UNIVERSITAS INDONESIA

METODE STAIRCASE UNTUK MENDAPATKAN BENTUK KANONIK JORDAN DENGAN KARAKTERISTIK WEYR

SKRIPSI

NURRY WIDYA HESTY
0397010362

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Program Studi Matematika
Depok
Februari 2003

UNIVERSITAS INDONESIA

METODE STAIRCASE UNTUK MENDAPATKAN BENTUK KANONIK JORDAN DENGAN KARAKTERISTIK WEYR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

NURRY WIDYA HESTY

0397010362

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Program Studi Matematika

Depok

Februari 2003

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua pihak yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan benar.

Nama	: Nurry Widya Hesty
NPM	: 0397010362
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 10 Februari 2003

SKRIPSI : METODE STAIRCASE UNTUK MENDAPATKAN BENTUK KANONIK JORDAN DENGAN KARAKTERISTIK WEYR

NAMA : NURRY WIDYA HESTY

NPM : 0397010362

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, MARET 2003

DRA. SRI HARINI M. KOM	DRA. SUARSIH UTAMA
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal Lulus Ujian Sidang Sarjana, 10 Februari 2003

Penguji 1 : Dra. Sri Harini M. Kom

Penguji 2 : Bevina D. Handari, PhD

Penguji 3 : Dra. Saskya Mary, M.Si

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Dra. Sri Harini, M.Kom dan Dra. Suarsih Utama, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;

(3) orang tua dan keluarga saya yang telah memberikan bantuan dukungan material dan moral; dan

(4) sahabat yang telah banyak membantu saya dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 2003

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Nurry Widya Hesty
NPM	: 0397010362
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalti Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Metode Staircase Untuk Mendapatkan Bentuk Kanonik Jordan Dengan Karakteristik Weyr

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 10 Februari 2003
Yang menyatakan

(Nurry Widya Hesty)

ABSTRAK

Nurry Widya Hesty (0397010362)

METODE STAIRCASE UNTUK MENDAPATKAN BENTUK KANONIK JORDAN DENGAN KARAKTERISTIK WEYR

iii + 47 halaman (2003)

Bibl. 5 (1989-1999)

Tugas akhir ini membahas suatu metode untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan, yang bernama metode *'staircase'* . Ide dasar metode ini yaiu menggunakan transformasi uniter untuk mentransformasi suatu matriks $n \times n$ ke dalam bentuk blok segitiga atas, atau bentuk *'staircase'* , kemudian menggunakan karakteristik Weyr untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan. Hasil yang didapat dengan menggunakan metode ini dibandingkan dengan hasil yang didapat dengan menggunakan program untuk mendapatkan kanonik Jordan yang sudah ada di Matlab. Untuk membuktikan kestabilan kedua metode, entri pada matrks input diberi gangguan atau perubahan. Hasil perbandingan kedua metode menunjukkan bahwa bentuk kanonik Jordan yang didapat melalui metode karakteristik Weyr lebih stabil dibadingkan dengan bentuk kanonk Jordan yang didapat melalui program untuk mendapatkan kanonik Jordan di Matlab.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Setiap matriks *n x n* yang mempunyai n buah nilai eigen real yang berbeda similar dengan matriks diagonal. Beberapa matriks berukuran *n x n* dengan nilai eigen yang berbeda kurang dari n buah tidak dapat didiagonalkan. Jika suatu matriks berukuran *n x n* dengan nilai eigen yang berbeda kurang dari n buah, maka banyaknya vektor eigen yang saling bebas linier dari matriks itu kurang dari n buah. Untuk mendapatkan vektor eigen yang bebas linier agar jumlahnya n buah diperlukan generalisasi vektor eigen.

Bentuk similar lain yang mendekati bentuk diagonal adalah bentuk kanonik Jordan. Pada bentuk kanonik Jordan, nilai eigen berada pada diagonalnya, tetapi beberapa elemen pada super diagonalnya adalah 1 atau 0.

Bentuk kanonik Jordan dari suatu matriks yang didapatkan secara numerik biasanya kurang stabil. Suatu perubahan kecil pada entri matriks awal akan merubah secara drastis bentuk kanonik Jordan. Ketidakstabilan tersebut bisa disebabkan oleh penghitungan invers dari matriks yang hampir singular, atau menerapkan relasi kesimilaritasan terhadap matriks yang hampir singular. Untuk menghindari ketidakstabilan tersebut lebih baik digunakan algoritma yang hanya melibatkan transformasi uniter.

Ada suatu algoritma untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan dengan lebih stabil dibuat oleh Vera Kublanovskaya (1966), yaitu menggunakan transformasi uniter untuk mentransformasi suatu matriks ke dalam bentuk blok segitiga atas, atau bentuk '*staircase*'. Algoritma ini biasanya digambarkan dalam bentuk dekomposisi Schur. Ukuran blok-blok dalam matriks blok segitiga tersebut akan berkorespondensi dengan karakteristik Weyr, Dual partisi dari karekteristik Weyr akan menghasilkan karakteristik Segre. Karakteristik segre ini merupakan ukuran blok-blok matriks pada bentuk kanonik Joran.

1.2. TUJUAN

Ada beberapa tujuan yang hendak dicapai dalam penulisan tugas akhir ini. Tujuan tersebut adalah :

1. Membahas teorema-teorema yang mendasari metode '*staircase*' untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan.
2. Melihat kegunaan karakteristik Weyr yang mendasari metode '*staircase*' untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan.

3. Membandingkan metode ‘*staircase’* dengan metode yang umum dipakai yaitu program untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan yang sudah ada di Matlab.

1.3. BATASAN MASALAH

Yang akan dibahas pada penulisan ini adalah teori dasar Weyr dan bukti-bukti yang memotivasi metode ‘*staircase*’ dalam algoritma numerik.

1.4. METODE PENULISAN

Studi yang digunakan untuk mempelajari karakteristik Weyr ini merupakan studi literatur berdasarkan penelitian terdahulu.

1.5. SISTEMATIKA PENULISAN

Tugas akhir ini disusun dalam 5 bab. Adapun isi dari masing-masing bab secara garis besarnya adalah sebagai berikut :

Bab I Berisi latar belakang, tujuan penulisan, batasan masalah, metode penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Berisi landasan teori yang menerangkan pengertian dari similaritas, similaritas uniter, bentuk kanonik Jordan, karakteristik Weyr, dan beberapa contoh yang berkaitan dengan hal tersebut.

Bab III Berisi pembahasan teori dasar Weyr dan bukti-bukti yang memotivasi metode '*staircase*' untuk mentransforamsi matriks kebentuk kanonik Jordan.

Bab IV Berisi perbandingan antara metode metode '*staircase*' dengan metode yang umum dipakai

Bab V Berisi kesimpulan dari perbandingan

BAB II

DASAR TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa pengertian dasar yang digunakan dalam pembahasan bab selanjutnya. Beberapa pengertian yang akan dibahas yaitu blok-blok matriks, generalisasi vektor eigen , similaritas, bentuk kanonik Jordan, matriks nilpotent, karakteristik Weyr, dan beberapa contoh yang berkaitan dengan hal tersebut.

