferensial Bessel (2.2) dapat ditulis sebagai

$$x^2y''+xy'+x^2y=0. \tag{2.4}$$

Untuk mencari solusi dari persamaan (2.4), digunakan metode Frobenius, yaitu suatu metode yang memisalkan solusi dari persamaan (2.4) berbentuk deret pangkat

$$y = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad \text{dengan } a_i \in \mathbb{R} \text{ untuk } i = 1,2,3,\dots. \tag{2.5}$$

Jika persamaan (2.5) disubstitusi ke persamaan (2.4) akan didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0,$$

atau

$$a_0[r(r-1)+r]x^r + a_1[(r+1)r+(r+1)]x^{r+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \tag{2.6}$$

Agar persamaan (2.6) dipenuhi, maka bagian
$a_0[r(r-1)+r]x^r = 0$, $a_1[(r+1)r+(r+1)]x^{r+1} = 0$, dan
$\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2}\}x^{r+n} = 0.$
Untuk $a_0[r(r-1)+r]x^r = 0$, agar didapat solusi yang tidak nol, maka ambil $a_0 \neq 0$ dan $r(r-1)+r = 0$, sehingga didapat $r_1 = r_2 = 0$. Sedangkan untuk $a_1[(r+1)r+(r+1)]x^{r+1} = 0$ ambil $a_1 = 0$. Dan untuk $\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2}\}x^{r+n} = 0$, ambil $a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2} = 0$, sehingga dapat dibentuk relasi rekursifnya seperti berikut ini:

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1)+(r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \qquad n \geq 2. \tag{2.7}$$

Dari persamaan (2.7), karena $a_1 = 0$ dan $r = 0$, akan diperoleh $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$ sehingga

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2,4,6,8,\dots.$$

Dengan memisalkan $n = 2m$, didapat

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1,2,3,\dots.$$

atau didapat barisan berikut:

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2}, \dots,$$

yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}. \tag{2.8}$$

Substitusikan persamaan (2.8) ke persamaan (2.5) dan didapat

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \tag{2.9}$$

Fungsi yang berada di dalam tanda kurung dari Persamaan (2.9) disebut *fungsi Bessel jenis pertama derajat nol*, dan dinotasikan dengan $J_0(x)$. Maka solusi umum dari persamaan diferensial Bessel derajat nol untuk $x > 0$ adalah

$$y = a_0 J_0(x), \text{dengan } a_0 \in \mathbb{R}$$

Jika diambil $a_0 = 1$, maka fungsi Bessel jenis pertama derajat nol, $J_0(x)$ juga merupakan solusi dari persamaan diferensial Bessel derajat nol.

Selanjutnya akan diberikan sifat-sifat dari fungsi Bessel jenis pertama.

Sifat 2.8

Jika $J_0(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat nol maka

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_0(bt)dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{2.10}$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

Integral tak wajar pada ruas kiri dari persamaan (2.10) biasa disebut integral Lipschitz.

(Watson, 1962)

Sifat 2.9

Misal diberikan suatu fungsi $f(x)$. Jika $F(y) = \int_0^{\infty} f(x)\, xJ_0(yx)dx$, maka $f(x) = \int_0^{\infty} F(y)\, yJ_0(xy)dy$.

(Arfken dan Weber, 1995)

Sifat 2.10

Jika $J_n(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat *n*, maka

$$\int_0^\infty J_n(\lambda r)\, d\lambda = \frac{1}{r}, \quad n > -1,$$

dengan $\lambda, r \in \mathbb{R}$.

(Gradshteyn dan Ryzhik, 2000)

Sifat 2.11

Jika $J_0(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat nol dan $J_1(\lambda r)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat 1, maka

$$\frac{\partial}{\partial r}[J_0(\lambda r)] = -\lambda[J_1(\lambda r)], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Boyce dan DiPrima, 1997)

Teorema 2.12

Misalkan $f(x,\alpha)$ kontinu dan memiliki turunan parsial yang kontinu terhadap α untuk $x \geq b$ dan $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ dengan $b, \alpha_1,$ dan $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Jika $\int_b^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ konvergen uniform pada $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ dan b tidak bergantung pada α, maka $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_b^\infty f(x,\alpha)\, dx\right) = \int_b^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx.$

(Wrede dan Spiegel, 2002)

Proses penurunan fungsi potensial listrik pada media homogen memerlukan pengertian *gradient* dari suatu fungsi bernilai riil dari suatu vektor posisi. Berikut ini akan dibahas definisi *gradient* dari suatu fungsi.

