



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENAKSIRAN PARAMETER MODEL MULTINOMIAL  
PROBIT BERDASARKAN KONSEP UTILITAS**

**SKRIPSI**

**MISDAWITA  
0706163123**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA  
DEPOK  
DESEMBER 2011**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENAKSIRAN PARAMETER MODEL MULTINOMIAL  
PROBIT BERDASARKAN KONSEP UTILITAS**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains**

**MISDAWITA  
0706163123**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA  
DEPOK  
DESEMBER 2011**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Misdawita

NPM : 0706163123

Tanda Tangan : 

Tanggal : 15 Desember 2011

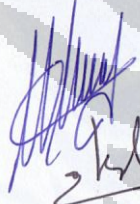
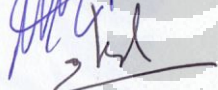
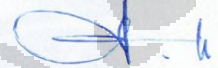
## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Misdawita  
NPM : 0706163123  
Program Studi : Sarjana Matematika  
Judul Skripsi : Penaksiran Parameter Model Multinomial Probit  
Berdasarkan Konsep Utilitas

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Mila Novita, M. Si (  )  
Penguji I : Dr. Dian Lestari, DEA (  )  
Penguji II : Dra. Saskya Mary Soemartojo, M. Si (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 15 Desember 2011

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allahu Robbul Izzati, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

- (1) Mila Novita, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah bersedia membimbing, mengarahkan, memotivasi, mengingatkan, membantu menyelesaikan permasalahan dan memberikan saran terbaik untuk terselesaikannya tugas akhir ini.
- (2) Dra. Ida Fithriani, M.Si, selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan semangat dan masukan selama saya menjalani masa kuliah.
- (3) Dr. Yudi Satria, MT, selaku Ketua Departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc. Tech, selaku Sekretaris Departemen, dan Dr. Dian Lestari, selaku Koordinator Pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
- (4) Seluruh staf pengajar di Matematika UI atas ilmu pengetahuan telah kalian berikan.
- (5) Seluruh karyawan di departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan.
- (6) Ayah dan mama tercinta yang tak pernah lelah mengingatkan, menguatkan dan memberikan do'a terbaiknya.
- (7) Adik-adikku Yulia Vawitrie, Intan Permata Sari, Hafidhatul Faizah terima kasih atas pengingatan-pengingatan dan kepercayaannya.
- (8) Saudara-saudara KIAM 07, *Little Stars 07* dan *Fathan Mubina 07* selaku saudara seperjuangan. Terima kasih atas *ukhuwah* yang telah kalian berikan.

- (9) Fadiah Sabila, Rani Afrianti, Amelina, Widya Puspita Sari, teman-teman MP FMIPA UI 2010 dan *core team* akademis profesi 2011 selaku teman-teman seperjuangan. Terima kasih atas dukungan dan do'a yang telah kalian berikan.
- (10) BPH HMD Matematika 2009 dan BPH CT BEM FMIPA UI 2010, terima kasih atas ukiran kenangan perjuangan yang indah yang pernah kalian ciptakan.
- (11) Saudariku Miftahul Jannah, kak Idha, kak Anti, dan Aniatul yang telah menjadi tempat curhat penulis selama menulis skripsi ini.
- (12) Atika Dwi Farini, Yebi Yuriandala, Nurzakiah, dan Muhammad Ihsan Salahuddin yang telah memberikan bantuannya dalam mencari referensi selama di Yogyakarta.
- (13) Adi, Hikmah, Zul, Siti, Putri, Andi, Siska, Iki, Syahrul, Yos, kak Stefano, kak Tika, dan Dheny terima kasih atas kebersamaannya selama menyusun skripsi ini.
- (14) Seluruh teman-teman generasi 7 SMAN Plus Provinsi Riau.
- (15) Angkatan 2007 matematika UI Ashari, Arif, Anggun, Adit, Afni, Anjar, Bowo, Danar, Dian, Dita, Farah, Ferdy, Fauzan, Gamar, Hanif, Isna, Lois, Manda, Nedia, Nora, Mitha, Putu, Riyanto, Shafira, Shafa, Sisca, Stefi, Widi, Widya, Winda, Wiwi, Yaqozho, yang telah memberikan pengalaman sekolah dan perkuliahan yang tidak terlupakan.
- (16) Saudari-saudariku di “lingkaran surga” yang selalu mengingat dan menyemangati setiap pekannya. Terima kasih atas perhatiannya.
- (17) Kepada semua senior dan adik-adik di Matematika UI angkatan 2004, 2005, 2006, 2008,2009, dan 2010 terima kasih atas semangat dan dukungannya.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca dan pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2011

## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Misdawita  
NPM : 0706163123  
Program Studi : Sarjana Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis karya : Skripsi

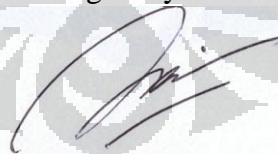
demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penaksiran Parameter Model Multinomial Probit Berdasarkan Konsep Utilitas

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 15 Desember 2011  
Yang menyatakan



(Misdawita)

## ABSTRAK

Nama : Misdawita  
Program Studi : Matematika  
Judul : Penaksiran Parameter Model Multinomial Probit Berdasarkan Konsep Utilitas

Model pilihan diskrit adalah model yang biasa digunakan untuk memodelkan pilihan. Model pilihan diskrit tersebut dapat diturunkan dari fungsi utilitas. Salah satu model pilihan diskrit yang sering digunakan adalah model multinomial probit. Model multinomial probit mengasumsikan bahwa komponen error pada fungsi utilitas berdistribusi normal standar. Model Multinomial Probit berbentuk integral lipat (J-1) dengan J adalah banyaknya alternatif pilihan, dan parameter-parameter yang akan ditaksir berada pada batas-batas integral model tersebut, oleh karena itu dibutuhkan suatu metode simulasi untuk menghitung nilai dari taksiran tersebut. Parameter pada model multinomial probit ditaksir dengan menggunakan metode *maximum simulated likelihood estimation* (MSLE) yang berdasarkan pada simulasi GHK.

Kata Kunci : Pilihan diskrit, Utilitas, Multinomial probit, MSLE, Simulasi GHK.  
xiii + 86 halaman ; 3 tabel  
Daftar Pustaka : 16 (1974-2011)



## ABSTRACT

Name : Misdawita  
Study Program : Mathematics  
Title : Estimation of Parameters of Multinomial Probit Model Based  
Utility Concept

Discrete choice model is a model commonly used to model choice. Discrete choice model can be derived from utility functions. One model commonly used discrete choice model is multinomial probit. Multinomial probit model assumes that the errors component in the utility function of standard normal distribution. Multinomial probit models shaped folding integral  $(J-1)$  with  $J$  is the number of alternative options and the parameters to be estimated to be at the limits of the integral model, and therefore requires a simulation method to calculate the value of those estimates. Parameters in the multinomial probit model was estimated using the method of simulated maximum likelihood estimation (MSLE) is based on the GHK simulation.

Keywords : Discrete choice, Utility, Multinomial Probit, MSLE, GHK simulation.

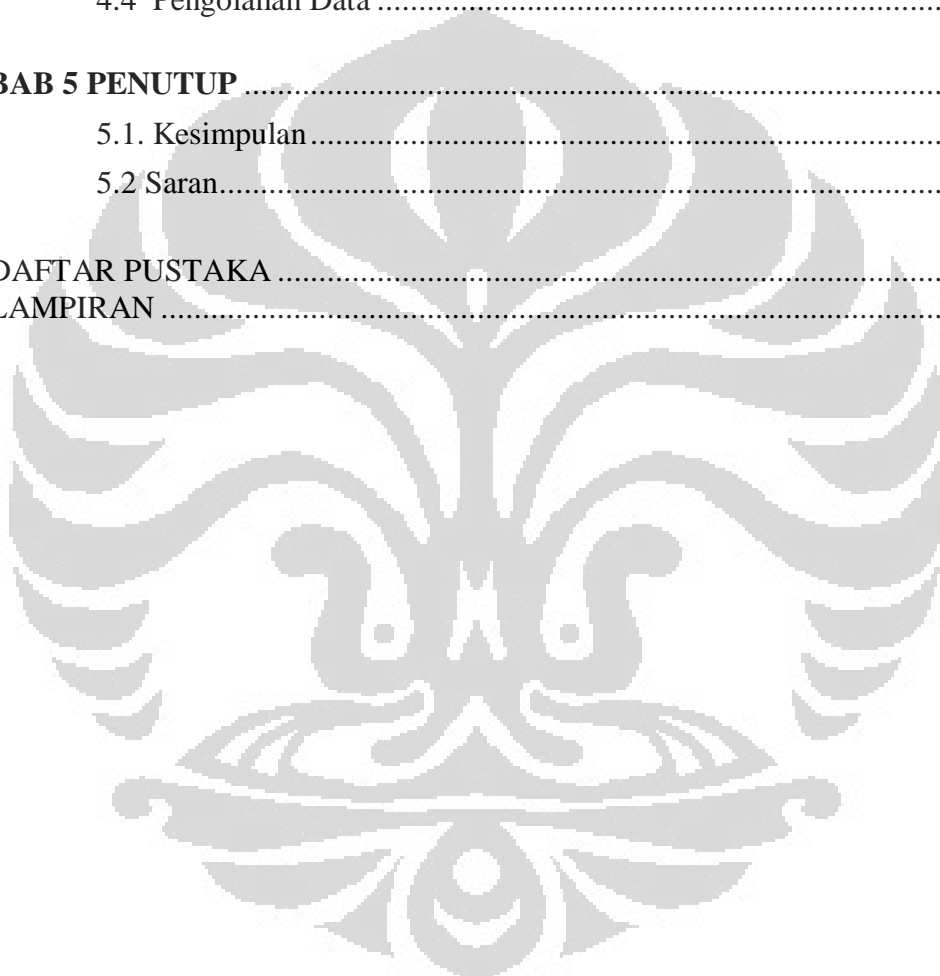
xiii + 86 pages ; 3 table

Bibliography : 16 (1974-2011)

## DAFTAR ISI

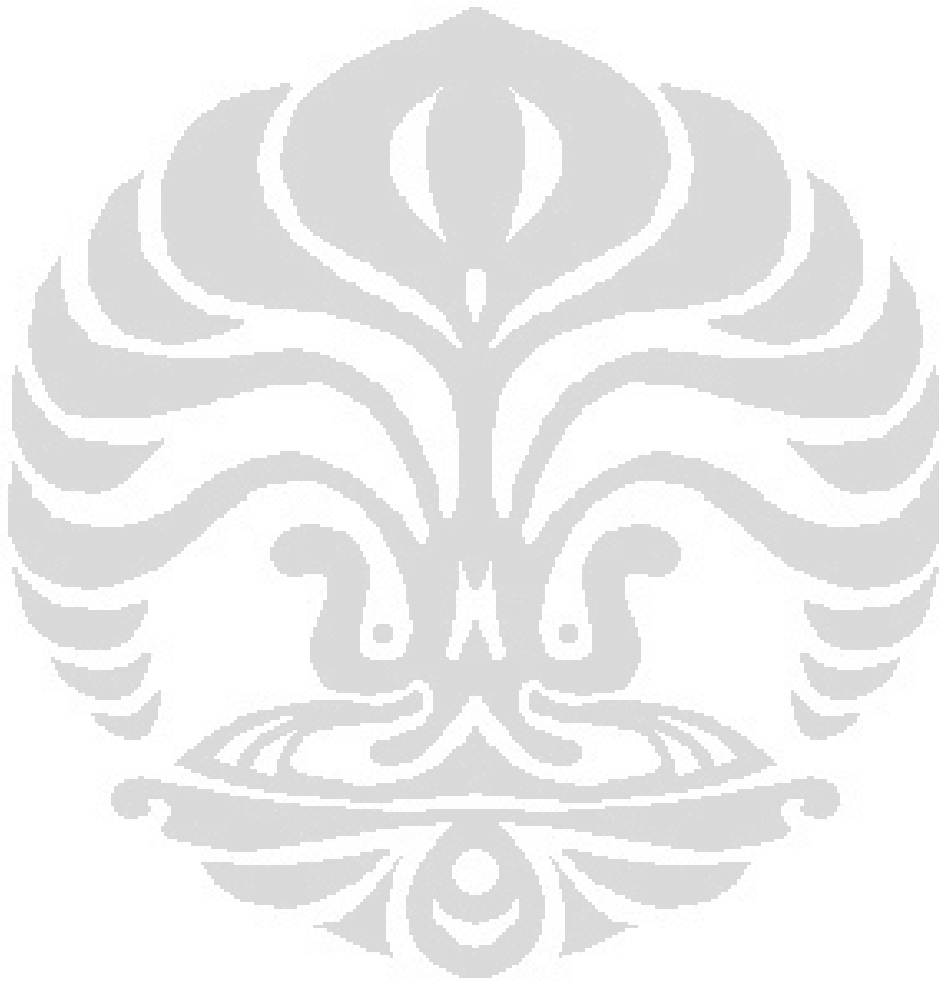
|   |           |
|---|-----------|
| HALAMAN JUDUL.....  | ii        |
| HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS .....   | iii       |
| HALAMAN PENGESAHAN .....  | iv        |
| KATA PENGANTAR .....  | v         |
| HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI .....  | vii       |
| ABSTRAK .....   | viii      |
| DAFTAR ISI .....  | x         |
| DAFTAR TABEL .....  | xii       |
| DAFTAR LAMPIRAN.....  | xiii      |
| <b>BAB 1 PENDAHULUAN.....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Latar Belakang.....   | 1         |
| 1.2 Perumusan Masalah .....   | 2         |
| 1.3 Tujuan Penulisan.....   | 3         |
| 1.4 Pembatasan Masalah.....   | 3         |
| 1.5 Sistematika Penulisan.....  | 3         |
| <b>BAB 2 LANDASAN TEORI.....</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1 Konsep Dasar Dalam Proses Penentuan Pilihan.....  | 4         |
| 2.2 Teori Utilitas.....   | 7         |
| 2.3 Distribusi Normal.....  | 10        |
| 2.4 Distribusi Uniform .....  | 11        |
| 2.5 Metode Maksimum Likelihood .....  | 11        |
| 2.6 Model Multinomial Logit .....   | 12        |
| 2.7 Matriks.....  | 17        |
| 2.8 Faktorisasi Matriks.....  | 20        |
| <b>BAB 3 PEMBAHASAN .....</b>   | <b>27</b> |
| 3.1 Model Pilihan Diskrit .....   | 27        |
| 3.2 Model Probit .....  | 29        |
| 3.2.1 Model Multinomial Probit .....  | 29        |
| 3.2.1.1 <i>Maximum Likelihood Estimator (MLE)</i> untuk model multinomial probit .....            | 33        |
| 3.2.1.2 <i>Maximum Simulated Likelihood Estimator (MSLE)</i> untuk model multinomial probit ..... | 34        |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.2.1.3 Metode Simulasi GHK untuk model multinomial probit ..... | 35        |
| 3.2.1.3 Simulasi GHK dalam MSLE.....                             | 38        |
| 3.2.1.4. Metode Iterasi untuk mencari taksiran $\theta$ .....    | 44        |
| <b>BAB 4 CONTOH PENERAPAN.....</b>                               | <b>49</b> |
| 4.1 Permasalahan .....   | 49        |
| 4.2. Data .....  | 49        |
| 4.3 Tujuan.....  | 50        |
| 4.4 Pengolahan Data .....  | 50        |
| <b>BAB 5 PENUTUP .....</b>                                       | <b>56</b> |
| 5.1. Kesimpulan.....   | 56        |
| 5.2 Saran.....   | 56        |
| DAFTAR PUSTAKA.....  | 58        |
| LAMPIRAN .....   | 60        |



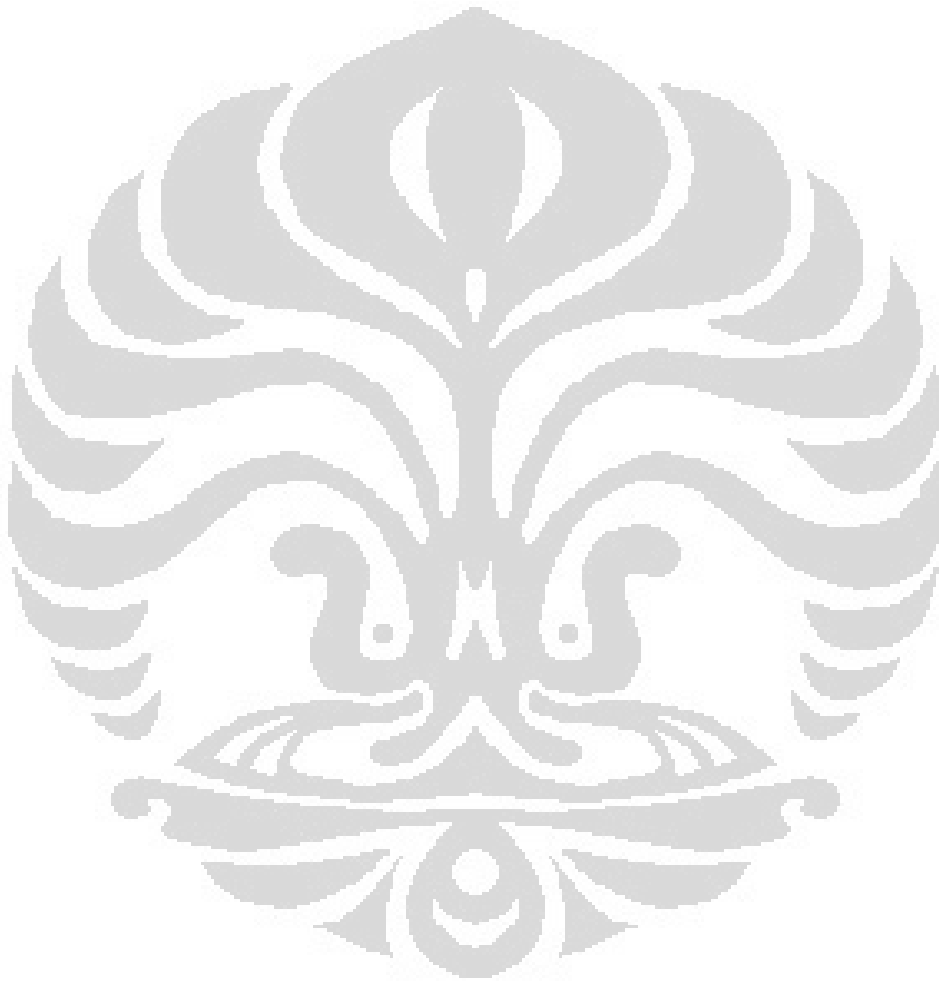
## DAFTAR TABEL

|   |    |
|---|----|
| Tabel 3.1 Jenis-Jenis Model Pilihan Diskrit .....   | 28 |
| Tabel 4.1 Ouput taksiran parameter model multinomial probit dengan software<br>STATA..... | 53 |
| Tabel 4.2 Probabilitas orang pertama memilih setiap pilihan .....                         | 55 |



## DAFTAR LAMPIRAN

|                  |    |
|------------------|----|
| Lampiran 1 ..... | 60 |
| Lampiran 2 ..... | 62 |
| Lampiran 3 ..... | 65 |
| Lampiran 4 ..... | 66 |
| Lampiran 5.....  | 67 |



# BAB 1 PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia dihadapkan dengan berbagai macam pilihan. Sebagai contoh, seorang pelanggan yang memilih suatu barang dari berbagai macam barang yang ada dalam berbelanja, sebuah perusahaan yang memilih mesin mana yang harus mereka gunakan dalam produksi, seorang pelajar memilih jawaban mana yang tepat dalam ujian pilihan berganda, dan masih banyak lagi jenis-jenis pilihan yang harus dipilih oleh masyarakat. Model pilihan diskrit dapat digunakan untuk memodelkan pilihan tersebut. Model pilihan diskrit dapat menjelaskan pilihan mana yang akan dipilih oleh pembuat keputusan dari berbagai alternatif pilihan yang ada.

Pembuat keputusan dapat berupa perorangan, rumah tangga, perusahaan atau unit pembuat keputusan yang lain. Sedangkan, alternatif pilihan dapat berupa barang, alat transportasi, pendidikan, alat-alat produksi, atau alternatif pilihan yang lain.

Untuk bisa masuk ke dalam kerangka kerja model pilihan diskrit, sekumpulan alternatif yang disebut *choice set*, membutuhkan 3 karakteristik yang harus terpenuhi. Pertama, alternatif tersebut harus *mutually exclusive* dari perspektif pembuat keputusan. Artinya, ketika pembuat keputusan telah memilih salah satu alternatif tertentu berarti pembuat keputusan tersebut tidak akan memilih alternatif pilihan lain. Jadi, pembuat keputusan hanya dapat memilih satu alternatif dalam suatu *choice set*. Kedua, alternatif pilihan tersebut harus *exhaustive*, artinya semua alternatif pilihan yang mungkin, masuk ke dalam *choice set*. Ketiga, jumlah dari seluruh alternatif pilihan harus berhingga (Train, 2003)

Sebagian besar model pilihan diskrit berdasarkan hipotesis *Random Utility Maximization (RUM)*. Dimana dalam model yang berdasarkan RUM tersebut, model multinomial logit telah banyak digunakan. Komponen acak dari utilitas dengan alternatif yang berbeda dalam model multinomial logit diasumsikan

*Independent Identically Distributed (I.I.D)* dengan distribusi nilai ekstrim tipe 1 atau sering disebut dengan distribusi Gumbel. (Train, 2003)

Namun, ternyata model logit memiliki 3 keterbatasan. Pertama, model logit tidak dapat menerangkan *random taste variation*. Kedua, model logit terbatas pada asumsi *Independent of Irrelevant Alternatives (IIA)*. Ketiga, model logit tidak dapat digunakan untuk data panel ketika faktor yang tidak terobservasi berkorelasi dari waktu ke waktu untuk setiap pembuat keputusan.

Untuk memperbaiki keterbatasan tersebut dikembangkanlah model *Generalized Extreme Value (GEV)* atau biasa dikenal dengan nama model *nested logit*. Model *nested logit* ini dapat menyelesaikan batasan kedua, tetapi untuk batasan pertama dan ketiga tidak bisa diselesaikan.

Oleh karena itu, dibutuhkan suatu model pilihan diskrit yang lain yang dapat menghadapi ketiga pembatasan tersebut. Model yang mungkin adalah model probit, karena model probit dapat menghadapi masalah *random taste variation*, model ini juga tidak perlu asumsi *Independent of Irrelevant Alternatives (IIA)*, dan model probit inipun dapat dipakai untuk data panel dengan adanya korelasi antar faktor yang tidak terobservasi.

Model pilihan diskrit dapat dibentuk dari suatu fungsi utilitas. Utilitas adalah kepuasan atau kenikmatan yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsi suatu barang. Fungsi utilitas dinyatakan dalam dua komponen yaitu komponen deterministik dan komponen stokhastik. Pada model probit, semua komponen error (stokhastik) pada fungsi utilitas diasumsikan berdistribusi normal standar.

## 1.2 Perumusan Masalah

Adapun perumusan masalah dalam skripsi ini adalah :

1. Bagaimana pembentukan model probit dengan menggunakan konsep utilitas?
2. Bagaimana penaksiran parameter model probit?

### 1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Menjelaskan pembentukan model probit dengan menggunakan konsep utilitas.
2. Mencari taksiran parameter dari model probit dengan menggunakan metode *maximum simulated likelihood estimation* yang berdasarkan pada simulasi GHK.

### 1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah pada skripsi ini adalah:

1. Model probit yang dibahas adalah model multinomial probit.
2. Model multinomial probit diturunkan dengan menggunakan konsep maksimum utilitas.
3. Metode penaksiran yang digunakan adalah metode *maximum simulated likelihood estimation* yang berdasarkan pada simulasi GHK untuk menyelesaikannya.
4. Pada skripsi ini tidak dibahas tentang uji perbandingan model.

### 1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi lima bab, yaitu :

- BAB 1    Membahas tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan
- BAB 2    Membahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam membentuk dan menaksir parameter pada model multinomial probit.
- BAB 3    Membahas tentang pembentukan model multinomial probit dan penaksiran parameter dari model tersebut.
- BAB 4    Membahas contoh penerapan dari model multinomial probit
- BAB 5    Berisi kesimpulan dan saran yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini.



## **BAB 2**

### **LANDASAN TEORI**

Pada bab ini akan dibahas teori-teori dasar yang akan digunakan dalam penyusunan skripsi ini.

#### **2.1 Konsep Dasar Dalam Proses Penentuan Pilihan**

Dalam kehidupan sehari-hari, setiap orang dihadapkan dengan berbagai macam alternatif pilihan dengan konteks yang berbeda-beda, baik dalam pilihan pendidikan, transportasi, investasi, bidang pekerjaan maupun pilihan yang lain. Dalam memilih suatu alternatif pilihan, setiap orang akan mempertimbangkan semua alternatif pilihan yang tersedia, kemudian mempertimbangkan sifat-sifat dari alternatif pilihan tersebut, baik keunggulannya, kelemahannya ataupun spesifikasi dari pilihan tersebut.

Menurut Koopelman dan Bhat (2006), pada dasarnya terdapat 4 unsur dalam proses penentuan pilihan antara lain pembuat keputusan, alternatif pilihan, sifat-sifat dari alternatif pilihan, dan aturan keputusan.

##### **2.1.1 Pembuat Keputusan**

Pembuat keputusan bisa berupa individu, kelompok, ataupun institusi, tergantung dari situasi, tempat ataupun permasalahannya. Pembuat keputusan yang berupa individu dapat menghadapi pilihan seperti sekolah, pekerjaan, alat transportasi, atau mobil yang akan dibeli. Pembuat keputusan yang berupa kelompok atau institusi dapat menghadapi pilihan seperti pilihan kebijakan *financial* yang dilakukan oleh bank, jenis kebijakan yang dilakukan pemerintah dalam menanggulangi kemiskinan, ataupun pilihan lokasi pembangunan kantor cabang yang dilakukan suatu industri.

Karakteristik umum dalam penelitian tentang pilihan adalah pembuat keputusan yang berbeda akan menghadapi situasi pilihan yang berbeda dan memiliki selera atau kesukaan yang berbeda pula. Sebagai contoh dalam pilihan

jenis mobil yang akan dibeli, kelompok pilihan mobil yang akan dibeli dua orang yang memiliki penghasilan yang berbeda akan berbeda juga.

### 2.1.2 Alternatif pilihan

Pembuat keputusan memilih pilihan dari himpunan alternatif pilihan yang tersedia. Himpunan alternatif pilihan yang tersedia akan berbeda-beda tergantung dari lingkungannya. Sebagai contoh, pilihan kereta listrik dalam himpunan alternatif pilihan transportasi hanya ada dalam wilayah Jabodetabek, namun untuk wilayah Riau pilihan tersebut tidak tersedia.

Himpunan pilihan juga dapat ditentukan oleh keputusan individu atau fokus penelitian dari pembuat kebijakan. Sebagai contoh, penelitian mengenai tipe universitas maka pilihannya bisa berupa universitas negeri atau swasta.

### 2.1.3 Sifat-Sifat Alternatif Pilihan

Alternatif pilihan ditandai oleh sekumpulan sifat-sifat dari alternatif tersebut. Daya tarik dari suatu alternatif pilihan ditentukan oleh nilai dari atributnya (sifat-sifatnya). Atribut atau sifat-sifat dari alternatif mungkin berupa generik (berlaku untuk semua alternatif) atau bisa berupa alternatif-spesifik (hanya berlaku untuk salah satu atau sebagian alternatif). Sebagai contoh, daya tarik dari himpunan alternatif pilihan tentang alat transportasi ditentukan oleh atribut dari alat transportasi. Atribut tersebut meliputi biaya atau tarif, lama perjalanan, lama tunggu, tingkat kenyamanan, dan lain-lain.

