



UNIVERSITAS INDONESIA

**ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF TERHUBUNG DENGAN
BANYAK BUSUR MINIMAL DAN NILAI TOTAL
KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA**

SKRIPSI

**HIKMATIARAHMAH K
0706261713**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011**



UNIVERSITAS INDONESIA

**ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF TERHUBUNG DENGAN
BANYAK BUSUR MINIMAL DAN NILAI TOTAL
KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA**

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

**HIKMATIARAHMAH K
0706261713**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Hikmatiarahmah K

NPM : 0706261713

Tanda Tangan : 

Tanggal : Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Hikmatiarahmah K
NPM : 0706261713
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Algoritma Konstruksi Graf Terhubung dengan Banyak Busur Minimal dan Nilai Total Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

Telah berhasil diperiksa oleh Dewan Pembimbing untuk diuji sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dra. Denny R. Silaban, M.Kom ()
Pembimbing II : Dr. Kiki A. Sugeng ()
Penguji : Arie Wibowo, S.Si, M.Si ()
Penguji : Dra. Nora Hariadi, M.Si ()
Penguji : Dra. Suarsih Utama, M.Si ()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 12 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah SWT. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Ibu Dra. Denny R. Silaban, M.Kom selaku pembimbing I dan Ibu Dr. Kiki A. Sugeng selaku pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc.Tech selaku sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI, Ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan, Ibu Dra. Yahma Wisnani, M.Kom selaku Pembimbing Akademis yang telah membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
3. Bapak Arie Wibowo, S.Si, M.Si, Ibu Dra. Nora Hariadi, M.Si, dan Ibu Dra. Suarsih Utama, M.Si selaku penguji Kolokium.
4. Ibu Helen, Ibu Mila, Ibu Sri, Ibu Bela, Ibu Titin, yang telah bersedia diganggu waktunya untuk berdiskusi di luar kuliah.
5. Seluruh staf pengajar di Departemen Matematika FMIPA UI, terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan. Semoga penulis dapat menggunakan ilmu tersebut dengan sebaik-baiknya.
6. Seluruh karyawan tata usaha dan koperasi di Departemen Matematika FMIPA UI terima kasih atas segala kemudahan yang telah diberikan kepada penulis.
7. Mama tercinta yang selalu memberikan doa, nasihat, perhatian, semangat dan dukungan tanpa henti serta almarhum papa tersayang.
8. Miftah, Nenek Bale, Kakek Alik, Ngah, Bi Ipah dan Pakcik Suhada, Bi Anah, Bi Ipak, Pun Win, Pun Agam, Rifdah, Syifa beserta seluruh keluarga besar

Bale-Bujang-Belangkolak yang telah memberikan doa, semangat, keceriaan dan dukungan kepada penulis sampai tugas akhir ini selesai.

9. Sahabat-sahabat terbaikku: Amanda Walidya, Nedia Safira, Shafira, Widya Wahyuni, Aditya Nurul, Andi K Prihartomo, Dhanardi Riansyah, Hanif Fatrial yang telah memberikan kebersamaan, kekeluargaan, keceriaan, dan persahabatan yang luar biasa.
10. Andi, Kak Ncim dan Siti yang telah berjuang bersama dalam Group Graph Labelling, serta Misda, Siska, Putri, Kak Tika, Zul, Adi, Bang Yos, Dheni, Risky, Bapet yang telah berjuang bersama selama penyusunan skripsi ini.
11. Teman-Teman 2007 lainnya: Arif, Bowo, Stefi, Farah, Lois, Nora, Winda, Dita, Gamar, Anjar, Shafa, Sica, Isna, Anis, Wiwi, Param, Afni, Ferdy, Ashari, Fauzan, Widi, Anggun, Putu, Riyanto, Inul, Ririn, Lena, Grafit, Paulin dan math 07 lainnya, terima kasih untuk kebersamaannya dari mulai algoritma sampai sekarang dan nanti.
12. Kak Lee dan Kak Yuri (Geng Poci), Kak Rita, Kak Syaf, Kak Rendi, Kak Aliman, Kak Bara, Kak Oza, Kak Budiono, Kak Yuko, Kak Michael, Kak Tasya, Kak Billy, Kak Dian, Kak Tino, Kakak Romanisti (Kak Teguh, Kak Rifza) dan Kakak 2006 lainnya, Kakak 2005 (Kak Meriju, Kak Fia, Kak Fika, Kak Maul “kakak asuh”, dkk.), Kakak 2004 (Kak Ajat, Kak Nola, Kak Ias, dkk.). Terima kasih atas keceriaan dan bimbingannya di Matematika UI.
13. Nova, Cicit, Uphi yang telah memberikan semangat, doa, dan kebersamaannya. D’Laspatu (Khoi, Indra, Robert, dkk.) yang telah memberikan keceriaan dan kebersamaan yang selalu membuat seru.
14. 2008 (Cindy, Maimun, Hendry, Awe, Ifah, Umbu, dkk.), 2009, 2010, 2011.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis
2011

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hikmatiarahmah K
NPM : 0706261713
Program Studi : Sarjana Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Algoritma Konstruksi Graf Terhubung dengan Banyak Busur Minimal dan Nilai
Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : Desember 2011

Yang menyatakan



(Hikmatiarahmah K)

vii

ABSTRAK

Nama : Hikmatiarahmah K
Program Studi : Matematika
Judul : Algoritma Konstruksi Graf Terhubung dengan Banyak Busur Minimal dan Nilai Total Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

Misalkan $G = G(V, E)$ adalah pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut busur. Graf yang dibahas pada skripsi ini adalah graf sederhana, berhingga dan terhubung dengan $|V|$ simpul dan $|E|$ busur. Nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) atau tv_s dari graf G adalah suatu bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga f merupakan suatu pemetaan dari gabungan himpunan simpul dan busur ke subhimpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan bobot setiap simpul pada graf G berbeda dimana bobot simpul adalah penjumlahan dari label simpul dan label busur yang hadir pada simpul tersebut. Berdasarkan hasil-hasil penelitian sebelumnya telah dibuktikan bahwa $tv_s(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ dan $tv_s(K_n) = 2, n \geq 2$. Terlihat bahwa $tv_s(C_n)$ bergantung pada n , sedangkan $tv_s(K_n)$ tidak bergantung pada n , yaitu dua, artinya ketika suatu graf dengan banyak simpul n memiliki jumlah busur lebih sedikit maka $tv_s(G)$ dapat lebih besar. Dalam skripsi ini akan dikonstruksikan algoritma untuk memperoleh graf terhubung G dengan $tv_s(G)$ sama dengan dua dan banyak busur minimal dengan cara mengurangi busur-busur dari graf lengkap. Kemudian akan diberikan banyak busur minimal pada graf G dengan n simpul yang terbentuk dari algoritma.

Kata Kunci : Nilai total ketakteraturan simpul, graf lengkap, algoritma.
xii + 53 halaman : 29 gambar ; 11 tabel
Daftar Pustaka : 6 (1990-2010)

ABSTRACT

Name : Hikmatiarahmah K
Study Program : Mathematics
Title : Algorithm of Construction of Connected Graph that has Minimum Edges with Total Vertex Irregularity Strength Equal to Two

Let $G = G(V, E)$ be an ordered pair set (V, E) with V is a nonempty set of vertices dan E is a set of unordered pairs of distinct elements of V . A graph G which is considered in this *skripsi* is a simple, finite, and connected graph with $|V|$ vertices and $|E|$ edges. Total vertex irregularity strength (*tv* s) of G is the minimum value of positive integer k such that f is a mapping from the union of vertex set and edge set of G to a subset of natural number $\{1, 2, \dots, k\}$ and the weight of every vertex is different. The weight of a vertex is the sum of label of the vertex and labels of edges that incident to the vertex. It has been proved that tv $s(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ and tv $s(K_n) = 2, n \geq 2$. This results imply that tv $s(C_n)$ depends on n , while tv $s(K_n)$ does not. It means for graphs with n vertices, there is a possibility that a graph with less edges has larger *tv* s . In this *skripsi*, we construct an algorithm to find a connected graph G with tv $s(G) = 2$ and has minimum number of edges, by deleting some edges from complete graph, K_n . We also find the minimum number of edges on graph G with n vertices which obtained from the algorithm.

Keywords : Total vertex irregularity strength, complete graph, algorithm.
xii + 53 pages : 29 pictures ; 11 tables
Bibliography : 6 (1990-2010)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI.....	vii
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xii
1. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup	3
1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
2. LANDASAN TEORI.....	5
2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf.....	5
2.2 Jenis-Jenis Graf.....	9
2.3 Pelabelan Graf	10
2.4 Nilai Total Ketakteraturan Simpul	12
2.5 Hasil-Hasil yang Telah Diketahui	13
3. ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF TERHUBUNG DENGAN BANYAK BUSUR MINIMAL DAN NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA	16
3.1 Algoritma Konstruksi Graf G	16
3.1.1 Algoritma Konstruksi Graf G untuk n Ganjil	16
3.1.2 Algoritma Konstruksi Graf G untuk n Genap.....	22
3.2 Banyak Busur pada Graf Hasil Konstruksi.....	42
4. KESIMPULAN.....	52
DAFTAR PUSTAKA	53

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh graf G	6
Gambar 2.2 Contoh graf sederhana G_1	7
Gambar 2.3 Contoh graf isomorfik	7
Gambar 2.4 Contoh graf (G) dan subgraf (G')	8
Gambar 2.5 Contoh graf terhubung (G) dan graf tak terhubung (S).....	8
Gambar 2.6 Contoh graf lintasan P_5	9
Gambar 2.7 Contoh graf lingkaran C_5	10
Gambar 2.8 Contoh graf lengkap K_5	10
Gambar 2.9 Contoh pelabelan pada graf lintasan P_5	11
Gambar 2.10 Contoh pelabelan total serta bobot simpul pada graf K_5	12
Gambar 2.11 Contoh pelabelan-2 total tak teratur pada graf K_8	15
Gambar 3.1 Pelabelan-2 total pada K_7	18
Gambar 3.2 Penamaan untuk tiap simpul pada K_7	18
Gambar 3.3 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.1 pada K_7	19
Gambar 3.4 Tahap penyelesaian Algoritma 3.1 pada K_7	22
Gambar 3.5 Pelabelan-2 total pada K_{10}	24
Gambar 3.6 Penamaan untuk tiap simpul pada K_{10}	24
Gambar 3.7 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.2 pada K_{10}	26
Gambar 3.8 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.2 pada K_{10}	28
Gambar 3.9 Graf G hasil algoritma 3.2	30
Gambar 3.10 Pelabelan-2 total pada K_8	32
Gambar 3.11 Penamaan untuk tiap simpul pada K_8	32
Gambar 3.12 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.3 pada K_8	33
Gambar 3.13 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.3 pada K_8	35
Gambar 3.14 Penerapan Langkah 8 Algoritma 3.3 pada K_8	37
Gambar 3.15 Graf G hasil Algoritma 3.3	38
Gambar 3.16 Graf K_7 (a) Graf G dengan Algoritma 3.1 (b)	44
Gambar 3.17 Graf K_{10} (a) Graf G dengan Algoritma 3.2 (b).....	48
Gambar 3.18 Graf K_8 (a) Graf G dengan Algoritma 3.3 (b)	51

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.1 pada K_7	20
Tabel 3.2 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.1 pada K_7	21
Tabel 3.3 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.2 pada K_{10}	27
Tabel 3.4 Penerapan Langkah 6 Algoritma 3.2 pada K_{10}	28
Tabel 3.5 Penerapan Langkah 7 Algoritma 3.2 pada K_{10}	29
Tabel 3.6 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.3 pada K_8	34
Tabel 3.7 Penerapan Langkah 6 Algoritma 3.3 pada K_8	35
Tabel 3.8 Penerapan Langkah 7 Algoritma 3.3 pada K_8	36
Tabel 3.9 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.1	44
Tabel 3.10 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.2	47
Tabel 3.11 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.3	50



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Ide cemerlang ini muncul sebagai upaya menyelesaikan persoalan jembatan Konigsberg. Salah satu bagian dari graf yang menarik untuk diteliti lebih lanjut adalah pelabelan graf. Dewasa ini, penelitian tentang pelabelan graf sedang berkembang, hal ini ditandai dengan banyaknya artikel mengenai pelabelan graf yang terbit atau bermunculan. Survey mengenai hasil-hasil penelitian pada pelabelan graf dapat dilihat pada (Gallian, 2010).

Suatu graf $G = G(V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut busur. Banyaknya simpul pada G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya busur dinotasikan dengan $|E|$. Secara umum graf direpresentasikan dengan gambar yang merupakan kombinasi dari sejumlah titik dan kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Satu simpul direpresentasikan dengan satu titik dan satu busur direpresentasikan dengan satu kurva yang menghubungkan dua simpul (boleh sama).

Graf yang akan dibahas dalam skripsi ini secara khusus adalah graf lingkaran dan graf lengkap. Graf lintasan, P_n , adalah graf dengan n simpul $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan v_1 adalah simpul awal dan v_n adalah simpul akhir yang mempunyai busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ atau juga dapat ditulis e_1, e_2, \dots, e_m . Sementara graf lingkaran adalah graf yang dibentuk dari graf lintasan dengan penambahan busur antara v_nv_1 . Graf lengkap, K_n , adalah graf sederhana yang mempunyai tepat satu busur antara setiap pasangan simpul yang berbeda.

Suatu pelabelan pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari unsur-unsur graf, yaitu himpunan simpul V , himpunan busur E , atau $V \cup E$ ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya

himpunan simpul V (atau himpunan busur E), maka pelabelannya disebut pelabelan simpul (atau pelabelan busur). Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan simpul V dan busur E , maka pelabelannya disebut pelabelan total (Bača dkk., 2007).