Definisi 2.13

Misalkan $f(x,y,z)$ merupakan fungsi bernilai riil dari suatu vektor posisi pada koordinat Cartesius. Jika *f* memiliki turunan parsial pertama, maka *gradient* dari *f* pada sistem koordinat Cartesius adalah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

(Purcell, Varberg, Rigdon, 2000)

Definisi 2.14

Misalkan $\mathbf{A}= A_1(x,y,z)\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_2(x,y,z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_3(x,y,z)\widehat{\boldsymbol{k}}$ adalah fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi pada koordinat Cartesius. Jika $A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z)$ memiliki turunan parsial pertama, maka divergensi **A** pada sistem koordinat Cartesius didefinisikan sebagai:

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

(Purcell, Varberg, Rigdon, 2000)

Seperti yang terlihat pada Definisi 2.13 di atas, *gradient* dari suatu fungsi bernilai riil dari vektor posisi merupakan suatu fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi. Sebaliknya, divergensi dari suatu fungsi bernilai vektor dari vektor posisi, akan merupakan suatu fungsi bernilai riil dari vektor posisi.

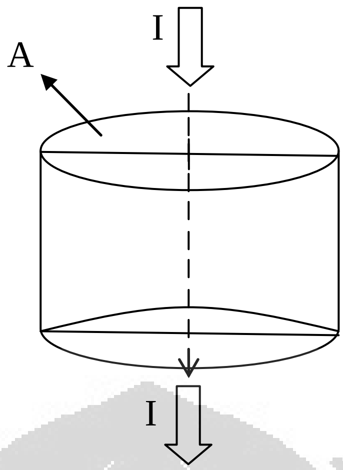
Selanjutnya akan dibahas pengertian maupun sifat yang berkaitan dengan potensial listrik, yang dimulai dengan pengertian arus listrik.

Definisi 2.15

Arus listrik, *I*, merupakan suatu besaran yang menyatakan muatan listrik ΔQ yang mengalir melalui suatu area (*cross-sectional area*) *A* per interval waktu Δt. Jika arus berubah-ubah selama interval waktu Δt, interval Δt diperkecil hingga arus dapat dipandang sebagai suatu konstanta. Satuan arus listrik menurut Satuan Internasional adalah ampere.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

(Benenson dkk, 2002)



Gambar 2. 1 Arus Listrik yang Menembus Suatu Medium
(Benenson dkk, 2002)

Suatu benda yang dapat dialiri arus listrik *I* disebut konduktor. Kepadatan arus listrik di suatu konduktor didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.16

Kepadatan arus listrik, **J**, menyatakan penyebaran arus listrik pada suatu konduktor. Kepadatan arus listrik merupakan suatu vektor yang searah dengan arus listrik. Nilai **J** (*magnitude*) dihitung dengan membagi arus ΔI, yang mengalir pada medium seluas (*cross-sectional area*) ΔA secara tegak lurus, dengan ΔA. Satuan kepadatan arus listrik yang digunakan yaitu ampere/m^2.

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{dI}{dA}$$

(Benenson dkk, 2002)

Jika terdapat suatu objek bermuatan listrik, maka di sekitar objek tersebut akan timbul medan listrik, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.17

Medan listrik, **E**, yang disebabkan oleh muatan listrik q_0 didefinisikan sebagai gaya listrik F yang bekerja pada muatan listrik tersebut, dibagi dengan besaran muatan listrik $q0$. Satuan medan listrik yang digunakan adalah Newton/Coulomb (N/C).

$$\boldsymbol{E} = \frac{F}{q_0}$$

(Haliday, Resnick, dan Walker, 2005)

Karena medan listrik **E** merupakan suatu vektor, maka untuk penyederhanaan pembahasan didefinisikan potensial listrik yang berupa skalar dan didefinisikan seperti berikut ini.