Salah satu alasan penting dari pengembangan model pilihan diskrit adalah untuk mengevaluasi pengaruh dari tindakan terhadap suatu kebijakan. Untuk mendapatkan hal tersebut diperlukan identifikasi terhadap atribut yang nilai-nilainya dapat diubah melalui kebijakan yang pro-aktif. Sebagai contoh, pilihan mengenai jenis barang yang dijual oleh suatu perusahaan. Salah satu atribut dari barang yang akan dijual adalah harga barang. Jika harga barang terlalu tinggi sehingga barang kurang laku maka perusahaan bisa menurunkan harga jualnya, ataupun sebaliknya.

Himpunan semua pilihan atau alternatif disebut *choice set*. *Choice set* memenuhi 3 sifat. Pertama, semua pilihan harus *mutually exclusive* dari perspektif

pembuat keputusan. Artinya, ketika pembuat keputusan telah memilih salah satu alternatif tertentu berarti pembuat keputusan tersebut tidak akan memilih alternatif pilihan yang lain. Kedua, alternatif pilihan tersebut harus *exhaustive*, artinya semua alternatif pilihan yang mungkin, masuk ke dalam *choice set*. Ketiga, jumlah dari seluruh alternatif pilihan harus berhingga.

#### 2.1.4 Aturan Keputusan

Untuk memilih suatu pilihan yang terdiri dari dua alternatif atau lebih, pembuat keputusan menggunakan suatu aturan keputusan. Aturan tersebut dapat berupa suatu mekanisme untuk memproses informasi dan mengevaluasi alternatif, mencari variasi, kebiasaan, ataupun proses lainnya yang dapat berbentuk rasional (masuk akal) ataupun irasional (tidak masuk akal).

Salah satu contoh aturan keputusan yang tidak masuk akal adalah mengikuti kehendak pemimpin atau mengikuti kebiasaan dalam memilih. Seorang pembuat keputusan dikatakan menggunakan suatu aturan keputusan yang masuk akal jika aturan tersebut memenuhi 2 konsep dasar pembentukan yaitu, konsistensi dan transitivitas. Yang dimaksud dengan konsep konsistensi adalah pembuat keputusan akan memilih pilihan yang sama di bawah kondisi yang sama, dan yang dimaksud dengan konsep transitivitas adalah suatu aturan alternatif berdasarkan tingkat kesukaan. Misalkan alternatif A lebih disukai daripada alternatif B, dan alternatif B lebih disukai daripada alternatif C, maka alternatif A lebih disukai daripada alternatif C.

Salah satu aturan keputusan yang sering digunakan dalam model pilihan diskrit adalah maksimalisasi utilitas atau utilitas maksimum. Jadi, pembuat keputusan memilih suatu alternatif pilihan yang memiliki utilitas paling maksimum. Aturan maksimalisasi utilitas dibentuk berdasarkan dua konsep dasar, yaitu:

1. Atribut dari masing-masing alternatif pilihan dapat diwakili oleh suatu nilai skalar.
2. Pembuat keputusan akan memilih alternatif pilihan yang utilitasnya paling maksimum.

## 2.2 Teori Utilitas

Utilitas atau nilai guna didefinisikan sebagai kepuasan atau kenikmatan yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsi suatu barang. Dalam bahasa ekonomi, konsep utilitas mengacu pada skor numerik yang mewakili kepuasan yang diperoleh seorang konsumen dari mengkonsumsi suatu barang. Jika kepuasan yang diterima seorang semakin tinggi maka makin tinggi nilai gunanya atau utilitasnya. Sebagai contoh, jika membeli segelas susu membuat seseorang lebih gembira dibandingkan membeli segelas kopi, maka dapat dikatakan bahwa segelas susu memiliki utilitas lebih tinggi bagi orang tersebut dibandingkan segelas kopi.

Utilitas dibedakan menjadi dua yaitu utilitas total dan utilitas marginal.

### 1. Utilitas total

Utilitas total atau nilai guna total didefinisikan sebagai jumlah seluruh kepuasan yang diperoleh dari mengkonsumsi sejumlah barang tertentu. Nilai guna total dari mengkonsumsi 5 buah apel adalah jumlah seluruh kepuasan yang diperoleh dari memakan semua apel tersebut.

### 2. Utilitas marginal

Utilitas marginal didefinisikan sebagai penambahan atau pengurangan kepuasan sebagai akibat dari penambahan (atau pengurangan) penggunaan satu unit barang. Nilai guna marginal dari apel kelima adalah penambahan kepuasan yang diperoleh dari memakan buah apel yang kelima.

#### 2.2.1 Hipotesis Utama Utilitas

Hipotesis utama utilitas atau dikenal dengan hukum utilitas marginal yang semakin menurun, menyatakan bahwa tambahan nilai guna yang akan diperoleh seseorang dari mengkonsumsi suatu barang akan menjadi semakin sedikit apabila orang tersebut terus menerus menambah konsumsinya atas barang tersebut.

#### 2.2.2 Pemaksimalan Nilai Guna

Salah satu asumsi penting dalam teori ekonomi adalah setiap orang akan berusaha untuk memaksimalkan kepuasan yang dapat dinikmatinya. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa setiap orang akan memaksimalkan utilitas dari

barang-barang yang dikonsumsi. Jika barang yang dikonsumsi hanya satu jenis maka utilitas dari barang tersebut akan mencapai maksimum pada saat utilitas total dari barang tersebut mencapai tingkat maksimum.

### 2.2.3 Fungsi Utilitas

Dari definisi utilitas di atas maka utilitas dapat dinyatakan sebagai fungsi dari atribut alternatif pilihan dan karakteristik pembuat keputusan. Karena nilai utilitas sulit diketahui maka bentuk dari fungsi utilitas juga sulit dicari. Mcfadden(1974) memisalkan bentuk fungsi utilitas adalah linear dan menurunkan model multinomial logit (MNL) dari bentuk utilitas yang linear tersebut.

Misalkan terdapat  $n = 1, 2, \dots, N$  pembuat keputusan yang diobservasi sebanyak  $T$  respon dan  $j = 1, 2, \dots, J$  adalah banyaknya pilihan, maka  $U_{njt}$  merupakan fungsi utilitas pilihan ke- $j$  untuk pembuat keputusan ke- $n$  pada respon ke- $t$ . Karena tidak semua atribut dari alternatif pilihan dan karakteristik pembuat keputusan dapat diobservasi maka fungsi utilitas dinyatakan dalam 2 komponen yaitu komponen deterministik  $V_{njt}$  dan komponen stokhastik  $\varepsilon_{njt}$  sehingga fungsi utilitasnya:

$$U_{njt} = V_{njt} + \varepsilon_{njt} \quad (2.1)$$

dimana,  $U_{njt}$ : utilitas pilihan ke- $j$  untuk pembuat keputusan ke- $n$  pada respon ke- $t$

$V_{njt}$ : komponen deterministik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang dapat diobservasi.

$\varepsilon_{njt}$ : komponen stokhastik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang tidak dapat diobservasi.

Komponen deterministik  $V_{njt}$  dapat dimisalkan linier,

$$V_{njt} = \alpha_{jt} + \beta'_{jt} \mathbf{X}_n + \gamma_t' \mathbf{Z}_{njt} \quad (2.2)$$

dimana,  $\alpha_{jt}$ : parameter konstanta untuk pilihan ke- $j$ .

$\beta_{jt}$  : vektor parameter untuk atribut pembuat keputusan pada pilihan ke-j untuk respon ke-t

$X_n$  : vektor variabel bebas yang menyatakan atribut pembuat keputusan ke-n

$\gamma_t$  : vektor parameter untuk atribut pilihan pada respon ke-t.

$Z_{njt}$  : vektor variabel bebas untuk atribut pilihan ke-j pada pembuat keputusan ke-n untuk respon ke-t

Diasumsikan, variabel random  $U_{njt}$  memiliki sifat:

1. Kontinu,  $U_{njt} \in \mathfrak{R}$ , ( $\mathfrak{R}$ : real)
2. *Completeness*, yaitu untuk sembarang  $U_{njt}$  dan  $U_{nkt}$  dengan  $j \neq k$ , akan memiliki salah satu sifat  $U_{njt} > U_{nkt}$  atau  $U_{njt} < U_{nkt}$
3. *Transitivity*, disebut juga “*rationality*”. Jika,  $U_{nst} < U_{njt}$  dan  $U_{njt} < U_{nkt}$  maka  $U_{nst} < U_{nkt}$ .

Beberapa sifat utilitas yang berkaitan dengan spesifikasi dan estimasi parameter dalam model pilihan diskrit adalah sifat “*Only differences in utility matter*”, penambahan dengan konstanta tertentu terhadap semua  $U_{njt}$  tidak akan merubah utilitas tertingginya (peringkat utilitas). Sifat yang lain adalah “*The scale of utility is arbitrary*”, dengan mengalikan setiap  $U_{njt}$  dengan bilangan positif  $\lambda$  tidak akan merubah peringkat utilitasnya.

Misalkan pilihan  $i$  adalah sembarang pilihan dimana ( $1 \leq i \leq J$ ). Jika  $U_{nit}$  merupakan fungsi utilitas pilihan ke- $i$  untuk pembuat keputusan ke- $n$  pada respon ke- $t$  maka probabilitas pembuat keputusan ke- $n$  memilih alternatif pilihan  $i$  pada respon ke- $t$  ( $Y_{nt} = i$ ) yang dinotasikan dengan  $P_{nit}$  adalah probabilitas  $U_{nit}$  merupakan utilitas terbesar dibandingkan  $U_{n1t}, U_{n2t}, \dots, U_{nJt}$  atau dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 P_{nit} &= \Pr(Y_{nt} = i) = \Pr(U_{nit} > U_{njt}, \forall j : j \neq i) \\
 &= \Pr(V_{nit} + \varepsilon_{nit} > V_{njt} + \varepsilon_{njt}, \forall j : j \neq i) \\
 &= \Pr(V_{nit} - V_{njt} > \varepsilon_{njt} - \varepsilon_{nit}, \forall j : j \neq i) \\
 &= \Pr(V_{njt} < V_{nit} - \varepsilon_{njt} + \varepsilon_{nit}, \forall j : j \neq i)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

### 2.3 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah model distribusi kontinu yang paling penting dalam teori probabilitas. Distribusi normal diterapkan dalam berbagai permasalahan. Dua parameter yang menentukan distribusi normal adalah rata-rata atau mean ( $\mu$ ) dan standar deviasi ( $\sigma$ ). Selanjutnya, variabel acak  $X$  berdistribusi normal dengan mean  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  dinotasikan dengan  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Fungsi kerapatan probabilitas (*p.d.f*) dari distribusi normal diberikan dalam rumus berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

dimana  $\mu$  adalah rata-rata (mean),  $\sigma$  adalah standar deviasi dan  $\pi = 3,14159 \dots$

Fungsi pembangkit momen (*m.g.f*) dari distribusi normal adalah sebagai berikut,

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad (2.5)$$

Untuk penghitungan probabilitas  $\Pr(X \leq x)$ , digunakan standarisasi ke distribusi normal standar dengan  $\mu = 0$  dan variansi  $\sigma^2 = 1$  atau  $Z \sim N(0,1)$ , dengan mendefinisikan,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq x) &= \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Fungsi kerapatan probabilitas (*p.d.f*) dari distribusi normal standar menjadi,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

dan fungsi pembangkit momen (*m.g.f*) nya adalah,

$$M(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

## 2.4 Distribusi Uniform

Misalkan  $X$  variabel random yang berdistribusi uniform jika dan hanya jika  $X$  mempunyai fungsi densitas seperti berikut:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.6)$$

dimana  $-\infty < x < \infty$ .

Distribusi ini dilambangkan dengan  $X \sim U(a, b)$

Selanjutnya, mean, variansi dan momen dari distribusi tersebut adalah:

1. Mean =  $E(X) = \frac{a+b}{2}$
2. Variansi =  $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. Momen =  $M_x(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$

## 2.5 Metode Maksimum Likelihood

Misalkan terdapat sampel acak  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  dari suatu distribusi yang memiliki pdf  $f(y; \theta): \theta \in \Omega$ , dimana  $\theta$  merupakan suatu parameter yang tidak diketahui dan  $\Omega$  adalah ruang parameter.

Karena  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  adalah sampel acak, maka pdf bersama dari  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  adalah :

$$f(y_1, \dots, y_k; \theta) = f(y_1; \theta) \dots f(y_k; \theta) \quad (2.7)$$

Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai pdf bersama dari  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  yang dapat dianggap sebagai fungsi dari  $\theta$ . Misalkan fungsi *likelihood* dinotasikan sebagai  $L(\theta; y_1, \dots, y_n) = L(\theta)$ , maka

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(y_1, \dots, y_k; \theta) \\ &= f(y_1; \theta) \dots f(y_k; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^k f(y_i; \theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dalam metode penaksiran maksimum *likelihood*, taksiran dari  $\theta$  diperoleh dengan menemukan nilai  $\theta$  itu sendiri yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misalkan dapat ditemukan suatu fungsi nontrivial dari  $y_1, \dots, y_k$  yang disebut dengan  $u(y_1, \dots, y_k)$ , sedemikian sehingga ketika  $\theta$  diganti dengan  $u(y_1, \dots, y_k)$



fungsi *likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta})$  akan bernilai maksimum, maka statistik  $u(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  merupakan penaksir maksimum *likelihood* (*Maximum Likelihood Estimation* (*MLE*)) dari  $\theta$  dan dinotasikan dengan  $u(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

Mencari nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimumkan fungsi  $L(\boldsymbol{\theta})$  akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimumkan fungsi  $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ , sebut  $l(\boldsymbol{\theta})$ , sehingga baik  $L(\boldsymbol{\theta})$  maupun  $l(\boldsymbol{\theta})$  dapat digunakan untuk mencari nilai  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Jadi, nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimumkan  $l(\boldsymbol{\theta})$  dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan  $\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$  atau  $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$ .

## 2.6 Model Multinomial Logit

Model multinomial logit (MNL) merupakan perluasan dari model logit dikotomi. Pada model logit dikotomi, variabel tak bebas terdiri dari 2 kategori (biner atau dikotomi). Sedangkan pada model multinomial logit, variabel tak bebas terdiri dari 3 kategori atau lebih (politomi). Pada model multinomial logit ini diperlukan beberapa asumsi. Pertama, error dalam komponen utilitas berdistribusi gumbel. Kedua, error antar alternatif pilihan saling bebas. Ketiga, error antar individu saling bebas.

Model multinomial logit biasa digunakan untuk memodelkan pilihan, dimana pilihannya tidak terurut dan terdiri dari 3 kategori atau lebih. McFadden (1974), Jonas A dan Jan U (2010) membuktikan bahwa model multinomial logit dapat diturunkan dari konsep utilitas, dimana individu pembuat keputusan diobservasi 1 kali ( $T=1$ ).

### 2.6.1 Pembentukan Model Multinomial logit

Misalkan terdapat  $j = 1, 2, \dots, J$  pilihan dan  $n = 1, 2, \dots, N$  pembuat keputusan yang diobservasi sebanyak 1 kali ( $T=1$ ), maka  $U_{nj}$  merupakan fungsi utilitas pilihan ke- $j$  untuk pembuat keputusan ke- $n$ . Fungsi utilitas dapat dinyatakan sebagai:

$$U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj}$$

dimana,  $U_{nj}$  : utilitas pilihan ke-j untuk individu ke-n

$V_{nj}$  : komponen deterministik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang dapat diobservasi.

$\varepsilon_{nj}$ : komponen stokastik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang tidak dapat diobservasi.

Asumsikan  $\varepsilon_{nj}$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) mempunyai distribusi kontinu dan saling bebas antar individu pembuat keputusan dan antar alternatif.

Jika  $U_{ni}$  merupakan fungsi utilitas pilihan ke-i untuk pembuat keputusan ke-n, maka probabilitas pembuat keputusan ke-n memilih alternatif pilihan ke-i ( $Y_n = i$ ) yang dinotasikan dengan  $P_{ni}$  adalah probabilitas  $U_{ni}$  merupakan utilitas terbesar dibandingkan  $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nJ}$  atau dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \Pr(Y_n = i) = \Pr(U_{ni} > U_{nj}, \forall j \in J : j \neq i) \\ &= \Pr(V_{ni} + \varepsilon_{ni} > V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \forall j \in J : j \neq i) \\ &= \Pr(V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni} > \varepsilon_{nj}, \forall j \in J : j \neq i) \\ &= \Pr(\varepsilon_{nj} < V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}, \forall j \in J : j \neq i) \end{aligned} \quad (2.9)$$

karena  $\varepsilon_{nj}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, J$ ) variabel random kontinu, dan  $-\infty < \varepsilon_{nj} < \infty$  sehingga:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \Pr\{(\varepsilon_{n1} < V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n2} < V_{ni} - V_{n2} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n3} < V_{ni} - V_{n3} + \varepsilon_{ni}), \dots, \\ &\quad (\varepsilon_{n(i-1)} < V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n(i+1)} < V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}), \dots, \\ &\quad (\varepsilon_{nJ} < V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni})\} \\ &= F\{(V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}), (V_{ni} - V_{n2} + \varepsilon_{ni}), (V_{ni} - V_{n3} + \varepsilon_{ni}), \dots, (V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}), \\ &\quad (V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}), \dots, (V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni})\} \\ &= \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{n(i-1)}, \varepsilon_{n(i+1)}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \\ &= \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}} \left\{ \int_{\varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{ni} \right\} d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \end{aligned}$$

karena  $-\infty < \varepsilon_{ni} < \infty$  maka,

$$= \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots$$

$$\int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n1} + \varepsilon_{ni}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{ni} \right\} d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ}$$

karena batas dari  $\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}$  memuat  $\varepsilon_{ni}$  maka,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots$$

$$\int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n1} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \right\} d\varepsilon_{ni}$$

karena  $\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}$  saling bebas maka,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n1} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}) d\varepsilon_{n1} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n(i-1)}) d\varepsilon_{n(i-1)} \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n(i+1)}) d\varepsilon_{n(i+1)} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{nJ} \right\} f(\varepsilon_{ni}) d\varepsilon_{ni}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pr(\varepsilon_{n1} < V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}) \cdot \Pr(\varepsilon_{n2} < V_{ni} - V_{n2} + \varepsilon_{ni}) \cdot \right.$$

$$\left. \Pr(\varepsilon_{n3} < V_{ni} - V_{n3} + \varepsilon_{ni}) \dots \Pr(\varepsilon_{n(i-1)} < V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}) \cdot \right.$$

$$\left. \Pr(\varepsilon_{n(i+1)} < V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}) \dots \Pr(\varepsilon_{nJ} < V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}) \right\}$$

$$f(\varepsilon_{ni}) d\varepsilon_{ni}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \Pr(\varepsilon_{nj} < V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}) f(\varepsilon_{ni}) d\varepsilon_{ni}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \Pr(\varepsilon_{nj} < V_{ni} - V_{nj} + x) f(x) dx$$

$$P_{ni} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J F(V_{ni} - V_{nj} + x) f(x) dx$$

Untuk menentukan  $P_{ni}$  dapat dilakukan dengan cara mengasumsikan distribusi dari  $\varepsilon$ . Jika  $\varepsilon$  diasumsikan berdistribusi nilai ekstrim tipe I (distribusi gumbel) dengan  $\alpha=0$  dan  $\eta=1$  maka model yang didapatkan adalah model multinomial logit.

Jika  $\varepsilon$  diasumsikan berdistribusi nilai ekstrim tipe I (distribusi gumbel) dengan  $\alpha=0$  dan  $\eta=1$ , maka  $P_{ni}$  menjadi:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \exp(-\exp(-(V_{ni} - V_{nj} + x))) \exp(-x) \cdot \exp\{-\exp(-x)\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{-e^{-(V_{ni}-V_{nj}+x)}} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{-e^{v_{nj}-v_{ni}-x}} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \end{aligned}$$

misalkan  $k = e^{-x}$

$$\frac{dk}{dx} = -e^{-x} \text{ maka } dx = \frac{1}{-e^{-x}} dk$$

$$x = -\infty \rightarrow k = \infty$$

$$x = \infty \rightarrow k = 0$$

sehingga,

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \int_{\infty}^0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{-e^{v_{nj}-v_{ni}}k} e^{-k} (-1) dk \\ &= \int_0^{\infty} e^{-k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{-e^{v_{nj}-v_{ni}}k} dk \\ &= \int_0^{\infty} e^{-k} e^{(-e^{v_{n1}-v_{ni}})k} \dots e^{(-e^{v_{n(i-1)}-v_{ni}})k} e^{(-e^{v_{n(i+1)}-v_{ni}})k} \dots e^{(-e^{v_{nJ}-v_{ni}})k} dk \\ &= \int_0^{\infty} e^{-k} e^{-\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{v_{nj}-v_{ni}}\right)k} dk \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})k} dk \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \int_0^a e^{-(1+\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})k} dk \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-\left(1+\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{v_{nj}-v_{ni}}\right)k}}{-\left(1+\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J e^{v_{nj}-v_{ni}}\right)} \Bigg|_0^a \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\frac{-(1+\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})a}{j \neq i}}}{e^{\frac{-(1+\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})}{j \neq i}}} - \frac{e^{\frac{-(1+\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})_0}{j \neq i}}}{e^{\frac{-(1+\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})}{j \neq i}}}} \right) \\
&= 0 - \frac{1}{e^{\frac{-(1+\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}-v_{ni}})}{j \neq i}}} \\
&= \frac{1}{e^{v_{ni} + \sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}} \\
&= \frac{e^{v_{ni}}}{e^{v_{ni} + \sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}} \\
&= \frac{e^{v_{ni}}}{\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}}
\end{aligned}$$

Jadi, probabilitas pembuat keputusan ke-n memilih alternatif pilihan ke-i ( $P_{ni}$ ) adalah:

$$P_{ni} = \frac{e^{v_{ni}}}{\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}} \quad (2.10)$$

Rasio probabilitas untuk sembarang dua pilihan  $a$  dan  $b$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{na}}{P_{nb}} &= \frac{\Pr(Y_n = a)}{\Pr(Y_n = b)} \\
&= \frac{\frac{e^{v_{na}}}{\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}}}{\frac{e^{v_{nb}}}{\sum_{j=1}^J e^{v_{nj}}}} \\
&= \frac{e^{v_{na}}}{e^{v_{nb}}} \\
&= e^{(v_{na} - v_{nb})} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

nilai logaritma natural dari rasio ini dinamakan dengan *odd ratio*, dinotasikan dengan *OR*.

$$OR(a, b) = \ln\left(\frac{P_{na}}{P_{nb}}\right) = \ln(e^{v_{na} - v_{nb}}) = v_{na} - v_{nb} \quad (2.12)$$

Dalam model multinomial logit, rasio probabilitas untuk sembarang dua pilihan tidak dipengaruhi oleh keberadaan alternatif pilihan yang lain. Jadi jika

ada tiga pilihan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  maka rasio dari probabilitas  $a$  dibanding dengan  $b$  tidak dipengaruhi oleh pilihan  $c$ . Asumsi ini dinamakan *Independent of Irrelevant Alternatives (IIA)*. (Train, 2003)

Asumsi *Independent of Irrelevant Alternatives (IIA)* berasal dari asumsi awal yang menyatakan bahwa error antar alternatif pilihan saling bebas, dan berdistribusi sama. Tetapi, pada prakteknya dalam kehidupan sehari-hari error antar alternatif pilihan bisa tidak saling bebas sehingga menyebabkan asumsi IIA tidak terpenuhi.

## 2.7 Matriks

### 2.7.1 Notasi Matriks dan terminologi

Definisi 2.1:

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut entri dalam matriks tersebut.

(Anton H, 2000)

Setiap matriks memiliki ukuran, yang dinyatakan dengan banyaknya baris dan kolom. Matriks berukuran  $m \times n$  merupakan matriks dengan  $m$  baris dan  $n$  kolom. Misalkan matriks  $A$  dengan entri-entrinya adalah  $(a_{ij})$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom atau vektor kolom. Matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris, atau vektor baris. Matriks dengan  $n$  baris dan  $n$  kolom disebut dengan matriks persegi orde- $n$ .

### 2.7.2 Matriks definit positif

Definisi 2.2:

Suatu bentuk kuadratik  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$  disebut definit positif jika  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  untuk setiap  $\mathbf{x} \neq 0$ , dan suatu matriks simetris  $A$  disebut matriks definit positif jika  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$  merupakan bentuk kuadratik yang definit positif.

Teorema 2.1:

Suatu matriks simetris  $A$  merupakan matriks yang definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen dari  $A$  bernilai positif.

(Anton H, 2000)

### 2.7.3 Vektor Acak

Definisi 2.3:

Suatu vektor acak adalah vektor dimana entri-entrinya terdiri dari variabel-variabel acak. Serupa dengan itu, matriks acak adalah matriks di mana entri-entrinya adalah variabel-variabel acak.

(Johnson dan Wichern, 1998)

Misalkan  $\mathbf{X} = \{X_{ij}\}$  adalah matriks acak berukuran  $n \times p$ . Ekspektasi dari  $\mathbf{X}$  dinotasikan dengan  $E(\mathbf{X})$ , adalah matriks  $n \times p$  yang beranggotakan bilangan-bilangan riil (jika nilai dari masing-masing  $E(X_{ij})$  ada)

$$E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \dots & E(X_{1p}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \dots & E(X_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \dots & E(X_{np}) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

dimana  $E(X_{ij})$  adalah ekspektasi dari variabel acak  $X_{ij}$  dengan pdf terkait (dapat berupa variabel acak bertipe diskrit atau kontinu).

Definisi 2.4:

Misalkan  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$  adalah vektor acak berukuran  $p \times 1$ . Maka setiap anggota dari  $\mathbf{X}$  merupakan variabel acak dengan distribusi probabilitas marginal tertentu. Vektor mean, matriks kovariansi, dan matriks korelasi dinyatakan sebagai,

Vektor mean:

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Matriks kovariansi:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \text{Cov}(\mathbf{X}) \\ \Sigma &= E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)'] \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.16)$$

dengan  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$  dan  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$  untuk  $i=1,2,\dots,p$ .

Matriks korelasi:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & \dots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{pp}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{pp}}} & \dots & 1 \end{pmatrix}\quad (2.17)$$

dengan  $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$  untuk  $i,j=1,2,\dots,p$  adalah koefisien-koefisien korelasi dari variabel-variabel acak  $X_i$  dan  $X_j$ .

(Johnson dan Wichern, 1998)

#### 2.7.4 Turunan terhadap setiap entri-entri pada vektor

Pada bagian ini akan dibahas mengenai turunan dari entri-entri suatu vektor terhadap entri-entri vektor yang lain. Berikut ini diberikan definisi mengenai turunan terhadap vektor.

Definisi 2.5:

Misalkan terdapat suatu vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)'$  berukuran  $m \times 1$ , dan vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$  berukuran  $n \times 1$ , dan  $\mathbf{u}$  merupakan fungsi dari  $\mathbf{v}$ . Turunan dari vektor  $\mathbf{u}$  terhadap vektor  $\mathbf{v}$  dinyatakan dengan

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_m}{\partial v_1} & \frac{\partial u_m}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial v_n} \end{pmatrix}\quad (2.18)$$



Definisi 2.6:

Misalkan terdapat suatu vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)'$  berukuran  $m \times 1$ , dan vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$  berukuran  $n \times 1$ . Turunan vektor  $\mathbf{u}$  terhadap vektor  $\mathbf{v}'$  diturunkan kembali terhadap vektor  $\mathbf{v}$  dinyatakan oleh

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial v_i \partial v_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1^2} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1 \partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_1 \partial v_n} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_2 \partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2^2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_2 \partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_n \partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_n \partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_n^2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

(Johnson dan Wichern, 1998)

## 2.8 Faktorisasi Matriks

Faktorisasi atau dekomposisi matriks adalah pemecahan atau penguraian suatu matriks menjadi matriks-matriks “sederhana”. Contoh matriks sederhana adalah matriks triangular (segitiga atas, segitiga bawah, diagonal) atau matriks orthogonal. Matriks-matriks ini dikategorikan “sederhana” sebab ada beberapa operasi matriks yang menjadi sederhana prosesnya karena matriksnya berbentuk seperti itu. Misal, nilai determinan dari suatu matriks triangular adalah hasil kali nilai-nilai pada diagonal utamanya.