Misalkan G adalah graf sederhana berhingga tak berarah dengan $|V|$ simpul dan $|E|$ busur, maka jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen graf, yaitu simpul V dan busur E pada pelabelan total disebut bobot. Bobot dapat dihitung untuk simpul maupun untuk busur.

Pelabelan total untuk graf G merupakan pemetaan dari semua unsur graf, yaitu simpul dan busur ke suatu bilangan bulat positif yang dimulai dari satu sampai dengan k , biasa disebut pelabelan- k total (*total k -labelling*). Kemudian timbul permasalahan, berapa nilai bilangan bulat positif terkecil k dari label pada suatu graf sehingga bobot untuk setiap simpul berbeda? Bilangan positif terkecil inilah yang dijadikan parameter suatu graf G yang dikenal dengan nilai ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) atau $tvs(G)$. Selain dapat diketahui nilai ketakteraturan simpul pada suatu graf, dapat pula ditentukan nilai ketakteraturan busur (*total edge irregularity strength*) pada suatu graf, yaitu bilangan positif terkecil k yang terdapat pada pelabelan- k busur tak beraturan (*edge irregular total k -labelling*) dari graf G , dilambangkan dengan $tes(G)$.

Secara sederhana $tes(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $w(v_x v_y) \neq w(v_m v_n)$, $v_x v_y \neq v_m v_n$ untuk setiap $v_x v_y, v_m v_n \in G$ dimana $w(v_x v_y) = f(v_x) + f(v_x v_y) + f(v_y)$. Sedangkan $tvs(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $w(v_x) \neq w(v_y)$, $v_x \neq v_y$ untuk setiap $v_x, v_y \in G$ dimana $w(v_x) = f(v_x) + \sum_{v_x v_y \in E} f(v_x v_y)$ (Bača dkk., 2007).

Hasil-hasil penelitian untuk $tes(G)$ dan $tvs(G)$ banyak yang telah dipublikasikan. Misalnya, untuk graf lingkaran (C_n), Bača dkk. (2007) membuktikan bahwa $tes(C_n) = tvs(C_n)$ adalah $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$. Masih dalam penemuan Bača dkk. (2007), diduga (*conjecture*) bahwa $tes(K_n) = \left\lceil \frac{n^2-n+4}{6} \right\rceil$, $n \geq 6$ dan dibuktikan bahwa $tvs(K_n) = 2$, $n \geq 2$. Dari hasil penemuan di atas terlihat bahwa untuk graf

dengan banyak simpul n ketika memiliki jumlah busur lebih sedikit, maka $tvs(G)$ dapat lebih besar. Hal ini menimbulkan pertanyaan, berapa banyak busur maksimal yang dapat dihapus dari suatu graf dengan tetap mempertahankan tvs graf tersebut? Untuk itu, dalam skripsi ini akan dibahas bagaimana mencari suatu graf terhubung G yang memiliki banyak busur lebih sedikit dari graf lengkap K_n tetapi $tvs(G)$ tetap dua. Graf tersebut dibentuk dengan cara mengurangi busur-busur pada graf lengkap, K_n , dengan mengikuti algoritma yang dibangun. Selama proses penghapusan busur, $tvs(G)$ tetap dua.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Dalam skripsi ini, yang menjadi permasalahan adalah sebagai berikut.

- a) Bagaimana membangun algoritma penghapusan busur pada graf lengkap agar diperoleh suatu graf terhubung G yang banyak busurnya minimal dengan mempertahankan nilai total ketakteraturan simpul dari G tetap dua?
- b) Berapa banyak busur minimal yang ada pada graf yang dihasilkan tersebut?

Ruang lingkup pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi mencari nilai ketakteraturan simpul dari suatu graf dengan menghapus busur-busur dari graf lengkap.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Penelitian dilakukan dengan studi pustaka yang dikembangkan untuk menganalisa dan membangun algoritma pembentukan graf terhubung G dengan nilai total ketakteraturan simpul dari G adalah dua.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- a) Membangun algoritma penghapusan busur dari graf lengkap, K_n , untuk menghasilkan graf terhubung G dengan banyak busur minimal dan mempertahankan nilai total ketakteraturan simpul dari G tetap dua.
- b) Menemukan banyak busur minimal pada graf yang dihasilkan setelah proses penghapusan busur dari K_n .



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, jenis-jenis graf yang digunakan pada bab selanjutnya, pelabelan graf, nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) dari suatu graf, $tvs(G)$, dan hasil-hasil penelitian sebelumnya mengenai nilai total ketakteraturan simpul.

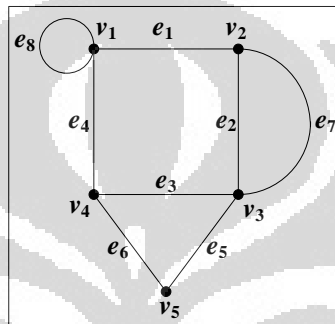
2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas suatu himpunan tak-kosong V yang anggotanya disebut **simpul** (*vertices*), dan suatu himpunan berhingga E yang berisi pasangan-pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut **busur** (*edges*) (Hartsfield & Ringel, 1990). Untuk penyederhanaan, $G = (V, E)$ selanjutnya akan dinotasikan dengan G . Banyaknya simpul pada G dinyatakan dengan $|V|$ dan banyaknya busur dinyatakan dengan $|E|$.

Graf G dikatakan **graf berhingga** (*finite graph*) jika banyaknya simpul dan banyaknya busur berhingga. Jika graf G terdiri dari n simpul, maka order dari G adalah n . **Gelung** (*loop*) adalah busur yang memiliki titik ujung yang sama, atau dengan kata lain busur yang menghubungkan suatu simpul ke simpul itu sendiri. **Busur ganda** (*multiple edges*) adalah busur-busur yang memiliki pasangan simpul ujung yang sama. Dua buah simpul (boleh sama) yang dihubungkan oleh suatu busur pada graf, simpul tersebut disebut **simpul ujung** (*endpoint*) dari busur. Graf **seederhana** (*simple graph*) adalah suatu graf yang tidak memiliki gelung dan busur ganda (West, 2002).

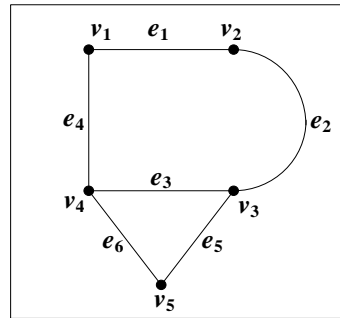
Dua simpul, u dan v , pada graf G dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) di G jika uv adalah suatu busur pada graf G . Jika $e = uv$, maka busur e dikatakan **hadir** (*incident*) pada simpul u dan v . **Derajat** (*degree*) dari suatu simpul adalah banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut (kecuali pada gelung, memberi derajat

dua pada simpul tersebut). Derajat dari suatu simpul v dinotasikan dengan $d(v)$. Simpul dengan derajat nol ($d(v)=0$) disebut **simpul terencil** (*isolated vertex*) dan simpul dengan derajat satu ($d(v)=1$) disebut **anting-anting** (*pendant*) (Rosen, 2003). Derajat simpul terkecil dan terbesar pada suatu graf G masing-masing dinyatakan sebagai $\delta = \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ dan $\Delta = \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Graf G disebut **graf teratur berderajat r** (*r -regular graph*) apabila $\delta = \Delta = r$ (West, 2002).

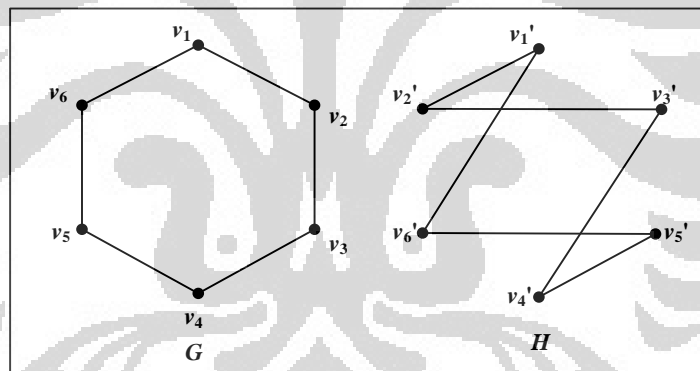


Gambar 2.1 Contoh graf G

Secara umum graf dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar. Simpul-simpul pada graf direpresentasikan sebagai titik dan busur-busur pada graf direpresentasikan sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut (West, 2002). Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf G dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan busur $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_2v_3, v_1v_1\}$. Banyaknya simpul dan busur pada graf G adalah $|V| = 5$ dan $|E| = 8$. Simpul v_1 dan v_2 bertetangga karena keduanya dihubungkan oleh busur e_1 . Busur e_2 hadir pada simpul v_2 dan v_3 . Busur e_8 merupakan gelung dan $\{e_2, e_7\}$ merupakan busur ganda dari graf G . Karena graf G memiliki gelung dan busur berganda maka graf G bukan graf sederhana. Derajat tiap simpul pada Gambar 2.1 adalah $d(v_1) = d(v_3) = 4$, $d(v_2) = d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$. Karena $\delta = 2$ dan $\Delta = 4$, maka graf G bukan graf teratur. Pada Gambar 2.2 diberikan contoh gambar graf sederhana.

Gambar 2.2 Contoh graf sederhana G_1

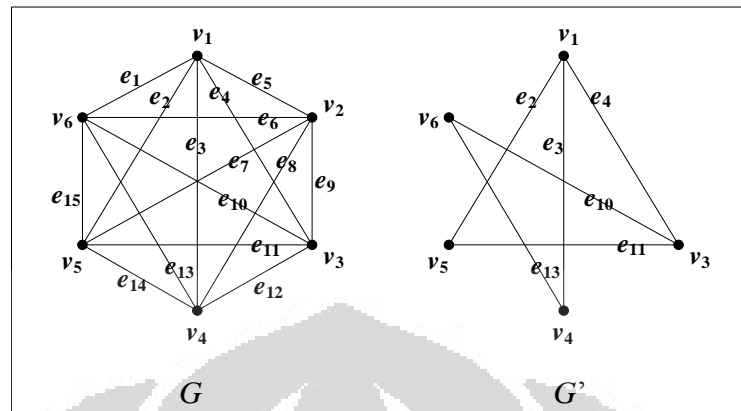
Sebuah **isomorfisma** dari graf sederhana G ke graf sederhana H adalah pemetaan bijektif f dari $V(G)$ ke $V(H)$ sedemikian sehingga $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $f(u)f(v) \in E(H)$. Dapat juga dikatakan jika terdapat isomorfisma dari G ke H maka G isomorfik terhadap H (West, 2002). Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf yang isomorfik.



Gambar 2.3 Contoh graf isomorfik

Graf G' adalah **subgraf** dari graf G (ditulis $G' \subseteq G$) jika $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$ (Rosen, 2003). Setiap subgraf dari G dapat diperoleh dengan cara menghapus simpul-simpul dan busur-busur yang ada pada graf G . Pada Gambar 2.4 diberikan contoh subgraf G' dari suatu graf G , dimana himpunan simpul pada G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, dan himpunan busur pada G adalah $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$. Sementara himpunan simpul pada G' adalah $V(G') = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, dan himpunan busur pada G'

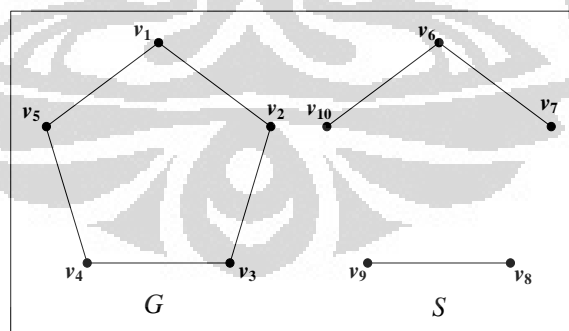
adalah $E(G') = \{e_2, e_3, e_4, e_{10}, e_{11}, e_{13}\}$. Karena $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$ maka G' adalah subgraf dari G .



Gambar 2.4 Contoh graf (G) dan subgraf (G')

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul (tidak perlu berbeda) pada graf G .

Jalan (*walk*) u - v pada G adalah suatu barisan berhingga di G yang terdiri dari simpul dan busur secara berselingan, $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$, yang diawali dengan simpul u dan diakhiri dengan simpul v , sedemikian sehingga $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. **Jejak** (*trail*) u - v adalah suatu jalan u - v dimana tidak ada busur yang berulang. **Lintasan** (*path*) u - v adalah suatu jalan u - v dimana tidak ada simpul yang berulang.



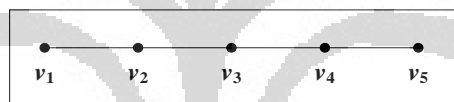
Gambar 2.5 Contoh graf terhubung (G) dan graf tak terhubung (S)

Suatu graf G dikatakan **terhubung** (*connected*) jika terdapat suatu lintasan u - v untuk setiap simpul $u, v \in V$. Apabila syarat ini tidak terpenuhi, maka graf G dikatakan **tak terhubung** (*disconnected*) (West, 2002). Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf terhubung G dan graf tidak terhubung S . Graf G terhubung karena

untuk setiap pasang simpul di dalam graf tersebut terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya. Graf S tak terhubung karena tidak ada lintasan yang menghubungkan simpul v_9 dan v_{10} serta v_7 dan v_8 . Graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf berhingga, sederhana dan terhubung. Pada subbab berikutnya diberikan beberapa definisi dan contoh dari jenis-jenis graf yang terkait dengan bab selanjutnya.