2.1. Blok-blok Matriks

Definisi 2.1.1 (Blok-blok matriks)

A adalah sebuah matriks *n x n*. Baris dari *A* dapat dipartisi kedalam t himpunan yang berisi n_1 baris pertama, n_2 baris kedua, dan seterusnya, sampai n_t baris terakhir, dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$.

Jika kolom dari *A* juga dipartisi dengan cara yang sama, maka matriks *A* telah dipecah menjadi t^2 blok.

A_{ij} menotasikan blok berukuran $n_i \times n_j$, dan A_i merupakan matriks blok diagonal yang ke-i (A_{ii}) berukuran $n_i \times n_i$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_2 & A_{23} & \cdots & A_{2t} \\ A_{31} & A_{32} & A_3 & \cdots & A_{3t} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t1} & A_{t3} & \cdots & A_t \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.2 (Matriks blok segitiga atas / *staircase form*)

A adalah matriks *nxn*. Matriks *A* dikatakan matriks blok segitiga atas jika semua blok dibawah blok diagonal adalah nol.

Matriks A dinyatakan sebagai $\mathcal{T}(A_1, A_2, ...A_t)$, atau dapat ditulis sebagai *A* = $\mathcal{T}(A_1, A_2, ...A_t)$,dimana A_i menyatakan blok diagonal yang ke-i (A_{ii}).

$$A = \mathcal{T}(A_1, A_2, ...A_t) = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & A_{23} & \cdots & A_{2t} \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & A_{3t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_t \end{pmatrix}$$

Matriks *B* adalah matriks dengan ukuran yang sama dengan matriks *A*. Jika A_i dan B_i mempunyai ukuran yang sama untuk setiap i, maka perkalian *A* = $\mathcal{T}(A_1, A_2, ...A_t)$,dengan *B* = $\mathcal{T}(B_1, B_2, ...B_t)$,mempunyai bentuk

$$A\,B = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & A_{23} & \cdots & A_{2t} \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & A_{3t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1t} \\ 0 & B_2 & B_{23} & \cdots & B_{2t} \\ 0 & 0 & B_3 & \cdots & B_{3t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1t} \\ 0 & A_2B_2 & C_{23} & \cdots & C_{2t} \\ 0 & 0 & A_3B_3 & \cdots & C_{3t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_tB_t \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{T}(A_1B_1, A_2B_2, ...A_tB_t)$$

Definisi 2.1.3 (Matriks blok diagonal)

Jika semua blok selain blok diagonal adalah nol ($Aij = 0, untuk\ i \neq j$), maka *A* dikatakan sebagai blok diagonal, atau ditulis *A* = $\mathcal{D}\left(A_1, A_2, \ldots, A_t\right)$.

$$A = \mathcal{D}\left(A_1, A_2, \ldots, A_t\right) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_t \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.4 (Blok matriks identitas)

I_k menotasikan matriks identitas berukuran *k x k*. Untuk $r > s$, notasi $I_{r,s}$ berarti matriks dengan baris *r* dan kolom *k,* dimana *s* bar is pertama adalah I_s dan $r-s$ baris sisanya berelemen nol.

Contoh 2.1.5:

$$I_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.6 (Rank kolom penuh)

Suatu matriks dikatakan matriks dengan rank kolom penuh jika kolom-kolomnya saling bebas linier.

Matriks $I_{5,3}$ adalah contoh matriks dengan rank kolom penuh.

2.2. *Generalized Eigen Vektor*

Definisi 2.2.1 (*Generalized eigen vektor*)

Suatu vektor v $\in C^n$ dikatakan *Generalized eigen vektor* untuk matriks *A (n x n)* dengan nilai eigen λ_i jika

$$(A - \lambda_i I)^k v = 0$$

untuk suatu integer positive k.

Definisi 2.2.2 (Multiplisitas Aljabar dan Multiplisitas geometri)

Multiplisitas Aljabar dari λ_i untuk *A* adalah banyaknya λ_i sebagai akar yang sama dari persamaan karakteristik matriks *A.*

Multiplisitas geometri adalah banyaknya vektor eigen yang saling bebas linier dari suatu nilai eigen λ_i.

Misalkan *A* matriks *n x n*, maka untuk setiap nilai eigen λ_i dari *A* terdapat 2 kemungkinan :

1. Multiplisitas Aljabar = Multiplisitas geometri

   Jika hal ini terjadi, maka matris *A* dapat didiagonalkan.

   Teorema (Kriteria untuk diagonalisasi) [4] :

   Suatu matriks *A* (*n x n)* dapat didiagonalkan jika dan hanya jika multiplisitas aljabar dari setiap nilai eigennya sama dengan multiplisitas geometri.

2. Multiplisitas Aljabar ≠ Multiplisitas geometri

   Jika hal ini terjadi, maka matris *A* tidak dapat didiagonalkan. Bentuk similar yang mendekati bentuk diagonal adalah bentuk kanonik Jordan.

2.3. Similaritas

Definisi 2.3.1 (Similaritas)

Jika *A* dan *B* adalah dua matriks berukuran *n x n*, maka matriks *A* dikatakan similar dengan *B* jika terdapat suatu matriks nonsingular *P* sedemikian sehingga

$$B = P^{-1} AP$$

1. Jika *P* adalah matriks uniter ($P^{-1}=P^*$), maka dikatakan *A* similar uniter dengan *B*
2. Jika *B* berbentuk matriks segitiga atas, maka dikatakan *A* similar dengan matriks segitiga atas *B*
3. Jika *B* berbentuk kanonik Jordan, maka dikatakan *A* similar dengan kanonik Jordan *B*

Contoh 2.3.2 (Contoh Similar Uniter) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -i \\ -4 & -2 & 4i \\ i & -4i & 1 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen(*A*) = {0,6,-6}

Vektor eigen : $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}$

Unit norm vektor eigen : $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

A similar uniter dengan *B* karena *P* matriks uniter ($P^{-1} = P^*$)

Definisi 2.3.3 (Blok Jordan)

Blok Jordan $J_n(\lambda)$ adalah suatu matriks segitiga atas n x n yang mempunyai nilai eigen λ muncul n kali pada diagonal utama, angka 1 muncul n–1 kali pada superdiagonal, sedangkan entri-entri lainnya nol.

Maka $J_n(\lambda)$ disebut blok Jordan jika dan hanya jika :

Entri $_{i,i}$ $J_n(\lambda) = \lambda$,

Entri $_{i,i+1}$ $J_n(\lambda)$ = 1

Entri $_{i,j}$ $J_n(\lambda)$ = 0 , jika j $\neq$ i, i+1

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.4 (Bentuk kanonik Jordan)

Suatu matriks *J (n x n)* adalah bentuk kanonik Jordan jika berisi blok-blok Jordan, ditempatkan sepanjang diagonal, dengan entri-entri lainnya adalah nol

$$J = \mathcal{D}\left\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), J_{n_3}(\lambda_3), \ldots, J_{n_t}(\lambda_t)\right\}$$

$$. = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_3}(\lambda_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

Contoh 2.3.5 (Similar Dengan Kanonik Jordan) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen :

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$

Generalisasi vektor eigen :

$$A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$, rank $(A-2I) = 4$, null $(A-2I) = 1$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$, rank $(A-2I)^2 = 3$, null $(A-2I)^2 = 2$

$$(A-2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$, rank $(A-2I)^3 = 3$, null $(A-2I)^3 = 2$

karena rank $(A-2I)^2$ = rank $(A-2I)^3$, maka *generalized eigen vector* dicari dari $(A-2I)^2$.