Selanjutnya, terdapat berbagai macam tipe matriks berdasarkan pengamatan ukuran maupun karakteristik dari entri matriks tersebut. Dengan adanya berbagai macam tipe matriks menimbulkan pula berbagai macam cara untuk memfaktorkan suatu matriks, diantaranya dikenal sebagai: faktorisasi LU, faktorisasi QR, faktorisasi Cholesky. Penggunaan masing-masing faktorisasi tersebut tergantung pada tipe matriks yang difaktorkan.

Beberapa faktorisasi atau dekomposisi yang sering digunakan antara lain:

### a. Faktorisasi LU

Definisi 2.7:

Faktorisasi LU adalah faktorisasi yang menguraikan suatu matriks  $\mathbf{A}$  berukuran  $n \times n$  menjadi dua buah matriks, yaitu matriks segitiga bawah ( $\mathbf{L}$ ) dan matriks segitiga atas ( $\mathbf{U}$ ) yang dinyatakan sebagai hubungan  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ .

(Golub dan Van Loan, 1996)

Faktorisasi LU sering juga disebut sebagai deskripsi *high-level* dari metode Eliminasi Gauss. Metode Eliminasi Gauss yaitu metode mereduksi suatu matriks menjadi bentuk baris eselon tereduksi. Faktorisasi LU disebut sebagai deskripsi *high-level* dari metode Eliminasi Gauss karena faktorisasi LU menyimpan matriks hasil dari Eliminasi Gauss (matriks segitiga atas-**U**) dan menyimpan faktor-faktor pengalinya (matriks segitiga bawah-**L**).

Secara umum, faktorisasi LU dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Matriks segitiga atas (**U**) merupakan matriks yang dihasilkan oleh metode Eliminasi Gauss.
2. Matriks segitiga bawah (**L**) merupakan matriks dimana diagonal utamanya bernilai 1, sementara nilai yang lainnya merupakan negatif dari faktor pengali yang bersesuaian.

Secara khusus, misalkan matriks **A** matriks simetris berukuran 3x3, yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ maka hubungan pada faktorisasi } LU \text{ menjadi:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

dimana,  $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$  dan  $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ . Persamaan diatas

menyebabkan,

$$a_{11} = l_{11}u_{11}, \quad a_{12} = l_{11}u_{12}, \quad \text{dan} \quad a_{13} = l_{11}u_{13}$$

$$a_{21} = l_{21}u_{11}, \quad a_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22}, \quad \text{dan} \quad a_{23} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23}$$

$$a_{31} = l_{31}u_{11}, \quad a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}, \quad \text{dan} \quad a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33}$$

## b. Faktorisasi QR

Definisi 2.8:

Faktorisasi QR yaitu faktorisasi yang menguraikan suatu matriks **B** berukuran  $m \times n$  menjadi dua buah matriks, yaitu matriks orthogonal (**Q**) dan matriks segitiga atas (**R**) yang dinyatakan sebagai hubungan  $B = QR$ .

(Golub dan Van Loan, 1996)

Secara khusus, misalkan matriks **B** matriks berukuran 4x3, yaitu:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} \text{ maka hubungan pada faktorisasi QR menjadi:}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

dimana,  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} \end{pmatrix}$  dan  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$ . Persamaan diatas

menyebabkan,

$$b_{11} = q_{11}r_{11}, \quad b_{12} = q_{11}r_{12} + q_{12}r_{22}, \quad \text{dan} \quad b_{13} = q_{11}r_{13} + q_{12}r_{23} + q_{13}r_{33}$$

$$b_{21} = q_{21}r_{11}, \quad b_{22} = q_{21}r_{12} + q_{22}r_{22}, \quad \text{dan} \quad b_{23} = q_{21}r_{13} + q_{22}r_{23} + q_{23}r_{33}$$

$$b_{31} = q_{31}r_{11}, \quad b_{32} = q_{31}r_{12} + q_{32}r_{22}, \quad \text{dan} \quad b_{33} = q_{31}r_{13} + q_{32}r_{23} + q_{33}r_{33}$$

$$b_{41} = q_{41}r_{11}, \quad b_{42} = q_{41}r_{12} + q_{42}r_{22}, \quad \text{dan} \quad b_{43} = q_{41}r_{13} + q_{42}r_{23} + q_{43}r_{33}$$

### c. Faktorisasi Cholesky

Definisi 2.9:

Faktorisasi Cholesky yaitu faktorisasi yang menguraikan suatu matriks **A** yang *symmetric definite positive* menjadi dua buah matriks, yaitu matriks segitiga bawah (**C**) dan  $\mathbf{C}^T$  yang dinyatakan sebagai hubungan  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ .

(Golub dan Van Loan, 1996)

Sebagai ilustrasi, misalkan matriks **H** sebagai berikut,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \text{ dengan } h_{ij} = h_{ji} \quad (i = 1, \dots, n \text{ dan } j = 1, \dots, n)$$

$$\text{Ambil } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ maka } \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Bentuk faktorisasi Cholesky dari matriks  $\mathbf{H}$  berukuran  $n \times n$  adalah:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, maka diperoleh:

$$h_{ii} = \sum_{p=1}^i c_{ip}^2 \text{ dan } h_{ij} = \sum_{p=1}^{\min i,j} c_{ip}c_{jp}, \text{ dengan } i \neq j.$$

### 2.8.1. Faktorisasi Cholesky

Selanjutnya, secara khusus akan dibahas mengenai pembentukan faktorisasi Cholesky. Proses pembentukan faktorisasi Cholesky ada 2 cara, yaitu dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan menghitung secara langsung, berikut akan dibahas 2 cara tersebut.

#### a. Menggunakan Eliminasi Gauss

Langkah-langkah menghitung faktorisasi Cholesky menggunakan Eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

1. Bentuk faktorisasi  $LDM^T$  yang didapat dari faktorisasi LU ( faktorisasi LU didapat dari Eliminasi Gauss).

Teorema 2.2:

Misalkan terdapat matriks  $\mathbf{A}$  berukuran  $n \times n$ . Jika semua submatriks utama dari  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  adalah tidak singular, maka ada secara unik matriks segitiga bawah  $\mathbf{L}$  dan  $\mathbf{M}$  dan suatu matriks diagonal  $\mathbf{D}$  sedemikian sehingga  $\mathbf{A} = \mathbf{LDM}^T$  dan disebut faktorisasi  $LDM^T$ .

(Golub dan Van Loan, 1996)

Bukti:

Matriks  $\mathbf{A}$  dapat difaktorisasi menjadi  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  dengan menggunakan hasil yang didapat dari Eliminasi Gauss. Pada faktorisasi LU, matriks  $\mathbf{L}$  adalah matriks segitiga bawah yang merupakan matriks yang menyimpan faktor-faktor pengali yang didapat dari Eliminasi Gauss, sehingga matriks  $\mathbf{L}$  yang dihasilkan adalah unik. Kemudian bentuk matriks diagonal  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  dengan  $d_i = u_{ii}, i = 1:n$ . Sehingga didapat matriks  $\mathbf{D}$  adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Karena submatriks utama dari  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  adalah tidak singular, maka matriks  $\mathbf{D}$  adalah tidak singular. Selanjutnya definisikan suatu matriks  $\mathbf{M}$ , dengan  $\mathbf{M}^T = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$  adalah matriks segitiga atas, karena matriks  $\mathbf{U}$  adalah matriks hasil dari Eliminasi Gauss maka matriks  $\mathbf{U}$  adalah unik sehingga matriks  $\mathbf{D}$  unik dan matriks  $\mathbf{M}$  pun unik. Kemudian matriks  $\mathbf{A}$  dapat difaktorisasi menjadi  $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{LDD}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LD}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}) = \mathbf{LDM}^T$ .

Contoh:

Misal  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  dan memiliki faktorisasi  $\mathbf{LU}$  sebagai berikut:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.36 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 5.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 6.32 \end{pmatrix}, \text{ maka kita dapat membentuk}$$

faktorisasi  $\mathbf{LDM}^T$ , yaitu  $\mathbf{A} = \mathbf{LDM}^T$ , dimana:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.36 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.32 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1.75 \\ 0 & 1 & -0.45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Bentuk faktorisasi  $\mathbf{LDL}^T$  yang didapat dari faktorisasi  $\mathbf{LDM}^T$  pada langkah 1.

Teorema 2.3:

Jika  $\mathbf{A} = \mathbf{LDM}^T$  adalah faktorisasi  $\mathbf{LDM}^T$  dari matriks simetri tidak singular  $\mathbf{A}$ , maka  $\mathbf{L} = \mathbf{M}$  dan disebut faktorisasi  $\mathbf{LDL}^T$ .

(Golub dan Van Loan, 1996)

Bukti:

Matrik  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{LDM}^T\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{LDI} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{LD}$  adalah matriks yang simetrik, segitiga bawah dan diagonal. Karena  $\mathbf{D}$  tidak singular, ini mengimplikasikan bahwa matriks  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$  adalah matriks diagonal juga. Dari bukti

pada teorema 2.2 diketahui bahwa  $M^{-1}$  adalah matriks segitiga atas dan diagonal dari matriks segitiga bawah  $L$  adalah bernilai 1 maka  $M^{-1}L = I$  atau  $M = L$ .

Contoh:

Misal  $A = \begin{pmatrix} 30 & -20 & -10 \\ -20 & 55 & -10 \\ -10 & -10 & 50 \end{pmatrix}$  dan memiliki faktorisasi  $LU$  sebagai berikut:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.67 & 1 & 0 \\ -0.33 & -0.4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 30 & -20 & -10 \\ 0 & 41.67 & -16.67 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, \text{ maka kita}$$

Dapat membentuk faktorisasi  $LDM^T$ , yaitu  $A = LDM^T$ , dimana:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.67 & 1 & 0 \\ -0.33 & -0.4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 41.67 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$M^T = D^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & -0.67 & -0.33 \\ 0 & 1 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa  $M = L$ , sehingga faktorisasi  $LDM^T$  pada matriks simetri menjadi faktorisasi  $LDL^T$ .

3. Bentuk faktorisasi Cholesky ( $CC^T$ ) yang didapat dari faktorisasi  $LDL^T$  pada langkah 2.

Teorema 2.4:

Jika  $A \in R^{n \times n}$  adalah matriks simetri definit positif, maka ada matriks segitiga bawah  $C \in R^{n \times n}$  dengan nilai pada diagonal positif sedemikian sehingga  $A = CC^T$  dan disebut faktorisasi Cholesky.

(Golub dan Van Loan, 1996)

Bukti.

Dari faktorisasi  $LDL^T$ , terdapat matriks segitiga bawah  $L$  dan matriks diagonal  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  sedemikian sehingga  $A = LDL^T$ . Karena  $d_i$  positif untuk setiap  $i=1,2,\dots,n$ , maka dapat didefinisikan suatu matriks segitiga bawah  $C$ , dimana  $C = LD^{1/2}$ . Sehingga  $A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = LD^{\frac{1}{2}}(LD^{1/2})^T = CC^T$ .

Contoh:

Dari contoh nomor 2, matriks  $A$  adalah simetri definit positif, maka kita bisa membentuk faktorisasi Cholesky, yaitu  $A = CC^T$ , dimana:

$$C = LD^{1/2} = \begin{pmatrix} 5.48 & 0 & 0 \\ -3.65 & 6.46 & 0 \\ -1.83 & -2.58 & 6.32 \end{pmatrix}$$

b. Menghitung secara langsung

Pada metode langsung, untuk mencari faktorisasi Cholesky adalah dengan cara menyamakan persamaan  $A = CC^T$ .

Contoh:

Misalkan terdapat matriks  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$  dan  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$  adalah

Faktorisasi Cholesky dari  $A$ , maka:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

Kolom 1

$$c_{11}c_{11} = a_{11} \rightarrow c_{11} = (a_{11})^{1/2} = (1)^{1/2} = 1$$

$$c_{21}c_{11} = a_{21} \rightarrow c_{21} = a_{21}/c_{11} = 4/1 = 4$$

$$c_{31}c_{11} = a_{31} \rightarrow c_{31} = a_{31}/c_{11} = 5/1 = 5$$

Kolom 2

$$c_{21}c_{21} + c_{22}c_{22} = a_{22} \rightarrow c_{22} = (a_{22} - c_{21}c_{21})^{1/2} = (20 - 16)^{1/2} = 2$$

$$c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} = a_{32} \rightarrow c_{32} = (a_{32} - c_{31}c_{21})/c_{22} = (32 - 20)/2 = 6$$

Kolom 3

$$c_{31}c_{31} + c_{32}c_{32} + c_{33}c_{33} = a_{33}$$

$$\rightarrow c_{33} = (a_{33} - c_{31}c_{31} - c_{32}c_{32})^{1/2} = (64 - 25 - 36)^{1/2} = 1.73$$

$$\text{Sehingga, } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1.73 \end{pmatrix}$$

## BAB 3 PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan bagaimana pembentukan model multinomial probit dengan menggunakan teori utilitas dan menentukan taksiran parameter dari model multinomial probit dengan menggunakan metode *maximum simulated likelihood* yang berdasarkan pada metode simulasi GHK.

### 3.1 Model Pilihan Diskrit

Model pilihan diskrit adalah pemodelan dengan mengasumsikan bahwa pembuat keputusan menentukan pilihan diantara sekumpulan pilihan yang tersedia. Dalam memilih suatu alternatif pilihan, setiap orang akan mempertimbangkan semua alternatif pilihan yang tersedia, kemudian mempertimbangkan sifat-sifat dari alternatif pilihan tersebut, baik keunggulannya, kelemahannya ataupun spesifikasi dari pilihan tersebut.

Untuk memilih suatu pilihan yang terdiri dari dua alternatif atau lebih, pembuat keputusan menggunakan suatu aturan keputusan. Salah satu aturan keputusan yang sering digunakan dalam model pilihan diskrit adalah maksimalisasi utilitas atau utilitas maksimum. Dimana utilitas atau nilai guna didefinisikan sebagai kepuasan atau kenikmatan yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsi suatu barang. Jadi, pembuat keputusan memilih suatu alternatif pilihan yang memiliki utilitas paling maksimum.

Misalkan terdapat  $N$  individu pembuat keputusan, yang masing-masing diobservasi sebanyak  $T$  respon, dan misalkan terdapat  $J$  alternatif pilihan. Maka, secara umum utilitas pembuat keputusan ke- $n$  memilih alternatif ke- $j$  pada respon ke- $t$  dapat dituliskan sebagai,

$$U_{njt} = V_{njt} + \varepsilon_{njt} \quad (3.1)$$

untuk  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $j = 1, 2, \dots, J$  dan  $t = 1, 2, \dots, T$

dimana,  $V_{njt}$ : komponen deterministik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang dapat diobservasi.



$\varepsilon_{njt}$  : komponen stokastik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang tidak dapat diobservasi.

Berdasarkan utilitasnya, probabilitas pembuat keputusan ke-n memilih alternatif ke-i pada respon ke-t adalah,

$$\begin{aligned} P_{nit} &= \Pr(U_{nit} > U_{njt}) \text{ untuk } \forall j \neq i \text{ dan } \forall t \\ &= \Pr(V_{nit} + \varepsilon_{nit} > V_{njt} + \varepsilon_{njt}) \text{ untuk } \forall j \neq i \text{ dan } \forall t \\ &= \Pr(V_{nit} - V_{njt} > \varepsilon_{njt} - \varepsilon_{nit}) \text{ untuk } \forall j \neq i \text{ dan } \forall t \end{aligned} \quad (3.2)$$

dengan,

$$\sum_{j=1}^J P_{njt} = 1, \text{ untuk } t = 1, 2, \dots, T$$

Jika  $T=1$  maka persamaan (3.2) menjadi model univariat. Jika  $J=2$  maka persamaan (3.2) merupakan model biner (binomial), dan untuk  $J$  yang lebih dari dua persamaan (3.2) merupakan model multinomial. Dan jika pembuat keputusan membuat keputusan sebanyak lebih dari satu ( $T>1$ ) maka persamaan (3.2) menjadi model multivariat.

Secara ringkas dapat dilihat pada tabel di bawah ini,

Tabel 3.1 Jenis-Jenis Model Pilihan Diskrit

| Alternatif pilihan (J) | J=2                     | J>2   |
|------------------------|-------------------------|---|
| Banyak respon (T)      |                         |   |
| T=1                    | Model biner univariat   | Model multinomial univariat (Model multinomial) |
| T>1                    | Model biner multivariat | Model multinomial multivariat                   |

Beberapa model pilihan diskrit yang banyak digunakan adalah model logit, model *Generalized Extreme Value (GEV)*, dan model probit. Selanjutnya, yang akan dibahas lebih lanjut adalah model multinomial univariat probit (model multinomial probit).

### 3.2 Model Probit

Model probit adalah salah satu model yang dapat digunakan untuk memodelkan pilihan, dimana pilihannya tidak terurut. Model probit memerlukan asumsi distribusi normal untuk komponen error pada utilitas di persamaan (3.1), yaitu  $\varepsilon_{njt}$  berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi  $\sigma^2$ , maka pdf dari  $\varepsilon_{njt}$  adalah :

$$\phi(\varepsilon_{njt}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(\varepsilon_{njt})^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

Tujuan analisis dari model probit adalah menghitung probabilitas pembuat keputusan dalam memilih sebuah pilihan.

#### 3.2.1 Model Multinomial Probit

Model multinomial probit adalah model yang mengasumsikan bahwa pembuat keputusan dalam memilih alternatif pilihan hanya diobservasi satu kali ( $T=1$ ), sehingga model utilitas untuk pembuat keputusan ke- $n$  memilih alternatif pilihan ke- $j$  menjadi,

$$U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj} \quad (3.4)$$

untuk  $n = 1, 2, \dots, N$  dan  $j = 1, 2, \dots, J$ .

dimana,  $V_{nj}$ : komponen deterministik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang dapat diobservasi.

$\varepsilon_{nj}$  : komponen stokastik yang memuat atribut dari pembuat keputusan dan atribut dari pilihan yang tidak dapat diobservasi.

Komponen deterministik  $V_{nj}$  dapat dimisalkan linear, yaitu

$$V_{nj} = \alpha_j + \beta'_j \mathbf{X}_n + \gamma' \mathbf{Z}_{nj} \quad (3.5)$$

dimana  $\alpha_j$  : parameter konstanta untuk pilihan ke- $j$

$\beta_j$  : vektor parameter untuk atribut pembuat keputusan pada pilihan ke- $j$

$\mathbf{X}_n$  : vektor variabel bebas yang menyatakan atribut pembuat keputusan ke- $n$

$\gamma$  : vektor parameter untuk atribut pilihan.

$Z_{nj}$  : vektor variabel bebas untuk atribut pilihan ke-j pada pembuat keputusan ke-n

Selain itu, asumsi penting dari model multinomial probit adalah vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nj})'$  berdistribusi normal multivariat dengan mean vektor  $\mathbf{0}$  dan matriks kovariansi  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Probabilitas dari pembuat keputusan ke-n memilih pilihan ke-i adalah:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \Pr(U_{ni} > U_{nj}, \forall j \neq i) \\ &= \Pr(V_{ni} + \varepsilon_{ni} > V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \forall j \neq i) \\ &= \Pr(V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni} > \varepsilon_{nj}, \forall j \neq i) \\ &= \Pr(\varepsilon_{nj} < V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}, \forall j \neq i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

karena  $\varepsilon_{nj}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, J$ ) variabel random kontinu, dan  $-\infty < \varepsilon_{nj} < \infty$  sehingga:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \Pr\{(\varepsilon_{n1} < V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n2} < V_{ni} - V_{n2} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n3} < V_{ni} - V_{n3} + \varepsilon_{ni}), \dots, \\ &\quad (\varepsilon_{n(i-1)} < V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}), (\varepsilon_{n(i+1)} < V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}), \dots, \\ &\quad (\varepsilon_{nJ} < V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni})\} \\ &= F\{(V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}), (V_{ni} - V_{n2} + \varepsilon_{ni}), (V_{ni} - V_{n3} + \varepsilon_{ni}), \dots, (V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}), \\ &\quad (V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}), \dots, (V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni})\} \\ &= \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{n(i-1)}, \varepsilon_{n(i+1)}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \\ &= \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}} \left\{ \int_{\varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{ni} \right\} d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \end{aligned}$$

karena  $-\infty < \varepsilon_{ni} < \infty$  maka,

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{V_{ni} - V_{n1} + \varepsilon_{ni}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) d\varepsilon_{ni} \right\} d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \end{aligned}$$

karena batas dari  $\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}$  memuat  $\varepsilon_{ni}$  maka,

$$P_{ni} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{nJ} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i+1)} + \varepsilon_{ni}} \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n(i-1)} + \varepsilon_{ni}} \dots \int_{-\infty}^{V_{ni}-V_{n1} + \varepsilon_{ni}} f(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}) \right. \\ \left. d\varepsilon_{n1}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1)}, d\varepsilon_{n(i+1)}, \dots, d\varepsilon_{nJ} \right\} d\varepsilon_{ni} \quad (3.7)$$

$\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nJ}$  diasumsikan berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Integral pada persamaan (3.7) tidak dapat diselesaikan secara analitik, oleh karena itu diperlukan simulasi numerik untuk menyelesaikannya.

Persamaan (3.7) adalah integral dimensi J atas error  $\varepsilon_{nj}$ ,  $j=1,2,\dots,J$ . Untuk menyederhanakan pengintegralan, dapat dilakukan modifikasi pada fungsi utilitas, yaitu dengan cara melakukan pengurangan pada setiap utilitas  $U_{nj}$  dengan  $U_{ni}$ ,  $\forall j \neq i$ . Maka, probabilitas pilihan dapat dinyatakan sebagai intergral berdimensi (J-1) atas selisih diantara errornya. Misal diambil selisih terhadap alternatif i, maka dapat didefinisikan :

$$U_{nj,i} = U_{nj} - U_{ni}, V_{nj,i} = V_{nj} - V_{ni}, \text{ dan } \varepsilon_{nj,i} = \varepsilon_{nj} - \varepsilon_{ni} \quad (3.8)$$

Definisikan vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} = (\varepsilon_{n1,i}, \varepsilon_{n2,i}, \dots, \varepsilon_{n(i-1),i}, \varepsilon_{n(i+1),i}, \dots, \varepsilon_{nJ,i})'$  yang berdimensi J-1. Karena selisih dua distribusi normal adalah berdistribusi normal, maka  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i)$ .

Maka, probabilitas pembuat keputusan ke-n memilih alternatif ke-i menjadi:

$$P_{ni} = \Pr(U_{nj,i} < 0, \forall j \neq i) \\ = \Pr(V_{nj,i} + \varepsilon_{nj,i} < 0, \forall j \neq i) \\ = \Pr(\varepsilon_{nj,i} < -V_{nj,i}, \forall j \neq i) \quad (3.9)$$

Karena  $\varepsilon_{nj,i}$  ( $j = 1,2,3,\dots,J$ ) variabel random kontinu, dan  $-\infty < \varepsilon_{nj,i} < \infty$  sehingga :

$$P_{ni} = \Pr\{(\varepsilon_{n1,i} < -V_{n1,i}), (\varepsilon_{n2,i} < -V_{n2,i}), (\varepsilon_{n3,i} < -V_{n3,i}), \dots, (\varepsilon_{n(i-1),i} < \\ -V_{n(i-1),i}), (\varepsilon_{n(i+1),i} < -V_{n(i+1),i}), \dots, (\varepsilon_{nJ,i} < -V_{nJ,i})\} \\ = F\{(-V_{n1,i}), (-V_{n2,i}), (-V_{n3,i}), \dots, (-V_{n(i-1),i}), (-V_{n(i+1),i}), \dots, (-V_{nJ,i})\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-V_{nJ,i}} \dots \int_{-\infty}^{-V_{n(i+1),i}} \int_{-\infty}^{-V_{n(i-1),i}} \dots \int_{-\infty}^{-V_{n1,i}} f(\varepsilon_{n1,i}, \dots, \varepsilon_{n(i-1),i}, \varepsilon_{n(i+1),i}, \dots, \varepsilon_{nJ,i}) \\
&\quad d\varepsilon_{n1,i}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1),i}, d\varepsilon_{n(i+1),i}, \dots, d\varepsilon_{nJ,i} \\
P_{ni} &= \int_{-\infty}^{-V_{nJ,i}} \dots \int_{-\infty}^{-V_{n(i+1),i}} \int_{-\infty}^{-V_{n(i-1),i}} \dots \int_{-\infty}^{-V_{n1,i}} f(\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}) \\
&\quad d\varepsilon_{n1,i}, \dots, d\varepsilon_{n(i-1),i}, d\varepsilon_{n(i+1),i}, \dots, d\varepsilon_{nJ,i} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

dimana,

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}) = \frac{1}{(2\pi)^{(J-1)/2} |\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}'_{n,i} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i^{-1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}\right] \tag{3.11}$$

$P_{ni}$  pada persamaan (3.10) merupakan integral berdimensi  $(J-1)$ .

dimana,

$$\begin{aligned}
V_{nj,i} &= V_{nj} - V_{ni} = \alpha_j + \boldsymbol{\beta}'_j \mathbf{X}_n + \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{Z}_{nj} - \alpha_i + \boldsymbol{\beta}'_i \mathbf{X}_n + \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{Z}_{ni} \\
&= (\alpha_j - \alpha_i) + (\boldsymbol{\beta}'_j - \boldsymbol{\beta}'_i) \mathbf{X}_n + \boldsymbol{\gamma}' (\mathbf{Z}_{nj} - \mathbf{Z}_{ni}) \\
&= \alpha_{j,i} + \boldsymbol{\beta}'_j \mathbf{X}_n + \boldsymbol{\gamma}' (\mathbf{Z}_{nj} - \mathbf{Z}_{ni}) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

dan persamaan (3.10) disebut sebagai model multinomial probit.

Untuk menghitung  $P_{ni}$ , memerlukan matriks kovariansi dari  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}$  yang di dapat dari selisih error antar alternatif. Matriks kovariansi dari  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}$  dapat diturunkan secara langsung dari  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Misalkan,

$$\mathbf{U}_n = (U_{n1}, \dots, U_{nJ})', \quad \mathbf{V}_n = (V_{n1}, \dots, V_{nJ})', \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nJ})'$$

$$\text{dan } \mathbf{U}_{n,i} = (U_{n1,i}, \dots, U_{n(i-1),i}, U_{n(i+1),i}, \dots, U_{nJ,i})$$

dimana,

$$U_{n1,i} = U_{n1} - U_{ni}, \quad U_{n2,i} = U_{n2} - U_{ni}, \dots, \quad U_{nJ,i} = U_{nJ} - U_{ni}$$

Sehingga  $\mathbf{U}_{n,i}$  bisa diperoleh dari persamaan matriks berikut,

Kolom ke-i  
↓

$$\mathbf{U}_{n,i} = (U_{n1,i}, \dots, U_{nJ,i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n1} \\ \cdot \\ U_{ni} \\ \cdot \\ U_{nJ} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n,i} &= \mathbf{M}_i \mathbf{U}_n \\ &= \mathbf{M}_i (\mathbf{V}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ &= \mathbf{M}_i \mathbf{V}_n + \mathbf{M}_i \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= \mathbf{V}_{n,i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\mathbf{M}_i$  adalah matriks berukuran  $(J-1) \times J$  yang diperoleh dari menambahkan 1 kolom yang bernilai “-1” pada kolom ke- $i$  matriks identitas yang berukuran  $(J-1)$ . Sehingga matriks kovariansi untuk  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}$  adalah,

$$\text{Kov}(\mathbf{U}_{n,i}) = \text{Kov}(\mathbf{M}_i \mathbf{V}_n + \mathbf{M}_i \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \text{Kov}(\mathbf{M}_i \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{M}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{M}_i' = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i$$

### 3.2.1.1 Maximum Likelihood Estimator (MLE) untuk model multinomial probit

Selanjutnya akan dicari taksiran parameter model multinomial probit dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimator (MLE)*.