2.2 Jenis-Jenis Graf

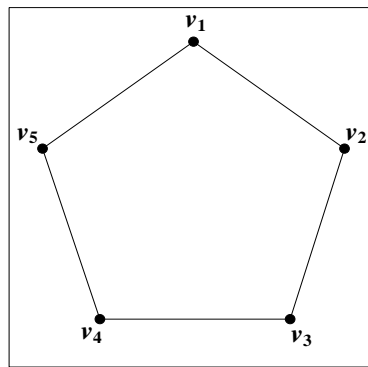
Dalam teori graf terdapat beberapa jenis graf yang mempunyai ciri khas masing-masing. Jenis-jenis graf yang akan dijelaskan berikut ini adalah jenis-jenis graf yang berkaitan dengan bab selanjutnya.



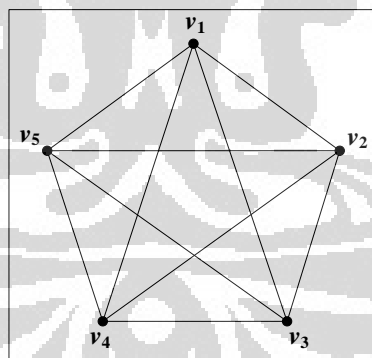
Gambar 2.6 Contoh graf lintasan P_5

Graf lintasan (*path graph*), P_n , adalah graf dengan n simpul ($n \geq 2$) dengan busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Semua simpul berderajat dua kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat satu. Simpul v_1 disebut simpul awal dan simpul v_n adalah simpul akhir (Hartsfield & Ringel, 1990). Dalam graf lintasan berlaku $|V| = |E| + 1$. Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf lintasan dengan $n = 5$ (P_5).

Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n , adalah graf dengan n simpul ($n \geq 3$), v_1, v_2, \dots, v_n , dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ (Hartsfield & Ringel, 1990), atau dengan kata lain, graf lingkaran adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n yang diberi tambahan busur antara simpul awal dan simpul akhir (busur v_nv_1). Semua simpul pada graf C_n memiliki derajat dua. Dalam graf lingkaran berlaku $|V| = |E|$. Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf lingkaran dengan $n = 5$ (C_5).

Gambar 2.7 Contoh graf lingkaran C_5

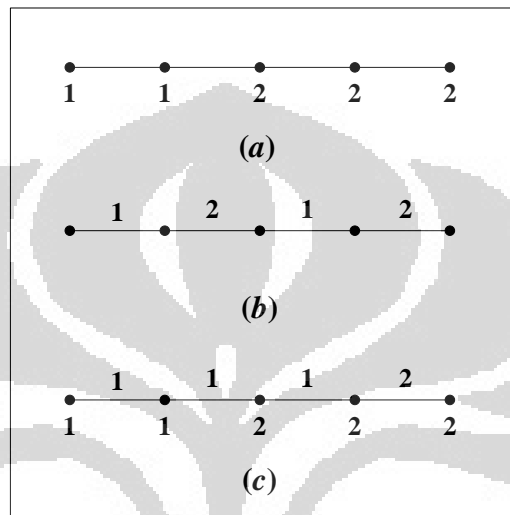
Graf lengkap (*complete graph*), K_n , adalah graf sederhana yang mempunyai tepat satu busur antara pasangan simpul-simpul yang berbeda (Rosen, 2003). Banyaknya busur pada graf lengkap adalah $|E_{K_n}| = \frac{n(n-1)}{2}$. Gambar 2.8 merupakan contoh dari graf lengkap dengan $n = 5$ (K_5) dan banyak busur pada K_5 adalah $\frac{5(4)}{2} = 10$. Pada subbab selanjutnya akan diberikan pembahasan tentang pelabelan dari suatu graf.

Gambar 2.8 Contoh graf lengkap K_5

2.3 Pelabelan Graf

Suatu pelabelan f pada graf G merupakan suatu pemetaan dari himpunan simpul V , himpunan busur E , ataupun $V \cup E$ ke suatu subhimpunan bilangan asli. Bilangan asli tersebut disebut label. Apabila daerah asal dari pemetaan adalah

himpunan simpul (atau himpunan busur), maka pelabelannya disebut pelabelan simpul (atau pelabelan busur). Apabila daerah asalnya merupakan gabungan dari himpunan simpul dan busur ($V \cup E$), maka pelabelannya disebut pelabelan total (Bača dkk., 2007). Pada Gambar 2.9 diberikan contoh pelabelan simpul (a), pelabelan busur (b), dan pelabelan total (c) dari graf lintasan P_5 .

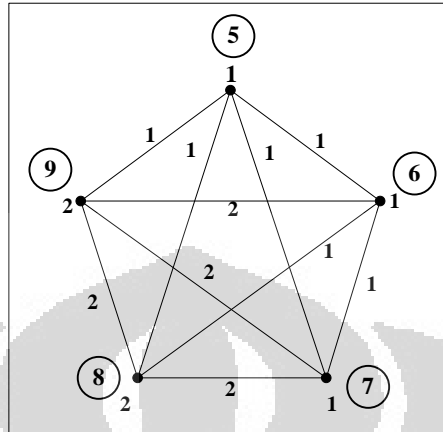


Gambar 2.9 Contoh pelabelan pada graf lintasan P_5

Jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen graf pada pelabelan total disebut **bobot**. Bobot dapat dihitung untuk simpul dan busur. Jumlah dari label suatu simpul ($f(v)$) dan label semua busur ($f(vu)$) yang hadir pada simpul tersebut disebut **bobot simpul** (*weight of vertex*), $w(v)$, yaitu $w(v) = f(v) + \sum_{vu \in E} f(vu)$.

Bobot busur (*weight of edge*) vu , yang dinyatakan sebagai $w(vu)$ adalah jumlah dari label dua simpul, $f(v)$ dan $f(u)$, yang dihubungkan oleh busur vu dan label busur vu , $f(vu)$, itu sendiri, yaitu $w(vu) = f(v) + f(vu) + f(u)$ (Bača dkk., 2007). Pada Gambar 2.10 diberikan contoh pelabelan total pada graf lengkap, K_n , dengan $n = 5$ beserta bobot simpulnya. Terlihat pada Gambar 2.10 bahwa setiap simpul diberi label 1 dan 2 dengan bobot simpul (diberikan pada bulatan kecil) pada setiap simpul berbeda. Pelabelan seperti ini disebut pelabelan- k total tak teratur simpul (*vertex irregular total k -labelling*). Pembahasan lebih

lengkap mengenai pelabelan- k total tak teratur (*Irregular total k -labelling*) diberikan pada subbab selanjutnya.



Gambar 2.10 Contoh pelabelan total serta bobot simpul pada graf K_5

2.4 Nilai Total Ketakteraturan Simpul

Istilah bahasa Indonesia tentang *total vertex irregularity strength* yang digunakan pada skripsi ini mengacu pada (Nurdin, 2010). Pelabelan pada suatu graf G dengan himpunan simpul V dan himpunan busur E , disebut pelabelan- k total (*total k -labelling*) jika terdapat pemetaan $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Pelabelan- k total, f , disebut pelabelan- k total tak teratur busur (*edge irregular total k -labelling*) pada graf G jika setiap dua busur yang berbeda di G , $v_i v_j$ dan $v_m v_n$, memiliki bobot yang berbeda, atau $w(v_i v_j) \neq w(v_m v_n)$, dimana $w(v_i v_j) = f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j)$. Sedangkan f disebut pelabelan- k total tak teratur simpul (*vertex irregular total k -labelling*) pada graf G jika untuk setiap dua simpul yang berbeda di G , v_i dan v_j , maka $w(v_i) \neq w(v_j)$, dimana $w(v_i) = f(v_i) + \sum_{v_j v_k \in E} f(v_i v_j)$.

Nilai ketakteraturan (*irregularity strength*) dari G , dilambangkan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan k -tak teratur. Nilai total ketakteraturan busur (*total edge irregularity strength*) dari suatu graf G , dilambangkan dengan $tes(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu

pelabelan- k total tak teratur busur. Nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) dari suatu graf G , dilambangkan dengan $tvs(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak teratur simpul (Bača dkk., 2007).

Secara sederhana $tes(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $w(v_i v_j) \neq w(v_m v_n)$, $v_i v_j \neq v_m v_n$ untuk setiap $v_i v_j, v_m v_n \in G$ dimana $w(v_i v_j) = f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j)$. Sedangkan $tvs(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $w(v_i) \neq w(v_j)$, $v_i \neq v_j$ untuk setiap $v_i, v_j \in G$ dimana $w(v_i) = f(v_i) + \sum_{v_i v_j \in E} f(v_i v_j)$.

Pada subbab selanjutnya diberikan hasil-hasil penelitian tentang nilai total ketakteraturan simpul, $tvs(G)$ yang berkaitan dengan bab selanjutnya.

2.5 Hasil-Hasil yang Telah Diketahui

Berdasarkan (Gallian, 2010), telah terdapat hasil-hasil penelitian yang membuktikan nilai total ketakteraturan simpul, $tvs(G)$. Diantaranya $tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$, $n \geq 1$ dan $tvs(K_n) = 2$, $n \geq 2$. Untuk kelengkapan skripsi, berikut ini diberikan teorema dan bukti untuk $tvs(K_n)$. Bukti yang diberikan pada Teorema 2.1 berbeda dengan yang diberikan oleh Bača dkk.

Teorema 2.1 (Bača dkk., 2007)

$$tvs(K_n) = 2, \quad \text{untuk } n \geq 2.$$

Bukti.

Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $tvs(K_n) \leq 2$.

Misalkan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan

$$E(K_n) = \{v_1 v_2, \dots, v_1 v_n, v_2 v_3, \dots, v_2 v_n, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari K_n didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 2 & \text{untuk } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n \end{cases}$$

$$f(v_i v_j) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 1 \leq j \leq n - i + 1, & i \neq j \\ 2 & \text{untuk } n - i + 2 \leq j \leq n, & i \neq j \end{cases}$$

Telah diketahui bahwa bobot simpul dari v_i pada K_n adalah

$$w(v_i) = f(v_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n f(v_i v_j).$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\begin{aligned} w(v_i) &= f(v_i) + \sum_2^{n-i+1} 1 + \sum_{n-i+2}^n 2 \\ &= 1 + 1(n - i + 1 - 1) + 2(n - (n - i + 1)) \\ &= 1 + n - i + 2(i - 1) \\ &= n + i - 1. \end{aligned}$$

Jadi bobot simpul dari v_i untuk $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ adalah $w(v_i) = n + i - 1$.

Jika nilai i disubstitusikan ke $w(v_i)$ maka diperoleh

$$\{w(v_i) | 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \{n, n + 1, \dots, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\} \quad (2.1)$$

Untuk $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} w(v_i) &= f(v_i) + \sum_1^{n-i+1} 1 + \sum_{n-i+2}^{n-1} 2 \\ &= 2 + 1(n - i + 1) + 2(n - 1 - (n - i + 1)) \\ &= 2 + n - i + 1 + 2(i - 2) \\ &= n + i - 1. \end{aligned}$$

Jadi bobot simpul dari v_i untuk $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n$ adalah $w(v_i) = n + i - 1$.

Jika nilai i disubstitusikan ke $w(v_i)$ maka diperoleh

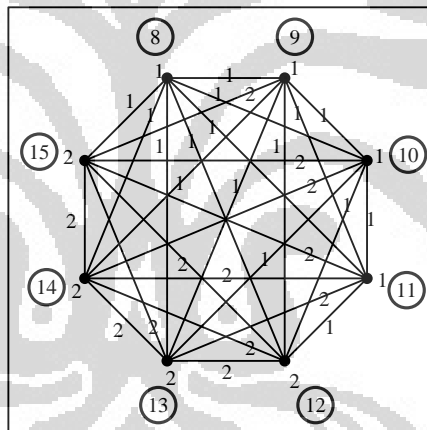
$$\{w(v_i) | \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n\} = \{n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2n - 1\} \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), terlihat bahwa bobot simpul pada setiap simpul i berurutan dan berbeda. Sehingga terbukti bahwa $tv_s(K_n) \leq 2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $tvs(K_n) \geq 2$.

Andaikan label dari semua simpul dan busur dari K_n adalah 1, maka semua bobot simpul pada simpul-simpul graf K_n akan sama. Hal ini melanggar definisi dari tvs . Sehingga terbukti bahwa $tvs(K_n) \geq 2$. Karena berlaku $tvs(K_n) \leq 2$ dan $tvs(K_n) \geq 2$. Jadi dapat disimpulkan $tvs(K_n) = 2$. ■

Selanjutnya akan diberikan contoh pelabelan-2 total tak teratur simpul pada graf lengkap, K_n , dengan $n = 8$ sesuai dengan aturan pada pembuktian Teorema 2.1. Dengan pelabelan ini dihasilkan label terbesar (nilai k) pada pelabelan- k total adalah 2 (pelabelan-2 total) dengan semua bobot simpul pada graf K_n berbeda, sehingga $tvs(K_8) = 2$. Pada Gambar 2.11 diberikan pelabelan- k total tak teratur pada K_8 .



Gambar 2.11 Contoh pelabelan-2 total tak teratur pada graf K_8

Bača dkk. (2007) juga telah membuktikan hubungan antara $tvs(G)$ dengan banyaknya simpul dan derajat pada graf G .

Teorema 2.2 (Bača dkk., 2007)

$$\left\lceil \frac{|V| + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq |V| + \Delta - 2\delta + 1$$

dimana Δ adalah derajat tertinggi dari graf G dan δ adalah derajat terkecil dari graf G .

BAB 3

ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF TERHUBUNG DENGAN BANYAK BUSUR MINIMAL DAN NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA

Pada bab ini akan dibahas cara mengkontruksi graf terhubung G dengan banyak busur minimal yang diperoleh dengan penghapusan busur dari graf lengkap, K_n , dan mempertahankan tvs dari graf lengkap, K_n , yaitu dua. Pengkonstruksian ini dilakukan dengan menggunakan suatu algoritma. Selanjutnya akan diberikan banyak busur minimal pada graf yang dihasilkan dari proses penghapusan busur.