Definisi 2.18

Potensial listrik pada titik A di suatu medan listrik **E**, yang dinotasikan dengan Φ_A, merupakan hasil yang disebabkan oleh gaya $F = -Q\boldsymbol{E}$ untuk memindahkan muatan Q dari suatu titik tetap P, yang potensialnya ditetapkan nol, ke titik A. Titik di tak berhingga dipilih sebagai titik P. Satuan potensial listrik yang digunakan adalah volt.

$$\Phi_A = -\int_{\infty}^{A} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$$

(Benenson dkk, 2002)

Teorema 2.19

Potensial listrik Φ dan medan listrik **E** memiliki hubungan:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

(Grant dan West, 1965)

Kepadatan arus **J** dan medan listrik **E** terbentuk pada suatu konduktor ketika beda potensial dipertahankan di sepanjang konduktor. Jika beda potensial tidak berubah maka arus listrik juga demikian.

Teorema 2.20

Menurut Hukum Ohm, rasio dari kepadatan arus **J** dengan medan listrik **E** pada suatu materi merupakan suatu konstanta σ yang tidak bergantung pada medan listrik **E**. Dengan kata lain:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

dengan konstanta σ disebut konduktivitas dari suatu materi ($\sigma > 0$).

(Halliday, Resnick, dan Walker, 2005)

Dari persamaan $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, terlihat bahwa konduktivitas dari suatu materi merupakan konstanta pembanding antara kepadatan arus dengan medan listrik, yang mengukur seberapa baik kemampuan suatu materi untuk mengalirkan arus listrik. Istilah lain yang sering digunakan untuk mengukur kemampuan suatu materi dalam mengalirkan arus listrik adalah resistivitas.

Definisi 2.21

Resistivitas dari suatu materi, ρ, didefinisikan sebagai balikan dari konduktivitas, yaitu

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

(Halliday, Resnick, dan Walker, 2005)

Kepadatan arus listrik pada suatu media yang dialiri arus listrik searah merupakan fungsi bernilai vektor dari suatu vektor posisi, sehingga dapat dihitung divergensinya.

Teorema 2.22

Divergensi dari kepadatan arus listrik, **J**, bernilai nol.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

(Grant dan West, 1965)

BAB 3
POTENSIAL LISTRIK DI SUATU MEDIA

Pada bab ini akan ditunjukkan model matematika untuk potensial listrik di media dan proses penyelesaiannya.

3.1 Model Matematika Untuk Potensial Listrik di Media

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa potensial listrik akan memenuhi suatu persamaan diferensial. Sesuai Teorema 2.19 di Bab 2, potensial listrik Φ pada suatu titik pada media ketika dialiri arus searah memenuhi

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \tag{3.1}$$

dengan **E** adalah medan listrik.

Berdasarkan hukum Ohm pada Teorema 2.20, diperoleh hubungan kepadatan arus **J** dan medan listrik **E** sebagai berikut

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{3.2}$$

dengan σ merupakan konduktivitas media.

Sedangkan Teorema 2.22 mengatakan bahwa divergensi dari kepadatan arus bernilai nol, yaitu

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.3}$$

Substitusi **J** di persamaan (3.2) ke persamaan (3.3), didapat

$$\nabla \cdot \sigma\mathbf{E} = 0. \tag{3.4}$$

Kemudian substitusi **E** persamaan (3.1) ke persamaan (3.4), didapat

$$\nabla \cdot \sigma\nabla\Phi = 0. \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) merupakan model matematika untuk potensial listrik Φ di media berkonduktivitas σ.

Sesuai Definisi (2.13) mengenai *gradient* dan sifat aturan rantai, maka persamaan (3.5) menjadi

$$\nabla\sigma \cdot \nabla\Phi + \sigma \cdot \nabla^2\Phi = 0 \quad (3.6)$$

Jika media dalam koordinat Cartesius, maka persamaan (3.6) berubah menjadi

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\hat{k}\right] \cdot \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}\right] + \sigma \cdot \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \sigma\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] = 0. \quad (3.7)$$