Misalkan variabel dependen  $Y$  memiliki  $J$  kategori, yaitu  $j = 1, 2, \dots, J$ .

Untuk membentuk fungsi likelihood, bentuk terlebih dahulu  $J$  variabel biner yaitu  $y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nJ}$  dimana, jika  $Y_n = i$ ;  $1 \leq i \leq J$  maka  $y_{ni} = 1$  untuk  $j = i$ , yaitu jika pembuat keputusan ke- $n$  memilih alternatif ke- $i$ , dan  $y_{nj} = 0$  untuk  $j \neq i$ , yaitu jika pembuat keputusan ke- $n$  memilih alternatif selain  $i$ , sehingga

$$\sum_{j=1}^J y_{nj} = 1.$$

Misalkan parameter-parameter yang ditaksir pada  $P_{ni}$  dikumpulkan dalam suatu vektor  $\boldsymbol{\theta}$ , maka fungsi likelihood untuk parameter  $\boldsymbol{\theta}$  adalah,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=1}^N \left[ P_{n1}^{y_{n1}} P_{n2}^{y_{n2}} \dots P_{nJ}^{y_{nJ}} \right] \quad (3.14)$$

Fungsi log likelihoodnya adalah,

$$\begin{aligned}
 \ln L(\boldsymbol{\theta}) &= \ln \left( \prod_{n=1}^N [P_{n1}^{y_{n1}} P_{n2}^{y_{n2}} \dots P_{nj}^{y_{nj}}] \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln [P_{n1}^{y_{n1}} P_{n2}^{y_{n2}} \dots P_{nj}^{y_{nj}}] \\
 &= \sum_{n=1}^N (\ln [P_{n1}^{y_{n1}}] + \ln [P_{n2}^{y_{n2}}] + \dots + \ln [P_{nj}^{y_{nj}}]) \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \ln [P_{nj}^{y_{nj}}] \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln [P_{nj}]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimalkan  $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ . Selanjutnya akan dicari turunan pertama dari fungsi log-likelihood (3.15) yaitu,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial (\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln [P_{nj}])}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \frac{\partial \ln [P_{nj}]}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \frac{1}{P_{nj}} \frac{\partial P_{nj}}{\partial \boldsymbol{\theta}}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Untuk titik maksimum, turunan pertama dari suatu fungsi bernilai 0 sehingga

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \frac{1}{P_{nj}} \frac{\partial P_{nj}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \tag{3.17}$$

### 3.2.1.2 Maximum Simulated Likelihood Estimator (MSLE) untuk model multinomial probit

Pada model multinomial probit,  $P_{ni}$  berbentuk persamaan yang melibatkan integral rangkap yang tidak dapat dihitung secara analitik sehingga diperlukan metode simulasi untuk menghitung parameter-parameternya. Beberapa metode taksiran parameter pada model pilihan diskrit yang berdasarkan simulasi terhadap fungsi probabilitasnya antara lain metode *Maximum Simulated Likelihood (MSL)*, metode *Simulated Score (MSS)*, dan metode *Simulated Moment (MSM)*. Metode yang sifat-sifatnya sama dengan MLE yaitu konsisten, normal asimtotis dan efisien adalah MSL (Gourieroux dan Monfort, 1993). Oleh karena itu, metode yang akan digunakan adalah metode *Maximum Simulated Likelihood (MSL)*.

Misalkan  $\tilde{P}_{nj}$  adalah nilai  $P_{nj}$  pada MLE yang dihitung menggunakan metode simulasi. Fungsi *simulated likelihood* diperoleh dengan mensubstitusi nilai  $P_{nj}$  dalam fungsi log-likelihood pada persamaan (3.16) dengan nilai simulasi  $\tilde{P}_{nj}$ . Sehingga fungsi *simulated log-likelihood* nya adalah,

$$\text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) = \text{sim} \left( \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln[P_{nj}] \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln[\tilde{P}_{nj}] \quad (3.18)$$

Misalkan  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MSL}$  adalah nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimumkan  $\text{simln}L(\boldsymbol{\theta})$ .

Turunan pertama fungsi *simulated log-likelihood* nya adalah,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{simln}L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial \left( \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln[\tilde{P}_{nj}] \right)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \frac{\partial \ln[\tilde{P}_{nj}]}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\tilde{P}_{nj}} \frac{\partial \tilde{P}_{nj}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Untuk titik maksimum, turunan pertama dari suatu fungsi bernilai 0 sehingga

$$\frac{\partial \text{simln}L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\tilde{P}_{nj}} \frac{\partial \tilde{P}_{nj}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$$

### 3.2.1.3 Metode Simulasi GHK untuk model multinomial probit

Pada subbab sebelumnya, telah dibahas bahwa untuk mencari parameter dengan bentuk persamaan probabilitas yang tidak sederhana yang melibatkan integral rangkap dibutuhkan suatu metode simulasi. Oleh karena itu, digunakanlah metode MSL untuk mencari taksiran parameternya. Walaupun nilai parameternya telah dapat ditentukan dengan menggunakan MSL, persamaan probabilitas model multinomial probit tetap masih berbentuk integral rangkap yang tidak dapat ditentukan nilainya secara analitik. Maka, diperlukan metode simulasi lagi untuk mencari nilai dari probabilitasnya. Simulasi yang akan digunakan adalah simulasi GHK (Geweke Hajivassiliou Keane).

Pada subbab ini akan dijelaskan bagaimana menghitung probabilitas dengan menggunakan simulasi GHK, yang mana hasilnya berupa simulasi probabilitas. Pada simulasi GHK ini, akan digunakan faktorisasi atau dekomposisi matriks, dan faktorisasi matriks yang digunakan adalah faktorisasi Cholesky.



Faktorisasi Cholesky digunakan karena metode ini lebih efisien dari segi waktu iterasi bila dibandingkan dengan metode iteratif penyelesaian SPL (Sistem Persamaan Linear) yang lain, karena SPL yang dicari bujur sangkar dan memiliki struktur *symmetric definite positive*.

Misalkan  $\mathbf{C}_i$  adalah faktor cholesky dari  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i$ , yaitu memenuhi persamaan  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{C}'_i$ , maka dengan mengambil  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} = \mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_n$  maka persamaan (3.13) menjadi,

$$\mathbf{U}_{n,i} = \mathbf{V}_{n,i} + \mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_n \quad (3.20)$$

dimana  $\mathbf{C}_i$  adalah matriks berukuran  $(J-1) \times (J-1)$ , dan  $\boldsymbol{\eta}'_{n,i} = (\eta_{1n}, \dots, \eta_{(J-1)n})$  dengan  $\eta_{jn} \sim N(0,1) \forall j$  (bukti pada lampiran 1)

Faktor Cholesky  $\mathbf{C}_i$  pada persamaan (3.20) di atas adalah :

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \text{ dimana } m = J - 1$$

Maka persamaan (3.20) dapat dituliskan secara eksplisit menjadi:

$$\begin{aligned} U_{n1,i} &= V_{n1,i} + c_{11}\eta_{1n} \\ U_{n2,i} &= V_{n2,i} + c_{21}\eta_{1n} + c_{22}\eta_{2n} \\ U_{n3,i} &= V_{n3,i} + c_{31}\eta_{1n} + c_{32}\eta_{2n} + c_{33}\eta_{3n} \\ &\dots \\ U_{n(i-1),i} &= V_{n(i-1),i} + c_{(i-1)1}\eta_{1n} + c_{(i-1)2}\eta_{2n} + \dots + c_{(i-1)(i-1)}\eta_{(i-1)n} \\ U_{n(i+1),i} &= V_{n(i+1),i} + c_{i1}\eta_{1n} + c_{i2}\eta_{2n} + \dots + c_{ii}\eta_{in} \\ &\dots \\ U_{nJ,i} &= V_{nJ,i} + c_{m1}\eta_{1n} + c_{m2}\eta_{2n} + c_{m3}\eta_{3n} + \dots + c_{mm}\eta_{mi} \end{aligned}$$

Probabilitas pembuat keputusan ke- n memilih alternatif ke-i adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \Pr(U_{nj,i} < 0, \forall j \neq i) \\ &= \Pr(U_{n1,i} < 0, U_{n2,i} < 0, \dots, U_{nJ,i} < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\left(\eta_{1n} < \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}\right) \cdot \Pr\left(\eta_{2n} < \frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_{1n})}{c_{22}} \mid \eta_{1n} < \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}\right) \\
&\Pr\left(\eta_{3n} < \frac{-(V_{n3,i} + c_{31}\eta_{1n} + c_{32}\eta_{2n})}{c_{33}} \mid \eta_{1i} < \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}, \eta_{2n} < \right. \\
&\left. \frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_{1n})}{c_{22}}\right) \dots \Pr\left(\eta_{mn} < \frac{-(V_{nJ,i} + c_{m1}\eta_{1n} + \dots + c_{m(m-1)}\eta_{(m-1)n})}{c_{mm}} \mid \eta_{1i} < \right. \\
&\left. \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}, \dots, \eta_{(m-1)n} < \frac{-(V_{n(J-1),i} + c_{(m-1)1}\eta_{1n} + \dots + c_{(m-1)(m-2)}\eta_{(m-2)n})}{c_{(m-1)(m-1)}}\right) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Simulator GHK dihitung menggunakan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menghitung  $\Pr\left(\eta_1 < \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}\right) = \Phi\left(\frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}\right)$   
dengan  $\Phi(\cdot)$  adalah cdf distribusi normal.
2. Mengambil sebuah nilai  $\eta_1$  yang diberi label  $\eta_1^{(r)}$  dari distribusi normal terbatas di atas pada  $-\frac{V_{n1,i}}{c_{11}}$ . Pengambilan dapat dilakukan dengan cara:
  - a. Mengambil sebuah nilai  $\mu_1^{(r)}$  dari distribusi uniform standar.
  - b. Menghitung  $\eta_1^{(r)} = \Phi^{-1}\left(\mu_1^{(r)} \Phi\left(-\frac{V_{n1,i}}{c_{11}}\right)\right)$  (penjelasan pada lampiran 2)
3. Menghitung :
$$\Pr\left(\eta_2 < \frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_{1n})}{c_{22}} \mid \eta_1 = \eta_1^{(r)}\right) = \Phi\left(\frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}\right)$$
4. Mengambil sebuah nilai  $\eta_2$  yang diberi label  $\eta_2^{(r)}$  dari distribusi normal standar yang terbatas di atas pada  $\frac{-(V_{i2,k} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}$ . Pengambilan ini dapat dilakukan dengan cara :
  - a. Mengambil sebuah nilai  $\mu_2^{(r)}$  dari uniform standar.
  - b. Menghitung  $\eta_2^{(r)} = \Phi^{-1}\left(\mu_2^{(r)} \Phi\left(-\frac{(V_{n2,i} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}\right)\right)$ .
5. Menghitung:

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\eta_3 < \frac{-(V_{n3,i} + c_{31}\eta_1 + c_{32}\eta_2)}{c_{33}} \mid \eta_1 = \eta_1^{(r)}, \eta_2 = \eta_2^{(r)}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-(V_{n3,i} + c_{31}\eta_1^{(r)} + c_{32}\eta_2^{(r)})}{c_{33}}\right)
\end{aligned}$$

6. dan seterusnya untuk semua alternatif kecuali alternatif ke-i  
 7. Probabilitas simulasi pada pengambilan ke-r dari  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  adalah:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ni}^{(r)} &= \Phi\left(\frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}\right) \Phi\left(\frac{-(V_{n3,i} + c_{31}\eta_1^{(r)} + c_{32}\eta_2^{(r)})}{c_{33}}\right) \\ &\dots \Phi\left(\frac{-(V_{nJ,i} + c_{m1}\eta_1^{(r)} + c_{(m-1)2}\eta_2^{(r)} + \dots + c_{m(m-1)}\eta_m^{(r)})}{c_{mm}}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

8. Mengulangi langkah 1-7 untuk  $r=1,2,\dots,R$ .  
 9. Probabilitas simulasinya adalah

$$\tilde{P}_{ni} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)} \quad (3.23)$$

### 3.2.1.3 Simulasi GHK dalam MSLE

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa untuk menghitung taksiran parameter pada model multinomial probit digunakan metode *maximum simulated likelihood estimator (MSLE)* dan juga dijelaskan bagaimana menghitung simulasi probabilitas dengan menggunakan simulasi GHK. Oleh karena itu pada bab ini akan dibahas bagaimana mencari taksiran parameter  $\tilde{\theta}_{MSL}$  berdasarkan simulasi GHK, karena dalam mencari taksiran parameter  $\tilde{\theta}_{MSL}$  simulasi probabilitas yang akan digunakan adalah simulasi probabilitas pada simulasi GHK.

Dalam model multinomial probit pada persamaan (3.10), parameter yang akan ditaksir berada pada batas-batas dari integral dalam persamaan tersebut, yaitu  $V_{n1,i}, \dots, V_{n(i-1),i}, V_{n(i+1),i}, \dots, V_{nJ,i}$ . Dimana,

$$\begin{aligned} V_{nj,i} &= V_{nj} - V_{ni} = \alpha_j + \beta'_j X_n + \gamma' Z_{nj} - (\alpha_i + \beta'_i X_n + \gamma' Z_{ni}) \\ &= (\alpha_j - \alpha_i) + (\beta'_j - \beta'_i) X_n + \gamma' (Z_{nj} - Z_{ni}) \\ &= \alpha_{j,i} + \beta'_{j,i} X_n + \gamma' (Z_{nj} - Z_{ni}) \end{aligned}$$

Sehingga parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{J,i}, \beta_{11,i}, \dots, \beta_{p1,i}, \dots, \beta_{1(i-1),i}, \dots, \beta_{p(i-1),i}, \beta_{1(i+1),i}, \dots, \beta_{p(i+1),i}, \dots, \beta_{1J,i}, \dots, \beta_{pJ,i}, \gamma_1, \dots, \gamma_q.$$

Selain itu, karena komponen stokastik  $\varepsilon_{n,i}$  pada model multinomial probit berdistribusi normal dengan mean  $\mathbf{0}$  dan matriks kovariansi  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i$ , maka matriks kovariansi  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i$  perlu ditaksir juga. Pada bab sebelumnya  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i$  telah didekomposisi dengan menggunakan faktorisasi Cholesky, sehingga yang perlu ditaksir adalah komponen-komponen pada faktor Cholesky  $\mathbf{C}$ .

Misalkan parameter-parameter yang akan ditaksir tersebut disusun dalam satu vektor  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c})$  dengan  $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{J,i}, \beta_{11,i}, \dots, \beta_{p1,i}, \dots, \beta_{1(i-1),i}, \dots, \beta_{p(i-1),i}, \beta_{1(i+1),i}, \dots, \beta_{p(i+1),i}, \dots, \beta_{1J,i}, \dots, \beta_{pJ,i}, \gamma_1, \dots, \gamma_q)$  dan  $\mathbf{c} = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}, c_{22}, \dots, c_{2m}, \dots, c_{mm})$  yang dapat diestimasi menggunakan fungsi *log-likelihood simulated*.

$$\text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) = \text{sim} \left( \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln[P_{ni}] \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln[\tilde{P}_{ni}] \quad (3.24)$$

Substitusi persamaan (3.23), maka fungsi *log-likelihood simulated* menjadi,

$$\text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)} \right]$$

Untuk mendapatkan taksiran dari  $\boldsymbol{\theta}$ , akan dicari turunan dari fungsi *log-likelihood simulated* model multinomial probit. Misalkan setiap batas dari persamaan (3.21) dinotasikan sebagai  $a_{1n}^{(r)}, a_{2n}^{(r)}, \dots, a_{mn}^{(r)}$  dimana,

$$a_{1n}^{(r)} = \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}$$

$$a_{2n}^{(r)} = \frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}$$

$$a_{3n}^{(r)} = \frac{-(V_{n3,i} + c_{31}\eta_1^{(r)} + c_{32}\eta_2^{(r)})}{c_{22}}$$

.....

.....

.....

$$a_{mn}^{(r)} = \frac{-(V_{nJ,i} + c_{m1}\eta_1^{(r)} + c_{m2}\eta_2^{(r)} + \dots + c_{m(m-1)}\eta_m^{(r)})}{c_{mm}}$$

dimana,  $m = J - 1$

Sehingga secara ringkas dapat dinyatakan dalam bentuk,

$$a_{kn}^{(r)} = \begin{cases} - \left[ \sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \eta_{hk}^{(r)} + \frac{V_{nk,i}}{c_{kk}} \right], & k > 1 \\ \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}, & k = 1 \end{cases} \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m \quad (3.25)$$

Dengan begitu persamaan (3.22) menjadi,

$$\tilde{P}_{ni}^{(r)} = \Phi \left( \frac{-V_{n1,i}}{c_{11}} \right) \cdot \Phi \left( \frac{-(V_{n2,i} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}} \right) \Phi \left( \frac{-(V_{n3,i} + c_{21}\eta_1^{(r)} + c_{32}\eta_2^{(r)})}{c_{33}} \right) \\ \dots \Phi \left( \frac{-(V_{nJ,i} + c_{m1}\eta_1^{(r)} + c_{(m-1)2}\eta_2^{(r)} + \dots + c_{m(m-1)}\eta_m^{(r)})}{c_{mm}} \right)$$

$$\tilde{P}_{ni}^{(r)} = \Phi(a_{1n}^{(r)}) \Phi(a_{2n}^{(r)}) \dots \Phi(a_{mn}^{(r)}) \\ = \Phi_{1n}^{(r)} \cdot \Phi_{2n}^{(r)} \dots \Phi_{mn}^{(r)} \\ = \prod_{k=1}^m \Phi_{kn}^{(r)} \quad (3.26)$$

Sehingga,

$$\tilde{P}_{ni} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \prod_{k=1}^m \Phi_{kn}^{(r)} \quad (3.27)$$

Maka, turunan pertama fungsi *simulated log-likelihood* nya adalah,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{simlnL}(\theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \tilde{P}_{nj}^{(r)} \sum_{k=1}^m \frac{\phi_{kn}^{(r)}}{\Phi_{kn}^{(r)}} \frac{\partial(a_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} \right) \quad (3.28)$$

dengan,

$$\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial \beta} = \begin{cases} - \sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \mu_{hn}^{(r)} \frac{\phi(a_{hn}^{(r)})}{\phi(\eta_{hn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{hn}^{(r)})}{\partial \beta} - \frac{1}{c_{kk}} \frac{\partial V_{nk,i}}{\partial \beta}, & k > 1 \\ - \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial V_{n1,i}}{\partial \beta}, & k = 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

dan

$$\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial c_{ji}} = \begin{cases} - \sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \mu_{hn}^{(r)} \frac{\phi(a_{hn}^{(r)})}{\phi(\eta_{hn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{hn}^{(r)})}{\partial c_{ji}}, & \text{untuk } i \leq j \leq k \\ - \frac{\eta_{in}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i < j = k \\ - \frac{a_{kn}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i = j = k \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (3.30)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J y_{nj} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln \left[ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)} \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \left[ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tilde{P}_{ni}^{(r)} \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \left[ \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left( \prod_{k=1}^m \Phi_{kn}^{(r)} \right) \right] \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Dari sifat bahwa,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \prod_{j=1}^m \Phi_j = \prod_{j=1}^m \Phi_j \sum_{k=1}^m \frac{\partial \ln \Phi_k}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{3.32}$$

(bukti di lampiran 3)

maka,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \left( \prod_{j=1}^m \Phi_{jn}^{(r)} \right) \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial \ln \Phi_{kn}^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right) \\
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \left( \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \tilde{P}_{nj}^{(r)} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \ln \Phi_{kn}^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat

$$\frac{\partial \ln \Phi_{kn}^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\phi_{kn}^{(r)}}{\Phi_{kn}^{(r)}} \cdot \frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{3.34}$$

(bukti di lampiran 4)

dimana  $\Phi_{kn}^{(r)} = \Phi(a_{kn}^{(r)})$

Maka,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{simln}L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{P}_{ni}^{(r)}} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \tilde{P}_{nj}^{(r)} \sum_{k=1}^m \frac{\phi_{kn}^{(r)}}{\Phi_{kn}^{(r)}} \frac{\partial (a_{kn}^{(r)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)$$

Selanjutnya akan dicari turunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{c})$ .

Karena  $a_{kn}^{(r)}$  adalah fungsi dari  $\eta_{kn}^{(r)}$ ,

$$\eta_{kn}^{(r)} = \Phi^{-1}(\mu_{kn}^{(r)} \Phi(a_{kn}^{(r)}))$$

maka,

$$\Phi(\eta_{kn}^{(r)}) = (\mu_{kn}^{(r)} \Phi(a_{kn}^{(r)}))$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\eta_{kn}^{(r)}) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_{kn}^{(r)} \Phi(a_{kn}^{(r)})) \\ \Leftrightarrow \Phi(\eta_{kn}^{(r)}) \frac{\partial(\eta_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} &= \mu_{kn}^{(r)} \Phi(a_{kn}^{(r)}) \frac{\partial(a_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\frac{\partial(\eta_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} = \mu_{kn}^{(r)} \frac{\Phi(a_{kn}^{(r)})}{\Phi(\eta_{kn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} \quad (3.35)$$

dengan  $\mu_{kn}^{(r)}$  menyatakan suatu nilai yang diambil secara random dari distribusi uniform pada interval yang ditentukan. Selanjutnya  $a_{kn}^{(r)}$  diturunkan terhadap parameter  $\beta$  adalah,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial \beta} &= \begin{cases} -\sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \frac{\partial \eta_{kn}^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{1}{c_{kk}} \frac{\partial V_{nk,i}}{\partial \beta}, & k > 1 \\ -\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial V_{n1,i}}{\partial \beta}, & k = 1 \end{cases} \\ \frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial \beta} &= \begin{cases} -\sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \mu_{hn}^{(r)} \frac{\Phi(a_{hn}^{(r)})}{\Phi(\eta_{hn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{hn}^{(r)})}{\partial \beta} - \frac{1}{c_{kk}} \frac{\partial V_{nk,i}}{\partial \beta}, & k > 1 \\ -\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial V_{n1,i}}{\partial \beta}, & k = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

dan  $a_{kn}^{(r)}$  diturunkan terhadap parameter  $c$  adalah,

$$\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial c_{ji}} = 0, \text{ untuk } j > k$$

karena  $a_{kn}^{(r)}$  tidak mengandung  $c_{ji}$  jika  $j > k$ .

Sehingga penurunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $c_{ji}$  dapat dibagi ke dalam beberapa interval:

1. Untuk interval  $i < j < k$ , turunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $c_{ji}$  adalah:

$$-\sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \frac{\partial(\eta_{kn}^{(r)})}{\partial c_{ji}}$$

2. Untuk interval  $i < j = k$ . Pada persamaan  $a_{kn}^{(r)}$  yang mengandung  $c_{ji}$  ketika  $j = k$  adalah  $-\frac{\eta_{in}^{(r)}}{c_{kk}}$ , sehingga turunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $c_{ji}$  pada interval  $i < j = k$  adalah  $-\frac{\eta_{in}^{(r)}}{c_{kk}}$ .
3. Untuk interval  $i = j = k$ . Ketika  $i = j = k$ , persamaan  $a_{kn}^{(r)}$  diturunkan terhadap penyebutnya, sehingga turunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $c_{ji}$  pada interval  $i = j = k$  adalah  $-\frac{a_{kn}^{(r)}}{c_{kk}}$ .
4. Untuk interval  $i > j$ , turunannya adalah 0, karena pada persamaan  $a_{kn}^{(r)}$  tidak mengandung nilai  $c_{ji}$  yang  $i > j$ .

Secara ringkas, turunan  $a_{kn}^{(r)}$  terhadap  $c_{ji}$  dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial c_{ji}} = \begin{cases} -\sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \frac{\partial(\eta_{kn}^{(r)})}{\partial c_{ji}}, & \text{untuk } i < j < k \\ -\frac{\eta_{in}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i < j = k \\ -\frac{a_{kn}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i = j = k \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Berdasarkan persamaan (3.35) diperoleh,

$$\frac{\partial(\eta_{kn}^{(r)})}{\partial c_{ji}} = \mu_{kn}^{(r)} \frac{\phi(a_{kn}^{(r)})}{\phi(\eta_{kn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{kn}^{(r)})}{\partial c_{ji}} \quad (3.37)$$

sehingga,

$$\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial c_{ji}} = \begin{cases} -\sum_{h=1}^{k-1} \frac{c_{kh}}{c_{kk}} \mu_{hn}^{(r)} \frac{\phi(a_{hn}^{(r)})}{\phi(\eta_{hn}^{(r)})} \frac{\partial(a_{hn}^{(r)})}{\partial c_{ji}}, & \text{untuk } i \leq j \leq k \\ -\frac{\eta_{in}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i < j = k \\ -\frac{a_{kn}^{(r)}}{c_{kk}}, & \text{untuk } i = j = k \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (3.38)$$

Jadi,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{simln}L(\theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{y_{nj}}{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{p}_{ni}^{(r)}} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \tilde{p}_{nj}^{(r)} \sum_{k=1}^m \frac{\phi_{kn}^{(r)}}{\Phi_{kn}^{(r)}} \frac{\partial(a_{kn}^{(r)})}{\partial \theta} \right) \quad (3.39)$$



dengan  $\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial \beta}$  dan  $\frac{\partial a_{kn}^{(r)}}{\partial c_{ji}}$  masing-masing seperti pada persamaan (3.35) dan (3.38).

Taksiran parameter pada fungsi *log simulated-likelihood* di atas dapat diperoleh dengan cara mencari nilai taksiran yang membuat  $\frac{\partial}{\partial \theta} \text{simln}L(\theta) = 0$ . Namun, karena bentuk dari  $\frac{\partial}{\partial \theta} \text{simln}L(\theta) = 0$  tidak linear maka dibutuhkan suatu metode iterasi numerik untuk menyelesaikannya.