3.1 Algoritma Konstruksi Graf G

Secara garis besar algoritma ini ditujukan untuk mencari graf G yang memiliki $tvs(G) = 2$ namun memiliki banyak busur lebih sedikit dari K_n dengan cara menghapus atau mengurangi busur-busur dari graf lengkap, K_n . Algoritma ini dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk n ganjil dan n genap.

3.1.1 Algoritma Konstruksi Graf G untuk n Ganjil

Algoritma penghapusan busur ini terdiri dari 3 tahap: tahap awal, tahap penghapusan, dan tahap penyelesaian. Tahap awal adalah tahap dilakukannya pelabelan- k total pada graf lengkap, K_n , kemudian diberikan nama simpul pada graf K_n . Tahap penghapusan adalah tahap dihapusnya busur-busur pada graf K_n , tahap penghapusan terdiri dari 3 langkah. Tahap terakhir adalah tahap penyelesaian, yaitu tahap dimana bobot simpul dibuat berurutan dengan cara mengganti label simpul. Algoritma secara lengkap diberikan pada Algoritma 3.1.

Algoritma 3.1 (n ganjil, $n \geq 5$)**Tahap Awal**

1. Label K_n dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1.
2. Beri nama simpul pada K_n , yaitu v_1, v_2, \dots, v_n sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_n .

Tahap Penghapusan

3. Untuk $j = 2, 3, \dots, n - 1$

Hapus v_1v_j

$$w(v_1) = w(v_1) - f(v_1v_j) \quad (\text{perubahan bobot simpul})$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_1v_j)$$

4. Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$

Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n - (i - 1)$

Hapus v_iv_j

$$w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$$

5. Untuk $i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2} + 1, \dots, n - 1$

Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n$

Hapus v_iv_j

$$w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$$

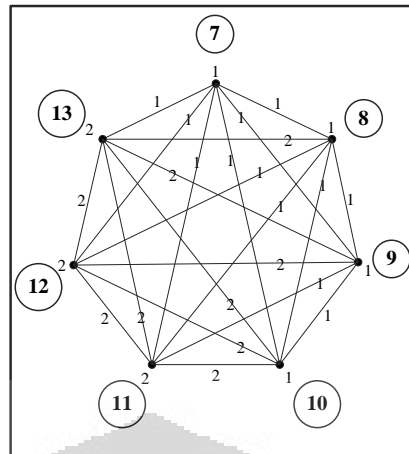
Tahap penyelesaian

6. $f(v_n) = 1$ (perubahan label pada simpul v_n)
 $w(v_n) = w(v_n) - 1$

Untuk lebih menjelaskan Algoritma 3.1, akan diperlihatkan contoh penggunaan algoritma pada graf K_7 .

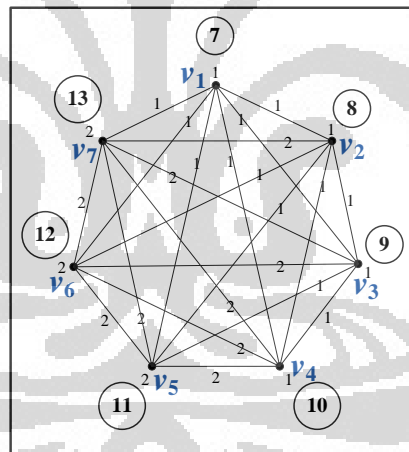
Tahap Awal

1. Label K_7 dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1. Pada Gambar 3.1 diberikan pelabelan-2 total pada K_7 . Terlihat pada Gambar 3.1 label simpul dan busur pada K_7 adalah 1 dan 2, artinya label terbesar pada graf K_7 adalah 2, sehingga disebut pelabelan-2 total dan mempunyai $tv_s(K_7) = 2$.



Gambar 3.1 Pelabelan-2 total pada K_7

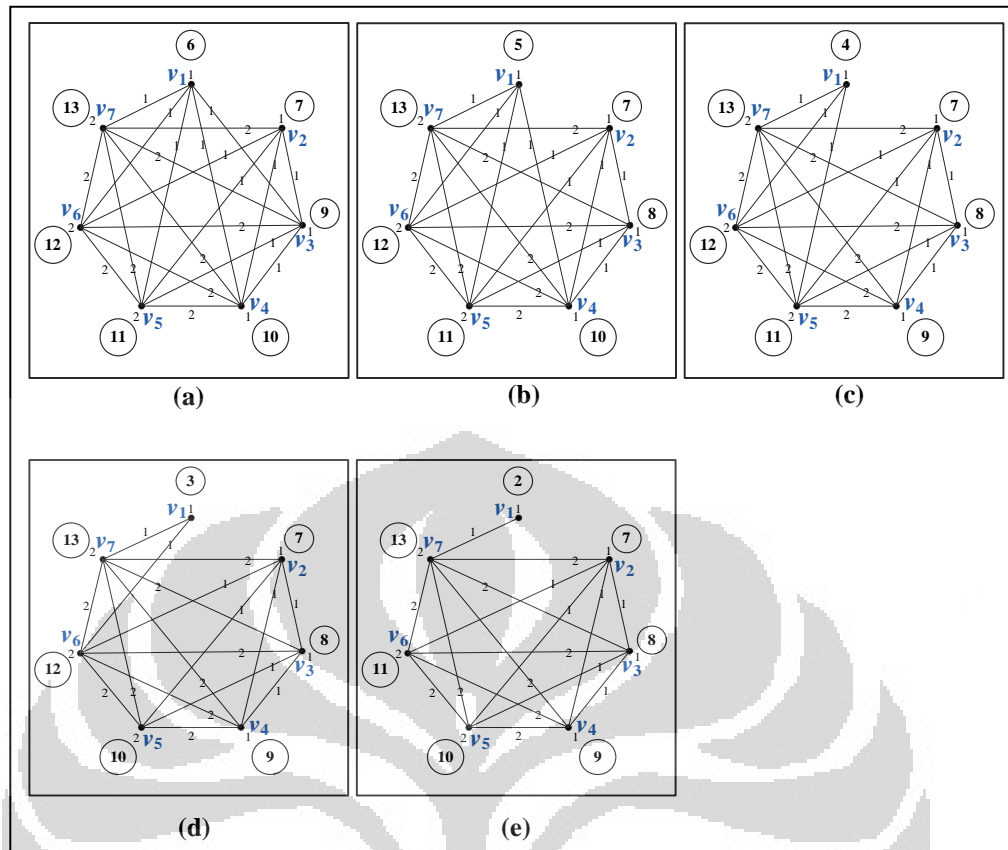
- Beri nama simpul pada K_7 , yaitu v_1, v_2, \dots, v_7 sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_7 . (Gambar 3.2)



Gambar 3.2 Penamaan untuk tiap simpul pada K_7

Tahap Penghapusan

- Untuk $j = 2, 3, \dots, 6$, hapus busur $v_1 v_j$ kemudian perbaharui $w(v_1) = w(v_1) - f(v_1 v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_1 v_j)$.
Pada Gambar 3.3 diberikan proses penghapusan pada Langkah 3.



Gambar 3.3 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.1 pada K_7

Untuk $j = 2$, hapus busur v_1v_2 kemudian perbaharui $w(v_1) = 7 - 1 = 6$, $w(v_2) = 7 - 1 = 6$ sehingga diperoleh graf seperti pada Gambar 3.3.a. Untuk $j = 3$, hapus busur v_1v_3 , perbaharui $w(v_1) = 6 - 1 = 5$, $w(v_3) = 9 - 1 = 8$, diperoleh graf seperti pada Gambar 3.3.b. Selanjutnya, untuk $j = 4$ akan diperoleh graf pada Gambar 3.3.c, untuk $j = 5$ akan diperoleh graf pada Gambar 3.3.d, dan busur terakhir yang dihapus pada langkah ini adalah busur v_1v_6 ($j = 6$), kemudian perbaharui bobot simpul pada v_1 dan v_6 menjadi $w(v_1) = 3 - 1 = 2$ dan $w(v_6) = 12 - 1 = 11$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.3.e. Dalam langkah ini tetap dipertahankan tvs dari tiap graf hasil penghapusan sama dengan 2.

4. Untuk $i = 2, 3$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, 8 - i$, hapus busur v_iv_j kemudian perbaharui $w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$. Penghapusan pada Langkah 4 dimulai dari $i = 2$ sampai $i = 3$. Pada saat $i = 2$,

Tabel 3.1 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.1 pada K_7

$i \backslash j$	3	4	5	6
2				
3				

$j = 3, 4, 5, 6$ sehingga akan dihapus busur $v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5,$ dan v_2v_6 .

Kemudian untuk $i = 3, j = 4, 5$ sehingga akan dihapus busur v_3v_4 dan v_3v_5 .

Sama seperti langkah penghapusan lainnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus akan diperbaharui. Hasil akhir pada langkah ini ditunjukkan pada gambar yang ada pada baris 3 kolom 4 dari Tabel 3.1. Setiap graf hasil penghapusan pada langkah ini tetap dipertahankan tvs dari graf tersebut sama dengan 2.

- Untuk $i = 5, 6$ dan untuk $j = i + 1, 7$, hapus busur v_iv_j kemudian perbaharui $w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$. Langkah penghapusan terakhir ini adalah dihapusnya busur v_5v_6 ($i = 5, j = 6$), v_5v_7 ($i = 5, j = 7$), dan terakhir adalah busur v_6v_7 ($i = 6, j = 7$). Sama seperti langkah penghapusan lainnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus akan diperbaharui. Graf yang

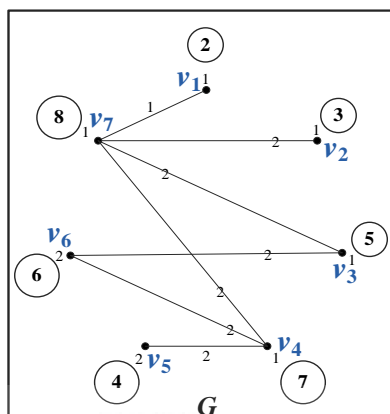
dihasilkan pada langkah ini adalah suatu graf terhubung dengan tv_s sama dengan dua dan mempunyai banyak busur lebih sedikit dari graf lengkap yang ditunjukkan pada gambar pada baris 3 kolom 3 dari Tabel 3.2. Untuk mengindikasikan apakah banyak busur sudah minimal atau belum (atau apakah masih dapat dilakukan penghapusan busur lebih lanjut) adalah dengan cara mengurutkan bobot simpul pada tiap simpul dimulai dari bobot terkecil yang mungkin, yaitu 2. Karena hasil akhir graf pada tahap ini belum memiliki bobot yang berurutan, maka diperlukan tahap penyelesaian.

Tabel 3.2 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.1 pada K_7

$i \backslash j$	6	7
5		
6		

Tahap Penyelesaian

- Lakukan perubahan label pada simpul v_7 , yaitu $f(v_7) = 1$ (perubahan label pada simpul) dan bobot pada simpul v_7 juga mengalami perubahan menjadi $w(v_7) = 9 - 1 = 8$. Terlihat pada Gambar 3.4 label dari simpul v_7 pada



Gambar 3.4 Tahap penyelesaian Algoritma 3.1 pada K_7

graf G yang dihasilkan dalam tahap penyelesaian, berubah menjadi 1 sehingga menyebabkan bobot simpul pada v_7 berubah menjadi 8 dan mengakibatkan bobot dari setiap simpul menjadi berurutan dimulai dari bobot terkecil yang mungkin, yaitu 2. Hal ini mengindikasikan bahwa banyak busur untuk graf yang mempunyai tvs sama dengan dua, yang diperoleh dengan menerapkan Algoritma 3.1 sudah minimal, yaitu 7. Pada subbab selanjutnya akan diberikan algoritma untuk n genap.

3.1.2 Algoritma Konstruksi Graf G untuk n Genap

Algoritma ini dibagi menjadi dua bagian, yaitu untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$. Algoritma penghapusan busur untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$ terdiri dari 2 tahap, yaitu tahap awal dan tahap penghapusan, sedangkan untuk $n \equiv 0 \pmod{4}$ memiliki 3 tahap seperti pada ganjil, yaitu tahap awal, tahap penghapusan dan tahap penyelesaian. Tahap awal untuk kasus n genap sama dengan kasus untuk n ganjil, yaitu tahap dilakukannya pelabelan- k total pada graf lengkap, K_n , kemudian diberikan nama simpul pada graf K_n . Tahap penghapusan adalah tahap dihapusnya busur-busur pada graf K_n , untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$ tahap ini terdiri dari 5 langkah penghapusan. Tahap penyelesaian untuk $n \equiv 0 \pmod{4}$ serupa seperti untuk n ganjil, yaitu tahap mengganti label agar bobot simpul berurutan. Namun, untuk $n \equiv 0 \pmod{4}$ pergantian label dilakukan pada

simpul dan busur. Algoritma lengkap untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$ diberikan pada Algoritma 3.2.

Algoritma 3.2 ($n \equiv 2 \pmod{4}, n \geq 5$)

Tahap Awal

1. Label K_n dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1.
2. Beri nama simpul pada K_n , yaitu v_1, v_2, \dots, v_n sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_n .