$(A-2I)^2 b_2 = 0$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = (A-2I)b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda_3 I = A+I = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ rank } (A+I) = 2, \text{ null } (A+I) = 3$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 30 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ rank } (A+I)^2 = 2, \text{ null } (A+I)^2 = 3$$

karena rank $(A+I)^2$ = rank $(A+I)$, maka eigen vektor dicari dari $(A-2I)$, yaitu hanya mengambil basis dari nullspace (A+I).

$(A + I)b = 0$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matriks Q berisi b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka matriks A dikatakan similar dengan J, dengan J adalah bentuk kanonik Jordan.

2.4. Matriks Nilpotent

Definisi 2.4.1 (Matriks nilpotent)

Suatu matriks $A \in F^n$ dikatakan matriks nilpotent jika $A^n = 0$ untuk integer positif n, dan dikatakan berindeks k jika $A^k = 0$ tetapi $A^{k-1} \neq 0$.

Contoh 2.4.2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A adalah matriks nilpotent dengan indeks k = 3, karena $A^3 = 0$

Definisi 2.4.3 (Partisi)

Suatu partisi dari integer positif n adalah barisan bilangan integer positif tidak naik π yang jumlahnya sama dengan n, yaitu

$$\pi = (n_1, n_2, \ldots n_m)$$

dimana

$$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m \geq 1$$

dan

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$$

Partisi $\pi = (n_1, n_2, \ldots n_m)$ dapat digunakan untuk membuat diagram bintang yang disebut diagram Ferrers. Diagram Ferrers ini mengandung n bintang yang disusun dalam m baris dengan baris ke-k mempuyai n_k bintang. Bintang-bintang tersebut disusun rata kiri sehingga kolom ke-j rata / lurus. Dual partisi π^* dari π adalah konjugat partisi, didapat dengan mentranspose diagram Ferrers ini.

Contoh 2.4.4:

π = (5,5,4,3,3,3,1)

maka diagram Ferrers adalah :

* * * * *

* * * * *

* * * *

* * *

* * *

* * *

*

dan dual partisinya adalah

π^* = (7,6,6,3,2).

Dual dari dual partisi adalah partisi awal

$\pi^{**} = \pi$

Definisi 2.4.5 (Karakteristik Weyr)

Misalkan *A* adalah sebuah matriks nilpotent dan k adalah indeks nilpotent dari *A*.

$\omega_i(A) = null(A^i) - null(A^{i-1})$. Untuk i = 1,2,…,k, *null* (*A*) adalah nulitas dari *A*

Barisan $(\omega_1(A), \omega_2(A), ..., \omega_p(A))$ disebut karakteristik Weyr dari *A*, dan dinotasikan dengan $\omega(A)$.

Definisi 2.4.6 (Karakteristik Segre)

Karateristik Segre dari matris nilpotent adalah dual partisi dari karakteristik Weyr

$\sigma = \omega^*$

Contoh 2.4.7 :

Dengan matriks yang sama seperti pada contoh 2.4.2.

A adalah matriks nilpotent dengan indeks k = 3.

$i = 1 \Rightarrow \omega_1(A) = \text{null}(A^1) - \text{null}(A^0) = 1-0=1$

$i = 2 \Rightarrow \omega_2(A) = \text{null}(A^2) - \text{null}(A^1) = 2-1=1$

$i = 3 \Rightarrow \omega_3(A) = \text{null}(A^3) - \text{null}(A^2) = 3-2=1$

karakteristik Weyr untuk matriks *A* : $\omega(A)=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(1,1,1)$

karekteristik Segre untuk matriks *A* : $\sigma(A) = (3)$

2.4.8. Hubungan karakteristik Weyr, karakteristik Segre dan bentuk kanonik Jordan

A adalah matriks nilpotent dengan karakteristik Weyr $\omega(A) = (\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_k)$ dan karakteristik Segre $\sigma(A)=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_t)$. Maka bentuk kanonik Jordan dari *A* adalah $J = \mathcal{D}(S_{\sigma 1},S_{\sigma 2},\ldots,S_{\sigma t})$.

$S_{\sigma i}$ adalah matriks berukuran $\sigma_l \times \sigma_l$ dengan elemen 1 pada superdiagonal dan elemen-elemen lainnya adalah 0.

$$S_{\sigma i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 2.4.9 :

Jika $\omega(A) = (4,3,3,2,2,2,1)$, maka karakteristik Segre dari A adalah (7,6,3,1).

Dan bentuk Jordan $J = \mathcal{D}(S_7, S_6, S_3, S_1)$

BAB III

METODE STAIRCASE UNTUK MENDAPATKAN BENTUK KANONIK JORDAN DENGAN MENGGUNAKAN KARAKTERISTIK WEYR

Masalah ini akan dibagi dalam dua bagian, yaitu untuk kasus matriks nilpotent dan untuk kasus bukan matriks nilpotent.

3.1. KARAKTERISTIK WEYR UNTUK MATRIKS NILPOTENT

Misalkan *A* adalah matriks nilpotent berukuran *n x n*. Bilangan integer positif terkecil k sedemikian sehingga $A^k = 0$ disebut indeks dari *A*.

$\omega_i = null(A^i) - null(A^{i-1})$, untuk i = 1,2,…,k,

Barisan bilangan positif $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ disebut karakteristik Weyr dari *A*, ditulis dengan $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\kappa)$. Akan dibuktikan nanti bahwa $\omega(A)$ merupakan barisan yang tidak naik.

Pertama akan dibahas bagaimana cara menghitung ω(A) melalui proses rekursif yang menghindari penghitungan pangkat *A*. Jika k = 1, maka *A* adalah matriks nol. Dengan demikian dapat diasumsikan k ≥ 2. Karena ω_1 = null (*A*), maka matriks *A* dapat diasumsikan berbentuk blok yang kolom pertama ω_1 nya adalah nol, sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

dengan A_{12} berukuran ω_1 x $(n-\omega_1)$ dan A_2 bujur sangkar berukuran $n-\omega_1$.

Karena rank (A) = $n-\omega_1$, maka matriks

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix}$$

mempunyai kolom-kolom yang saling bebas linear.

Lemma 3.1.1

Misalkan A adalah matriks berukuran n x n yang berbentuk $\mathcal{T}\ (0_{\omega_1}, A_2)$, dimana ω_1 = null(A). Partisi X dalam F^n seperti

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

dengan $X_1 \in F^{\omega_1}$ dan $X_2 \in F^{n-\omega_1}$. Maka untuk setiap positif integer r, didapat $A^r X = 0$ jika dan hanya jika $A_2^{r-1} X_2 = 0$.