#### 3.2.1.4. Metode Iterasi untuk mencari taksiran $\theta$

Misalkan taksiran parameter  $\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{J,i}, \beta_{11,i}, \dots, \beta_{p1,i}, \dots, \beta_{1(i-1),i}, \dots, \beta_{p(i-1),i}, \beta_{1(i+1),i}, \dots, \beta_{p(i+1),i}, \dots, \beta_{1J,i}, \dots, \beta_{pJ,i}, \gamma_1, \dots, \gamma_q$  dan  $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}, c_{22}, \dots, c_{2m}, \dots, c_{mm}$  adalah  $\hat{\alpha}_{1,i}, \dots, \hat{\alpha}_{J,i}, \hat{\beta}_{11,i}, \dots, \hat{\beta}_{p1,i}, \dots, \hat{\beta}_{1(i-1),i}, \dots, \hat{\beta}_{p(i-1),i}, \hat{\beta}_{1(i+1),i}, \dots, \hat{\beta}_{p(i+1),i}, \dots, \hat{\beta}_{1J,i}, \dots, \hat{\beta}_{pJ,i}, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_q$  dan  $\hat{c}_{11}, \hat{c}_{21}, \dots, \hat{c}_{m1}, \hat{c}_{22}, \dots, \hat{c}_{2m}, \dots, \hat{c}_{mm}$ . Taksiran tersebut akan diperoleh dengan cara mencari nilai  $\hat{\alpha}_{1,i}, \dots, \hat{\alpha}_{J,i}, \hat{\beta}_{11,i}, \dots, \hat{\beta}_{p1,i}, \dots, \hat{\beta}_{1(i-1),i}, \dots, \hat{\beta}_{p(i-1),i}, \hat{\beta}_{1(i+1),i}, \dots, \hat{\beta}_{p(i+1),i}, \dots, \hat{\beta}_{1J,i}, \dots, \hat{\beta}_{pJ,i}, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_q, \hat{c}_{11}, \hat{c}_{21}, \dots, \hat{c}_{m1}, \hat{c}_{22}, \dots, \hat{c}_{2m}, \dots, \hat{c}_{mm}$  sehingga  $\frac{\partial}{\partial \beta} \text{simln}L(\beta) = 0$  dan  $\frac{\partial}{\partial c} \text{simln}L(c) = 0$ . Karena fungsi  $\frac{\partial}{\partial \beta} \text{simln}L(\beta)$  dan  $\frac{\partial}{\partial c} \text{simln}L(c)$  bentuknya tidak linear maka untuk mencari solusi tersebut akan digunakan metode numerik. Metode numerik yang sering digunakan adalah metode Newton-Raphson. Penaksir  $\theta$  yang dihitung dengan menggunakan metode Newton-Raphson memerlukan turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi *log-likelihood simulated* pada persamaan (3.25). Untuk menghindari turunan kedua dari fungsi *log-likelihood simulated* dapat digunakan metode iterasi BHHH (Berndt, Hall, Hall, Hausman).

##### a. Metode Newton-Raphson

Optimisasi fungsi log-likelihood  $LL(\theta)$  dapat menggunakan deret Taylor's orde kedua yaitu mengabaikan nilai pada suku orde ketiga atau lebih. Nilai

pendekatan terbaik dari  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  (pada iterasi ke k+1) dengan deret Taylor's orde kedua, yaitu mendekati  $LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})$  disekitar  $LL(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ ,

$$LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) = LL(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + (\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)})' \mathbf{g}^{(k)} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)})' \mathbf{H}^{(k)} (\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) + o(|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}|^2)$$

Dimana  $\mathbf{H}$  adalah matrik Hessian yaitu matrik yang mempunyai elemen

$$\frac{\partial^2 LL(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \partial \theta_j} \text{ dan } \mathbf{g} \text{ adalah vektor yang mempunyai elemen } \frac{\partial LL(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}. \mathbf{H}^k \text{ dan } \mathbf{g}^k \text{ adalah } \mathbf{H}$$

dan  $\mathbf{g}$  yang terevaluasi pada  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ .

Selanjutnya untuk mencari nilai  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  yang memaksimumkan persamaan  $LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})$  adalah dengan cara menurunkan  $LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})$  terhadap  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  yang menjadi,

$$\frac{\partial LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{(k+1)}} = \mathbf{g}^k + \mathbf{H}^k (\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

Sehingga persamaan Newton-Raphsonnya menjadi,

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - (\mathbf{H}^k)^{-1} \mathbf{g}^k \quad (3.40)$$

Selanjutnya, metode Newton-Raphson akan dimodifikasi menjadi metode Fisher Scoring. Pada metode Fisher Scoring matriks Hessian pada metode Newton-Raphson diganti menjadi pendekatan ke-k untuk matriks informasi Fisher, sehingga persamaan iterasi untuk Fisher Scoring adalah,

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + (\mathbf{Inf}^k)^{-1} \mathbf{g}^k \quad (3.41)$$

atau

$$\mathbf{Inf}^{(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \mathbf{Inf}^{(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{g}^k \quad (3.42)$$

dimana  $\mathbf{Inf}^{(k)}$  adalah pendekatan ke-k untuk matriks informasi Fisher,  $\mathbf{Inf}^{(k)}$  mempunyai elemen  $-E \left( \frac{\partial^2 LL(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \partial \theta_j} \right)$  yang terevaluasi pada  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ .

Untuk mengurangi banyaknya iterasi, dapat dilakukan pembobot skalar  $\lambda$  pada setiap langkah iterasi. Persamaan (3.41) menjadi,

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \lambda (\mathbf{Inf}^k)^{-1} \mathbf{g}^k \quad (3.43)$$

Pendekatan dengan deret Taylor's orde pertama untuk  $LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})$  adalah,

$$LL(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) = LL(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \lambda (\mathbf{Inf}^k)^{-1} \mathbf{g}^k$$

Langkah-langkah pengambilan nilai  $\lambda$  pada iterasi ke-k adalah sebagai berikut:

1. Diawali dengan pengambilan nilai  $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  dengan  $t=0$  dan menghitung  $\theta^{(k+1)}$ .
2. Membandingkan nilai  $LL(\theta^{(k+1)})$  terhadap  $LL(\theta^{(k)})$ . Jika  $LL(\theta^{(k+1)}) > LL(\theta^{(k)})$  maka ke langkah  $\theta^{(k+1)}$  (persamaan 3.40) dan mulai iterasi baru. Jika  $LL(\theta^{(k+1)}) < LL(\theta^{(k)})$  maka ke-langkah ke-3.
3. Mengambil  $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  dengan  $t=(t+1)$  dan kembali ke langkah 2. Langkah ke-3 ini dilakukan sampai diperoleh nilai  $\lambda$  sangat kecil (mendekati nol).

b. Metode BHHH

Pada metode iterasi Newton-Rapshon kita membutuhkan turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi *log simulated likelihood*. Oleh karena itu untuk menghindari turunan kedua, maka dapat digunakan metode iterasi BHHH (Berndt, Hall, Hall, Hausman).

Iterasi pada prosedur ini adalah,

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \lambda(\mathbf{B}^k)^{-1} \mathbf{g}^k \quad (3.44)$$

Dimana  $\lambda$  merupakan pembobot skalar pada setiap langkah iterasi yang berguna untuk mengurangi banyaknya iterasi.  $\mathbf{B}^k$  merupakan pendekatan dari matrik Hessian yang dirumuskan dengan,

$$\mathbf{B}^k = \frac{1}{N} \sum_n s_n(\theta^k) [s_n(\theta^k)]'$$

dan

$$s_n(\theta^k) = \frac{\partial \ln P_n(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^k} = \sum_{j=1}^J \frac{\partial \ln P_{nj}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^k} = \sum_{j=1}^J \frac{1}{P_{nj}(\theta)} \frac{\partial \ln P_{nj}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^k}$$

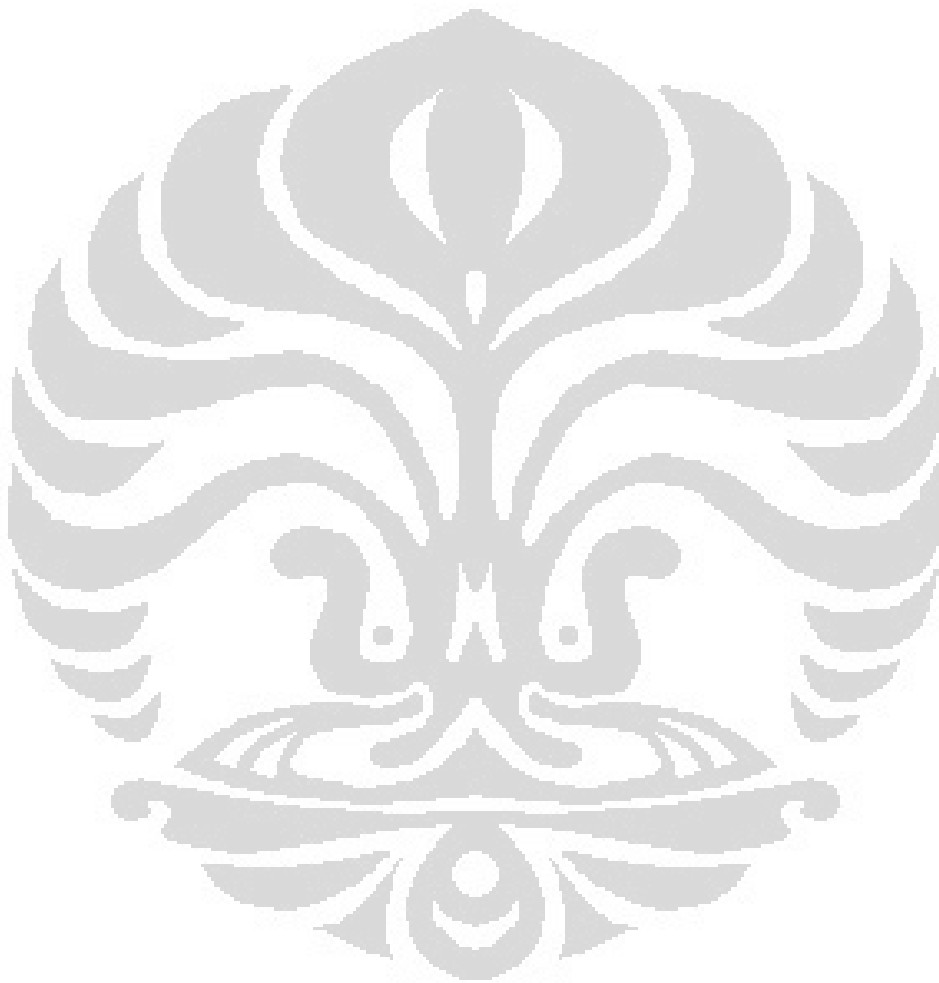
Jika  $\theta$  adalah vektor parameter berdimensi  $(K \times 1)$  maka,

$$s_n(\theta^k) [s_n(\theta^k)]' = \begin{pmatrix} s_n^1 s_n^1 & s_n^1 s_n^2 & \dots & s_n^1 s_n^K \\ s_n^1 s_n^2 & s_n^2 s_n^2 & \dots & s_n^2 s_n^K \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_n^1 s_n^K & s_n^2 s_n^K & \dots & s_n^K s_n^K \end{pmatrix}$$

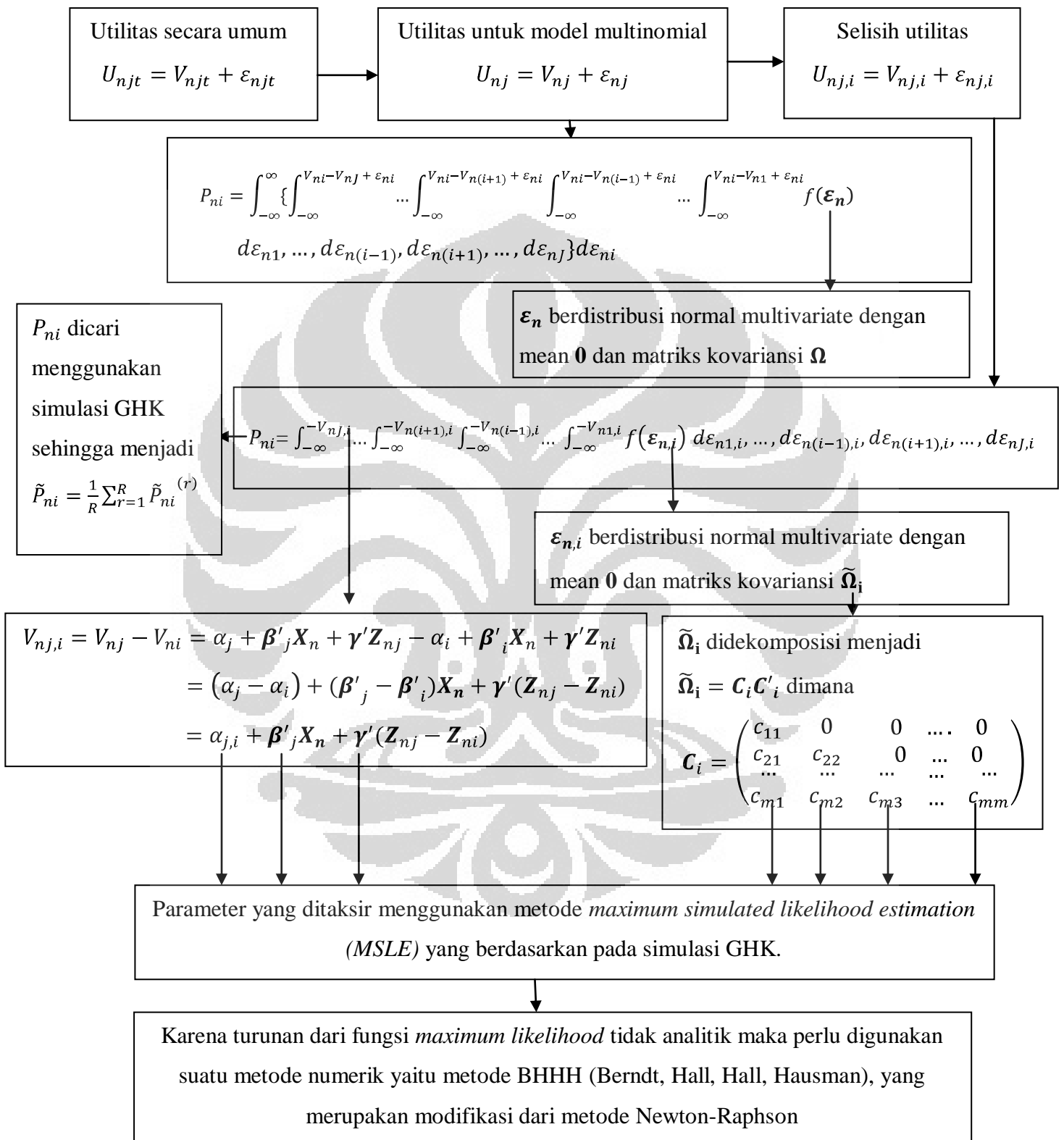
dengan  $s_n^j$  adalah elemen ke-j dari  $s_n(\theta^k)$ .

Terdapat 2 keunggulan prosedur BHHH dibanding prosedur Newton-Raphson (Train,2003):

1. Menghitung  $\mathbf{B}^k$  adalah lebih mudah dan lebih cepat dibandingkan menghitung  $\mathbf{H}^k$ .  $\mathbf{B}^k$  hanya membutuhkan turunan pertama dari fungsi likelihood sedangkan  $\mathbf{H}^k$  membutuhkan turunan kedua dari fungsi likelihood.
2. Dalam BHHH dijamin bahwa setiap langkah iterasi akan menghasilkan nilai log-likelihood yang selalu lebih besar dibanding tahap sebelumnya.



## Flow Chart Penaksiran Parameter Model Multinomial Probit



## **BAB 4**

### **CONTOH PENERAPAN**

Pada bab ini, akan dibahas tentang aplikasi model multinomial probit pada kehidupan sehari-hari dengan menggunakan software STATA.

#### **4.1 Permasalahan**

Dalam kehidupan sehari-hari, setiap individu dihadapkan dengan berbagai macam pilihan alat transportasi yang berbeda-beda. Masing-masing alat transportasi mempunyai kelemahan dan keunggulan masing-masing. Pesawat udara memiliki keunggulan dalam segi waktu tempuh yang relatif singkat dan nyaman, tetapi mempunyai kelemahan dalam hal harga yang cukup mahal. Sedangkan kereta api mempunyai keunggulan dalam segi waktu tempuh yang relatif singkat dan harga yang relatif murah, tetapi mempunyai kelemahan dalam hal kenyamanan yang masih kurang dan waktu tunggu yang lama.

Setiap individu akan mempunyai pilihan alat transportasi yang berbeda-beda. Berdasarkan teori utilitas, setiap individu akan memaksimalkan kepuasan yang dapat dinikmatinya. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa setiap individu akan memaksimalkan utilitas dari barang-barang yang dikonsumsi. Sehingga dalam kasus mengenai pilihan alat transportasi, setiap individu akan memilih alat transportasi yang dapat memaksimalkan kepuasan mereka, atau dengan kata lain setiap individu akan memilih alat transportasi yang sesuai dengan kebutuhan dan kemampuan mereka.

#### **4.2. Data**

Data yang digunakan dalam bab ini merupakan data yang diambil dari <http://www.stata-press.com/data/r12/travel> yang merupakan data dari 210 individu mengenai pilihan alat transportasi yang mereka pilih dalam perjalanan dari Sydney ke Melbourne. Pilihan (*mode*) alat transportasi tersebut terdiri dari pesawat udara, kereta api, bus dan mobil pribadi. Data yang didapat dari 210

orang tersebut adalah data yang meliputi biaya perjalanan (*travelcost*), lama waktu berhenti (*termtime*) dan pendapatan (*income*) dari tiap individu yang diobservasi. Data tersebut ditampilkan pada lampiran 5.

Misalkan :

$Y_n$  adalah variabel respon yang menyatakan pilihan individu ke-n

$X_n$  adalah variabel penjelas yang menyatakan pendapatan untuk individu ke-n.

$Z_{1nj}$  adalah variabel penjelas yang menyatakan biaya perjalanan individu ke-n dan pilihan ke-j

$Z_{2nj}$  adalah variabel penjelas yang menyatakan lama waktu berhenti untuk individu ke-n dan pilihan ke-j.

### 4.3 Tujuan

Tujuan dari analisis data dalam contoh ini adalah mencari model probabilitas untuk masing-masing pilihan.

### 4.4 Pengolahan Data

Definisikan utilitas individu ke-n memilih alternatif pilihan alat transportasi ke-j adalah sebagai berikut,

$$U_{nj} = \alpha_j + \beta_{1j}X_n + \gamma_1Z_{1nj} + \gamma_2Z_{2nj} + \varepsilon_{nj} \quad (4.1)$$

dimana,  $U_{nj}$ : utilitas individu ke-n memilih alternatif pilihan alat transportasi ke-j.

$\alpha_j$  : parameter konstanta untuk pilihan ke-j.

$\beta_{1j}$ : parameter untuk variabel bebas pendapatan pembuat keputusan pada pilihan ke-j

$\gamma_1$  : parameter untuk variabel bebas biaya perjalanan.

$\gamma_2$  : parameter untuk variabel bebas lama waktu berhenti.

dengan , pilihan-1: pesawat udara

pilihan-2: kereta api

pilihan-3: bus

pilihan-4 :Mobil

Selanjutnya, model multinomial probit untuk setiap pilihannya adalah sebagai berikut:

1. Probabilitas orang ke-n memilih alternatif pertama adalah

$$P_{n1} = \int_{-\infty}^{-V_{n4,1}} \int_{-\infty}^{-V_{n3,1}} \int_{-\infty}^{-V_{n2,1}} f(\varepsilon_{n4,1}, \varepsilon_{n3,1}, \varepsilon_{n2,1}) d\varepsilon_{n4,1} d\varepsilon_{n3,1} d\varepsilon_{n2,1}$$

dimana,  $V_{n4,1} = \alpha_{4,1} + \beta_{14,1}X_n + \gamma_1(Z_{1n4} - Z_{1n1}) + \gamma_2(Z_{2n4} - Z_{2n1})$

$$V_{n3,1} = \alpha_{3,1} + \beta_{13,1}X_n + \gamma_1(Z_{1n3} - Z_{1n1}) + \gamma_2(Z_{2n3} - Z_{2n1})$$

$$V_{n2,1} = \alpha_{2,1} + \beta_{12,1}X_n + \gamma_1(Z_{1n2} - Z_{1n1}) + \gamma_2(Z_{2n2} - Z_{2n1})$$

sehingga parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \beta_{12,1}, \beta_{13,1}, \beta_{14,1}, \gamma_1, \gamma_2$$

2. Probabilitas orang ke-n memilih alternatif kedua adalah,

$$P_{n2} = \int_{-\infty}^{-V_{n4,2}} \int_{-\infty}^{-V_{n3,2}} \int_{-\infty}^{-V_{n1,2}} f(\varepsilon_{n4,2}, \varepsilon_{n3,2}, \varepsilon_{n1,2}) d\varepsilon_{n4,2} d\varepsilon_{n3,2} d\varepsilon_{n1,2}$$

dimana,  $V_{n4,2} = \alpha_{4,2} + \beta_{14,2}X_n + \gamma_1(Z_{1n4} - Z_{1n2}) + \gamma_2(Z_{2n4} - Z_{2n2})$

$$V_{n3,2} = \alpha_{3,2} + \beta_{13,2}X_n + \gamma_1(Z_{1n3} - Z_{1n2}) + \gamma_2(Z_{2n3} - Z_{2n2})$$

$$V_{n1,2} = \alpha_{1,2} + \beta_{11,2}X_n + \gamma_1(Z_{1n1} - Z_{1n2}) + \gamma_2(Z_{2n1} - Z_{2n2})$$

sehingga parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \beta_{11,2}, \beta_{13,2}, \beta_{14,2}, \gamma_1, \gamma_2$$

3. Probabilitas orang ke-n memilih alternatif ketiga adalah,

$$P_{n3} = \int_{-\infty}^{-V_{n4,3}} \int_{-\infty}^{-V_{n2,3}} \int_{-\infty}^{-V_{n1,3}} f(\varepsilon_{n4,3}, \varepsilon_{n2,3}, \varepsilon_{n1,3}) d\varepsilon_{n4,3} d\varepsilon_{n2,3} d\varepsilon_{n1,3}$$

dimana,  $V_{n4,3} = \alpha_{4,3} + \beta_{14,3}X_n + \gamma_1(Z_{1n4} - Z_{1n3}) + \gamma_2(Z_{2n4} - Z_{2n3})$

$$V_{n2,3} = \alpha_{2,3} + \beta_{12,3}X_n + \gamma_1(Z_{1n2} - Z_{1n3}) + \gamma_2(Z_{2n2} - Z_{2n3})$$

$$V_{n1,3} = \alpha_{1,3} + \beta_{11,3}X_n + \gamma_1(Z_{1n1} - Z_{1n3}) + \gamma_2(Z_{2n1} - Z_{2n3})$$

sehingga parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \beta_{11,3}, \beta_{12,3}, \beta_{14,3}, \gamma_1, \gamma_2$$

4. Probabilitas orang ke-n memilih alternatif keempat adalah,

$$P_{n4} = \int_{-\infty}^{-V_{n3,4}} \int_{-\infty}^{-V_{n2,4}} \int_{-\infty}^{-V_{n1,4}} f(\varepsilon_{n3,4}, \varepsilon_{n2,4}, \varepsilon_{n1,4}) d\varepsilon_{n3,4} d\varepsilon_{n2,4} d\varepsilon_{n1,4}$$



dimana,  $V_{n3,4} = \alpha_{3,4} + \beta_{13,4}X_n + \gamma_1(Z_{1n3} - Z_{1n4}) + \gamma_2(Z_{2n3} - Z_{2n4})$

$$V_{n2,4} = \alpha_{2,4} + \beta_{12,4}X_n + \gamma_1(Z_{1n2} - Z_{1n4}) + \gamma_2(Z_{2n2} - Z_{2n4})$$

$$V_{n1,4} = \alpha_{1,4} + \beta_{11,4}X_n + \gamma_1(Z_{1n1} - Z_{1n4}) + \gamma_2(Z_{2n1} - Z_{2n4})$$

sehingga parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{3,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{1,4}, \beta_{11,4}, \beta_{12,4}, \beta_{13,4}, \gamma_1, \gamma_2$$

Pada model multinomial probit di atas, untuk menghitung nilai dari  $P_{ni}$  dibutuhkan matriks kovariansi  $\tilde{\Omega}_i$  yang merupakan matriks kovariansi dari vektor  $\varepsilon_{n,i} = (\varepsilon_{n1,i}, \dots, \varepsilon_{n(i-1),i}, \varepsilon_{n(i+1),i}, \varepsilon_{nj,i})$ , untuk  $i=1,2,3,4$ .

Sehingga matriks kovariansi  $\tilde{\Omega}_i$  perlu ditaksir juga. Pada software STATA untuk mengurangi jumlah taksiran parameter dari matriks kovariansi, dilakukan normalisasi pada matriks kovariansi tersebut, yaitu dengan membuat kolom ke-1 dan baris ke-1 pada matriks kovariansi bernilai 1, sehingga parameter yang ditaksir jumlahnya menjadi  $[J(J-1)/2] - 1 = [4(3)/2] - 1 = 5$ .

Matriks kovariansi yang sudah dinormalisasi menjadi,

$$\tilde{\Omega}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12}^* & \dots & \theta_{1m}^* \\ \cdot & \theta_{22}^* & \dots & \theta_{2m}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{mm}^* \end{pmatrix}$$

Dan faktorisasi cholesky untuk  $\tilde{\Omega}_i^*$  adalah  $C_i^*$  sehingga  $\tilde{\Omega}_i^* = C_i^* C_i^{*'}$ , dimana,

$$C_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}^* & c_{22}^* & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}^* & c_{m2}^* & c_{m3}^* & \dots & c_{mm}^* \end{pmatrix}$$

Maka dengan  $J=4$  faktorisasi cholesky nya menjadi,

$$C_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21}^* & c_{22}^* & 0 \\ c_{31}^* & c_{32}^* & c_{33}^* \end{pmatrix}$$

dan parameter yang akan ditaksir adalah  $c_{21}^*, c_{22}^*, c_{31}^*, c_{32}^*, c_{33}^*$

Sehingga pada masalah ini semua parameter yang akan ditaksir adalah

$$\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{1,4}, \beta_{12,1}, \beta_{13,1}, \beta_{14,1}, \beta_{11,2}, \beta_{13,2}, \beta_{14,2}, \beta_{11,3}, \beta_{12,3}, \beta_{14,3}, \beta_{11,4}, \beta_{12,4}, \beta_{13,4}, \gamma_1, \gamma_2 \text{ dan } c_{21}^*, c_{22}^*, c_{31}^*, c_{32}^*, c_{33}^*.$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai log-simulated likelihood, nilai taksiran parameter, dan nilai probabilitas untuk setiap individu memilih dalam

setiap pilihan, dapat digunakan software STATA, dan pada skripsi ini software STATA yang digunakan adalah STATA 10.

a. Menghitung log-simulated likelihood dan taksiran parameter.