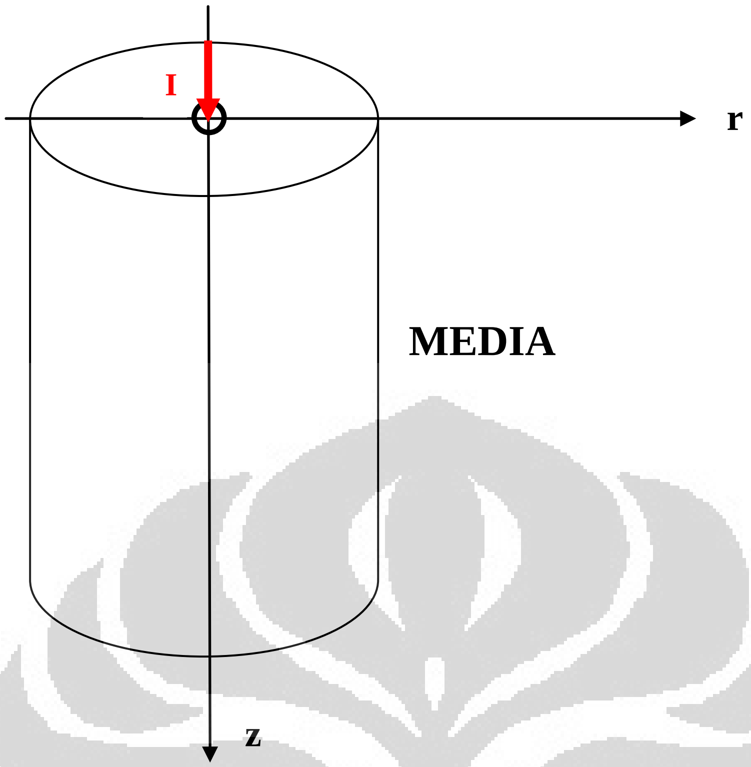
Jika diasumsikan konduktivitas σ adalah fungsi dari z, maka persamaan (3.7) menjadi

$$\sigma(z)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \sigma(z)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \sigma(z)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial\sigma(z)}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \quad (3.8)$$

Namun pada batasan masalah di Bab 1, telah disampaikan bahwa media bersifat homogen, sehingga diasumsikan konduktivitas σ adalah konstanta atau σ tidak bergantung pada posisi z, maka persamaan (3.8) menjadi

$$\sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.9)$$

Sesuai Gambar 2.1, bahwa arus listrik akan mengalir melalui suatu media berbentuk silinder, sehingga persamaan (3.9) akan diubah menjadi persamaan dalam koordinat silinder.



Gambar 3. 1 Arus Listrik Mengalir Menembus Media Berbentuk Silinder

Misal $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, maka $\Phi(x, y, z)$ akan menjadi fungsi $\Phi(r, \theta, z)$. Jika Φ diturunkan terhadap r dan θ didapat

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(r\cos\theta). \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\cos\theta) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\sin\theta). \qquad (3.11)$$

Jika persamaan (3.10) dan (3.11) dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks didapat

$$\begin{bmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} \end{bmatrix}.$$

Karena $\begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r\sin^2\theta - r\cos^2\theta = -r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) =$

$-r \neq 0,$

maka dengan menggunakan aturan Cramer, didapat

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} & r\cos\theta \\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \sin\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\sin\theta - \frac{\partial\Phi}{\partial r} r\cos\theta\right). \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -r\sin\theta & \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ \cos\theta & \frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} r\sin\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\cos\theta\right). \qquad (3.13)$$

Turunkan $\partial\Phi/\partial\theta$ pada persamaan (3.10) terhadap θ didapat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(r\cos\theta)\right] \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - r\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - r\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\
&= -r\sin\theta\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right] - r\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\
&\quad + r\cos\theta\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right] - r\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\
&= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - r\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \\
&\quad - r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\
&= -r\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \\
&\quad - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}
\end{aligned}$$

$$= -r\cos\theta\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\sin\theta - \frac{\partial\Phi}{\partial r}r\cos\theta\right)\right]$$

$$- r\sin\theta\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}r\sin\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\cos\theta\right)\right] + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$+ r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$= -r\cos^2\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - r\sin^2\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$- 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = -r\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},$$

atau bisa ditulis

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + r\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}. \tag{3.14}$$

Kemudian turunkan $\partial\Phi/\partial r$ pada persamaan (3.11) terhadap r, didapat

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right](\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right](\sin\theta)$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},$$

atau bisa ditulis

$$\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial r^2} - 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x\partial y} = \cos^2\theta\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial y^2}. \tag{3.15}$$

Dari persamaan (3.14) dan (3.15) bisa dibentuk persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ r^2\sin^2\theta & r^2\cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial r^2} - 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial \theta^2} + r\,\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}.$$

