UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL PADA GRAF SIRKULAN $C_n(1,2,3)$

SKRIPSI

ANDI KURNIAWAN PRIHARTOMO
0706261530

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL
PADA GRAF SIRKULAN $C_n(1,2,3)$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

ANDI KURNIAWAN PRIHARTOMO
0706261530

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Andi Kurniawan Prihartomo
NPM	: 0706261530
Tanda Tangan	:
Tanggal	: Desember 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh		
Nama	:	Andi Kurniawan Prihartomo
NPM	:	0706261530
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Pelabelan Total Ketakteraturan Simpul Pada Graf Sirkulan $C_n(1,2,3)$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Pembimbing dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PEMBIMBING

Pembimbing I	: Dra. Denny R. Silaban, M.Kom	( )
Pembimbing II	: Dr. Kiki A. Sugeng	( )
Penguji	: Dr. Alhaji Akbar B.	( )
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	: Dr. Hengki Tasman	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah wa syukurilah penulis panjatkan kepada Allah SWT, atas berkat, rahmat, dan izin-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan ribuan terima kasih kepada:

1) Ibu Dra. Denny R. Silaban, M.Kom dan Ibu Dr. Kiki A. Sugeng selaku pembimbing skripsi terhebat. Terima kasih sebesar-besarnya untuk semua bimbingan, senyum, teguran, kritik, saran, kasih sayang, dan dukungan yang sangat luar biasa yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2) Bapak Dr. Yudi Satria, Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech dan Ibu Dr. Dian Lestari sebagai kepala departemen, sekertaris departemen, dan koordinator pendidikan atas bantuan dan dukungannya dalam mempermudah prosedur penyelesaian tugas akhir dan sampai wisuda.
3) Seluruh staf pengajar di departemen Matematika UI, Ibu Suarsih, Ibu Saskya, Ibu Sri, Ibu Mila, Pak Ari, Pak Haji, Pak Djati, Pak Hengky dan dosen-dosen tercintan yang lain, terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan. Semoga penulis dapat menggunakan ilmu tersebut dengan sebaik-baiknya.
4) Mba Santi, Mba Rusmi, Mas Ansori, Pak Saliman, dan Seluruh karyawan di Departemen Matematika UI, terima kasih atas segala bantuan dan kemudahan yang telah diberikan untuk penulis.
5) Keempat Orang Tua Terbaikku, Ibuku Sri Ningdyah, Ibuku Karsih, Bapakku Supriyanto, Bapakku Sudarmono yang telah dengan tulus dan ikhlas melimpahkan kasih sayang yang tidak terbatas.

6) Adekku Ririn Asrian, Nenek Tercinta Mbah Runtut, Mbakku Dewi, Budhe Yah, Mas Nanang, Pakde Sugeng, Budhe Eni, Pakde Prapto, Keluarga Besar Mbah Runtut, Keluarga Besar Mbah Sinah, Keluarga Besar Mbah Nyaminah & Keluarga Besar Mbah Kaswan sebagai keluarga penulis yang selalu memberikan doa, dukungan, dan nasehat.
7) Aditya, Dhanardi, Hanif, Hikmatiarahmah, Amanda, Nedia, Shafira, Widya terima kasih atas semua persahabatan, series, kelucuan, tawa, tangis, pengingat shalat, cinta, kasih sayang dan keindahan lain yang sangat luar biasa. Sangat indah bersama kalian Sahabat-sahabatku Sre'aca.
8) Teman seperjuangan GGL(Group Graf Labelling) Hikmah, Stefano, Siti.
9) Pengajar dan Staf Karyawan Salemba Group Kalisari, Kak Ratna, Kacab Kak Vajar & Bang "Botak" Rizal, Fandi, Kak Cucu, Kak Ria & Bang Andri, Jajang, Arie, Wawa, Awang, Berland, Candra, Tewe, Kak Marni, Nami, Rima, Claudia, Iman, Tuslia, Mayang, Berlan, Kak Wawan dan yang lainnya, terimakasih atas dukungan baik materil dan moril.
10) Teman-teman yang selalu menemani penulis berdiskusi, merenungi nasib, membakar tembakau di depan gedung Matematika UI.
11) Teman-teman Matematika UI 2007. Farah, Rizki, Misda, Adi, Afni, Anggun, Anjar, Arif, Ashari, Bowo, Putri, Dita, Fauzan, Ferdi, Gamar, Lois, Nora, Paramita, Syahrul, Putu, Riyanto, Shafa, Sisca, Siska, Stefi, Isna, Widi, Winda, Wiwi, Anis, Yossandha, dan Zulfallah. Terima kasih atas semuanya, masa kuliah ini tak akan bisa dilupakan.
12) Teman-teman Matematika UI Rendy, Stefano, angkatan 2002, 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011
13) Teman-teman di Integral IPA 5 SMAN 3 Bogor, kalian memori termanis masa SMA-ku.
14) Murid-muridku Tersayang Salemba Group Kalisari, kakak sayang kalian *mywedhus*.
15) Dan semua orang yang namanya tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang telah mendoakan, mendukung, mengingatkan, mengajarkan, menegur, menginspirasi penulis baik dalam penulisan skripsi ini maupun dalam kehidupan penulis sehari-hari.