Untuk menghitung log-simulated likelihood dan taksiran parameter pada STATA digunakan syntax

*asmprobit choice travelcost termtime, case(id) alternatives(mode)casevars(income)*

sehingga didapat ouputnya sebagai berikut:

Tabel 4.1 Ouput taksiran parameter model multinomial probit dengan software STATA

| Alternative-specific multinomial probit            |           | Number of obs      | =     | 840    |                      |           |
|--|-----------|--------------------|-------|--------|----------------------|-----------|
| Case variable: id                                  |           | Number of cases    | =     | 210    |                      |           |
| Alternative variable: mode                         |           | Alts per case: min | =     | 4      |                      |           |
|  |           | avg                | =     | 4.0    |                      |           |
|  |           | max                | =     | 4      |                      |           |
| Integration sequence: Hammersley                   |           | Wald chi2(5)       | =     | 32.06  |                      |           |
| Integration points: 200                            |           | Prob > chi2        | =     | 0.0000 |                      |           |
| Log simulated-likelihood = -190.09419              |           |                    |       |        |                      |           |
| choice   | Coef.     | Std. Err.          | z     | P> z   | [95% Conf. Interval] |           |
| <b>mode</b>  |           |                    |       |        |                      |           |
| travelcost   | -.0097707 | .0027835           | -3.51 | 0.000  | -.0152261            | -.0043152 |
| termtime   | -.0377034 | .0094046           | -4.01 | 0.000  | -.0561361            | -.0192708 |
| <b>air</b><br>(base alternative)                   |           |                    |       |        |                      |           |
| <b>train</b>                                       |           |                    |       |        |                      |           |
| income   | -.0291886 | .0089232           | -3.27 | 0.001  | -.0466778            | -.0116995 |
| _cons  | .5615485  | .394619            | 1.42  | 0.155  | -.2118906            | 1.334988  |
| <b>bus</b>   |           |                    |       |        |                      |           |
| income   | -.0127473 | .0079269           | -1.61 | 0.108  | -.0282839            | .0027892  |
| _cons  | -.0572738 | .4791635           | -0.12 | 0.905  | -.9964169            | .8818693  |
| <b>car</b>   |           |                    |       |        |                      |           |
| income   | -.0049067 | .0077481           | -0.63 | 0.527  | -.0200927            | .0102792  |
| _cons  | -1.833159 | .81842             | -2.24 | 0.025  | -3.437233            | -.2290856 |
| /ln12_2  | -.5499745 | .3903368           | -1.41 | 0.159  | -1.315021            | .2150717  |
| /ln13_3  | -.6008993 | .3354232           | -1.79 | 0.073  | -1.258317            | .056518   |
| /12_1  | 1.131589  | .2125186           | 5.32  | 0.000  | .7150604             | 1.548118  |
| /13_1  | .9720683  | .2352248           | 4.13  | 0.000  | .5110362             | 1.4331    |
| /13_2  | .5196988  | .2860692           | 1.82  | 0.069  | -.0409865            | 1.080384  |
| (mode=air is the alternative normalizing location) |           |                    |       |        |                      |           |
| (mode=train is the alternative normalizing scale)  |           |                    |       |        |                      |           |

Dari output di atas dapat dilihat bahwa,

- Nilai dari log simulated likelihoodnya adalah -190.09419
- Taksiran parameternya adalah

$$\alpha_{2,1} = 0.5615485, \alpha_{3,1} = -0.0572738, \alpha_{4,1} = -1.833159$$

$$\beta_{12,1} = -0.0291886, \beta_{13,1} = -0.0127473, \beta_{14,1} = -0.0049067$$

$$\gamma_1 = -0.0097707, \gamma_2 = -0.037703$$

$$\hat{c}_{21}^* = 1.131589, \hat{c}_{22}^* = -0.5499745, \hat{c}_{31}^* = 0.9720683,$$

$$\hat{c}_{32}^* = 0.5196988, \hat{c}_{33}^* = -0.6008993$$

Untuk mendapatkan taksiran yang lain dapat digunakan operasi aljabar sederhana,

Misalkan, taksiran yang akan dicari adalah  $\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}$ .

-  $\alpha_{1,2}$  didapat dengan cara mengalikan  $\alpha_{2,1}$  dengan (-), sehingga  $\alpha_{1,2} = -0.5615485$

-  $\alpha_{3,2}$  didapat dengan cara melakukan proses eliminasi antara  $\alpha_{3,1}$  dan  $\alpha_{2,1}$ , yaitu:

$$\alpha_{3,1} = \alpha_3 - \alpha_1 = -0.0572738$$

$$\alpha_{2,1} = \alpha_2 - \alpha_1 = 0.5615485$$

$$\alpha_{3,2} = \alpha_3 - \alpha_2 = -0.6224223$$

-  $\alpha_{4,2}$  didapat dengan cara melakukan proses eliminasi antara  $\alpha_{4,1}$  dan  $\alpha_{2,1}$ , yaitu

$$\alpha_{4,1} = \alpha_4 - \alpha_1 = -1.833159$$

$$\alpha_{2,1} = \alpha_2 - \alpha_1 = 0.5615485$$

$$\alpha_{3,2} = \alpha_3 - \alpha_2 = -2.3983075$$

Dengan cara yang sama dapat dihitung  $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}$  sehingga didapat,

$$\alpha_{1,3} = 0.0572738, \alpha_{2,3} = 0.6224223, \alpha_{4,3} = -1.7758852$$

$$\alpha_{1,4} = 1.833159, \alpha_{2,4} = 2.3983075, \alpha_{3,4} = 1.7758852$$

Kemudian, dengan cara yang sama kita dapatkan nilai dari

$\beta_{11,2}, \beta_{13,2}, \beta_{14,2}, \beta_{11,3}, \beta_{12,3}, \beta_{14,3}, \beta_{11,4}, \beta_{12,4}, \beta_{13,4}$  adalah,

$$\beta_{11,2} = 0.0291886, \beta_{13,2} = 0.01644413, \beta_{14,2} = 0.0242819$$

$$\beta_{11,3} = 0.0127473, \beta_{12,3} = -0.01644413, \beta_{14,3} = -0.0078406$$

$$\beta_{11,4} = 0.0049067, \beta_{12,4} = -0.0242819, \beta_{13,4} = 0.0078406$$

b. Menghitung nilai probabilitas setiap individu memilih setiap pilihan.

Untuk menghitung probabilitas setiap individu memilih setiap pilihan, dapat digunakan software STATA dengan syntax sebagai berikut,

*predict prob*

Sehingga, didapat probabilitas orang pertama memilih setiap pilihan adalah sebagai berikut,

Tabel. 4.2 Probabilitas orang pertama memilih setiap pilihan

| <i>Choice</i> | <i>Termtime</i> | <i>Travelcost</i> | <i>income</i> | <i>Id</i> | <i>mode</i>  | <i>prob</i> |
|---------------|-----------------|-------------------|---------------|-----------|--------------|-------------|
| 0             | 69              | 70                | 35            | 1         | <i>air</i>   | 0.149437    |
| 0             | 34              | 71                | 35            | 1         | <i>train</i> | 0.329231    |
| 0             | 35              | 70                | 35            | 1         | <i>bus</i>   | 0.131985    |
| 1             | 0               | 30                | 35            | 1         | <i>car</i>   | 0.389814    |

## BAB 5 PENUTUP

### 5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari skripsi ini adalah:

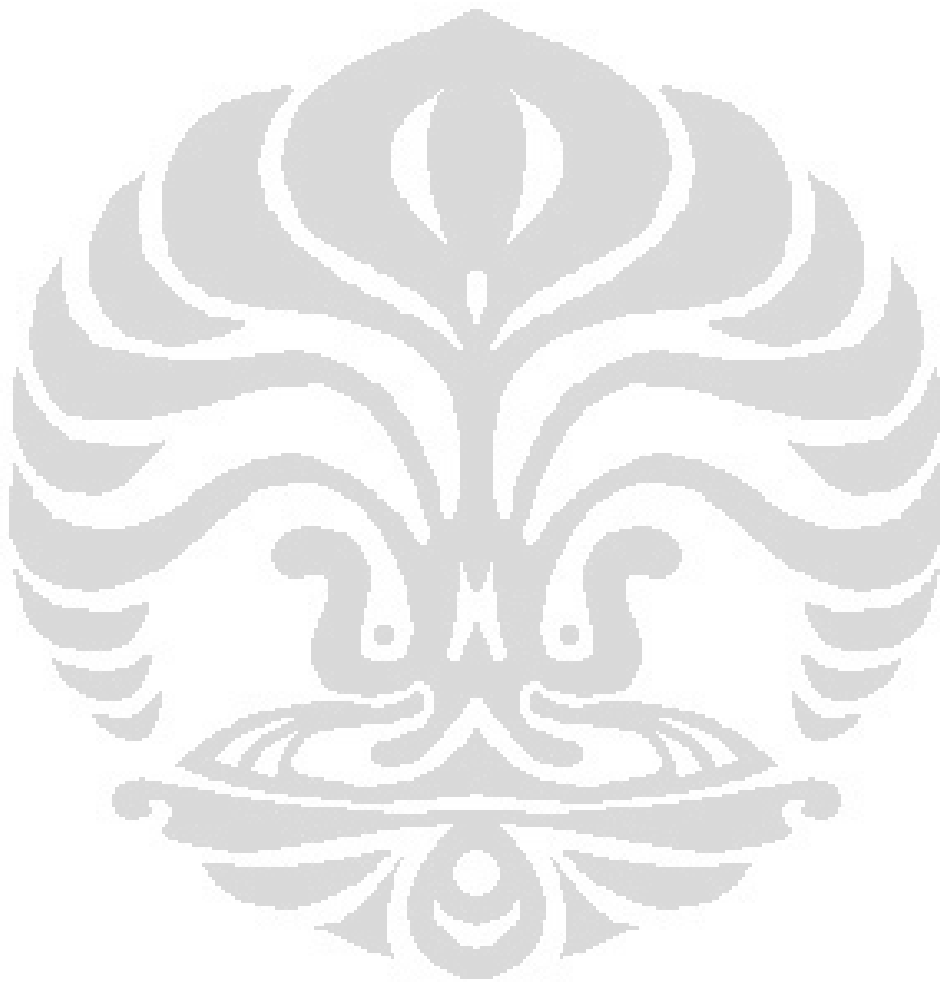
1. Model multinomial probit dapat digunakan untuk memodelkan pilihan (lebih dari 2 pilihan dengan respon sebanyak 1 kali), dimana antar alternatif bisa saling berpengaruh.
2. Model multinomial probit adalah model pilihan diskrit dengan mengasumsikan errornya berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.
3. Untuk mencari taksiran parameter model multinomial probit dapat digunakan metode *maximum simulated likelihood estimation (MSLE)* yang berdasarkan pada simulasi GHK.
4. Untuk mencari taksiran parameter model multinomial probit digunakan metode numerik, karena bentuk turunan fungsi *log simulated likelihood* dari model multinomial probit tidak linier, sehingga untuk mencari taksiran parameternya tidak dapat dilakukan secara langsung.
5. Metode numerik yang digunakan adalah metode BHHH ((Berndt, Hall, Hall, Hausman) yang merupakan modifikasi dari metode Newton-Raphson. Metode ini digunakan karena untuk menghindari turunan kedua dari fungsi *log simulated likelihood* pada model multinomial probit.

### 5.2 Saran

Saran dari penulis mengenai skripsi ini antara lain perlu dibahas mengenai:

1. Alternatif model lain untuk memodelkan pilihan, yaitu model biner multivariat probit, model multinomial multivariat probit, model *mixed logit* dan model lainnya.

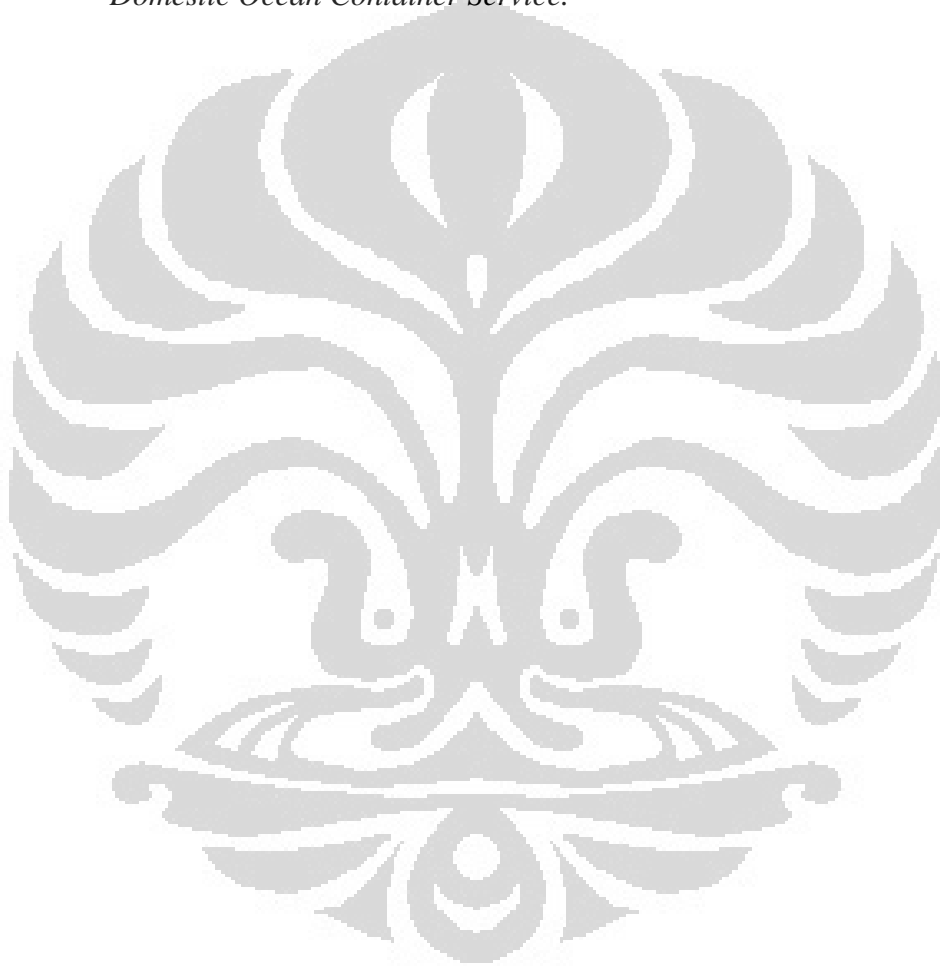
2. Uji perbandingan model untuk model multinomial probit.
3. Menentukan taksiran parameter menggunakan metode *Simulated Score (MSS)*, dan metode *Simulated Moment (MSM)*.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, J., & Uboe, J. (2010). *Some aspects of random utility, extreme value theory, and multinomial logit models*. Norwegian School and Business Administration, Helleveien 30.
- Anton, Horward (2000). *Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 7*. Interakarsa.
- Golub G.H dan Van Loan C.F. (1996). *Matrix Computation*. 3th ed. The Johns Hopkins University Press.
- Gourieroux C. dan Monfort A.,(1993), *Simulated-based Inference: A survey with special reference to panel data models*. Journal of Econometrics 59, 5-33
- Haryanto, Anggun. (2011). *Penaksiran Parameter Model Nested Logit*. Departemen Matematika FMIPA UI.
- Hogg, R.V. dan Craig, A.T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics*, 5<sup>th</sup> ed.. New Jersey: Prentice-Hall.
- Hujer, Prof.Dr.Reinhard. *A Short Introduction into Multinomial Probit Model*. University of Frankfurt  
[Http://www.stata.com](http://www.stata.com)
- Johnson, R.A. dan Wichern, D.W. (1998). *Applied Multivariate Stastical Analysis*, 4<sup>th</sup> ed. New Jersey: Prentice-Hall
- Koppelman, F. S., & Bhat, C. (2006). *A self Instructing Course in Mode Choice Modelling: Multinomial and Nested Logit Models*. U.S. Department of Transportation Federal Transit Administration.
- Lee, L. (1992), *On The Efficiency of Methods of Simulated Moments and Simulated Likelihood Estimation of Discrete Choice Model*, Econometri Theory
- McFadden D., (1974). *Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour*. Frontiers in Econometrics, Academic press, New York, pp.105-142.

- Nugraha, J. (2010). *Model Probit dan Model Mixed logit pada respon biner multivariat dan nominal multivariat*. Disertasi Pasca Sarjana Universitas Gajah Mada.
- Train, Kenneth.(2003). *Discrete Choice Methods with Simulation*. University of california.
- Wand,Jonathan. (2006). *Model of Discrete Choice*. Stanford University
- Winston, Clifford.(1981). *A Multinomial Probit Prediction of The Demand for Domestic Ocean Container Service*.





## LAMPIRAN

### Lampiran 1

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i)$  dimana  $\boldsymbol{\varepsilon}'_{n,i} = (\varepsilon_{n1,i}, \dots, \varepsilon_{n(i-1),i}, \varepsilon_{n(1+1),i}, \dots, \varepsilon_{nj,i})$ . Matriks kovarians  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i$  di dekomposisi menggunakan faktorisasi cholesky sehingga menjadi  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{C}'_i$  dan  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}$  dapat ditulis menjadi  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} = \mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_{m,n}$

dimana,  $\boldsymbol{\eta}'_{m,n} = (\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{mn})$  dan  $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$

untuk  $m = 1, 2, \dots, (j - 1)$ . Sehingga  $\eta_{jn} \sim N(0,1)$  untuk  $j=1, 2, \dots, m$

Bukti:

Diketahui  $\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nj} \sim N(0,1)$  dan  $\varepsilon_{nj,i} = \varepsilon_{nj} - \varepsilon_{ni}$

Karena selisih dua distribusi normal adalah berdistribusi normal, maka

$$\varepsilon_{nj,i} \sim N(0,1).$$

$\boldsymbol{\varepsilon}'_{n,i} = (\varepsilon_{n1,i}, \dots, \varepsilon_{n(i-1),i}, \varepsilon_{n(1+1),i}, \dots, \varepsilon_{nj,i})$  dan  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i} = \mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_{m,n}$ , maka

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n1,i} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n(i-1),i} \\ \varepsilon_{n(1+1),i} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nj,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1n} \\ \eta_{2n} \\ \vdots \\ \eta_{mn} \end{pmatrix}, \text{ untuk } m = 1, \dots, (j - 1)$$

Sehingga,

$\varepsilon_{n1,i} = c_{11}\eta_{1n} \longrightarrow c_{11}$  adalah konstanta, karena  $\varepsilon_{n1,i} \sim N(0,1)$  maka  $c_{11}\eta_{1n} \sim N(0,1)$  sehingga  $\eta_{1n} \sim N(0,1)$

$\varepsilon_{n2,i} = c_{21}\eta_{2n} + c_{22}\eta_{2n} \longrightarrow$  karena  $\varepsilon_{n2,i} \sim N(0,1)$  maka  $(c_{21}\eta_{2n} + c_{22}\eta_{2n})$  karena  $c_{21}$  dan  $c_{22}$  konstanta maka  $\eta_{1n} \sim N(0,1)$  dan  $\eta_{2n} \sim N(0,1)$

...

$$\varepsilon_{n(i-1),i} = c_{(i-1)1}\eta_{1n} + \dots + c_{(i-1)(i-1)}\eta_{(i-1)n}$$

$$\varepsilon_{n(i+1),i} = c_{i1}\eta_{1n} + \dots + c_{ii}\eta_{in}$$

$\dots$   $\dots$   
 $\dots$   $\dots$   
 $\varepsilon_{nj,i} = c_{m1}\eta_{1n} + \dots + c_{mm}\eta_{mn} \longrightarrow$  karena  $\varepsilon_{nj,i} \sim N(0,1)$  maka  
 $(c_{m1}\eta_{1n} + \dots + c_{mm}\eta_{mn})$  karena  
 $c_{m1}, \dots, c_{mm}$  konstanta maka  
 $\eta_{1n} \sim N(0,1) \dots \eta_{mn} \sim N(0,1)$ .

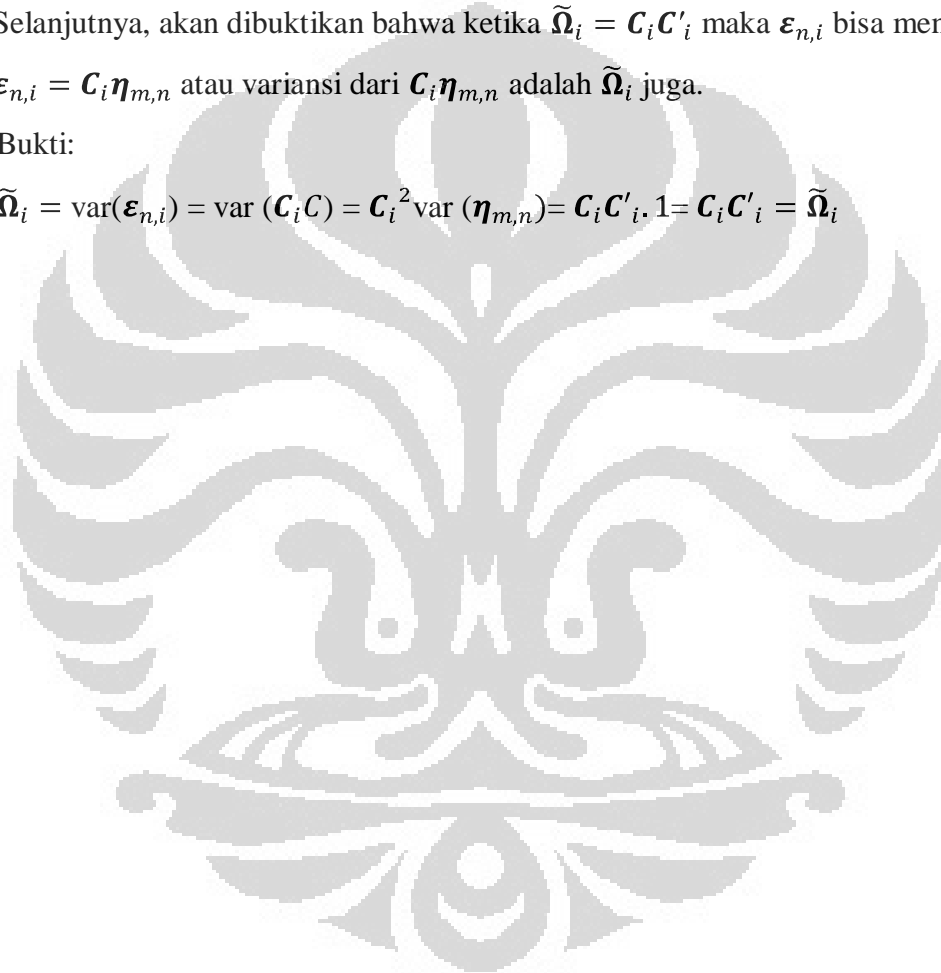
Dari proses di atas terbukti bahwa  $\eta_{jn} \sim N(0,1)$  untuk  $j=1,2,\dots,m$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa ketika  $\tilde{\Omega}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{C}'_i$  maka  $\varepsilon_{n,i}$  bisa menjadi

$\varepsilon_{n,i} = \mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_{m,n}$  atau variansi dari  $\mathbf{C}_i \boldsymbol{\eta}_{m,n}$  adalah  $\tilde{\Omega}_i$  juga.

Bukti:

$$\tilde{\Omega}_i = \text{var}(\varepsilon_{n,i}) = \text{var}(\mathbf{C}_i \mathbf{C}) = \mathbf{C}_i^2 \text{var}(\boldsymbol{\eta}_{m,n}) = \mathbf{C}_i \mathbf{C}'_i \cdot 1 = \mathbf{C}_i \mathbf{C}'_i = \tilde{\Omega}_i$$



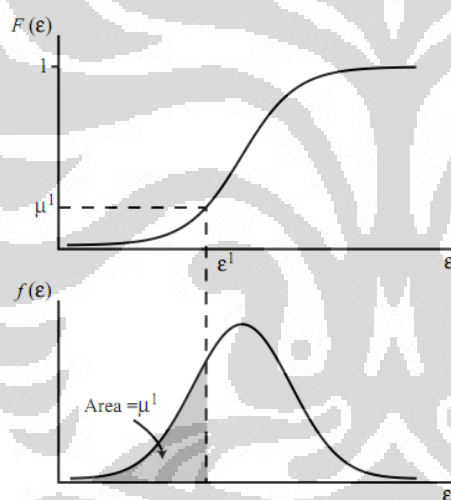
## Lampiran 2

Penjelasan untuk penggunaan distribusi uniform pada simulasi GHK.

### 1. Invers CDF untuk PDF univariat

Misalkan suatu variabel random  $\varepsilon$  dengan pdf  $f(\varepsilon)$  dan cdf  $F(\varepsilon)$ . Jika  $F$  invertible ( $F^{-1}$  dapat dihitung), maka  $\varepsilon$  dapat diperoleh dari uniform standar. Menurut definisi,  $F(\varepsilon) = k$  artinya bahwa probabilitas untuk mendapatkan suatu variabel random yang sama dengan atau lebih kecil dari  $\varepsilon$  adalah  $k$ , dimana  $k$  antara 0 dan 1. Ambil sebuah nilai  $\mu$  dari uniform standar yang bernilai antara 0 dan 1, maka dapat dibentuk  $F(\varepsilon) = \mu$  dan mendapatkan nilai  $\varepsilon$  menjadi  $\varepsilon = F^{-1}(\mu)$ .

Jika  $\varepsilon$  diambil dengan cara di atas, maka CDF yang diambil adalah sama dengan  $F$ . ilustrasi dapat dilihat dari gambar di bawah ini:



Gambar 1. Ilustrasi 1

Dari ilustrasi di atas dapat dilihat bahwa dengan mengambil  $\mu^1$  dari uniform standar bisa diterjemahkan ke dalam nilai dari  $\varepsilon$  yang diberi label  $\varepsilon^1$ , yang mana  $F(\varepsilon^1) = \mu^1$ .

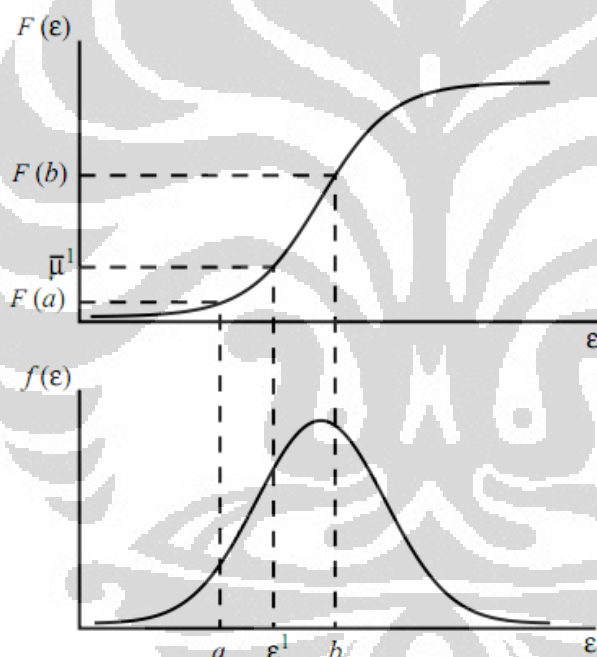
### 2. Invers CDF untuk PDF univariat yang terbatas

Misalkan sebuah variabel random yang berada pada interval antara  $a$  dan  $b$  dengan pdf nya adalah

$$\begin{cases} \frac{1}{k} f(\varepsilon), \text{ untuk } a \leq \varepsilon \leq b \\ 0, \text{ untuk yang lainnya} \end{cases}$$

dimana  $k$  adalah konstanta yang menjamin integral dari pdf bernilai 1:  $k = \int_a^b f(\varepsilon) d\varepsilon = F(b) - F(a)$ . Pdf di atas dapat diperoleh dengan cara menerapkan prosedur di bagian sebelumnya untuk menjamin bahwa pdf yang diambil berada dalam kisaran yang tepat.