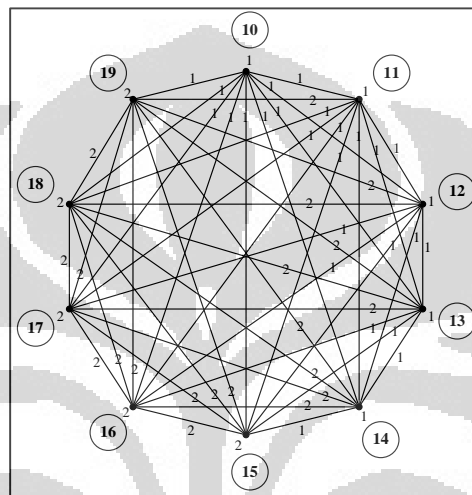
Tahap Penghapusan

3. Untuk $j = 2, 3, \dots, n - 1$
 Hapus $v_1 v_j$
 $w(v_1) = w(v_1) - f(v_1 v_j)$ (perubahan bobot simpul)
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_1 v_j)$
4. Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-2}{2}$
 Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n - (i - 1)$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$
5. Hapus $v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}$
 $w\left(v_{\frac{n}{2}}\right) = w\left(v_{\frac{n}{2}}\right) - f\left(v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}\right)$
 $w\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right) = w\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right) - f\left(v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}\right)$
6. Untuk $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 2$
 Untuk $j = i + 2, i + 3, \dots, n$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$
7. Untuk $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n - 1$
 Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$

Untuk lebih menjelaskan Algoritma 3.2, akan diperlihatkan contoh penggunaan algoritma pada graf K_{10} .

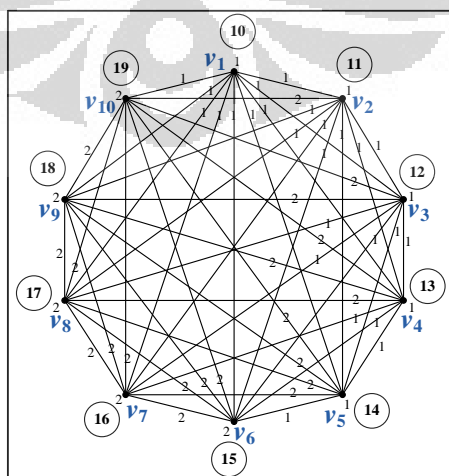
Tahap Awal

1. Label K_{10} dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1. Pada Gambar 3.5 diberikan pelabelan-2 total pada K_{10} . Terlihat pada Gambar 3.5 label simpul dan busur pada K_{10} adalah 1 dan 2, artinya label terbesar pada graf K_{10} adalah 2, sehingga disebut pelabelan-2 total dan mempunyai $tvs(K_{10}) = 2$.



Gambar 3.5 Pelabelan-2 total pada K_{10}

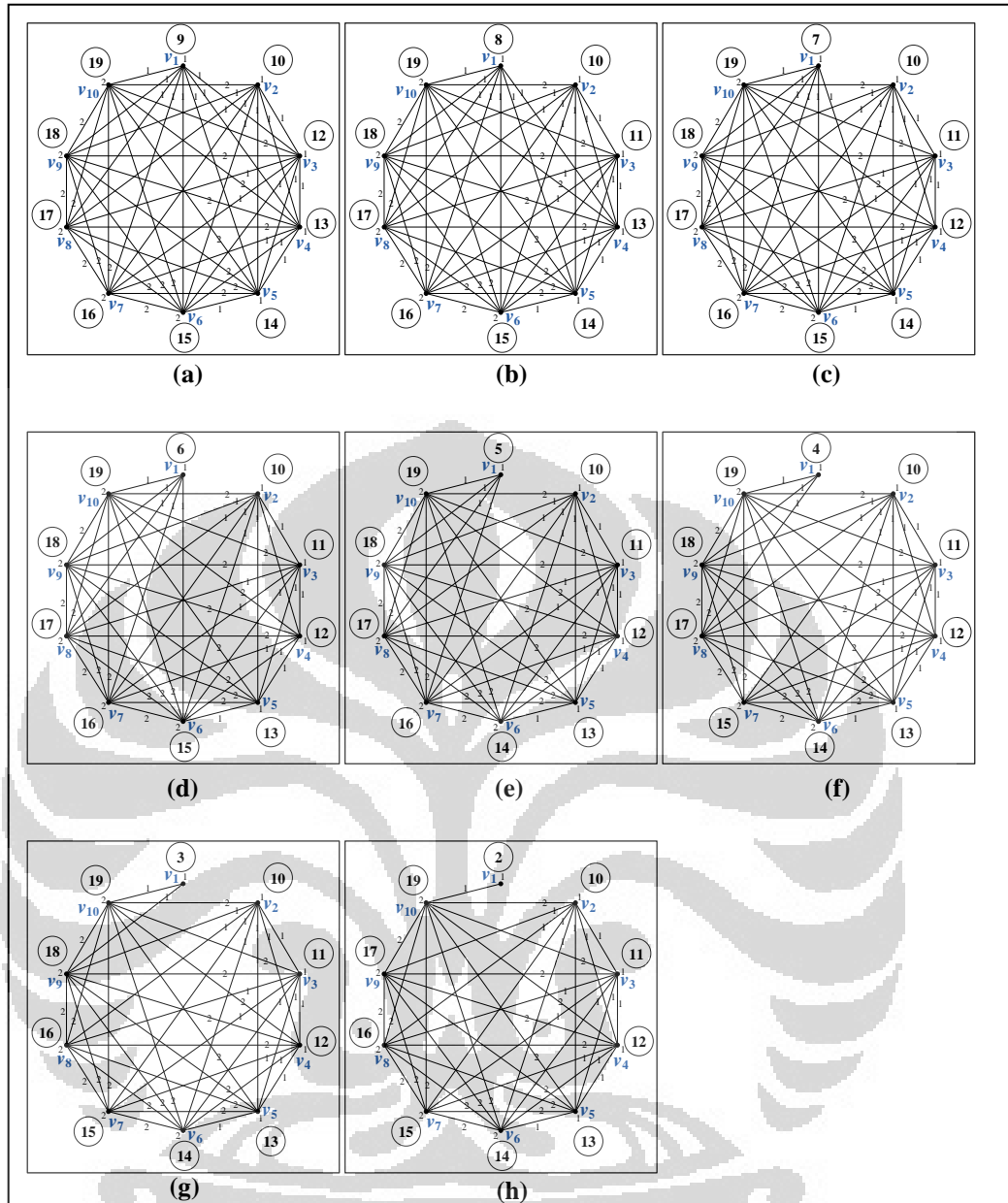
2. Beri nama simpul pada graf K_{10} , yaitu v_1, v_2, \dots, v_{10} sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_{10} (Gambar 3.6).



Gambar 3.6 Penamaan untuk tiap simpul pada K_{10}

Tahap Penghapusan

3. Untuk $j = 2, 3, \dots, 9$, hapus busur $v_1 v_j$ kemudian perbaharui $w(v_1) = w(v_1) - f(v_1 v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_1 v_j)$. Pada Gambar 3.7 diberikan proses penghapusan pada langkah ini. Untuk $j = 2$, hapus busur $v_1 v_2$ kemudian perbaharui bobot simpul menjadi $w(v_1) = 10 - 1 = 9$, $w(v_2) = 11 - 1 = 10$ sehingga diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.a. Untuk $j = 3$, hapus busur $v_1 v_3$ kemudian perbaharui bobot simpul menjadi $w(v_1) = 9 - 1 = 8$, $w(v_3) = 12 - 1 = 11$ sehingga diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.b. Selanjutnya, untuk $j = 4$ diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.c, untuk $j = 5$ diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.d, untuk $j = 6$ diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.e, untuk $j = 7$ diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.f, untuk $j = 8$ diperoleh graf seperti pada Gambar 3.7.g, dan busur terakhir yang dihapus pada langkah ini adalah busur $v_1 v_9$ (untuk $j = 9$) kemudian perbaharui bobot simpul pada v_1 dan v_9 menjadi $w(v_1) = 3 - 1 = 2$ dan $w(v_9) = 18 - 1 = 17$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.7.h. Dalam langkah ini tetap dipertahankan tvs sama dengan dua dari tiap graf hasil penghapusan.
4. Untuk $i = 2, 3, 4$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, 11 - i$, hapus busur $v_i v_j$ kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Penghapusan pada langkah ini dapat dilihat pada Tabel 3.3. Pada Tabel 3.3 diberikan gambar-gambar untuk $i = 2$ maka $j = 3, \dots, 9$, untuk $i = 3$ maka $j = 4, \dots, 8$ dan untuk $i = 4$ maka $j = 5, \dots, 7$. Berikut merupakan busur-busur yang dihapus pada penerapan Langkah 4 Algoritma 3.2, untuk
- $i = 2$, busur yang dihapus adalah $v_2 v_3, v_2 v_4, v_2 v_5, v_2 v_6, v_2 v_7, v_2 v_8, v_2 v_9$
 - $i = 3$, busur yang dihapus adalah $v_3 v_4, v_3 v_5, v_3 v_6, v_3 v_7, v_3 v_8$
 - $i = 4$, busur yang dihapus adalah $v_4 v_5, v_4 v_6, v_4 v_7$

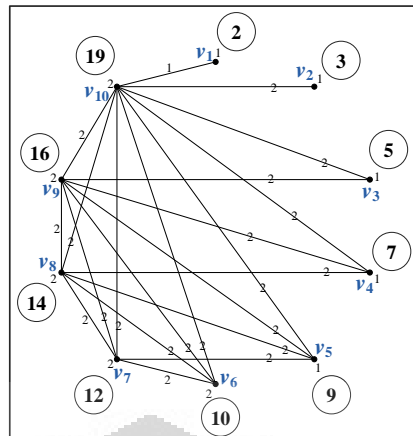


Gambar 3.7 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.2 pada K_{10}

5. Hapus busur v_5v_6 kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_5) = 10 - 1 = 9$ dan $w(v_6) = 11 - 1 = 10$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.8.

Tabel 3.3 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.2 pada K_{10}

$j \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9
2							
3							
4							



Gambar 3.8 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.2 pada K_{10}

6. Untuk $i = 6, 8$ dan untuk $j = i + 2, i + 3, \dots, 10$, hapus busur $v_i v_j$ kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Proses penghapusan pada Langkah 6 dapat dilihat pada Tabel 3.4. Pada Tabel 3.4 diberikan penjelasan tentang penghapusan busur dimulai untuk $i = 6$, maka j bergerak dari 8 sampai dengan 10, sehingga akan dihapus busur $v_6 v_8, v_6 v_9, v_6 v_{10}$.

Tabel 3.4 Penerapan Langkah 6 Algoritma 3.2 pada K_{10}

$i \setminus j$	8	9	10
6			
8			

Kemudian untuk $i = 8$, maka $j = 10$, sehingga akan dihapus busur v_8v_{10} . Sama seperti langkah penghapusan lainnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus, akan diperbaharui. Hasil akhir pada Langkah 6 ditunjukkan pada gambar yang ada pada baris 3 kolom 4 dari Tabel 3.4. Pada langkah ini, dihasilkan suatu graf yang memiliki simpul dengan bobot yang sama (sehingga tvs dari graf tersebut tidak dua). Akan tetapi label dari graf tersebut dengan mudah bisa diubah agar tvs dari graf tersebut menjadi dua.

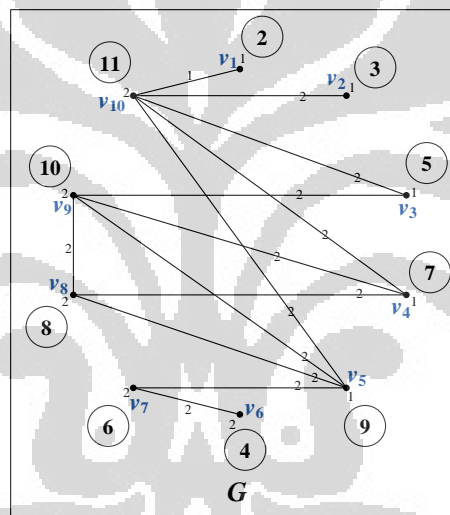
- Untuk $i = 7, 9$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, 10$, hapus busur $v_i v_j$ perbaharui bobot simpul $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Langkah penghapusan dapat dilihat pada Tabel 3.5. Pada Tabel 3.5 diberikan

Tabel 3.5 Penerapan Langkah 7 Algoritma 3.2 pada K_{10}

$i \backslash j$	8	9	10
7			
9			

penjelasan tentang penghapusan busur untuk $i = 7$, maka j bergerak dari 8 sampai dengan 10, sehingga akan dihapus busur $v_7v_8, v_7v_9, v_7v_{10}$. Kemudian untuk $i = 9$, maka $j = 10$, sehingga akan dihapus busur v_9v_{10} . Sama seperti langkah penghapusan lainnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada

simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus, akan diperbaharui. Pada langkah ini dihasilkan suatu graf yang memiliki simpul dengan bobot yang sama (sehingga tv_s dari graf tersebut tidak dua). Akan tetapi label dari graf tersebut dengan mudah bisa diubah agar tv_s dari graf tersebut menjadi dua. Hasil akhir pada langkah ini ditunjukkan pada gambar yang ada pada baris 3 kolom 4 dari Tabel 3.5. Terlihat pada graf yang dihasilkan sudah memiliki tv_s sama dengan dua dengan banyak busur minimal, yaitu 13 (indikasinya adalah bobot yang berurutan dimulai dari bobot terkecil yang mungkin, yaitu 2 sampai 11) (Gambar 3.9). Sehingga pada algoritma ini sudah tidak diperlukan lagi tahap penyelesaian.



Gambar 3.9 Graf G hasil algoritma 3.2

Algoritma selanjutnya yang akan diberikan adalah algoritma untuk $n = 0 \pmod{4}$. Algoritma lengkap diberikan pada Algoritma 3.3. Untuk memperjelas Algoritma 3.3, akan diperlihatkan contoh penerapan algoritma pada graf K_8 .

Tahap Awal

1. Label K_8 dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1. Pada Gambar 3.10 diberikan pelabelan-2 total pada K_8 . Terlihat pada Gambar 3.10 label simpul dan busur pada K_8 adalah 1 dan 2 sehingga disebut pelabelan-2 total dan mempunyai $tv_s(K_8) = 2$.