Karena $\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ r^2\sin^2\theta & r^2\cos^2\theta \end{vmatrix} = r^2(\cos^4\theta - \sin^4\theta) = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \neq 0$,

dengan syarat $\theta \neq \pi/4$,

maka dengan menggunakan aturan Cramer didapat

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} & \sin^2\theta \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + r\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} & r^2\cos^2\theta \end{vmatrix}}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{c} r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2r^2\sin\theta\cos^3\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \sin^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} - \\ r\sin^2\theta\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} - 2r^2\sin^3\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \end{array} \right)}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \sin^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} - r\sin^2\theta\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}, \quad (3.16)$$

dan

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \\ r^2\sin^2\theta & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + r\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \end{vmatrix}}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{c} \cos^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + r\cos^2\theta\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos^3\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \\ r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + 2r^2\sin^3\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \end{array} \right)}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + r\cos^2\theta\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}. \quad (3.17)$$

Substitusikan $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$ pada persamaan (3.16) dan $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ pada persamaan (3.17) ke persamaan (3.9), sehingga didapat

$$\sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (3.18)$$

Persamaan (3.18) akan terpenuhi untuk $\theta \neq \pi/4$. Karena konduktivitas σ > 0 (sesuai Teorema 2.20), maka persamaan (3.18) bisa dibagi dengan σ, dan sesuai dengan batasan masalah yaitu potensial listrik tidak bergantung pada arah atau θ, maka didapat $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0$. Akibatnya, persamaan (3.18) tidak tergantung pada θ sehingga dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \qquad (3.19)$$

Sehingga potensial listrik Φ dengan konduktivitas σ yang konstan di suatu media akan memenuhi Persamaan (3.19).

Untuk mendapatkan nilai-nilai potensial di suatu titik pada media tertentu, akan diselesaikan permasalahan syarat batas dengan

Persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \qquad (3.19)$$

Dengan syarat batas:

Potensial listrik pada jarak dan kedalaman tak hingga, mendekati nol.

$$\sqrt{r^2+z^2}\to\infty,\ \text{ maka } \Phi\ \to 0. \qquad (3.20)$$

(Koefoed, 1979)

3.2 Penyelesaian Permasalahan Syarat Batas

Persamaan (3.11) merupakan persamaan diferensial parsial order 2 dengan variabel *r* dan *z*. Persamaan ini akan diselesaikan dengan menggunakan metode variabel terpisah (O'Neil, 1999). Misalkan potensial Φ memiliki bentuk seperti berikut

$$\Phi(r,z)=R(r)Z(z). \qquad (3.21)$$

Substitusi persamaan (3.21) ke persamaan (3.19), didapat

$$Z(z)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + Z(z)\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + R(r)\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \tag{3.22}$$

Bagi persamaan (3.22) dengan $R(r)Z(z)$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \tag{3.23}$$

Tulis kembali persamaan (3.23) sebagai

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \tag{3.24}$$

Ruas kiri dari persamaan (3.24) merupakan fungsi dari satu peubah r, sedangkan ruas kanan dari persamaan (3.24) merupakan fungsi dari satu peubah z. Agar persamaan (3.24) tidak menghasilkan kontradiksi, maka diasumsikan persamaan (3.24) sama dengan suatu konstanta λ^2 sembarang, dan didapat dua persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r\,R(r)}\frac{\partial R}{\partial r} = -\lambda^2 \tag{3.25}$$

dan

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda^2. \tag{3.26}$$

Tulis kembali persamaan (3.25) sebagai

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \lambda^2 R(r) = 0. \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) merupakan persamaan diferensial Bessel derajat nol seperti pada Teorema 2.6, sehingga solusi umum persamaan (3.27) adalah

$$R(\lambda, r) = J_0(\lambda r). \tag{3.28}$$

Tulis kembali persamaan (3.26) sebagai

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0. \tag{3.29}$$

Karena telah dimisalkan $\Phi(r,z) = R(r)Z(z)$ dan nilai λ^2 terletak pada interval [0, ∞), maka didapatkan solusi umum dari persamaan (3.19) berbentuk

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty F(\lambda)R(\lambda,r)Z(\lambda,z)\ d\lambda. \tag{3.30}$$

Atau dengan mensubstitusi persamaan (3.28) ke persamaan (3.30), didapat

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty F(\lambda)Z(\lambda,z)J_0(\lambda r)\ d\lambda, \tag{3.31}$$

dengan $Z(\lambda,z)$ memenuhi persamaan (3.29).