Ambil  $\mu$  dari uniform standar. Hitung bobot rata-rata dari  $F(a)$  dan  $F(b)$  sebagai,  $\tilde{\mu} = (1 - \mu)F(a) + \mu F(b)$ . Kemudian hitung  $\varepsilon = F^{-1}(\tilde{\mu})$  karena  $\tilde{\mu}$  antara  $F(a)$  dan  $F(b)$ , maka  $\varepsilon$  tentunya berada antara  $a$  dan  $b$ . Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar di bawah ini,



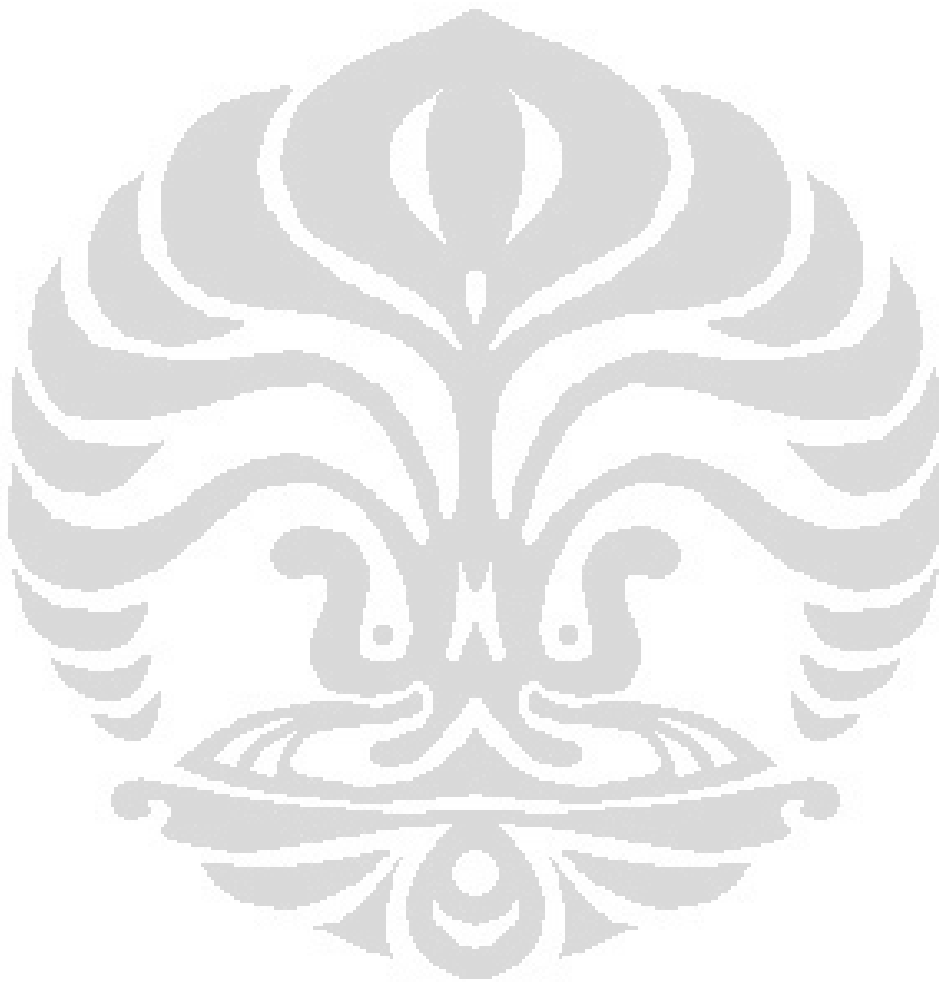
Gambar 2. Ilustrasi 2

Maka, dapat disimpulkan bahwa,

1. Jika pdf dari variabel random terbatas di atas, maka  $\tilde{\mu} = \mu F(b)$ , sehingga  $\varepsilon = F^{-1}(\mu F(b))$ .
2. Jika pdf dari variabel random terbatas di bawah, maka  $\tilde{\mu} = (1 - \mu)F(a)$ , sehingga  $\varepsilon = F^{-1}((1 - \mu)F(a))$ .

3. Dan jika pdf dari variabel random terbatas di atas dan di bawah, maka  $\tilde{\mu} = (1 - \mu)F(a) + \mu F(b)$ , sehingga  $\varepsilon = F^{-1}((1 - \mu)F(a) + \mu F(b))$ .

Pada simulasi GHK, variabel random nnya terbatas di atas, maka yang digunakan adalah prosedur no.2 dengan batas atasnya adalah  $\frac{-V_{n1,i}}{c_{11}}$ .



## Lampiran 3

## Sifat

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j = \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \sum_{l=1}^{J-1} \frac{\partial \ln \Phi_l}{\partial \theta}$$

Bukti:

- Pembuktian akan dilakukan dari kiri,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \sum_{l=1}^{J-1} \frac{\partial \ln \Phi_l}{\partial \theta} &= \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \frac{\partial \ln \prod_{l=1}^{J-1} \Phi_l}{\partial \theta} && l=1,2,\dots,(J-1) \\ &= \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \frac{\partial \ln \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j}{\partial \theta} && j=1,2,\dots,(J-1) \\ &= \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \frac{1}{\prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j} \frac{\partial \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{j=1}^{J-1} \Phi_j \end{aligned}$$

## Lampiran 4

## Sifat

$$\frac{\partial \ln \Phi_{ln}^{(r)}}{\partial \theta} = \frac{\phi_{ln}^{(r)}}{\Phi_{ln}^{(r)}} \cdot \frac{\partial a_{ln}^{(r)}}{\partial \theta}$$

Bukti:

Diketahui  $\Phi_{ln}^{(r)} = \Phi(a_{ln}^{(r)})$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \Phi_{ln}^{(r)}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \ln \Phi(a_{ln}^{(r)})}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\Phi(a_{ln}^{(r)})} \frac{\partial \Phi(a_{ln}^{(r)})}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\Phi(a_{ln}^{(r)})} \phi_{ln}^{(r)} \frac{\partial a_{ln}^{(r)}}{\partial \theta} \\ &= \frac{\phi_{ln}^{(r)}}{\Phi(a_{ln}^{(r)})} \frac{\partial a_{ln}^{(r)}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

## Lampiran 5

## Data

| Choice | Termtime | Travelcost | Income | id | mode  |
|--------|----------|------------|--------|----|-------|
| 0      | 69       | 70         | 35     | 1  | air   |
| 0      | 34       | 71         | 35     | 1  | train |
| 0      | 35       | 70         | 35     | 1  | bus   |
| 1      | 0        | 30         | 35     | 1  | car   |
| 0      | 64       | 68         | 30     | 2  | air   |
| 0      | 44       | 84         | 30     | 2  | train |
| 0      | 53       | 85         | 30     | 2  | bus   |
| 1      | 0        | 50         | 30     | 2  | car   |
| 0      | 69       | 129        | 40     | 3  | air   |
| 0      | 34       | 195        | 40     | 3  | train |
| 0      | 35       | 149        | 40     | 3  | bus   |
| 1      | 0        | 101        | 40     | 3  | car   |
| 0      | 64       | 59         | 70     | 4  | air   |
| 0      | 44       | 79         | 70     | 4  | train |
| 0      | 53       | 81         | 70     | 4  | bus   |
| 1      | 0        | 32         | 70     | 4  | car   |
| 0      | 64       | 82         | 45     | 5  | air   |
| 0      | 44       | 93         | 45     | 5  | train |
| 0      | 53       | 94         | 45     | 5  | bus   |
| 1      | 0        | 99         | 45     | 5  | car   |
| 0      | 69       | 70         | 20     | 6  | air   |
| 1      | 40       | 57         | 20     | 6  | train |
| 0      | 35       | 58         | 20     | 6  | bus   |
| 0      | 0        | 43         | 20     | 6  | car   |
| 1      | 45       | 160        | 45     | 7  | air   |
| 0      | 34       | 213        | 45     | 7  | train |
| 0      | 35       | 167        | 45     | 7  | bus   |
| 0      | 0        | 125        | 45     | 7  | car   |
| 0      | 69       | 137        | 12     | 8  | air   |
| 0      | 34       | 149        | 12     | 8  | train |
| 0      | 35       | 146        | 12     | 8  | bus   |
| 1      | 0        | 135        | 12     | 8  | car   |
| 0      | 69       | 70         | 40     | 9  | air   |
| 0      | 34       | 71         | 40     | 9  | train |
| 0      | 35       | 70         | 40     | 9  | bus   |
| 1      | 0        | 40         | 40     | 9  | car   |
| 0      | 69       | 65         | 70     | 10 | air   |
| 0      | 34       | 69         | 70     | 10 | train |
| 0      | 35       | 68         | 70     | 10 | bus   |



|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 1 | 0  | 30  | 70 | 10 | car   |
| 0 | 64 | 68  | 15 | 11 | air   |
| 0 | 44 | 70  | 15 | 11 | train |
| 0 | 53 | 73  | 15 | 11 | bus   |
| 1 | 0  | 36  | 15 | 11 | car   |
| 0 | 64 | 79  | 35 | 12 | air   |
| 0 | 44 | 90  | 35 | 12 | train |
| 0 | 53 | 91  | 35 | 12 | bus   |
| 1 | 0  | 44  | 35 | 12 | car   |
| 0 | 64 | 63  | 50 | 13 | air   |
| 0 | 44 | 81  | 50 | 13 | train |
| 0 | 53 | 83  | 50 | 13 | bus   |
| 1 | 0  | 41  | 50 | 13 | car   |
| 0 | 64 | 72  | 40 | 14 | air   |
| 0 | 44 | 85  | 40 | 14 | train |
| 0 | 53 | 86  | 40 | 14 | bus   |
| 1 | 0  | 58  | 40 | 14 | car   |
| 0 | 64 | 109 | 26 | 15 | air   |
| 0 | 44 | 214 | 26 | 15 | train |
| 0 | 53 | 189 | 26 | 15 | bus   |
| 1 | 0  | 199 | 26 | 15 | car   |
| 0 | 69 | 73  | 26 | 16 | air   |
| 1 | 20 | 55  | 26 | 16 | train |
| 0 | 35 | 72  | 26 | 16 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 26 | 16 | car   |
| 0 | 69 | 69  | 26 | 17 | air   |
| 1 | 15 | 66  | 26 | 17 | train |
| 0 | 35 | 68  | 26 | 17 | bus   |
| 0 | 0  | 47  | 26 | 17 | car   |
| 0 | 69 | 76  | 6  | 18 | air   |
| 1 | 20 | 54  | 6  | 18 | train |
| 0 | 35 | 63  | 6  | 18 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 6  | 18 | car   |
| 0 | 69 | 75  | 20 | 19 | air   |
| 1 | 45 | 51  | 20 | 19 | train |
| 0 | 35 | 63  | 20 | 19 | bus   |
| 0 | 0  | 62  | 20 | 19 | car   |
| 0 | 64 | 72  | 72 | 20 | air   |
| 1 | 10 | 75  | 72 | 20 | train |
| 0 | 53 | 78  | 72 | 20 | bus   |
| 0 | 0  | 57  | 72 | 20 | car   |
| 0 | 69 | 69  | 6  | 21 | air   |
| 1 | 20 | 54  | 6  | 21 | train |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 0 | 35 | 58  | 6  | 21 | bus   |
| 0 | 0  | 47  | 6  | 21 | car   |
| 0 | 64 | 98  | 10 | 22 | air   |
| 1 | 45 | 116 | 10 | 22 | train |
| 0 | 53 | 111 | 10 | 22 | bus   |
| 0 | 0  | 98  | 10 | 22 | car   |
| 1 | 90 | 153 | 50 | 23 | air   |
| 0 | 34 | 136 | 50 | 23 | train |
| 0 | 35 | 96  | 50 | 23 | bus   |
| 0 | 0  | 96  | 50 | 23 | car   |
| 1 | 50 | 132 | 50 | 24 | air   |
| 0 | 34 | 135 | 50 | 24 | train |
| 0 | 35 | 95  | 50 | 24 | bus   |
| 0 | 0  | 96  | 50 | 24 | car   |
| 1 | 15 | 92  | 18 | 25 | air   |
| 0 | 34 | 55  | 18 | 25 | train |
| 0 | 35 | 56  | 18 | 25 | bus   |
| 0 | 0  | 41  | 18 | 25 | car   |
| 1 | 30 | 106 | 60 | 26 | air   |
| 0 | 44 | 231 | 60 | 26 | train |
| 0 | 53 | 185 | 60 | 26 | bus   |
| 0 | 0  | 223 | 60 | 26 | car   |
| 1 | 80 | 87  | 45 | 27 | air   |
| 0 | 34 | 140 | 45 | 27 | train |
| 0 | 35 | 100 | 45 | 27 | bus   |
| 0 | 0  | 102 | 45 | 27 | car   |
| 1 | 45 | 106 | 18 | 28 | air   |
| 0 | 44 | 139 | 18 | 28 | train |
| 0 | 53 | 135 | 18 | 28 | bus   |
| 0 | 0  | 109 | 18 | 28 | car   |
| 0 | 64 | 101 | 8  | 29 | air   |
| 1 | 60 | 91  | 8  | 29 | train |
| 0 | 53 | 74  | 8  | 29 | bus   |
| 0 | 0  | 58  | 8  | 29 | car   |
| 0 | 69 | 70  | 6  | 30 | air   |
| 1 | 2  | 42  | 6  | 30 | train |
| 0 | 35 | 58  | 6  | 30 | bus   |
| 0 | 0  | 44  | 6  | 30 | car   |
| 0 | 69 | 70  | 20 | 31 | air   |
| 1 | 5  | 50  | 20 | 31 | train |
| 0 | 35 | 70  | 20 | 31 | bus   |
| 0 | 0  | 45  | 20 | 31 | car   |
| 0 | 69 | 73  | 45 | 32 | air   |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 1 | 15 | 67  | 45 | 32 | train |
| 0 | 35 | 73  | 45 | 32 | bus   |
| 0 | 0  | 54  | 45 | 32 | car   |
| 0 | 64 | 70  | 70 | 33 | air   |
| 1 | 45 | 73  | 70 | 33 | train |
| 0 | 53 | 86  | 70 | 33 | bus   |
| 0 | 0  | 57  | 70 | 33 | car   |
| 0 | 69 | 70  | 4  | 34 | air   |
| 1 | 10 | 63  | 4  | 34 | train |
| 0 | 35 | 62  | 4  | 34 | bus   |
| 0 | 0  | 50  | 4  | 34 | car   |
| 0 | 69 | 75  | 40 | 35 | air   |
| 1 | 15 | 50  | 40 | 35 | train |
| 0 | 35 | 67  | 40 | 35 | bus   |
| 0 | 0  | 46  | 40 | 35 | car   |
| 0 | 69 | 73  | 35 | 36 | air   |
| 1 | 10 | 58  | 35 | 36 | train |
| 0 | 35 | 71  | 35 | 36 | bus   |
| 0 | 0  | 50  | 35 | 36 | car   |
| 0 | 64 | 90  | 40 | 37 | air   |
| 1 | 45 | 79  | 40 | 37 | train |
| 0 | 53 | 98  | 40 | 37 | bus   |
| 0 | 0  | 76  | 40 | 37 | car   |
| 0 | 64 | 60  | 4  | 38 | air   |
| 1 | 30 | 71  | 4  | 38 | train |
| 0 | 53 | 73  | 4  | 38 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 4  | 38 | car   |
| 0 | 64 | 71  | 15 | 39 | air   |
| 1 | 55 | 80  | 15 | 39 | train |
| 0 | 53 | 84  | 15 | 39 | bus   |
| 0 | 0  | 57  | 15 | 39 | car   |
| 1 | 30 | 158 | 26 | 40 | air   |
| 0 | 34 | 169 | 26 | 40 | train |
| 0 | 35 | 130 | 26 | 40 | bus   |
| 0 | 0  | 96  | 26 | 40 | car   |
| 1 | 75 | 137 | 26 | 41 | air   |
| 0 | 34 | 135 | 26 | 41 | train |
| 0 | 35 | 95  | 26 | 41 | bus   |
| 0 | 0  | 87  | 26 | 41 | car   |
| 1 | 40 | 162 | 70 | 42 | air   |
| 0 | 34 | 138 | 70 | 42 | train |
| 0 | 35 | 98  | 70 | 42 | bus   |
| 0 | 0  | 88  | 70 | 42 | car   |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 1 | 30 | 136 | 70 | 43 | air   |
| 0 | 34 | 142 | 70 | 43 | train |
| 0 | 35 | 102 | 70 | 43 | bus   |
| 0 | 0  | 97  | 70 | 43 | car   |
| 1 | 40 | 116 | 45 | 44 | air   |
| 0 | 44 | 165 | 45 | 44 | train |
| 0 | 53 | 125 | 45 | 44 | bus   |
| 0 | 0  | 105 | 45 | 44 | car   |
| 1 | 45 | 122 | 8  | 45 | air   |
| 0 | 44 | 130 | 8  | 45 | train |
| 0 | 53 | 125 | 8  | 45 | bus   |
| 0 | 0  | 100 | 8  | 45 | car   |
| 1 | 20 | 127 | 70 | 46 | air   |
| 0 | 34 | 143 | 70 | 46 | train |
| 0 | 35 | 104 | 70 | 46 | bus   |
| 0 | 0  | 108 | 70 | 46 | car   |
| 1 | 60 | 105 | 26 | 47 | air   |
| 0 | 44 | 160 | 26 | 47 | train |
| 0 | 53 | 120 | 26 | 47 | bus   |
| 0 | 0  | 101 | 26 | 47 | car   |
| 1 | 40 | 60  | 50 | 48 | air   |
| 0 | 34 | 70  | 50 | 48 | train |
| 0 | 35 | 69  | 50 | 48 | bus   |
| 0 | 0  | 49  | 50 | 48 | car   |
| 1 | 50 | 82  | 10 | 49 | air   |
| 0 | 44 | 68  | 10 | 49 | train |
| 0 | 53 | 72  | 10 | 49 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 10 | 49 | car   |
| 1 | 75 | 114 | 30 | 50 | air   |
| 0 | 34 | 169 | 30 | 50 | train |
| 0 | 35 | 130 | 30 | 50 | bus   |
| 0 | 0  | 97  | 30 | 50 | car   |
| 1 | 90 | 88  | 60 | 51 | air   |
| 0 | 44 | 177 | 60 | 51 | train |
| 0 | 53 | 137 | 60 | 51 | bus   |
| 0 | 0  | 115 | 60 | 51 | car   |
| 1 | 85 | 118 | 30 | 52 | air   |
| 0 | 44 | 156 | 30 | 52 | train |
| 0 | 53 | 135 | 30 | 52 | bus   |
| 0 | 0  | 97  | 30 | 52 | car   |
| 0 | 69 | 73  | 30 | 53 | air   |
| 1 | 15 | 64  | 30 | 53 | train |
| 0 | 35 | 71  | 30 | 53 | bus   |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 0 | 0  | 49  | 30 | 53 | car   |
| 0 | 64 | 72  | 50 | 54 | air   |
| 1 | 30 | 74  | 50 | 54 | train |
| 0 | 53 | 88  | 50 | 54 | bus   |
| 0 | 0  | 60  | 50 | 54 | car   |
| 0 | 64 | 56  | 6  | 55 | air   |
| 1 | 15 | 66  | 6  | 55 | train |
| 0 | 53 | 73  | 6  | 55 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 6  | 55 | car   |
| 0 | 69 | 126 | 30 | 56 | air   |
| 1 | 30 | 126 | 30 | 56 | train |
| 0 | 35 | 140 | 30 | 56 | bus   |
| 0 | 0  | 146 | 30 | 56 | car   |
| 0 | 69 | 137 | 12 | 57 | air   |
| 1 | 45 | 119 | 12 | 57 | train |
| 0 | 35 | 151 | 12 | 57 | bus   |
| 0 | 0  | 146 | 12 | 57 | car   |
| 0 | 64 | 136 | 36 | 58 | air   |
| 1 | 10 | 170 | 36 | 58 | train |
| 0 | 53 | 182 | 36 | 58 | bus   |
| 0 | 0  | 149 | 36 | 58 | car   |
| 0 | 69 | 133 | 30 | 59 | air   |
| 1 | 40 | 145 | 30 | 59 | train |
| 0 | 35 | 144 | 30 | 59 | bus   |
| 0 | 0  | 134 | 30 | 59 | car   |
| 0 | 64 | 106 | 35 | 60 | air   |
| 1 | 50 | 196 | 35 | 60 | train |
| 0 | 53 | 170 | 35 | 60 | bus   |
| 0 | 0  | 146 | 35 | 60 | car   |
| 0 | 69 | 126 | 6  | 61 | air   |
| 1 | 40 | 140 | 6  | 61 | train |
| 0 | 35 | 144 | 6  | 61 | bus   |
| 0 | 0  | 152 | 6  | 61 | car   |
| 0 | 64 | 170 | 6  | 62 | air   |
| 1 | 25 | 160 | 6  | 62 | train |
| 0 | 53 | 187 | 6  | 62 | bus   |
| 0 | 0  | 178 | 6  | 62 | car   |
| 0 | 64 | 125 | 8  | 63 | air   |
| 1 | 25 | 169 | 8  | 63 | train |
| 0 | 53 | 186 | 8  | 63 | bus   |
| 0 | 0  | 154 | 8  | 63 | car   |
| 0 | 69 | 118 | 6  | 64 | air   |
| 1 | 5  | 109 | 6  | 64 | train |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 0 | 35 | 132 | 6  | 64 | bus   |
| 0 | 0  | 128 | 6  | 64 | car   |
| 0 | 64 | 141 | 12 | 65 | air   |
| 1 | 75 | 193 | 12 | 65 | train |
| 0 | 53 | 180 | 12 | 65 | bus   |
| 0 | 0  | 152 | 12 | 65 | car   |
| 0 | 69 | 117 | 30 | 66 | air   |
| 0 | 34 | 189 | 30 | 66 | train |
| 1 | 10 | 116 | 30 | 66 | bus   |
| 0 | 0  | 146 | 30 | 66 | car   |
| 0 | 64 | 144 | 35 | 67 | air   |
| 0 | 44 | 269 | 35 | 67 | train |
| 0 | 53 | 222 | 35 | 67 | bus   |
| 1 | 0  | 172 | 35 | 67 | car   |
| 0 | 69 | 127 | 35 | 68 | air   |
| 0 | 34 | 191 | 35 | 68 | train |
| 1 | 45 | 131 | 35 | 68 | bus   |
| 0 | 0  | 146 | 35 | 68 | car   |
| 0 | 64 | 117 | 60 | 69 | air   |
| 1 | 40 | 193 | 60 | 69 | train |
| 0 | 53 | 186 | 60 | 69 | bus   |
| 0 | 0  | 151 | 60 | 69 | car   |
| 0 | 64 | 143 | 60 | 70 | air   |
| 1 | 45 | 191 | 60 | 70 | train |
| 0 | 53 | 182 | 60 | 70 | bus   |
| 0 | 0  | 155 | 60 | 70 | car   |
| 0 | 64 | 138 | 12 | 71 | air   |
| 1 | 40 | 85  | 12 | 71 | train |
| 0 | 53 | 190 | 12 | 71 | bus   |
| 0 | 0  | 163 | 12 | 71 | car   |
| 0 | 69 | 122 | 10 | 72 | air   |
| 1 | 30 | 113 | 10 | 72 | train |
| 0 | 35 | 144 | 10 | 72 | bus   |
| 0 | 0  | 139 | 10 | 72 | car   |
| 0 | 69 | 131 | 10 | 73 | air   |
| 1 | 25 | 113 | 10 | 73 | train |
| 0 | 35 | 161 | 10 | 73 | bus   |
| 0 | 0  | 147 | 10 | 73 | car   |
| 0 | 69 | 126 | 15 | 74 | air   |
| 1 | 75 | 114 | 15 | 74 | train |
| 0 | 35 | 135 | 15 | 74 | bus   |
| 0 | 0  | 141 | 15 | 74 | car   |
| 0 | 64 | 148 | 10 | 75 | air   |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 1 | 30 | 211 | 10 | 75 | train |
| 0 | 53 | 189 | 10 | 75 | bus   |
| 0 | 0  | 153 | 10 | 75 | car   |
| 0 | 64 | 125 | 8  | 76 | air   |
| 1 | 50 | 200 | 8  | 76 | train |
| 0 | 53 | 178 | 8  | 76 | bus   |
| 0 | 0  | 186 | 8  | 76 | car   |
| 0 | 69 | 116 | 30 | 77 | air   |
| 1 | 30 | 167 | 30 | 77 | train |
| 0 | 35 | 134 | 30 | 77 | bus   |
| 0 | 0  | 132 | 30 | 77 | car   |
| 0 | 64 | 137 | 20 | 78 | air   |
| 0 | 44 | 195 | 20 | 78 | train |
| 0 | 53 | 191 | 20 | 78 | bus   |
| 1 | 0  | 135 | 20 | 78 | car   |
| 0 | 64 | 98  | 70 | 79 | air   |
| 0 | 44 | 203 | 70 | 79 | train |
| 0 | 53 | 182 | 70 | 79 | bus   |
| 1 | 0  | 228 | 70 | 79 | car   |
| 0 | 69 | 125 | 20 | 80 | air   |
| 0 | 34 | 187 | 20 | 80 | train |
| 1 | 30 | 128 | 20 | 80 | bus   |
| 0 | 0  | 130 | 20 | 80 | car   |
| 0 | 69 | 148 | 60 | 81 | air   |
| 0 | 34 | 205 | 60 | 81 | train |
| 1 | 60 | 163 | 60 | 81 | bus   |
| 0 | 0  | 147 | 60 | 81 | car   |
| 0 | 64 | 59  | 70 | 82 | air   |
| 0 | 44 | 78  | 70 | 82 | train |
| 0 | 53 | 75  | 70 | 82 | bus   |
| 1 | 0  | 32  | 70 | 82 | car   |
| 0 | 69 | 69  | 8  | 83 | air   |
| 1 | 1  | 46  | 8  | 83 | train |
| 0 | 35 | 57  | 8  | 83 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 8  | 83 | car   |
| 0 | 69 | 72  | 30 | 84 | air   |
| 1 | 25 | 97  | 30 | 84 | train |
| 0 | 35 | 71  | 30 | 84 | bus   |
| 0 | 0  | 44  | 30 | 84 | car   |
| 1 | 25 | 86  | 70 | 85 | air   |
| 0 | 44 | 160 | 70 | 85 | train |
| 0 | 53 | 120 | 70 | 85 | bus   |
| 0 | 0  | 104 | 70 | 85 | car   |

|   |    |     |    |    |       |
|---|----|-----|----|----|-------|
| 0 | 69 | 67  | 60 | 86 | air   |
| 1 | 10 | 68  | 60 | 86 | train |
| 0 | 35 | 72  | 60 | 86 | bus   |
| 0 | 0  | 49  | 60 | 86 | car   |
| 0 | 64 | 77  | 20 | 87 | air   |
| 0 | 44 | 70  | 20 | 87 | train |
| 0 | 53 | 68  | 20 | 87 | bus   |
| 1 | 0  | 41  | 20 | 87 | car   |
| 0 | 69 | 69  | 15 | 88 | air   |
| 1 | 10 | 51  | 15 | 88 | train |
| 0 | 35 | 70  | 15 | 88 | bus   |
| 0 | 0  | 48  | 15 | 88 | car   |
| 0 | 64 | 77  | 30 | 89 | air   |
| 0 | 44 | 85  | 30 | 89 | train |
| 0 | 53 | 80  | 30 | 89 | bus   |
| 1 | 0  | 46  | 30 | 89 | car   |
| 0 | 64 | 71  | 26 | 90 | air   |
| 1 | 20 | 80  | 26 | 90 | train |
| 0 | 53 | 85  | 26 | 90 | bus   |
| 0 | 0  | 58  | 26 | 90 | car   |
| 0 | 64 | 58  | 35 | 91 | air   |
| 1 | 20 | 74  | 35 | 91 | train |
| 0 | 53 | 72  | 35 | 91 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 35 | 91 | car   |
| 0 | 69 | 71  | 12 | 92 | air   |
| 1 | 10 | 67  | 12 | 92 | train |
| 0 | 35 | 71  | 12 | 92 | bus   |
| 0 | 0  | 54  | 12 | 92 | car   |
| 0 | 64 | 100 | 70 | 93 | air   |
| 0 | 44 | 160 | 70 | 93 | train |
| 0 | 53 | 120 | 70 | 93 | bus   |
| 1 | 0  | 70  | 70 | 93 | car   |
| 1 | 30 | 158 | 50 | 94 | air   |
| 0 | 44 | 83  | 50 | 94 | train |
| 0 | 53 | 84  | 50 | 94 | bus   |
| 0 | 0  | 58  | 50 | 94 | car   |
| 1 | 45 | 136 | 40 | 95 | air   |
| 0 | 44 | 233 | 40 | 95 | train |
| 0 | 53 | 186 | 40 | 95 | bus   |
| 0 | 0  | 154 | 40 | 95 | car   |
| 1 | 30 | 103 | 70 | 96 | air   |
| 0 | 34 | 149 | 70 | 96 | train |
| 0 | 35 | 109 | 70 | 96 | bus   |