Algoritma 3.3 ($n \equiv 0 \pmod{4}, n \geq 5$)**Tahap Awal**

1. Label K_n dengan pelabelan- k total, f , seperti yang diberikan pada bukti Teorema 2.1.
2. Beri nama simpul pada K_n , yaitu v_1, v_2, \dots, v_n sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_n .

Tahap Penghapusan

3. Untuk $j = 2, 3, \dots, n - 1$

Hapus v_1v_j

$$w(v_1) = w(v_1) - f(v_1v_j) \quad (\text{perubahan bobot simpul})$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_1v_j)$$

4. Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-2}{2}$

Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n - (i - 1)$

Hapus v_iv_j

$$w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$$

5. Hapus $v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}$

$$w\left(v_{\frac{n}{2}}\right) = w\left(v_{\frac{n}{2}}\right) - f\left(v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$w\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right) = w\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right) - f\left(v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

6. Untuk $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 3$

Untuk $j = i + 2, i + 3, \dots, n$

Hapus v_iv_j

$$w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$$

7. Untuk $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n - 2$

Untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n$

Hapus v_iv_j

$$w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$$

$$w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$$

Tahap penyelesaian

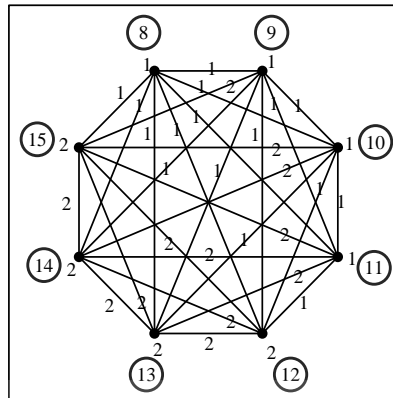
8. $f(v_nv_2) = 1$ (perubahan label pada busur v_nv_2)

$$f(v_2) = 2 \quad (\text{perubahan label pada simpul } v_2)$$

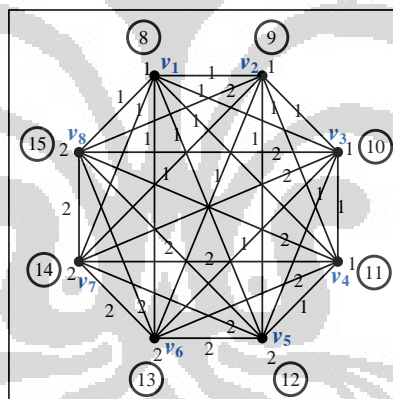
$$w(v_n) = w(v_n) - 1$$

9. $f(v_n) = 1$

$$w(v_n) = w(v_n) - 1$$

Gambar 3.10 Pelabelan-2 total pada K_8

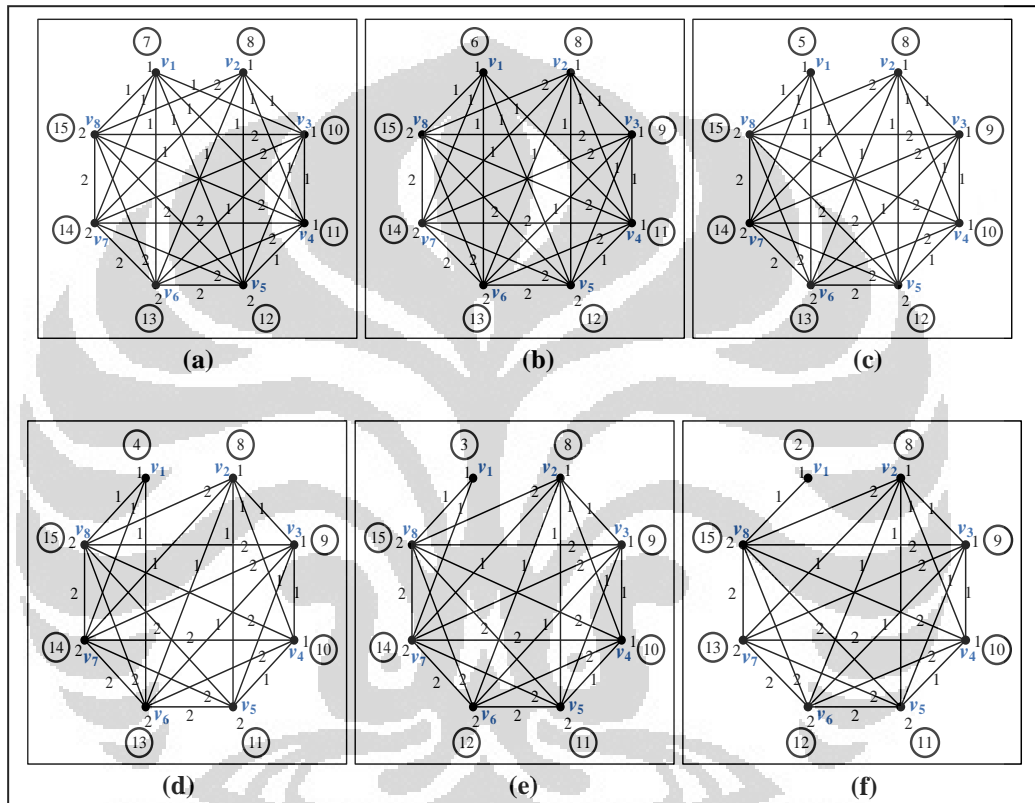
- Beri nama simpul pada graf K_n , yaitu v_1, v_2, \dots, v_8 sesuai dengan urutan bobot simpul yang dimulai dari bobot terkecil, v_1 , sampai dengan simpul berbobot terbesar, v_8 (Gambar 3.11).

Gambar 3.11 Penamaan untuk tiap simpul pada K_8

Tahap Penghapusan

- Untuk $j = 2, 3, \dots, 7$, hapus busur v_1v_j kemudian perbaharui $w(v_1) = w(v_1) - f(v_1v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_1v_j)$. Pada Gambar 3.12 diberikan proses penghapusan pada Langkah 3. Untuk $j = 2$, hapus busur v_1v_2 kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_1) = 8 - 1 = 7$ dan $w(v_2) = 9 - 1 = 8$ sehingga diperoleh graf seperti pada Gambar 3.12.a. Untuk $j = 3$, hapus busur v_1v_3 kemudian perbaharui $w(v_1) = 7 - 1 = 6$ dan $w(v_3) = 10 - 1 = 9$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.12.b. Selanjutnya untuk $j = 4$ diperoleh graf pada Gambar 3.12.c, untuk $j = 5$ diperoleh graf pada

Gambar 3.12.d, untuk $j = 6$ diperoleh graf pada Gambar 3.12.e. Busur terakhir yang dihapus pada Langkah 3 adalah busur v_1v_7 (untuk $j = 7$) kemudian perbaharui bobot simpul pada v_1 dan v_7 menjadi $w(v_1) = 3 - 1 = 2$ dan $w(v_7) = 14 - 1 = 13$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.12.f. Dalam langkah ini tetap dipertahankan tvs dari tiap graf hasil penghapusan sama dengan dua.



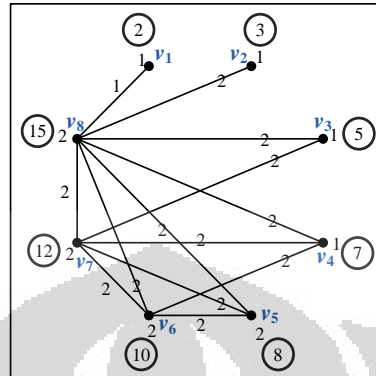
Gambar 3.12 Penerapan Langkah 3 Algoritma 3.3 pada K_8

4. Untuk $i = 2, 3$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, 9 - i$, hapus busur v_iv_j kemudian perbaharui $w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$. Proses penghapusan pada Langkah 4 dapat dilihat pada Tabel 3.6. Pada Tabel 3.6 diberikan gambar-gambar untuk $i = 2$ maka $j = 3, \dots, 7$ dan untuk $i = 3$ maka $j = 4, \dots, 6$. Berikut merupakan busur-busur yang dihapus pada penerapan Langkah 4 Algoritma 3.2, untuk
- $i = 2$, busur yang dihapus adalah $v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_2v_7$
 - $i = 3$, busur yang dihapus adalah v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6

Tabel 3.6 Penerapan Langkah 4 Algoritma 3.3 pada K_8

$i \backslash j$	3	4	5	6	7
2					
3					

- Hapus busur v_4v_5 kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_4) = 8 - 1 = 7$ dan $w(v_5) = 9 - 1 = 8$ sehingga diperoleh graf pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Penerapan Langkah 5 Algoritma 3.3 pada K_8

- Untuk $i = 5$ dan untuk $j = 7, 8$, hapus busur v_iv_j kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_i) = w(v_i) - f(v_iv_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_iv_j)$. Langkah penghapusan dapat dilihat pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7 Penerapan Langkah 6 Algoritma 3.3 pada K_8

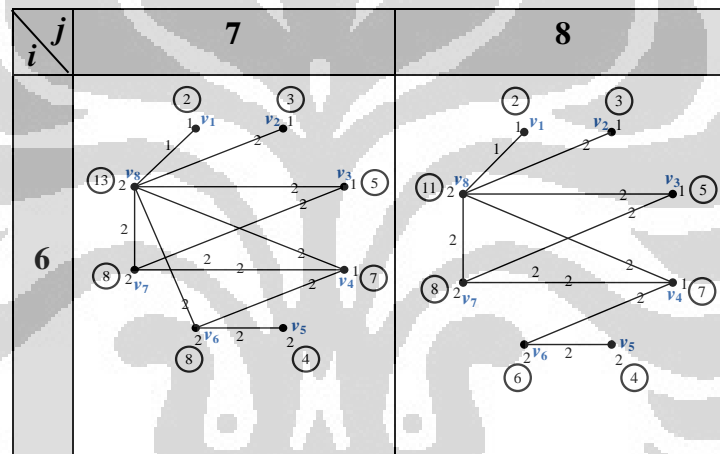
$i \backslash j$	7	8
5		

Pada Tabel 3.7 diberikan penjelasan tentang proses penghapusan busur pada Langkah 6, untuk $i = 5$ maka j bergerak dari 7 sampai dengan 8, sehingga akan dihapus busur v_5v_7, v_5v_8 . Sama seperti langkah penghapusan sebelumnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus, akan diperbaharui. Hasil akhir pada Langkah 6

ditunjukkan pada gambar yang ada pada baris 2 kolom 3 dari Tabel 3.7. Pada langkah ini, dihasilkan suatu graf yang memiliki simpul dengan bobot yang sama (sehingga tvs dari graf tersebut tidak sama dengan dua). Akan tetapi label dari graf tersebut dengan mudah bisa diubah agar tvs dari graf tersebut menjadi dua.

7. Untuk $i = 6$ dan untuk $j = 7, 8$, hapus busur $v_i v_j$ kemudian perbaharui bobot simpul $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Langkah penghapusan dapat dilihat pada Tabel 3.8.

Tabel 3.8 Penerapan Langkah 7 Algoritma 3.3 pada K_8

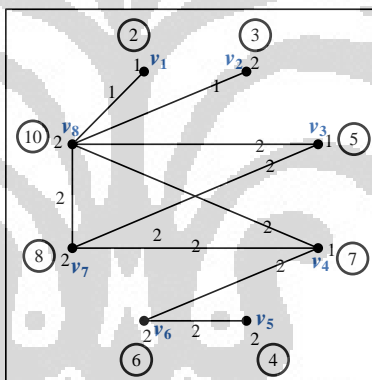


Pada Tabel 3.8 diberikan penjelasan tentang proses penghapusan pada Langkah 7, untuk $i = 6$, maka j bergerak dari 7 sampai dengan 8, sehingga akan dihapus busur $v_6 v_7, v_6 v_8$. Sama seperti langkah penghapusan lainnya, jika ada penghapusan busur maka bobot pada simpul yang berkaitan dengan busur yang dihapus, akan diperbaharui. Pada Langkah 7, dihasilkan suatu graf yang memiliki simpul dengan bobot sama (sehingga tvs dari graf tersebut tidak sama dengan dua). Akan tetapi label dari graf tersebut dengan mudah bisa diubah agar tvs dari graf tersebut menjadi dua. Graf yang dihasilkan pada akhir langkah ini ditunjukkan pada gambar yang ada pada baris 2 kolom 3 dari Tabel 3.8. Terlihat pada graf yang dihasilkan sudah memiliki tvs sama dengan dua dengan banyak busur lebih sedikit dari graf K_n , yaitu 9. Untuk mengindikasikan apakah banyak busur sudah minimal atau belum (atau apakah masih

dapat dilakukan penghapusan busur lebih lanjut), yaitu dengan cara mengurutkan bobot simpul pada tiap simpul dimulai dari bobot terkecil yang mungkin, yaitu 2. Karena hasil akhir graf pada tahap ini belum memiliki bobot yang berurutan, maka diperlukan tahap penyelesaian.

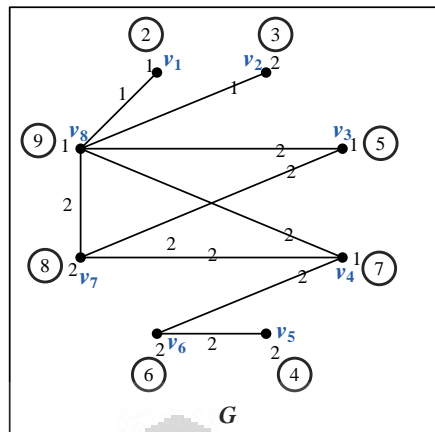
Tahap penyelesaian

- Lakukan perubahan label pada busur v_8v_2 , yaitu $f(v_8v_2) = 1$ (perubahan label pada busur) dan label pada simpul v_2 , yaitu $f(v_2) = 2$ (perubahan label pada simpul) kemudian perbaharui bobot pada simpul v_8 yang mengalami perubahan menjadi $w(v_8) = 11 - 1 = 10$. Pada Langkah 8 pergantian label pada busur v_8v_2 dan simpul v_2 tidak merubah bobot dari simpul v_2 . Perubahan label ini terlihat pada Gambar 3.14.