Bukti :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$A^r = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} A_2^{r-1} \\ 0 & A_2^{r} \end{pmatrix}$$

($\Rightarrow$)

Misalkan $A^r X = 0$, akan dibuktikan $A_2^{r-1} X_2$ =0

Karena

$$A^r X = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}A_2^{\,r-1} \\ 0 & A_2^{\,r} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}A_2^{\,r-1} \\ 0 & A_2^{\,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} \left(A_2^{r-1} X_2\right) = 0$$

dan karena rank (A) = n – ω_1, maka matriks $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix}$

mempunyai kolom-kolom yang saling bebas linier, sehingga

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} Y = 0$$

mengakibatkan $Y = A_2^{r-1} X_2 = 0$

($\Leftarrow$)

misalkan $Y = A_2^{r-1} X_2 = 0$ akan dibuktikan $A^r X = 0$

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} \left(A_2^{r-1} X_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}A_2^{r-1} \\ 0 & A_2^{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A^r X = 0$$

(Terbukti)

Lemma 3.1.2

Misalkan A = $\mathcal{T}\ (0_{\omega_1}, A_2)$ adalah matriks n x n, tidak nol, matriks nilpotent dengan karakteristik Weyr $\omega(A)$ = $(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\kappa)$. Maka $\omega(A_2)$ = $(\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\kappa)$, dan $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \ldots \geq \omega_k$.

Bukti:

Lemma 3.1.1 menjelaskan bahwa $null(A^i) = \omega_1 + null(A_2^{i-1})$

(bukti dilampiran 1). Jadi untuk setiap i ≥ 2 didapat

$null(A_2^{i-1}) - null(A_2^{i-2}) = null(A^i) - null(A^{i-1}) = \omega_i$. Sehingga□$\omega(A_2)$ =

$(\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\kappa)$.

Untuk membuktikan $\omega_{i+1} \le \omega_i$ digunakan induksi pada k, dimulai dengan k = 2.

- Untuk k = 2

  rank (A) ≤ rank (A_{12}) + rank (A_2)

  n–ω_1 ≤ rank (A_{12}) + (n–ω_1)–null(A_2)

  null(A_2) ≤ rank (A_{12})

  karena ω_2 = null (A_2) dan rank (A_{12}) ≤ ω_1, maka

  $\omega_2 \le \omega_1$

- Hipotesis Induksi : asumsikan benar untuk k = n

  rank (A_{n-1}) ≤ rank ($A_{n-1,n}$) + rank (A_n)

  n–ω_1 –ω_2–…–ω_{n-1} ≤ rank ($A_{n-1,n}$)+ (n–ω_1 –ω_2–…–ω_{n-1})–null(A_n)

  null(A_n) ≤ rank ($A_{n-1,n}$)

  karena ω_n = null (A_n) dan rank ($A_{n-1,n}$) ≤ ω_{n-1}, maka

  $\omega_n \le \omega_{n-1}$

- Akan dibuktikan untuk k = n+1

  rank (A_n) ≤ rank ($A_{n,n+1}$) + rank (A_{n+1})

$n - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_{n-1} - \text{null}(A_n) \leq \text{rank}(A_{n,n+1}) + n - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_{n-1} - \text{null}(A_n)$

$-\text{null}(A_{n+1})$

$\text{null}(A_{n+1}) \leq \text{rank}(A_{n,n+1})$

karena $\omega_n = \text{null}(A_n)$ dan $\text{rank}(A_{n-1,n}) \leq \omega_{n-1}$, maka

$\omega_{n+1} \leq \omega_n$

(Terbukti)

Lemma 3.1.2 menunjukkan proses rekursif untuk menghitung karakteristik Weyr dari sebuah matriks nilpotent. Kita telah mereduksi masalah untuk mencari karakteristik Weyr dari matriks yang berukuran lebih kecil yaitu A_2. Dengan mengaplikasikan lemma tersebut berulangkali akan mengubah matriks A manjadi bentuk blok segitiga dimana blok diagonalnya adalah blok nol berukuran $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Kita gunakan Lemma 3.1.2 untuk mendapatkan bentuk blok segitiga $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \tilde{A})$ dan menunjukkan bahwa blok-blok super diagonalnya mempunya rank kolom penuh.

Lemma 3.1.3

Misalkan T adalah operator linear nilpotent pada ruang vektor V dengan $\omega(T) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$. Maka T dapat direpresentasikan dengan suatu matriks $A = \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \tilde{A})$, dimana $\text{rank}(A_{12}) = \omega_2$ dan A_{12} mempunyai rank kolom penuh.

Bukti :

Karena ω_1 = null (T), T dapat direpresantasikan dengan matriks B, yaitu

$$B = \mathcal{T}\,(0_{\omega 1}, B_2) = \begin{pmatrix} 0_{\omega_1} & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.2 didapat ω_2 = null (B_2) sehingga terdapat matriks nonsingular Q berukuran $(n-\omega_1)$ x $(n-\omega_1)$ sedemikian sehingga

$$Q^{-1}B_2Q = \mathcal{T}\,(0_{\omega_2}, \tilde{A}) = \begin{pmatrix} 0_{\omega_2} & A_{23} \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

Definisikan $P = \mathcal{D}\,(\mathrm{I}_{\omega_1}, Q)$, maka

$$A = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} I_{\omega_1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{\omega_1} & B_{12} \\ 0 & B2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{\omega_1} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} o_{\omega_1} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0_{\omega_2} & A_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{T}\,(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \tilde{A})$$

sehingga $A = \mathcal{T}\,(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \tilde{A})$ adalah matriks representasi untuk T

Karena A mempunyai rank $n-\omega_1$, maka $n-\omega_1$ kolom terakhir dari A bebas linier, dengan demikian blok A_{12} (berukuran ω_1 x ω_2) mempunyai rank kolom penuh.

(Terbukti)

Jika k = 2, lemma 3.1.3 menerangkan bahwa *T* dapat direpresentasikan dengan matriks blok segitiga $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2})$, dimana blok matriks A_{12} $(\omega_1 \times \omega_2)$mempunyai kolom rank penuh, yaitu rank $(A_{12}) = \omega_2$.

Teorema 3.1.4

Misalkan *T* adalah operator linier nilpotent di ruang vektor V. Maka $\omega(T) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ jika dan hanya jika *T* dapat direpresentasikan oleh matriks blok segitiga $A = \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$ dimana setiap blok superdiagonal $A_{i,i+1}$ mempunyai rank kolom penuh, yaitu rank $(A_{i,i+1}) = \omega_{i+1}$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

$\omega(T) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$. akan dibuktikan *T* dapat direpresentasikan oleh matriks blok segitiga $A = \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$ dimana setiap blok superdiagonal $A_{i,i+1}$ mempunyai rank kolom penuh, yaitu rank $(A_{i,i+1}) = \omega_{i+1}$.

Kita gunakan induksi pada k.

- Untuk k = 1

  $\omega(T) = (\omega_1) = \text{null}(T)$, maka *T* adalah matriks nol.

- Untuk k = 2, maka lemma 3 memberikan hasil.
- Hipotesis Induksi : asumsikan benar untuk k = n

$\omega(T) = (\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$. maka T dapat direpresentasikan oleh matriks blok segitiga $A = \mathcal{T}(0_{\omega_2}, 0_{\omega_3}, \ldots, 0_{\omega_n})$ dimana setiap blok superdiagonal $A_{i,i+1}$ mempunyai rank kolom penuh, yaitu rank $(A_{i,i+1}) = \omega_{i+1}$.