Kemudian akan dibahas mengenai $F(\lambda)$. Karena semua arus listrik *I* mengalir ke permukaan tanah dan melalui silinder vertikal yang sangat jauh, maka

$$I = -\int_0^\infty \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} 2\pi r\, dz. \tag{3.32}$$

Turunkan persamaan (3.31) terhadap *r*, akan didapat:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \int_0^\infty F(\lambda)Z(\lambda,z)\frac{\partial}{\partial r}[J_0(\lambda r)]\ d\lambda. \tag{3.33}$$

Sesuai dengan Sifat 2.10 fungsi Bessel jenis pertama bahwa $\frac{\partial}{\partial r}[J_0(\lambda r)] = -\lambda[J_1(\lambda r)]$, maka persamaan (3.33) bisa ditulis sebagai

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \int_0^\infty F(\lambda)Z(\lambda,z)(-\lambda)[J_1(\lambda r)]\ d\lambda. \tag{3.34}$$

Substitusikan persamaan (3.34) ke persamaan (3.32), didapat

$$\frac{I}{2\pi r} = \int_0^\infty \lambda F(\lambda) \left[\int_0^\infty \sigma Z(\lambda, z)\, dz \right] J_1(\lambda r)\, d\lambda. \tag{3.35}$$

Dengan menggunakan Sifat 2.9 fungsi Bessel jenis pertama yang ada di Bab 2, yaitu $\int_0^\infty J_n(\lambda r)\, d\lambda = 1/r$, untuk $n > -1$. Maka persamaan (3.35) menjadi

$$\frac{I}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r)\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda F(\lambda) \left[\int_0^\infty \sigma Z(\lambda, z)\, dz \right] J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda F(\lambda) \int_0^\infty \sigma Z(\lambda, z)\, dz = \frac{I}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(\lambda) = \frac{I}{2\pi\lambda\sigma} \left[\int_0^\infty Z(\lambda, z)\, dz \right]^{-1}. \tag{3.36}$$

Lihat kembali persamaan (3.29), dan ubah bentuknya menjadi

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda^2 Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty Z_{zz}\, dz = \int_0^\infty \lambda^2 Z\, dz$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_z|_0^\infty = \int_0^\infty \lambda^2 Z\, dz. \tag{3.37}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.20) sesuai syarat batas, ke persamaan (3.37) akan didapat

$$\frac{-Z_z(\lambda, 0)}{\lambda^2} = \int_0^\infty Z(\lambda, z)\, dz. \tag{3.38}$$

Substitusikan persamaan (3.38) ke persamaan (3.36) didapat

$$F(\lambda) = -\frac{\lambda I}{2\pi\sigma Z_z(\lambda, 0)}, \tag{3.39}$$

Substitusikan lagi persamaan (3.39) ke persamaan (3.31) didapat

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty -\frac{\lambda I}{2\pi\sigma Z_z(\lambda,0)} Z(\lambda,z) J_0(\lambda r)\ d\lambda.$$

$$= -\frac{I}{2\pi\sigma}\int_0^\infty \lambda \frac{Z(\lambda,z)}{Z_z(\lambda,0)} J_0(\lambda r) \qquad (3.40)$$

Persamaan (3.40) merupakan solusi formal dari PDP (3.19), dengan $Z(\lambda, z)$ memenuhi persamaan (3.29) seperti berikut,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0.$$

Solusi umum untuk $Z(\lambda, z)$ adalah: $Z(\lambda,z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}$. Dan sesuai syarat batas yaitu: $\sqrt{r^2+z^2} \to \infty$, maka $\Phi \to 0$. Sehingga untuk $z \to \infty$, agar $\Phi \to 0$ terpenuhi, maka $Z(\lambda, \infty)$ harus mendekati nol. Oleh karena itu solusi yang dipilih dari $Z(\lambda, z)$ adalah $Z(\lambda,z) = C_2 e^{-\lambda z}$.