Gambar 3.14 Penerapan Langkah 8 Algoritma 3.3 pada K_8

- Lakukan perubahan label pada simpul v_8 , yaitu $f(v_8) = 1$ (perubahan label pada simpul) kemudian perbaharui bobot pada simpul v_8 yang mengalami perubahan menjadi $w(v_8) = 10 - 1 = 9$. Graf yang dihasilkan dari perubahan label ini terlihat pada Gambar 3.15. Terlihat pada graf G yang dihasilkan dalam tahap penyelesaian, bobot simpul pada v_8 berubah menjadi 9 sehingga bobot dari setiap simpul menjadi berurutan dimulai dari bobot terkecil yang mungkin, yaitu 2. Hal ini mengindikasikan bahwa banyak busur untuk graf dengan memiliki tvs sama dengan dua yang diperoleh dengan menerapkan Algoritma 3.3 sudah minimal, yaitu 9.

Gambar 3.15 Graf G hasil Algoritma 3.3

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa tvs graf yang diperoleh dari Algoritma 3.1, atau Algoritma 3.2, atau Algoritma 3.3 adalah dua. Untuk menunjukkan hal itu, terlebih dahulu diberikan Observasi 3.1

Observasi 3.1

Derajat terendah (δ) dan derajat tertinggi (Δ) dari graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 atau Algoritma 3.3 adalah sebagai berikut.

Algoritma	δ	Δ
3.1 (n ganjil)	1	$\frac{n+1}{2}$
3.2 ($n \equiv 2 \pmod{4}$)	1	$\frac{n}{2}$
3.3 ($n \equiv 0 \pmod{4}$)	1	$\frac{n}{2} + 1$

Penjelasan.

Derajat terendah (δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.1 (n ganjil, $n \geq 5$) berada pada simpul v_1 dan $v_{\frac{n+3}{2}}$. Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul v_1 ada pada Langkah 3, yaitu menghapus $(n-2)$ busur, sehingga ada $n-1-(n-2)=1$ busur yang hadir pada simpul v_1 atau simpul v_1 disebut berderajat satu, dimana $n-1$ adalah banyak busur yang hadir untuk

setiap simpul pada graf lengkap, K_n . Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul $v_{\frac{n+3}{2}}$ ada pada Langkah 3, 4, dan 5.

Pada Langkah 3 dihapus 1 busur, yaitu busur $v_1 v_{\frac{n+3}{2}}$.

Pada Langkah 4 dihapus $\sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} 1 = \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ busur.

Pada Langkah 5 dihapus $\sum_{i=\frac{n+3}{2}+1}^n 1 = n - \frac{n+3}{2} = \frac{n-3}{2}$.

Jadi total busur yang dihapus adalah $1 + \left(\frac{n-3}{2}\right) + \left(\frac{n-3}{2}\right) = n - 2$, sehingga busur yang hadir pada simpul $v_{\frac{n+3}{2}}$ adalah $n - 1 - (n - 2) = 1$.

Derajat tertinggi (Δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.1 berada pada simpul v_n . Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul v_n ada di Langkah 5, yaitu menghapus sebanyak $\sum_{i=\frac{n-1}{2}}^{n-1} 1 = n - 1 - \frac{n-1}{2} = \frac{n-3}{2}$ busur. Sehingga ada $n - 1 - \left(\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ busur yang hadir pada simpul v_n , atau dengan kata lain simpul v_n berderajat $\frac{n+1}{2}$.

Derajat terendah (δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.2 ($n \equiv 2 \pmod{4}$, $n \geq 5$) berada pada simpul v_1 dan $v_{\frac{n+2}{2}}$. Penjelasan banyaknya busur yang hadir pada simpul v_1 pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.2 sama seperti untuk n ganjil (Algoritma 3.1). Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul $v_{\frac{n+2}{2}}$ ada pada Langkah 3, 4, 5 dan 6.

Pada Langkah 3 dihapus 1 busur $\left(v_1 v_{\frac{n+2}{2}}\right)$.

Pada Langkah 4 dihapus $\sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} 1 = \frac{n-2}{2} - 1 = \frac{n-4}{2}$ busur.

Pada Langkah 5 dihapus 1 busur $\left(v_n v_{\frac{n+2}{2}}\right)$.

Pada Langkah 6 dihapus $\sum_{i=\frac{n+2}{2}+2}^n 1 = n - \frac{n+4}{2} = \frac{n-4}{2}$.

Jadi banyak busur yang dihapus adalah $1 + \left(\frac{n-4}{2}\right) + 1 + \left(\frac{n-4}{2}\right) = n - 2$, sehingga busur yang hadir pada simpul $v_{\frac{n+2}{2}}$ adalah $n - 1 - (n - 2) = 1$.

Derajat tertinggi (Δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.2 berada pada simpul v_n . Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul v_n ada di Langkah 6 dan 7, yaitu menghapus sebanyak

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{genap}}^{n-2} 1 + \sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{ganjil}}^{n-1} 1 = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} 1 = n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1, \text{ sehingga}$$

ada $n - 1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n}{2}$ busur yang hadir pada simpul v_n , atau dengan kata lain simpul v_n berderajat $\frac{n}{2}$.

Derajat terendah (δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.3 ($n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 5$) berada pada simpul v_1 dan $v_{\frac{n+2}{2}}$. Penjelasan banyaknya busur yang hadir pada simpul v_1 pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.3 sama seperti untuk n ganjil (Algoritma 3.1), sedangkan penjelasan banyaknya busur yang hadir pada simpul $v_{\frac{n+2}{2}}$ sama seperti untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$ (Algoritma 3.2).

Derajat tertinggi (Δ) pada graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.3 berada pada simpul v_n . Tahap penghapusan busur yang hadir pada simpul v_n ada di Langkah 6 dan 7, yaitu menghapus sebanyak

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{ganjil}}^{n-3} 1 + \sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{genap}}^{n-2} 1 = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-2} 1 = n - 2 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 2 \text{ busur,}$$

sehingga ada $n - 1 - \left(\frac{n}{2} - 2\right) = \frac{n}{2} + 1$ busur yang hadir pada simpul v_n , atau dengan kata lain simpul v_n berderajat $\frac{n}{2} + 1$.

Teorema 3.1

Misalkan graf G dengan n simpul ($n \geq 5$) adalah graf yang diperoleh dengan menerapkan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 atau Algoritma 3.3 maka $tvs(G)$ adalah 2

Bukti.

Pembuktian akan diberikan untuk 3 kasus, yaitu untuk n ganjil, $n = 2 \pmod{4}$, dan untuk $n = 0 \pmod{4}$.

Kasus 1. (n ganjil)

Berdasarkan Algoritma 3.1 didapatkan $tvs(G) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 3.1 didapatkan $\delta = 1$ dan $\Delta = \frac{n+1}{2}$, sehingga berdasarkan Teorema 2.2 didapatkan

$$tvs(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)| + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n - 1 + 1}{\frac{n+1}{2} + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\frac{n+3}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n+3} \right\rceil = 2.$$

Karena berlaku $tvs(G) \leq 2$ dan $tvs(G) \geq 2$ maka $tvs(G) = 2$.

Kasus 2. ($n \equiv 2 \pmod{4}$)

Berdasarkan Algoritma 3.2 didapatkan $tvs(G) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 3.1 didapatkan $\delta = 1$ dan $\Delta = \frac{n}{2}$, sehingga berdasarkan Teorema 2.2 didapatkan

$$tvs(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)| + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n - 1 + 1}{\frac{n}{2} + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\frac{n+2}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n+2} \right\rceil = 2.$$

Karena berlaku $tvs(G) \leq 2$ dan $tvs(G) \geq 2$ maka $tvs(G) = 2$.

Kasus 3. ($n \equiv 0 \pmod{4}$)

Berdasarkan Algoritma 3.3 didapatkan $tvs(G) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 3.1 didapatkan $\delta = 1$ dan $\Delta = \frac{n}{2} + 1$, sehingga berdasarkan Teorema 2.2 didapatkan

$$tvs(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)| + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n - 1 + 1}{\frac{n}{2} + 1 + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\frac{n+4}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n+4} \right\rceil = 2.$$

Karena berlaku $tvs(G) \leq 2$ dan $tvs(G) \geq 2$ jadi $tvs(G) = 2$.

Dari ketiga kasus di atas terbukti bahwa tvs dari graf yang dihasilkan dengan menerapkan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 atau Algoritma 3.3 adalah 2. ■

Pembahasan subbab selanjutnya adalah tentang banyak busur pada graf G yang dihasilkan dengan menerapkan algoritma yang ada di subbab 3.1.

3.2 Banyak Busur pada Graf Hasil Konstruksi

Sebagaimana algoritma yang dibagi dalam 3 bagian, yaitu ketika n ganjil, $n \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$, banyak busur pada graf G inipun terbagi menjadi tiga. Banyak busur pada graf G yang didapatkan ini, berdasarkan tahap penghapusan pada algoritma yang diberikan pada Subbab sebelumnya.

Akibat 3.1

Banyak busur pada graf G dengan n simpul ($n \geq 5$) yang diperoleh dengan Algoritma 3.1 adalah $\frac{n^2+7}{8}$.

Bukti.

Banyak busur pada graf lengkap adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Kemudian akan dihitung banyak busur yang dihapus sesuai dengan langkah-langkah pada Algoritma 3.1.

Pada Langkah 3, busur yang dihapus adalah $v_1v_j, j = 2, 3, \dots, n-1$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\sum_{i=2}^{n-1} 1 = (n-1) - 1 = n-2$$

Pada Langkah 4, busur yang dihapus adalah v_iv_j , untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$ dan untuk $j = i+1, i+2, \dots, n-(i-1)$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=i+1}^{n-(i-1)} 1 &= \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} (n-(i-1)-i) \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} (n+1-2i) \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} (n+1) - 2 \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) - 2 \left[\frac{\binom{n-1}{2} \binom{n-1}{2} + 1}{2} - 1 \right] \\
&= (n+1) \left(\frac{n-3}{2} \right) - \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) + 2 \\
&= \frac{n^2 - 2n - 3}{2} - \frac{n^2 - 1}{4} + 2 = \frac{n^2 - 4n + 3}{4}
\end{aligned}$$

Pada Langkah 5, busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, untuk

$i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2} + 1, \dots, n-1$ dan untuk $j = i+1, i+2, \dots, n$ sehingga banyak

busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n-1} (n-i) \\
&= \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n-1} n - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n-1} i \\
&= n \left[n-1 - \left(\frac{n+3}{2} - 1 \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} i \right] \\
&= \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + \frac{\binom{n+1}{2} \binom{n+3}{2}}{2} \\
&= \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n+1)(n+3)}{8} \\
&= \frac{n^2 - 4n + 3}{8}
\end{aligned}$$

Ringkasan banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.1 dapat dilihat pada

Tabel. 3.9. Terlihat dari Tabel 3.9 total busur yang dihapus pada Algoritma 3.1

adalah $\frac{3n^2 - 4n - 7}{8}$, sehingga banyak busur pada graf G adalah banyak busur pada K_n

dikurangi banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.1, yaitu

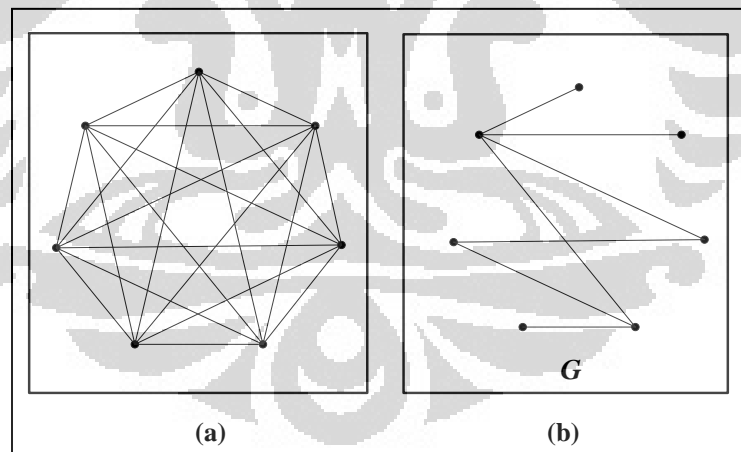
$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{3n^2 - 4n - 7}{8} = \frac{n^2 + 7}{8}.$$

■

Kemudian akan diperlihatkan contoh untuk $n = 7$. Banyak busur pada graf K_7 adalah $\frac{7(7-1)}{2} = 21$ (terlihat pada Gambar 3.16.a). Banyak busur setelah proses penghapusan adalah $\frac{7^2+7}{8} = 7$. Graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.1 terlihat pada Gambar 3.16.b.

Tabel 3.9 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.1

Langkah	Algoritma	Banyak busur yang dihapus
3	Untuk $j = 2, 3, \dots, n - 1$ Hapus $v_1 v_j$	$n - 2$
4	Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$ $j = i + 1, i + 2, \dots, n - (i - 1)$ Hapus $v_i v_j$	$\frac{n^2 - 4n + 3}{4}$
5	Untuk $i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2} + 1, \dots, n - 1$ $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ Hapus $v_i v_j$	$\frac{n^2 - 4n + 3}{8}$
Total busur yang dihapus		$\frac{3n^2 - 4n - 7}{8}$



Gambar 3.16 Graf K_7 (a) Graf G dengan Algoritma 3.1 (b)

Akibat 3.2

Banyak busur pada graf G dengan n simpul ($n \geq 5$) yang diperoleh dengan

Algoritma 3.2 adalah $\frac{2n^2+8}{16}$.