- Akan dibuktikan benar untuk k = n+1

  Dengan menggunakan lemma 3.1.3 bahwa T dapat direpresentasikan oleh matriks $B = \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \tilde{B})$ dan B_{12} mempunyai rank kolom penuh. Misalkan B_2 menotasikan submatriks persegi pada $(n-\omega_1)$ baris dan kolom terakhir, maka B_2 adalah $\mathcal{T}(0_{\omega_2}, \tilde{B})$ Lemma 3.1.2 mengatakan bahwa $\omega(B_2) = (\omega_2, \omega_3, \ldots \omega_\kappa)$. Menurut hipotesis induksi B_2 dapat direpresentasikan oleh matriks blok segitiga $\mathcal{T}, (0_{\omega_2}, 0_{\omega_3}, \ldots, 0_{\omega_k})$ artinya terdapat matriks nonsingular Q berukuran $n-\omega_1$, sedemikian sehingga $Q^{-1}B_2Q = \mathcal{T}(0_{\omega_2}, 0_{\omega_3}, \ldots, 0_{\omega_k})$ dengan setiap blok superdiagonal mempunyai rank kolom penuh.

  Bentuk matriks $P = \mathcal{D}(\mathrm{I}_{\omega_1}, Q)$, maka dengan menggunakan relasi kesimilaritasan P pada B didapat

$$A = P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} 0_{\omega_1} & 0 \\ \hline & Q^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0_{\omega_1} & B_{12} & B_{13} \\ & 0_{\omega 2} & B_{23} \\ & & \tilde{B} \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} 0_{\omega_1} & 0 \\ \hline & Q \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{\omega_1} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & 0_{\omega_2} & & A_{2k} \\ & & & \vdots \\ & & & 0_{\omega_k} \end{pmatrix}$$

$= \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$

($\Leftarrow$)

Adib : matriks *A* = $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$ dengan blok superdiagonal yang mempunyai rank kolom penuh maka karakteristik Weyr $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$

Bukti :

Karena blok supediagonal mempunyai kolom rank penuh maka kolom ke-n$-\omega_1$ terakhir dari matriks tersebut bebas linier, sehingga null(*A*) = ω_1.

- Untuk k = 1, maka *A* adalah matriks nol.
- Untuk k $>$ 1

  A mempunyai bentuk $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, \mathrm{A}_2)$ seperti yang diberikan di lemma 3.1.1, dan lemma 3.1.2 mengatakan bahwa adalah $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$ dengan $\omega(A_2) = (\omega_2, \omega_3, ..., \omega_k)$. Maka karakteristik Weyr matriks *A* adalah $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$

(Terbukti)

Dari uraian diatas, dapat diambil kesimpulan bahwa setiap matriks nilpotent dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks blok segitiga *A* = $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$, dimana setiap blok superdiagonal $A_{i,i+1}$ mempunyai rank kolom penuh, yaitu rank ($A_{i,i+1}$) = ω_{i+1}.

A mempunyai karakteristik Weyr $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\kappa)$. Dengan dual partisi dari karakteristik Weyr didapat karakteristik Segre, yaitu $\sigma(A) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$. Dengan demikian bentuk kanonik Jordannya bisa langsung didapat, yaitu $J = \mathcal{D}(S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \ldots, S_{\sigma t})$. $S_{\sigma i}$ adalah blok matriks berukuran σ_i x σ_i dengan elemen 1 pada superdiagonal dan elemen-elemen lainnya adalah nol. Sekarang akan dibahas jika matriks *A* bukan matriks nilpotent.

3.2. Karakteristik Weyr Untuk Matriks Bukan Nilpotent

Misalkan *A* matriks berukuran *n x n* yang bukan matriks nilpotent, maka *A* dapat dirubah menjadi matriks nilpotent. Langkah pertama adalah menggunakan similaritas uniter yang mengubah *A* menjadi matriks segitiga atas $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$.

3.2.1. MENDAPATKAN KARAKTERISTIK WEYR DENGAN SIMILARITAS UNITER

Dua buah matriks kompleks berukuran *n x n, A* dan *B* , adalah similar uniter jika terdapat matriks uniter *U* sedemikan sehingga *B = U*AU*. Prosesnya dimulai dengan hasil dari Teorema Schur yang mengatakan bahwa matriks kompleks persegi dapat dijadikan matriks segitiga atas dengan similaritas uniter.

Teorema 3.2.1

Jika *A* adalah matriks berukuran *n x n*, maka terdapat matriks uniter *U* sedemikian sehingga *U*AU* segitiga atas.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika pada n

- Untuk n = 1, maka *A* similar uniter dengan matriks *A*
- Asumsikan benar untuk n = k

  terdapat matriks uniter *Q* sedemikian sehingga *Q*AQ* segitiga atas.
- Akan dibuktikan untuk n = k + 1

  Misalkan *A* matriks berukuran *(k+1) x (k+1)*. Misalkan $\lambda = r_1$ adalah salah satu nilai eigen dari *A* dan u_1 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan r_1, maka terdapat $u_2, u_3, \ldots, u_{k+1}$ sedemikian sehingga $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{k+1}$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^{k+1}$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt pada basis tersebut, didapat basis ortonormal $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$, dengan $v_1 = u_1 / \|u_1\|$ juga menjadi vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen r_1.

  Misalkan P_1 adalah matriks uniter $P_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{k+1} \end{pmatrix}$. Partisi P_1 menjadi $P_1 = \begin{pmatrix} v_1 & \hat{V} \end{pmatrix}$ dengan $\hat{V} = .\begin{pmatrix} \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \cdots & \mathrm{v}_{k+1} \end{pmatrix}$.

  $$P_1^{-1}AP_1 = P_1^{*}AP_1 = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\hat{V}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 & \hat{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 A \\ \overline{\hat{V}} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \hat{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 A v_1 & \overline{v}_1 A \hat{V} \\ \overline{\hat{V}} A v_1 & \overline{\hat{V}} A \hat{V} \end{pmatrix}$$

v_1 adalah vektor eigen untuk λ_1=r, maka Av_1 = rv_1. Menurut definisi basis

(v_1, v_2, …, v_{k+1}) untuk $\mathbb{R}^{k+1}$ ortonormal jika $v_i \bullet v_i = \bar{v}_i v_i = 1$ dan $v_i \bullet v_j = 0$,

untuk i≠j. Maka $\bar{v}_1 A v_1 = \bar{v}_1 r_1 v_1 = r_1 \bar{v}_1 v_1 = r_1 v_1 \bullet v_1 = r_1 x 1 = r_1$ dan

$\overline{\hat{V}} A v_1 = \overline{\hat{V}} r_1 v_1 = r_1 \overline{\hat{V}} v_1 = r_1 v_1 \bullet \hat{V} = r_1 x 0 = 0$

$P_1^* A P_1 = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 A v_1 & \bar{v}_1 A \hat{V} \\ \overline{\hat{V}} A v_1 & \overline{\hat{V}} A \hat{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & C \\ O_{kx1} & A_1 \end{pmatrix}$ dengan *C* adalah matriks *1 x k*, dan

A_1 matriks berukuran *k x k.*

Berdasarkan asumsi terdapat matriks uniter *Q* sedemikian sehingga

$Q^* A_1 Q$ adalah matriks segitiga atas.

Misalkan P_2 matriks berukuran *(k+1) x (k+1)*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1xk} \\ 0_{kx1} & Q \end{pmatrix}$$

karena *Q* matriks uniter maka P_2 juga matriks uniter

Selanjutnya harus dibuktikan $U=P_1P_2$ matriks uniter dan U^*AU adalah matriks segitiga atas.