|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 0  | 94  | 70 | 96  | car   |
| 0 | 69 | 77  | 10 | 97  | air   |
| 0 | 34 | 61  | 10 | 97  | train |
| 1 | 5  | 64  | 10 | 97  | bus   |
| 0 | 0  | 51  | 10 | 97  | car   |
| 1 | 45 | 197 | 26 | 98  | air   |
| 0 | 34 | 196 | 26 | 98  | train |
| 0 | 35 | 150 | 26 | 98  | bus   |
| 0 | 0  | 136 | 26 | 98  | car   |
| 0 | 64 | 129 | 50 | 99  | air   |
| 0 | 44 | 223 | 50 | 99  | train |
| 1 | 40 | 201 | 50 | 99  | bus   |
| 0 | 0  | 156 | 50 | 99  | car   |
| 0 | 64 | 123 | 70 | 100 | air   |
| 0 | 44 | 223 | 70 | 100 | train |
| 0 | 53 | 190 | 70 | 100 | bus   |
| 1 | 0  | 135 | 70 | 100 | car   |
| 0 | 69 | 71  | 30 | 101 | air   |
| 0 | 34 | 72  | 30 | 101 | train |
| 1 | 15 | 64  | 30 | 101 | bus   |
| 0 | 0  | 61  | 30 | 101 | car   |
| 0 | 64 | 99  | 50 | 102 | air   |
| 0 | 44 | 201 | 50 | 102 | train |
| 0 | 53 | 180 | 50 | 102 | bus   |
| 1 | 0  | 122 | 50 | 102 | car   |
| 0 | 69 | 68  | 20 | 103 | air   |
| 0 | 34 | 55  | 20 | 103 | train |
| 0 | 35 | 57  | 20 | 103 | bus   |
| 1 | 0  | 46  | 20 | 103 | car   |
| 0 | 64 | 133 | 32 | 104 | air   |
| 0 | 44 | 223 | 32 | 104 | train |
| 0 | 53 | 177 | 32 | 104 | bus   |
| 1 | 0  | 167 | 32 | 104 | car   |
| 0 | 64 | 136 | 27 | 105 | air   |
| 0 | 44 | 231 | 27 | 105 | train |
| 0 | 53 | 185 | 27 | 105 | bus   |
| 1 | 0  | 238 | 27 | 105 | car   |
| 0 | 69 | 123 | 30 | 106 | air   |
| 0 | 34 | 195 | 30 | 106 | train |
| 1 | 30 | 114 | 30 | 106 | bus   |
| 0 | 0  | 138 | 30 | 106 | car   |
| 0 | 69 | 128 | 35 | 107 | air   |
| 0 | 34 | 187 | 35 | 107 | train |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 35 | 141 | 35 | 107 | bus   |
| 1 | 0  | 112 | 35 | 107 | car   |
| 0 | 64 | 100 | 40 | 108 | air   |
| 0 | 44 | 203 | 40 | 108 | train |
| 0 | 53 | 178 | 40 | 108 | bus   |
| 1 | 0  | 143 | 40 | 108 | car   |
| 0 | 64 | 82  | 60 | 109 | air   |
| 0 | 44 | 93  | 60 | 109 | train |
| 0 | 53 | 94  | 60 | 109 | bus   |
| 1 | 0  | 49  | 60 | 109 | car   |
| 0 | 64 | 105 | 40 | 110 | air   |
| 0 | 44 | 208 | 40 | 110 | train |
| 0 | 53 | 183 | 40 | 110 | bus   |
| 1 | 0  | 121 | 40 | 110 | car   |
| 0 | 69 | 79  | 70 | 111 | air   |
| 0 | 34 | 78  | 70 | 111 | train |
| 0 | 35 | 77  | 70 | 111 | bus   |
| 1 | 0  | 38  | 70 | 111 | car   |
| 0 | 64 | 139 | 70 | 112 | air   |
| 0 | 44 | 234 | 70 | 112 | train |
| 0 | 53 | 187 | 70 | 112 | bus   |
| 1 | 0  | 128 | 70 | 112 | car   |
| 1 | 60 | 120 | 30 | 113 | air   |
| 0 | 44 | 84  | 30 | 113 | train |
| 0 | 53 | 85  | 30 | 113 | bus   |
| 0 | 0  | 55  | 30 | 113 | car   |
| 1 | 30 | 72  | 35 | 114 | air   |
| 0 | 44 | 109 | 35 | 114 | train |
| 0 | 53 | 110 | 35 | 114 | bus   |
| 0 | 0  | 69  | 35 | 114 | car   |
| 1 | 55 | 81  | 60 | 115 | air   |
| 0 | 34 | 85  | 60 | 115 | train |
| 0 | 35 | 84  | 60 | 115 | bus   |
| 0 | 0  | 42  | 60 | 115 | car   |
| 1 | 40 | 77  | 45 | 116 | air   |
| 0 | 34 | 71  | 45 | 116 | train |
| 0 | 35 | 70  | 45 | 116 | bus   |
| 0 | 0  | 54  | 45 | 116 | car   |
| 0 | 69 | 65  | 45 | 117 | air   |
| 0 | 34 | 69  | 45 | 117 | train |
| 1 | 40 | 45  | 45 | 117 | bus   |
| 0 | 0  | 48  | 45 | 117 | car   |
| 0 | 69 | 149 | 6  | 118 | air   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 34 | 168 | 6  | 118 | train |
| 1 | 20 | 143 | 6  | 118 | bus   |
| 0 | 0  | 135 | 6  | 118 | car   |
| 1 | 90 | 161 | 36 | 119 | air   |
| 0 | 34 | 193 | 36 | 119 | train |
| 0 | 35 | 147 | 36 | 119 | bus   |
| 0 | 0  | 127 | 36 | 119 | car   |
| 1 | 10 | 80  | 20 | 120 | air   |
| 0 | 34 | 72  | 20 | 120 | train |
| 0 | 35 | 71  | 20 | 120 | bus   |
| 0 | 0  | 55  | 20 | 120 | car   |
| 1 | 25 | 90  | 20 | 121 | air   |
| 0 | 44 | 68  | 20 | 121 | train |
| 0 | 53 | 72  | 20 | 121 | bus   |
| 0 | 0  | 51  | 20 | 121 | car   |
| 1 | 99 | 138 | 26 | 122 | air   |
| 0 | 34 | 193 | 26 | 122 | train |
| 0 | 35 | 147 | 26 | 122 | bus   |
| 0 | 0  | 134 | 26 | 122 | car   |
| 1 | 30 | 115 | 29 | 123 | air   |
| 0 | 34 | 191 | 29 | 123 | train |
| 0 | 35 | 145 | 29 | 123 | bus   |
| 0 | 0  | 157 | 29 | 123 | car   |
| 1 | 35 | 119 | 8  | 124 | air   |
| 0 | 44 | 186 | 8  | 124 | train |
| 0 | 53 | 183 | 8  | 124 | bus   |
| 0 | 0  | 153 | 8  | 124 | car   |
| 0 | 69 | 123 | 32 | 125 | air   |
| 0 | 34 | 197 | 32 | 125 | train |
| 1 | 15 | 111 | 32 | 125 | bus   |
| 0 | 0  | 137 | 32 | 125 | car   |
| 0 | 64 | 129 | 45 | 126 | air   |
| 0 | 44 | 222 | 45 | 126 | train |
| 1 | 30 | 152 | 45 | 126 | bus   |
| 0 | 0  | 155 | 45 | 126 | car   |
| 0 | 64 | 112 | 45 | 127 | air   |
| 0 | 44 | 222 | 45 | 127 | train |
| 0 | 53 | 190 | 45 | 127 | bus   |
| 1 | 0  | 145 | 45 | 127 | car   |
| 0 | 64 | 129 | 26 | 128 | air   |
| 0 | 44 | 220 | 26 | 128 | train |
| 1 | 30 | 154 | 26 | 128 | bus   |
| 0 | 0  | 151 | 26 | 128 | car   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 69 | 71  | 60 | 129 | air   |
| 0 | 34 | 71  | 60 | 129 | train |
| 0 | 35 | 70  | 60 | 129 | bus   |
| 1 | 0  | 46  | 60 | 129 | car   |
| 0 | 64 | 77  | 10 | 130 | air   |
| 1 | 10 | 92  | 10 | 130 | train |
| 0 | 53 | 78  | 10 | 130 | bus   |
| 0 | 0  | 63  | 10 | 130 | car   |
| 0 | 64 | 131 | 45 | 131 | air   |
| 0 | 44 | 222 | 45 | 131 | train |
| 0 | 53 | 176 | 45 | 131 | bus   |
| 1 | 0  | 102 | 45 | 131 | car   |
| 0 | 64 | 108 | 60 | 132 | air   |
| 0 | 44 | 207 | 60 | 132 | train |
| 0 | 53 | 175 | 60 | 132 | bus   |
| 1 | 0  | 116 | 60 | 132 | car   |
| 0 | 69 | 129 | 60 | 133 | air   |
| 0 | 34 | 196 | 60 | 133 | train |
| 1 | 15 | 136 | 60 | 133 | bus   |
| 0 | 0  | 136 | 60 | 133 | car   |
| 0 | 69 | 119 | 8  | 134 | air   |
| 0 | 34 | 142 | 8  | 134 | train |
| 1 | 25 | 104 | 8  | 134 | bus   |
| 0 | 0  | 133 | 8  | 134 | car   |
| 0 | 64 | 127 | 60 | 135 | air   |
| 0 | 44 | 239 | 60 | 135 | train |
| 0 | 53 | 192 | 60 | 135 | bus   |
| 1 | 0  | 134 | 60 | 135 | car   |
| 0 | 64 | 138 | 12 | 136 | air   |
| 0 | 44 | 217 | 12 | 136 | train |
| 0 | 53 | 213 | 12 | 136 | bus   |
| 1 | 0  | 128 | 12 | 136 | car   |
| 0 | 69 | 123 | 45 | 137 | air   |
| 0 | 34 | 190 | 45 | 137 | train |
| 0 | 35 | 144 | 45 | 137 | bus   |
| 1 | 0  | 117 | 45 | 137 | car   |
| 0 | 69 | 132 | 50 | 138 | air   |
| 0 | 34 | 194 | 50 | 138 | train |
| 1 | 5  | 157 | 50 | 138 | bus   |
| 0 | 0  | 157 | 50 | 138 | car   |
| 0 | 69 | 113 | 26 | 139 | air   |
| 0 | 34 | 182 | 26 | 139 | train |
| 1 | 45 | 122 | 26 | 139 | bus   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 0  | 125 | 26 | 139 | car   |
| 0 | 64 | 101 | 35 | 140 | air   |
| 0 | 44 | 205 | 35 | 140 | train |
| 0 | 53 | 173 | 35 | 140 | bus   |
| 1 | 0  | 103 | 35 | 140 | car   |
| 0 | 69 | 125 | 12 | 141 | air   |
| 1 | 30 | 146 | 12 | 141 | train |
| 0 | 35 | 143 | 12 | 141 | bus   |
| 0 | 0  | 147 | 12 | 141 | car   |
| 0 | 69 | 140 | 15 | 142 | air   |
| 1 | 30 | 158 | 15 | 142 | train |
| 0 | 35 | 146 | 15 | 142 | bus   |
| 0 | 0  | 141 | 15 | 142 | car   |
| 0 | 64 | 117 | 12 | 143 | air   |
| 1 | 99 | 171 | 12 | 143 | train |
| 0 | 53 | 193 | 12 | 143 | bus   |
| 0 | 0  | 150 | 12 | 143 | car   |
| 0 | 64 | 119 | 35 | 144 | air   |
| 1 | 25 | 183 | 35 | 144 | train |
| 0 | 53 | 183 | 35 | 144 | bus   |
| 0 | 0  | 149 | 35 | 144 | car   |
| 0 | 69 | 129 | 26 | 145 | air   |
| 1 | 15 | 108 | 26 | 145 | train |
| 0 | 35 | 140 | 26 | 145 | bus   |
| 0 | 0  | 140 | 26 | 145 | car   |
| 0 | 69 | 121 | 6  | 146 | air   |
| 1 | 45 | 109 | 6  | 146 | train |
| 0 | 35 | 134 | 6  | 146 | bus   |
| 0 | 0  | 131 | 6  | 146 | car   |
| 0 | 69 | 124 | 4  | 147 | air   |
| 1 | 30 | 115 | 4  | 147 | train |
| 0 | 35 | 140 | 4  | 147 | bus   |
| 0 | 0  | 140 | 4  | 147 | car   |
| 0 | 64 | 128 | 40 | 148 | air   |
| 1 | 10 | 152 | 40 | 148 | train |
| 0 | 53 | 183 | 40 | 148 | bus   |
| 0 | 0  | 155 | 40 | 148 | car   |
| 0 | 64 | 168 | 40 | 149 | air   |
| 1 | 10 | 208 | 40 | 149 | train |
| 0 | 53 | 206 | 40 | 149 | bus   |
| 0 | 0  | 188 | 40 | 149 | car   |
| 1 | 45 | 123 | 60 | 150 | air   |
| 0 | 34 | 190 | 60 | 150 | train |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 35 | 144 | 60 | 150 | bus   |
| 0 | 0  | 144 | 60 | 150 | car   |
| 1 | 45 | 150 | 4  | 151 | air   |
| 0 | 34 | 156 | 4  | 151 | train |
| 0 | 35 | 153 | 4  | 151 | bus   |
| 0 | 0  | 143 | 4  | 151 | car   |
| 1 | 60 | 129 | 50 | 152 | air   |
| 0 | 34 | 220 | 50 | 152 | train |
| 0 | 35 | 170 | 50 | 152 | bus   |
| 0 | 0  | 148 | 50 | 152 | car   |
| 1 | 60 | 190 | 60 | 153 | air   |
| 0 | 44 | 234 | 60 | 153 | train |
| 0 | 53 | 187 | 60 | 153 | bus   |
| 0 | 0  | 166 | 60 | 153 | car   |
| 1 | 60 | 133 | 70 | 154 | air   |
| 0 | 34 | 193 | 70 | 154 | train |
| 0 | 35 | 147 | 70 | 154 | bus   |
| 0 | 0  | 142 | 70 | 154 | car   |
| 1 | 60 | 93  | 40 | 155 | air   |
| 0 | 44 | 85  | 40 | 155 | train |
| 0 | 53 | 86  | 40 | 155 | bus   |
| 0 | 0  | 58  | 40 | 155 | car   |
| 1 | 45 | 85  | 35 | 156 | air   |
| 0 | 44 | 81  | 35 | 156 | train |
| 0 | 53 | 82  | 35 | 156 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 35 | 156 | car   |
| 1 | 75 | 192 | 60 | 157 | air   |
| 0 | 44 | 245 | 60 | 157 | train |
| 0 | 53 | 193 | 60 | 157 | bus   |
| 0 | 0  | 170 | 60 | 157 | car   |
| 1 | 30 | 112 | 60 | 158 | air   |
| 0 | 34 | 208 | 60 | 158 | train |
| 0 | 35 | 162 | 60 | 158 | bus   |
| 0 | 0  | 159 | 60 | 158 | car   |
| 1 | 90 | 89  | 50 | 159 | air   |
| 0 | 44 | 89  | 50 | 159 | train |
| 0 | 53 | 90  | 50 | 159 | bus   |
| 0 | 0  | 57  | 50 | 159 | car   |
| 1 | 45 | 96  | 40 | 160 | air   |
| 0 | 44 | 96  | 40 | 160 | train |
| 0 | 53 | 98  | 40 | 160 | bus   |
| 0 | 0  | 49  | 40 | 160 | car   |
| 1 | 60 | 89  | 60 | 161 | air   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 34 | 69  | 60 | 161 | train |
| 0 | 35 | 68  | 60 | 161 | bus   |
| 0 | 0  | 46  | 60 | 161 | car   |
| 1 | 75 | 104 | 20 | 162 | air   |
| 0 | 34 | 73  | 20 | 162 | train |
| 0 | 35 | 72  | 20 | 162 | bus   |
| 0 | 0  | 48  | 20 | 162 | car   |
| 0 | 64 | 93  | 50 | 163 | air   |
| 0 | 44 | 179 | 50 | 163 | train |
| 0 | 53 | 151 | 50 | 163 | bus   |
| 1 | 0  | 82  | 50 | 163 | car   |
| 0 | 64 | 87  | 70 | 164 | air   |
| 0 | 44 | 156 | 70 | 164 | train |
| 0 | 53 | 135 | 70 | 164 | bus   |
| 1 | 0  | 93  | 70 | 164 | car   |
| 0 | 64 | 91  | 50 | 165 | air   |
| 0 | 44 | 153 | 50 | 165 | train |
| 0 | 53 | 126 | 50 | 165 | bus   |
| 1 | 0  | 85  | 50 | 165 | car   |
| 0 | 69 | 96  | 26 | 166 | air   |
| 0 | 34 | 147 | 26 | 166 | train |
| 0 | 35 | 107 | 26 | 166 | bus   |
| 1 | 0  | 98  | 26 | 166 | car   |
| 0 | 64 | 89  | 45 | 167 | air   |
| 0 | 44 | 147 | 45 | 167 | train |
| 0 | 53 | 125 | 45 | 167 | bus   |
| 1 | 0  | 90  | 45 | 167 | car   |
| 0 | 64 | 80  | 45 | 168 | air   |
| 0 | 44 | 145 | 45 | 168 | train |
| 0 | 53 | 129 | 45 | 168 | bus   |
| 1 | 0  | 76  | 45 | 168 | car   |
| 0 | 69 | 91  | 30 | 169 | air   |
| 0 | 34 | 136 | 30 | 169 | train |
| 0 | 35 | 96  | 30 | 169 | bus   |
| 1 | 0  | 78  | 30 | 169 | car   |
| 0 | 64 | 93  | 40 | 170 | air   |
| 0 | 44 | 159 | 40 | 170 | train |
| 0 | 53 | 131 | 40 | 170 | bus   |
| 1 | 0  | 100 | 40 | 170 | car   |
| 0 | 64 | 106 | 50 | 171 | air   |
| 0 | 44 | 187 | 50 | 171 | train |
| 0 | 53 | 147 | 50 | 171 | bus   |
| 1 | 0  | 87  | 50 | 171 | car   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 69 | 69  | 35 | 172 | air   |
| 0 | 34 | 71  | 35 | 172 | train |
| 1 | 50 | 51  | 35 | 172 | bus   |
| 0 | 0  | 48  | 35 | 172 | car   |
| 0 | 69 | 74  | 34 | 173 | air   |
| 0 | 34 | 74  | 34 | 173 | train |
| 1 | 15 | 47  | 34 | 173 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 34 | 173 | car   |
| 0 | 64 | 101 | 8  | 174 | air   |
| 0 | 44 | 138 | 8  | 174 | train |
| 1 | 15 | 117 | 8  | 174 | bus   |
| 0 | 0  | 101 | 8  | 174 | car   |
| 0 | 69 | 72  | 30 | 175 | air   |
| 0 | 34 | 75  | 30 | 175 | train |
| 0 | 35 | 74  | 30 | 175 | bus   |
| 1 | 0  | 37  | 30 | 175 | car   |
| 0 | 69 | 141 | 32 | 176 | air   |
| 0 | 34 | 207 | 32 | 176 | train |
| 1 | 30 | 128 | 32 | 176 | bus   |
| 0 | 0  | 151 | 32 | 176 | car   |
| 0 | 69 | 68  | 26 | 177 | air   |
| 0 | 34 | 70  | 26 | 177 | train |
| 1 | 15 | 53  | 26 | 177 | bus   |
| 0 | 0  | 45  | 26 | 177 | car   |
| 0 | 69 | 71  | 42 | 178 | air   |
| 0 | 34 | 73  | 42 | 178 | train |
| 1 | 15 | 47  | 42 | 178 | bus   |
| 0 | 0  | 49  | 42 | 178 | car   |
| 1 | 90 | 72  | 50 | 179 | air   |
| 0 | 44 | 163 | 50 | 179 | train |
| 0 | 53 | 123 | 50 | 179 | bus   |
| 0 | 0  | 113 | 50 | 179 | car   |
| 1 | 15 | 104 | 70 | 180 | air   |
| 0 | 44 | 84  | 70 | 180 | train |
| 0 | 53 | 85  | 70 | 180 | bus   |
| 0 | 0  | 56  | 70 | 180 | car   |
| 0 | 69 | 71  | 30 | 181 | air   |
| 0 | 34 | 80  | 30 | 181 | train |
| 0 | 35 | 79  | 30 | 181 | bus   |
| 1 | 0  | 45  | 30 | 181 | car   |
| 0 | 69 | 72  | 26 | 182 | air   |
| 0 | 34 | 73  | 26 | 182 | train |
| 0 | 35 | 72  | 26 | 182 | bus   |



|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 1 | 0  | 43  | 26 | 182 | car   |
| 0 | 64 | 64  | 26 | 183 | air   |
| 1 | 20 | 114 | 26 | 183 | train |
| 0 | 53 | 83  | 26 | 183 | bus   |
| 0 | 0  | 56  | 26 | 183 | car   |
| 0 | 64 | 97  | 18 | 184 | air   |
| 1 | 50 | 104 | 18 | 184 | train |
| 0 | 53 | 73  | 18 | 184 | bus   |
| 0 | 0  | 58  | 18 | 184 | car   |
| 0 | 64 | 69  | 35 | 185 | air   |
| 1 | 30 | 66  | 35 | 185 | train |
| 0 | 53 | 83  | 35 | 185 | bus   |
| 0 | 0  | 55  | 35 | 185 | car   |
| 0 | 64 | 89  | 50 | 186 | air   |
| 0 | 44 | 152 | 50 | 186 | train |
| 1 | 15 | 128 | 50 | 186 | bus   |
| 0 | 0  | 100 | 50 | 186 | car   |
| 1 | 15 | 58  | 4  | 187 | air   |
| 0 | 34 | 55  | 4  | 187 | train |
| 0 | 35 | 56  | 4  | 187 | bus   |
| 0 | 0  | 47  | 4  | 187 | car   |
| 1 | 10 | 73  | 30 | 188 | air   |
| 0 | 44 | 77  | 30 | 188 | train |
| 0 | 53 | 79  | 30 | 188 | bus   |
| 0 | 0  | 52  | 30 | 188 | car   |
| 0 | 69 | 70  | 45 | 189 | air   |
| 0 | 34 | 71  | 45 | 189 | train |
| 0 | 35 | 70  | 45 | 189 | bus   |
| 1 | 0  | 36  | 45 | 189 | car   |
| 0 | 69 | 66  | 60 | 190 | air   |
| 0 | 34 | 66  | 60 | 190 | train |
| 0 | 35 | 61  | 60 | 190 | bus   |
| 1 | 0  | 44  | 60 | 190 | car   |
| 0 | 69 | 82  | 4  | 191 | air   |
| 0 | 34 | 68  | 4  | 191 | train |
| 0 | 35 | 66  | 4  | 191 | bus   |
| 1 | 0  | 42  | 4  | 191 | car   |
| 1 | 30 | 102 | 30 | 192 | air   |
| 0 | 34 | 72  | 30 | 192 | train |
| 0 | 35 | 71  | 30 | 192 | bus   |
| 0 | 0  | 46  | 30 | 192 | car   |
| 1 | 20 | 86  | 60 | 193 | air   |
| 0 | 34 | 70  | 60 | 193 | train |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 35 | 69  | 60 | 193 | bus   |
| 0 | 0  | 47  | 60 | 193 | car   |
| 0 | 64 | 129 | 4  | 194 | air   |
| 0 | 44 | 152 | 4  | 194 | train |
| 1 | 30 | 113 | 4  | 194 | bus   |
| 0 | 0  | 109 | 4  | 194 | car   |
| 0 | 64 | 58  | 18 | 195 | air   |
| 1 | 10 | 60  | 18 | 195 | train |
| 0 | 53 | 73  | 18 | 195 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 18 | 195 | car   |
| 0 | 64 | 72  | 15 | 196 | air   |
| 1 | 10 | 78  | 15 | 196 | train |
| 0 | 53 | 65  | 15 | 196 | bus   |
| 0 | 0  | 54  | 15 | 196 | car   |
| 0 | 69 | 69  | 26 | 197 | air   |
| 0 | 34 | 70  | 26 | 197 | train |
| 0 | 35 | 68  | 26 | 197 | bus   |
| 1 | 0  | 39  | 26 | 197 | car   |
| 1 | 30 | 122 | 40 | 198 | air   |
| 0 | 34 | 136 | 40 | 198 | train |
| 0 | 35 | 96  | 40 | 198 | bus   |
| 0 | 0  | 90  | 40 | 198 | car   |
| 1 | 5  | 76  | 70 | 199 | air   |
| 0 | 44 | 83  | 70 | 199 | train |
| 0 | 53 | 84  | 70 | 199 | bus   |
| 0 | 0  | 51  | 70 | 199 | car   |
| 1 | 5  | 73  | 45 | 200 | air   |
| 0 | 44 | 81  | 45 | 200 | train |
| 0 | 53 | 83  | 45 | 200 | bus   |
| 0 | 0  | 54  | 45 | 200 | car   |
| 0 | 64 | 125 | 26 | 201 | air   |
| 0 | 44 | 201 | 26 | 201 | train |
| 1 | 16 | 161 | 26 | 201 | bus   |
| 0 | 0  | 137 | 26 | 201 | car   |
| 0 | 69 | 104 | 35 | 202 | air   |
| 0 | 34 | 145 | 35 | 202 | train |
| 0 | 35 | 106 | 35 | 202 | bus   |
| 1 | 0  | 88  | 35 | 202 | car   |
| 0 | 69 | 72  | 4  | 203 | air   |
| 0 | 34 | 57  | 4  | 203 | train |
| 1 | 5  | 54  | 4  | 203 | bus   |
| 0 | 0  | 53  | 4  | 203 | car   |
| 0 | 69 | 67  | 20 | 204 | air   |

|   |    |     |    |     |       |
|---|----|-----|----|-----|-------|
| 0 | 34 | 72  | 20 | 204 | train |
| 1 | 10 | 64  | 20 | 204 | bus   |
| 0 | 0  | 46  | 20 | 204 | car   |
| 0 | 69 | 123 | 45 | 205 | air   |
| 0 | 34 | 184 | 45 | 205 | train |
| 1 | 30 | 119 | 45 | 205 | bus   |
| 0 | 0  | 131 | 45 | 205 | car   |
| 0 | 69 | 94  | 40 | 206 | air   |
| 0 | 34 | 135 | 40 | 206 | train |
| 0 | 35 | 95  | 40 | 206 | bus   |
| 1 | 0  | 108 | 40 | 206 | car   |
| 1 | 45 | 141 | 40 | 207 | air   |
| 0 | 34 | 135 | 40 | 207 | train |
| 0 | 35 | 95  | 40 | 207 | bus   |
| 0 | 0  | 95  | 40 | 207 | car   |
| 0 | 69 | 68  | 2  | 208 | air   |
| 0 | 34 | 54  | 2  | 208 | train |
| 1 | 50 | 57  | 2  | 208 | bus   |
| 0 | 0  | 46  | 2  | 208 | car   |
| 0 | 69 | 94  | 20 | 209 | air   |
| 0 | 34 | 100 | 20 | 209 | train |
| 0 | 35 | 96  | 20 | 209 | bus   |
| 1 | 0  | 82  | 20 | 209 | car   |
| 0 | 64 | 87  | 70 | 210 | air   |
| 0 | 44 | 156 | 70 | 210 | train |
| 0 | 53 | 134 | 70 | 210 | bus   |
| 1 | 0  | 94  | 70 | 210 | car   |