Bukti.

Banyak busur pada graf lengkap adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Kemudian akan dihitung banyak busur yang dihapus sesuai dengan langkah-langkah pada Algoritma 3.2.

Pada Langkah 3, busur yang dihapus adalah v_1v_j ,

$j = 2, 3, \dots, n - 1$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\sum_{i=2}^{n-1} 1 = (n - 1) - 1 = n - 2$$

Pada Langkah 4, busur yang dihapus adalah v_iv_j , untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-2}{2}$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n - (i - 1)$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{j=i+1}^{n-(i-1)} 1 &= \sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} (n - (i - 1) - i) \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} (n + 1 - 2i) \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} (n + 1) - 2 \sum_{i=2}^{\frac{n-2}{2}} i \\ &= (n + 1) \left(\frac{n-2}{2} - 1 \right) - 2 \left[\frac{\left(\frac{n-2}{2} \right) \left(\frac{n}{2} \right)}{2} - 1 \right] \\ &= \frac{(n + 1)(n - 4)}{2} - \frac{n(n - 2)}{4} + 2 \\ &= \frac{n^2 - 3n - 4}{2} - \frac{n^2 - 2n}{4} + 2 \\ &= \frac{n^2 - 4n}{4} \end{aligned}$$

Pada Langkah 5, busur yang dihapus adalah busur $v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}$ sehingga hanya ada 1 busur yang dihapus.

Pada Langkah 6, busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, untuk $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 2$ dan untuk $j = i + 2, i + 3, \dots, n$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{genap}}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{genap}}^{n-2} (n - (i + 1)) \\
 &= \sum_{i=1, i=\text{ganjil}}^{\frac{n}{2}-2} \left(n - 1 - \left(\frac{n}{2} + i \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \left(n - 1 - \left(\frac{n}{2} + 2i - 1 \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \left(\frac{n}{2} - 2i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} i \\
 &= \frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{4} \right) - 2 \frac{\left(\frac{n-2}{4} \right) \left(\frac{n-2}{4} + 1 \right)}{2} \\
 &= \frac{n^2 - 2n}{8} - \frac{n^2 - 4}{16} \\
 &= \frac{n^2 - 4n + 4}{16}
 \end{aligned}$$

Pada Langkah 7, busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, untuk $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n - 1$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{ganjil}}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{ganjil}}^{n-1} (n - i) \\
 &= \sum_{i=2, i=\text{genap}}^{\frac{n}{2}-1} \left(n - \left(\frac{n}{2} + i \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \left(n - \left(\frac{n}{2} + 2i \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \left(\frac{n}{2} - 2i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{4}} i \\
&= \frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{4} \right) - 2 \frac{\left(\frac{n-2}{4} \right) \left(\frac{n-2}{4} + 1 \right)}{2} \\
&= \frac{n^2 - 2n}{8} - \frac{n^2 - 4}{16} \\
&= \frac{n^2 - 4n + 4}{16}
\end{aligned}$$

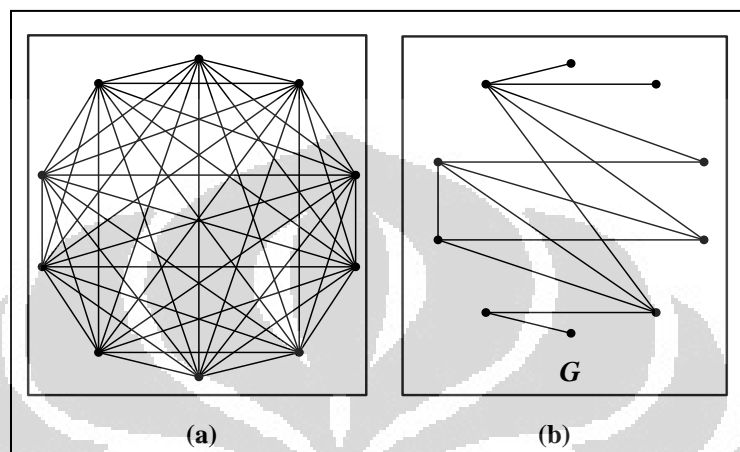
Ringkasan banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.2 dapat dilihat pada Tabel 3.10. Terlihat dari Tabel 3.10 total busur yang dihapus pada Algoritma 3.2 adalah $\frac{6n^2-8n-8}{16}$, sehingga banyak busur pada graf G adalah banyak busur pada K_n dikurangi banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.2, yaitu

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{6n^2-8n-8}{16} = \frac{2n^2+8}{16}.$$

Tabel 3.10 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.2

Langkah	Algoritma	Banyak busur yang dihapus
3	Untuk $j = 2, 3, \dots, n-1$ Hapus v_1v_j	$n-2$
4	Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-2}{2}$ $j = i+1, i+2, \dots, n-(i-1)$ Hapus v_iv_j	$\frac{n^2-4n}{4}$
5	Hapus $v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}$	1
6	Untuk $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+3, \dots, n-2$ $j = i+2, i+3, \dots, n$ Hapus v_iv_j	$\frac{n^2-4n+4}{16}$
7	Untuk $i = \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+4, \dots, n-1$ $j = i+1, i+2, \dots, n$ Hapus v_iv_j	$\frac{n^2-4n+4}{16}$
Total busur yang dihapus		$\frac{6n^2-8n-8}{16}$

Kemudian akan diperlihatkan contoh untuk $n = 10$. Banyak busur pada graf K_{10} adalah $\frac{10(10-1)}{2} = 45$ (terlihat pada Gambar 3.17.a). Banyak busur setelah proses penghapusan adalah $\frac{200+8}{16} = 13$. Graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.2 terlihat pada Gambar 3.17.b.



Gambar 3.17 Graf K_{10} (a) Graf G dengan Algoritma 3.2 (b)

Akibat 3.3

Banyak busur pada graf G dengan n simpul ($n \geq 5$) yang diperoleh dengan Algoritma 3.3 adalah $\frac{2n^2+16}{16}$.

Bukti.

Banyak busur pada graf lengkap adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Kemudian akan dihitung banyak busur yang dihapus sesuai dengan langkah-langkah pada Algoritma 3.3.

Banyak busur yang dihapus di Langkah 3, 4, dan 5 pada Algoritma 3.3 sama dengan Langkah 3, 4, dan 5 pada Algoritma 3.2.

Pada Langkah 6, busur yang dihapus adalah busur $v_i v_j$, untuk $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n - 3$ dan untuk $j = i + 2, i + 3, \dots, n$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{ganjil}}^{n-3} \sum_{j=i+2}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n}{2}+1, i=\text{ganjil}}^{n-3} (n - (i + 1)) \\
&= \sum_{i=1, i=\text{ganjil}}^{\frac{n-3}{2}} \left(n - 1 - \left(\frac{n}{2} + i \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \left(n - 1 - \left(\frac{n}{2} + 2i - 1 \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \left(\frac{n}{2} - 2i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} i \\
&= \frac{n}{2} \left(\frac{n-4}{4} \right) - 2 \frac{\left(\frac{n-4}{4} \right) \left(\frac{n-4}{4} + 1 \right)}{2} \\
&= \frac{n^2 - 4n}{8} - \frac{n^2 - 4n}{16} \\
&= \frac{n^2 - 4n}{16}
\end{aligned}$$

Pada Langkah 7, busur yang dihapus adalah busur $v_i v_j$, untuk $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n - 2$ dan untuk $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ sehingga banyak busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{genap}}^{n-2} \sum_{j=i+1}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n}{2}+2, i=\text{genap}}^{n-2} (n - i) \\
&= \sum_{i=2, i=\text{genap}}^{\frac{n-2}{2}} \left(n - \left(\frac{n}{2} + i \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \left(n - \left(\frac{n}{2} + 2i \right) \right)
\end{aligned}$$

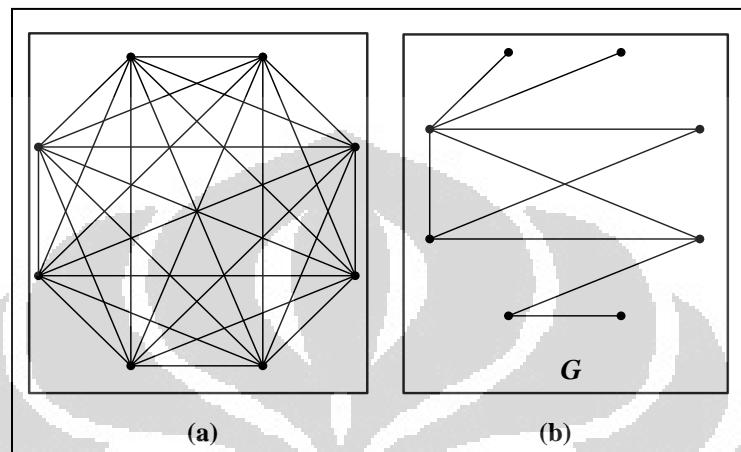
$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \left(\frac{n}{2} - 2i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-4}{4}} i \\
&= \frac{n}{2} \left(\frac{n-4}{4} \right) - 2 \frac{\left(\frac{n-4}{4} \right) \left(\frac{n}{4} \right)}{2} \\
&= \frac{n^2 - 4n}{8} - \frac{n^2 - 4n}{16} \\
&= \frac{n^2 - 4n}{16}
\end{aligned}$$

Ringkasan banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.3 dapat dilihat pada Tabel 3.11. Terlihat dari Tabel 3.11 total busur yang dihapus pada Algoritma 3.2 adalah $\frac{6n^2-8n-16}{16}$, sehingga banyak busur pada graf G adalah banyak busur pada K_n dikurangi banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.3, yaitu $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{6n^2-8n-16}{16} = \frac{2n^2+16}{16}$. ■

Tabel 3.11 Banyak busur yang dihapus pada Algoritma 3.3

Langkah	Algoritma	banyak busur yang dihapus
3	Untuk $j = 2, 3, \dots, n-1$ Hapus $v_1 v_j$	$n-2$
4	Untuk $i = 2, 3, \dots, \frac{n-2}{2}$ $j = i+1, i+2, \dots, n-(i-1)$ Hapus $v_i v_j$	$\frac{n^2-4n}{4}$
5	Hapus $v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}$	1
6	Untuk $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3, \dots, n-3$ $j = i+2, i+3, \dots, n$ Hapus $v_i v_j$	$\frac{n^2-4n}{16}$
7	Untuk $i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \dots, n-2$ $j = i+1, i+2, \dots, n$ Hapus $v_i v_j$	$\frac{n^2-4n}{16}$
Total busur yang dihapus		$\frac{6n^2-8n-16}{16}$

Kemudian akan diperlihatkan contoh untuk $n = 8$. Banyak busur pada graf K_8 adalah $\frac{8(8-1)}{2} = 28$ (terlihat pada Gambar 3.18.a). Banyak busur setelah proses penghapusan pada Algoritma 3.3 adalah $\frac{128+16}{16} = 9$. Graf G yang diperoleh dari Algoritma 3.3 terlihat pada Gambar 3.18.b.



Gambar 3.18 Graf K_8 (a) Graf G dengan Algoritma 3.3 (b)

Pada Bab 3 telah dikonstruksi suatu graf G dengan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 atau Algoritma 3.3 dengan banyak busur pada graf G minimal dan mempunyai $tvs(G) = 2$. Kesimpulan menyeluruh dari skripsi ini dirangkum pada Bab 4.

BAB 4

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, telah dibuktikan terdapat graf terhubung G dengan $tv_s(G) = 2$ yang memiliki banyak busur lebih sedikit dari graf lengkap, K_n . Graf ini dapat dicari dengan menggunakan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 atau Algoritma 3.3, bergantung pada nilai n ($n \geq 5$). Ide dari algoritma ini adalah mengurangi busur-busur dari K_n dengan tetap mempertahankan $tv_s(K_n) = 2$ di setiap langkah pada algoritma, sehingga mendapatkan suatu graf terhubung G dengan n simpul tetapi banyak busur lebih sedikit dari busur graf lengkap, K_n .

Derajat terendah dan tertinggi pada graf G yang terbentuk dari algoritma juga dapat ditentukan. Berikut merupakan derajat tertinggi dan terendah pada graf G .

Algoritma	δ	Δ
3.1 (n ganjil)	1	$\frac{n+1}{2}$
3.2 ($n \equiv 2 \pmod{4}$)	1	$\frac{n}{2}$
3.3 ($n \equiv 0 \pmod{4}$)	1	$\frac{n}{2} + 1$

Banyak pada graf G , yang terbentuk dari algoritma, dengan n simpul ($n \geq 5$) berdasarkan langkah-langkah penghapusan pada algoritma adalah sebagai berikut.

Algoritma	Banyak Busur $ E_n $
3.1 (n ganjil)	$\frac{n^2 + 7}{8}$
3.2 ($n \equiv 2 \pmod{4}$)	$\frac{2n^2 + 8}{16}$
3.3 ($n \equiv 0 \pmod{4}$)	$\frac{2n^2 + 16}{16}$

DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., and Ryan, J. 2007. On irregular total labellings. *Discrete Math.* 307(1-12). 1378-1388.
- Gallian, J. A. 2010. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 17, #DS6.
- Hartsfield, N, & Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction.* Academic Press.
- Nuridin. 2010. *Nilai Total Ketakteraturan dari Suatu Graf.* Disertasi. Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung.
- Rosen, K. H. 2003. *Discrete mathematics and its application* (3ed.). New York: McGraw-Hill.
- West, D. B. 2002. *Introduction to Graph Theory.* New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.