- Pertama dibuktikan $U=P_1P_2$ matriks uniter, dengan P_1 dan P_2 diketahui matriks uniter.

  Untuk membuktikan *U* matriks uniter harus dibuktikan $U^*U = UU^* = I$

  $U^*U = (P_1P_2)^*(P_1P_2)=P_2^*(P_1^*P_1)P_2 = I$

  $UU^* = (P_1P_2)(P_1P_2)^*= P_1(P_2P_2^*)P_1^* = I$

  Terbukti *U* matriks uniter

- Kedua dibuktikan U*AU adalah matriks segitiga atas.

$U^*APU = (P_1P_2)^*A(P_1P_2) = P_2^*(P_1^*AP_1)P_2$

Terbukti U^*AU adalah matriks segitiga atas.

(Terbukti)

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

nilai eigen λ_1=0 dan λ_2=λ_3=3

vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 adalah $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ambil $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka u_1,u_2,u_3 membentuk basis di $\mathbb{R}^3$

dengan menggunakan proses Gram-Schmidt yaitu $w_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} < u_j \bullet u_i > u_i$,

dan $v_i = w_1 / \|w_1\|$

didapatkan basis ortonormal matriks P_1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = P_1^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

nilai eigen untuk B_1 adalah $\lambda_2 = 3$

vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3$ adalah $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan ambil

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan proses Gram-Schmidt didapatkan basis ortonormal

matriks Q

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dan

$$Q^T B_1 Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dengan $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

dan $U = P_1 P_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$

didapat

$$B = U^T A U = \begin{pmatrix} 0 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kita dapatkan segitiga atas untuk A dengan nilai eigennya berada pada diagonal utamanya. Sehingga, jika spec (A) = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$, dimana α_i berjumlah n_i, A menjadi berbentuk $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ dimana A_i matriks segitiga berukuran n_i x n_i dengan α_i pada diagonalnya.

Langkah selanjutnya adalah menunjukkan bahwa $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ similar dengan $\mathcal{D}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$. Definisikan $N_i = A_i - \alpha_i I$, maka N_i adalah matriks nilpotent (bukti di lampiran2). Dengan demikian karakteristik Weyr dari A, terhadap nilai eigen α_i dapat dicari melalui karakteristik Weyr untuk matriks nilpotent $N_i = A_i - \alpha_i I$.

Untuk menunjukkan bahwa $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ similar dengan $\mathcal{D}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$, digunakan teorema Sylvester.

Teorema 3.2.2 (Teorema Sylvester) [5]

Misalkan A matriks berukuran m x m dan B matriks berukuran n x n. maka persamaan matriks $AX - XB = C$ mempunyai solusi unik untuk setiap matriks C m x n jika spec(A) $\cap$ spec(B) = $\varnothing$

Lemma 3.2.3

Jika $A = \mathcal{T}(A_1,A_2)$ dan spec (A) $\cap$ spec (B) = $\emptyset$, maka A similar dengan $\mathcal{D}(A_1,A_2)$.

Bukti:

Misalkan A_i matriks berukuran n_i x n_i untuk i = 1,2. Misalkan X matriks unik berukuran n_1 x n_2 yang memenuhi $A_1X - XA_2 = -A_{12}$.

Misalkan S matriks berbentuk $\mathcal{T}(I_{n1},I_{n2})$ dengan X berada diblok ke 1,2

$$S = \begin{pmatrix} I_{n1} & X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n1} & -X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix}$$, maka

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} I_{n1} & -X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n1} & X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n1} & -X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & -(\mathrm{A}_1\mathrm{X} - \mathrm{X}\mathrm{A}_2) \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n1} & X \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Terbukti)

Lemma 3.2.3 dapat diperumum untuk $A = \mathcal{T}(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ yaitu seperti dibuktikan dalam teorema 3.2 4

Teorema 3.2.4

Jika $A = \mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, dimana setiap spec($A_i$)={$\alpha_i$} dan $\alpha_i \neq \alpha_j$ dengan i $\neq$ j, maka A similar dengan $B=\mathcal{D}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$

Bukti :

Dengan induksi :

- Untuk k = 1

  $\mathcal{T}(A_1)=\mathcal{D}(A_1)$

- Untuk k = 2

  Lemma 3.2.3 sudah membuktikannya

- Hipotesis induksi : asumsikan benar untuk k = p

  Jika $A = \mathcal{T}(A_2, A_3 \ldots, A_p)$, dimana setiap spec($A_i$)={$\alpha_i$} dan $\alpha_i \neq \alpha_j$ dengan i $\neq$ j, maka A similar dengan B

- Akan dibuktikan benar untuk k = p +1

  Misalkan $A = \mathcal{T}(A_1, C)$, dengan $C = \mathcal{T}(A_2, A_3, \ldots, A_k)$, maka sesuai hipotesis induksi C similar dengan D, artinya terdapat matriks nonsingular Q sedemikian sehingga $Q^{-1}CQ=D$.

  Bentuk matriks $S = \mathcal{D}(\mathrm{I}_{\omega_1}, Q)$, maka

  $C = S^{-1}AS = \mathcal{D}(\mathrm{I}_{\omega_1}, Q^{-1})\, A\, \mathcal{D}(\mathrm{I}_{\omega_1}, Q)$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} I_{\omega_1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \cdots & A_{1k} \\ & A_2 & A_{23} & A_{24} & \cdots & A_{2k} \\ & & A_3 & A_{34} & \cdots & A \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & A_{k-1} & A_{(k-1)k} \\ 0 & & & & & A_k \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} I_{\omega_1} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & A_2 & & & & \\ & & A_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & A_{k-1} & \\ 0 & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

$= \mathcal{D}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = B$

(Terbukti)

Jadi, jika kita sudah mendapatkan A dalam bentuk segitiga $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_t)$, maka karakteristik Weyr setiap nilai eigen dari A dapat dicari dengan mencari karakteristik Weyr setiap blok nilpotent $N_i = A_i - \alpha_i I$.

N_i adalah blok matriks segitiga atas, yaitu $N_i = \mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_\kappa})$ maka $\omega(N_i) = (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\kappa)$ dan $\sigma(N_i) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$. Kanonik Jordan untuk N_i adalah $J_{ni} = \mathcal{D}(S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \ldots, S_{\sigma t})$. Dengan demikian Kanonik Jordan untuk A_i adalah $J_{ni}(\lambda_i) = \mathcal{D}(\lambda_i I + S_{\sigma 1}, \lambda_i I + S_{\sigma 2}, \ldots, \lambda_i I + S_{\sigma} t)$.

Kanonik Jordan untuk A berisi kanonik Jordan untuk A_i, ditempatakan sepanjang diagonalnya.