Jika $Z(\lambda, z)$ diturunkan terhadap z di titik z = 0, didapat $Z_z(\lambda, 0) = -C_2\lambda$.
Lalu substitusikan $Z(\lambda,z) = C_2 e^{-\lambda z}$ dan $Z_z(\lambda, 0) = -C_2\lambda$ ke persamaan (3.40) didapat

$$\Phi(r,z) = -\frac{I}{2\pi\sigma}\int_0^\infty \lambda \frac{C_2 e^{-\lambda z}}{-C_2\lambda} J_0(\lambda r)\ d\lambda$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma}\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\ d\lambda \qquad (3.41)$$

Dengan menggunakan Sifat 2.7 fungsi Bessel jenis pertama berderajat nol yaitu $\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, maka persamaan (3.41) dapat ditulis sebagai

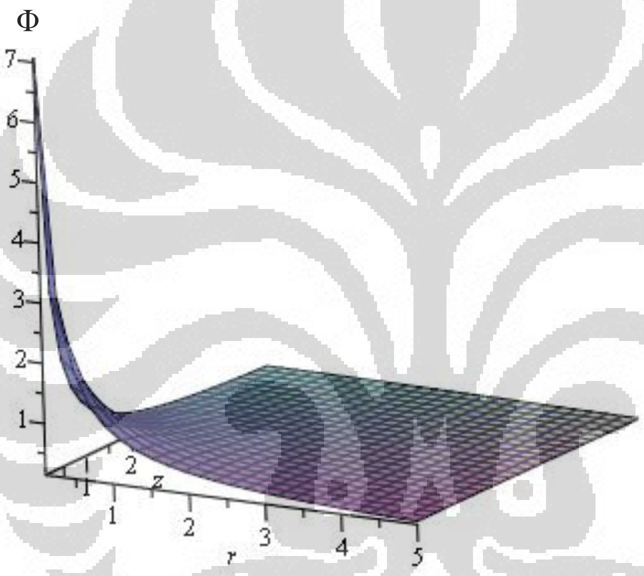
$$\Phi(r,z) = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad (3.42)$$

Persamaan (3.42) merupakan solusi analitik dari PDP (3.19), atau dapat dikatakan bahwa potensial listrik di suatu titik (r, z) pada suatu media berkonduktivitas σ memenuhi persamaan (3.42).

Berikut ini diberikan contoh perhitungan potensial listrik di media berkonduktivitas $\sigma = 10^{-1}$ dengan injeksi arus listrik sebesar I = 1 ampere di titik (0, 0) untuk

- r = 1 meter, z = 0 meter ⇒ Φ(1, 0) = 1.592356688 volt
- r = 4 meter, z = 3 meter, ⇒ Φ(4, 3) = 0.318471337 volt
- r = 20 meter, z = 21 meter, ⇒ Φ(20, 21) = 0.054908851 volt
- r = 200 meter, z = 210 meter, ⇒ Φ(200, 210) = 0.005490885 volt

Berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh Gambar 3.2.



Gambar 3. 2 Profil Potensial Listrik Terhadap Suatu Titik

Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa semakin jauh jarak titik dari sumber arus listrik (0, 0), nilai potensial listrik akan semakin kecil.

BAB 4
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa potensial listrik pada suatu titik (r, z) di suatu media yang dialiri arus listrik searah dengan konduktivitas konstan tergantung dari posisi titik dan dapat dihitung dengan formula:

$$\Phi(r,z) = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

dimana I, menyatakan besaran arus listrik dan σ, menyatakan konduktivitas media.

Untuk riset selanjutnya, dapat dicari perhitungan potensial listrik di media dengan mengalirkan arus listrik searah di permukaan media dengan konduktivitas σ di media yang merupakan fungsi dari z.

DAFTAR PUSTAKA

Arfken, G.B., and Weber, H.J. 1995. *Mathematical Methods for Physicist* (4th ed.). San Diego: Academic Press.

Benenson, W.*et.al.*, ed. 2002. *Handbook of Physics*. New York: Springer-Verlag.

Boyce, W.E., and DiPrima, R.C. 1997. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (6th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Purcell, E., Varberg, D., and Rigdon, S. 2000. *Calculus* (8th ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M. 2000. *Table of Integrals, Series, and Product* (6th ed.). United States of America: Academic Press.

Grant F.S., and West, G.F. 1965. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*. New York: McGraw-Hill.

Halliday, D., Resnick, R., and Walker, J. 2005. *Fundamentals of Physics* (7th ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Koefoed, O. 1979. *Geosounding Principles, 1 Resistivity Sounding Measurements*. New York: Elsevier Science Publishers B.V.,

O'Neil, P.V. 1999. *Beginning Partial Differential Equations*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Sharma, P.V. 1997. *Environment and Engineering Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Watson, G.N. 1962. *A Treatise on the Theory of the Bessel Functions* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Wrede, R., and Spiegel, M.R. 2002. *Advanced Calculus* (2nd ed.). United States of America: McGraw-Hill.