$J = \mathcal{D}(Jn_1(\lambda_1), Jn_2(\lambda_2), \ldots, Jn_t(\lambda_t))$

BAB IV

PERBANDINGAN METODE STAIRCASE DENGAN METODE YANG UMUM DIPAKAI

Pada bab ini akan diberikan beberapa permasalahan lalu penyelesaian masalah tersebut dengan metode staircase dan metode yang umum dipakai, yaitu program yang sudah ada di Matlab. Kemudian hasil-hasil perhitungan tersebut dibandingkan, untuk menentukan metode mana yang memberikan hasil yang lebih baik. Perhitungan untuk menghasilkan bentuk kanonik Jordan menggunakan algoritma sebagai berikut :

1. Algoritma Mencari Bentuk Kanonik Jordan Dengan Teknik Staircase dan Menggunakan Karakteristik Weyr

Langkah 1 Input matriks A

Langkah 2 Tentukan matriks blok segitiga atas B yang similar dengan matriks A

$B = U^* A U$

Langkah 3 Tentukan blok-blok matriks segitiga atasnya, lalu urutkan ukuran blok segitiga mulai dari yang terbesar hingga yang terkecil untuk setiap nilai eigen

Langkah 4 Ubah blok matriks menjadi blok nilpotent ($N_i= A_i-\lambda_i \mathbf{I}$), dan tentukan karakteristik Weyr untuk setiap blok nilpotent

Langkah 5 Tentukan karakteristik Segre dan bentuk blok Jordan

Langkah 6 Tentukan matriks kanonik Jordan

2. Algoritma Mencari Bentuk Kanonik Jordan Dengan Cara Umum (Program yang sudah ada di Matlab, yaitu : Jordan (A))

Langkah 1 Input matriks A

Langkah 2 Tentukan nilai eigen A

Langkah 3 Untuk setiap nilai eigen tentukan generalisasi vektor eigen

Langkah 4 Tentukan matriks P dari generalisasi vektor eigen

Langkah 5 Tentukan invers matriks P

Langkah 6 Tentukan matriks kanonik Jordan dengan

$J = P^{-1} A P$

TABEL PERBANDINGAN HASIL ANTARA METODE STAIRCASE

DENGAN PROGRAM MATLAB

CONTOH MATRIKS	PROGRAM MATLAB	METODE STAIRCASE
1. $A = \begin{pmatrix} 100 & 100 & -100 \\ 0 & 0 & 200 \\ 0 & -100 & 300 \end{pmatrix}$	Bentuk kanonik Jordan Jordan(A) = $\begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$	1. Matriks segitiga atas yang similar dengan A adalah : $B = \begin{pmatrix} 100.0000 & -44.7214 & 134.1641 \\ 0 & 100.0000 & 300.0000 \\ 0 & 0 & 200.0000 \end{pmatrix}$ 2. Blok segitiganya adalah : $A_1 = \begin{pmatrix} 100.0000 & -44.7214 \\ 0 & 100.0000 \end{pmatrix}$ $A_2 = (200.0000)$ 3. Blok Nilpotent ($A_i - \lambda_i I$) $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -44.7214 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Indeks nilpotent = 2 $\mathcal{A}_2 = (0)$, Indeks nilpotent = 1 Karakteristik Weyr untuk λ =100 adalah (1,1) Karakteristik Weyr untuk λ =200 adalah (1) 4. Karakteristik Segre untuk λ =100 adalah (2) Karakteristik Segre untuk λ =200 adalah (1)

		sehingga bentuk blok Jordan : $\begin{pmatrix}100 & 1\\ 0 & 100\end{pmatrix}$, (200) 5. Bentuk kanonik Jordannya : $\begin{pmatrix}100 & 1\\ 0 & 100\end{pmatrix} \oplus (200) = \begin{pmatrix}100 & 1 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 0 & 0 & 200\end{pmatrix}$
Jika data pada A diubah menjadi $A = \begin{pmatrix}100 & 100 & -100\\ 0 & 0 & 200\\ 0 & -101 & 300\end{pmatrix}$	Bentuk kanonik Jordan Jordan(A) = $\begin{pmatrix}100.000 & 0 & 0\\ 0 & 197.9583 & 0\\ 0 & 0 & 102.0417\end{pmatrix}$	1. Matriks segitiga atas yang similar dengan A adalah : $B = \begin{pmatrix}100.0000 & -43.6287 & 134.3234\\ 0 & 102.0417 & 301.0000\\ 0 & 0 & 197.9583\end{pmatrix}$ 2. Blok segitiganya adalah : $A_1 = (100.000)$ $A_2 = (102.0417)$ $A_3 = (197.9583)$ 3. Blok Nilpotent ($A_i - \lambda_i I$) $\mathcal{A}_1 = (0)$, Indeks nilpotent = 1 $\mathcal{A}_2 = (0)$, Indeks nilpotent = 1 $\mathcal{A}_3 = (0)$,Indeks nilpotent = 1 Karakteristik Weyr untuk λ =100 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ = 102.0417 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ =197.9583 adalah (1)

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

4. Karakteristik Segre untuk λ =100 adalah (1)

Karakteristik Segre untuk λ = 102.0417 adalah (1)

Karakteristik Segre untuk λ =197.9583 adalah (1)

sehingga bentuk blok Jordan :

$(100.000)\ ,\ (102.0417)\ ,\ (197.9583)$

5. Bentuk kanonik Jordannya :

$$(100.0000)\ \oplus\ (102.0417)\ \oplus\ (197.9583)$$

$$= \begin{pmatrix} 100.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 102.0417 & 0 \\ 0 & 0 & 197.9583 \end{pmatrix}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2.

$$A = \begin{pmatrix} -147 & -106 & -66 & -488 \\ 604 & 432 & 271 & 1992 \\ 621 & 448 & 279 & 2063 \\ -169 & -122 & -76 & -562 \end{pmatrix}$$

</td>
<td>

Bentuk kanonik Jordan :

$$\text{Jordan(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

</td>
<td>

1. Matriks segitiga atas yang similar dengan A adalah :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -9.87 & -131.56 & -290.05 \\ 0 & 0 & 0.32 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Blok segitiganya adalah :

$$(5)\ ,\ \begin{pmatrix} 0 & 0.32 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ (-3)$$

Urutan blok segitiga mulai yang terbesar hingga yang terkecil :

</td>
</tr>
</table>

		$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.32 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = (-3) \quad A_3 = (5)$ 3. Blok Nilpotent ($A_i - \lambda_i I$) $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.32 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Indeks nilpotent = 2 $\mathcal{A}_2 = (0)$, Indeks nilpotent = 1 $\mathcal{A}_3 = (0)$, Indeks nilpotent = 1 Karakteristik Weyr untuk λ =0 adalah (1,1) Karakteristik Weyr untuk λ =–3 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ = 5 adalah (1) 4. Karakteristik Segre untuk λ =0 adalah (2) Karakteristik Segre untuk λ =–3 adalah (1) Karakteristik Segre untuk λ = 5 adalah (1) sehingga bentuk blok Jordan : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; (-3) \;,\; (5)$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>5. Bentuk kanonik Jordannya :
$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \oplus (-3) \oplus (5) =$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Jika data pada A diubah menjadi
$A = \begin{pmatrix}-147&-106&-66&-488\\604&432&271&1992\\621&448&279&2063\\-169&-122&-76&-561\end{pmatrix}$</td>
<td>Bentuk kanonik Jordan :
Jordan(A) =
$\begin{pmatrix}-23.224&0&0&0\\0&-0.3345-0.2093i&0&0\\0&0&-0.3345+0.2093i&0\\0&0&0&24.8914\end{pmatrix}$</td>
<td>1. Matriks segitiga atas yang similar dengan A adalah :
$B = \begin{bmatrix}24.9&-3009&331.9&992.8\\0&23.2&2.5&-6.5\\0&0&-0.5&-3.4\\0&0&0&-0.2\end{bmatrix}$
2. Blok segitiganya adalah :
$A_1 = (24.9) \quad A_2 = (23.2) \quad A_3 = (-0.5) \quad A_4 = (-0.2)$
3. Blok Nilpotent ($A_i - \lambda_i I$)
$\mathcal{A}_1 = (0)$, Indeks nilpotent = 1
$\mathcal{A}_2 = (0)$, Indeks nilpotent = 1
$\mathcal{A}_3 = (0)$, Indeks nilpotent = 1
$\mathcal{A}_4 = (0)$, Indeks nilpotent = 1</td>
</tr>
</table>

		Karakteristik Weyr untuk λ =24.9 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ =23.2 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ = -0.5 adalah (1) Karakteristik Weyr untuk λ = -0.2 adalah (1) 4. Karakteristik Segre untuk λ =24.9 adalah (1) Karakteristik Segre untuk λ =23.2 adalah (1) Karakteristik Segre untuk λ = -0.5 adalah (1) Karakteristik Segre untuk λ = -0.2 adalah (1) sehingga bentuk blok Jordan : $(24.9)\ ,\ (23.2)\ ,\ (-0.5)\ ,\ (-0.2)$ 4. Bentuk kanonik Jordan : $(24.9) \oplus (23.2) \oplus (-0.5) \oplus (-0.2) = \begin{pmatrix} 24.90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$

Dari tabel perbandingan tersebut didapatkan bahwa pada matriks A berukuran 3 x 3 dengan menggunakan program mendapatkan kanonik Jordan yang sudah ada di Matlab maupun metode staircase menghasilkan bentuk kanonik Jordan yang sama. Tetapi bila entri pada matriks A tersebut diubah, yaitu pada $a_{3,2}$ ternyata bentuk kanonik Jordan yang dihasilkan dari program yang sudah ada di Matlab mengalami perubahan yang sangat besar .

Begitu juga yang terjadi pada contoh kedua. Entri pada matriks A berukuran 4 x 4 diubah, yaitu pada $a_{4,4}$. Bentuk kanonik Jordan yang dihasilkan dari program yang ada di Matlab mengalami perubahan yang sangat besar, bahkan terdapat entri yang imajiner. Sedangkan bentuk kanonik Jordan yang dihasilkan metode staircase lebih stabil.

BAB V

KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dari penjelasan bab sebelumnya adalah :

1. Metode untuk mendapatkan bentuk kanonik Jordan secara umum biasanya kurang stabil, artinya suatu gangguan kecil pada input akan merubah secara drastis bentuk kanonik Jordan. Untuk mengatasinya dapat digunakan metode staircase.
2. Metode staircase dengan dekomposisi Schur menghasilkan blok matriks segitiga atas yang ternyata berkorespondensi dengan karakteristik Weyr.
3. Untuk A matriks nilpotent dekomposisi Schur menghasilkan $\mathcal{T}(0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}, \ldots, 0_{\omega_k})$ dengan karakteristik Weyr $\omega(A) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$. Dual partisi dari karakteristik Weyr adalah karakteristik Segre $\sigma(A) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$, dan bentuk kanonik Jordannya adalah $J = \mathcal{D}(S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \ldots, S_{\sigma t})$
4. Untuk A bukan matriks nilpotent dekomposisi Schur menghasilkan $\mathcal{T}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ yang similar dengan $\mathcal{D}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$. Karakteristik Weyr didapat dari blok matriks nilpotent $N_i = A_i - \alpha_i I$. Dengan langkah yang sama seperti pada matriks nilpotent didapat blok Jordan untuk setiap i. Bentuk kanonik Jordannya berisi blok-blok Jordan untuk setiap i.

DAFTAR PUSTAKA

Helene Shapiro, (1999). *The Weyr characteristic*, Amer. Math. Monthly, hal. 919-929

G.H.Golub dan C.F.Fan Loan, (1989). *Matrix Computation*,2nd edition , The John Hopkins University Press, Baltimore and London

Terry Lawson, (1996). *Linear Algebra*, The John Wiley & Sons Inc,

Fraleigh / Beauregard, (1991). *Liner Algebra*, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing

Rajendra Bhatia, *Graduate Texts in Mathematics Matrix Analysis*, Hal.203, Springer-Verlag New York, Inc

Martin Golubitsky / Michael Dellnitz, (1999). *Linear Algebra and Differential Equation*, Brooks / Cole Publishing Company

Lampiran (1)

Pembuktian $null(A^r) = \omega_1 + null(A_2^{r-1})$ **(Hal : 22)**

$$
A = \left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{\omega 1,1} & a_{\omega 1,2} & \cdots & a_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1(n-\omega 1)} \\
0 & & 0 & 0 & 0 & & b_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0
\end{array}\right)
$$

$$
A^2 = AA = \left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{\omega 1,1} & a_{\omega 1,2} & \cdots & a_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1(n-\omega 1)} \\
0 & & 0 & 0 & 0 & & b_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{\omega 1,1} & a_{\omega 1,2} & \cdots & a_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1(n-\omega 1)} \\
0 & & 0 & 0 & 0 & & b_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1(n-\omega 1)} \\
0 & & 0 & 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & c_{\omega 1,2} & c_{\omega 1,3} & & c_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d13 & & d_{1(n-\omega 1)} \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & d_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & 0
\end{array}\right)
$$

$$
A^3 = A^2A = \left(\begin{array}{ccc|cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_{13} & e_{14} & & e_{1(n-\omega 1)} \\
 & & & & & e_{23} & e_{24} & & e_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_{\omega 1,3} & e_{\omega 1,4} & & e_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{14} & & f_{1(n-\omega 1)} \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & f_{\omega_1-3,(n-\omega_1)} \\
 & & & \vdots & & & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & 0
\end{array}\right)
$$

$$
A^r = \left(\begin{array}{ccc|cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & y_{1r} & y_{1(r+1)} & & y_{1(n-\omega 1)} \\
 & & & & & y_{2r} & y_{2(r+1)} & & y_{2(n-\omega 1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & y_{\omega 1,r} & y_{\omega 1,(r+1)} & & y_{\omega 1(n-\omega 1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{1(r+1)} & & z_{1(n-\omega 1)} \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & z_{\omega_1-r,(n-\omega_1)} \\
 & & & \vdots & & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & 0
\end{array}\right)
$$

Dengan reduksi baris didapat :

$$
A^r = \left(\begin{array}{ccc|cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\
 & & & \vdots & & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & 0
\end{array}\right)
$$

Dengan pertukaran baris 1 dan baris ke (n–r) didapat

$$A^r = \left(\begin{array}{ccc|cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\
 & & & \vdots & & 1 & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & 0
\end{array}\right)$$

Maka didapat $null(A^r) = \omega_1 + null(A_2^{r-1})$.

(Terbukti)

Lampiran (2)

Pembuktian $N_i = A_i - \lambda_i I$ adalah matriks nilpotent (hal : 33)

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda_i & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$N_i = A_i - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_i^2 = N_i N_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & 0 & & b_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_i^3 = N_i^2 N_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & 0 & & b_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & & c_{1n} \\ & 0 & 0 & 0 & & c_{2n} \\ & & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$N_i^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Maka N_i adalah matriks nilpotent berindeks n

(Terbukti)