Akhir kata, penulis berharap Allah SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Andi Kurniawan Prihartomo
NPM	: 0706261530
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: FMIPA
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pelabelan Total Ketakteraturan Simpul Pada Graf Sirkulan $C_n(1,2,3)$

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : Desember 201
Yang menyatakan

(Andi Kurniawan Prihartomo)

ABSTRAK

Nama : Andi Kurniawan Prihartomo
Program Studi : Matematika
Judul : Pelabelan Total Ketakteraturan Simpul Pada Graf Sirkulan $C_n(1,2,3)$

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul V himpunan busur Edimana Vdan E berturut-turut adalah banyaknya simpul dan busur pada G. Nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) dari graf atau $tvs(G)$ adalah bilangan terkecil k sedemikian sehingga f memetakan himpunan V dan E ke bilangan bulat positif $\{1,2,\ldots,k\}$ dan bobot setiap simpulnya berbeda dimana bobot simpul adalah penjumlahan dari label simpul dan busur yang hadir pada simpul tersebut. Pada skripsi ini akan diberikan kontruksi pelabelan-k total tak teratur simpul dari graf sirkulan $C_n(1,2,3)$ untuk menunjukkan $tvs(C_n(1,2,3)) = \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Kata Kunci : Pelabelan graf, nilai total ketakteraturan simpul, graf sirkulan.
xii+31 halaman : 12 gambar
Daftar Pustaka : 9 (1988-2011)

`

ABSTRACT

Name : Andi Kurniawan Prihartomo
Program Study : Mathematics
Title : Total Vertex Irregularity Labelling on Graf Circulant $C_n(1,2,3)$

Suppose G is a graph with set of vertices $V$and set of edges E where $|V|$ is the number of vertices and $|E|$ is the number of edge on G. A total vertex irregularity strength of graf G or *tvs*(G) are the smallest value of k such that f is a function from $V \cup E$ to aset of positive integer $\{1,2,\ldots,k\}$ such that the weight of every two distinct vertices are different,where the weight of vertex is sum of a vertex label and all its incident edges labels. In this *skripsi* the construction of total-k labelling vertex irregularity strength of graf $C_n(1,2,3)$ is given with $tvs(C_n(1,2,3)) = \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Key Words : graph labelling, total vertex irregularity strength, circulant graph.
xii+31 pages : 12 pictures
Bibliography : 9(1988-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang masih sangat muda bila dibandingkan dengan cabang matematika lain. Oleh karena itu saat-saat ini banyak peneliti yang sangat tertarik untuk mendalaminya untuk menemukan hal baru. Salah satu bagian dari teori graf yang membuat para peneliti tertarik adalah pelabelan graf.

Secara matematis suatu graf $G = G(V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut busur. Banyaknya simpul pada G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya busur dinotasikan dengan $|E|$. Secara umum graf direpresentasikan dengan gambar yang merupakan kombinasi dari sejumlah titik dan kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Satu simpul direpresentasikan dengan satu titik dan satu busur direpresentasikan dengan satu kurva yang menghubungkan dua simpul (boleh sama).

Graf yang akan dibahas dalam skripsi ini secara khusus adalah graf *sirkulan* $C_n(1,2)$ dan $C_n(1,2,3)$, yaitu graf yang dikembangkan dari graf lingkaran. Graf lingkaran adalah suatu graf terhubung dimana setiap simpulnya memiliki derajat dua. Graf *sirkulan*, $C_n(1,2)$, adalah graf yang dapat dibangun dari graf lingkaran dengan n simpul (dinamai v_1, v_2, .. , v_n secara terurut) dan menambahkan busur-busur pada setiap dua simpul dengan jarak dua. Graf $C_n(1,2,3)$ adalah graf $C_n(1,2)$ yang diberikan penambahan busur-busur pada setiap simpul dengan jarak tiga.

Suatu pelabelan dari graf $G(V, E)$ didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari unsur-unsur graf, yaitu simpul, busur, atau gabungan keduanya ke suatu himpunan bilangan (biasanya bulat positif). Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan simpul maka pelabelannya disebut pelabelan simpul. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan busur maka pelabelannya disebut pelabelan busur. Kemudian apabila daerah asal merupakan gabungan dari keduanya maka pelabelannya disebut pelabelan total.

Pada tahun 1988 Chartrand dkk. telah memperkenalkan *irregularity strength of a graph* dan berbagai jenis pelabelan total lainnya. *Irregularity strength of graph (nilai ketakteraturan) G* atau $s(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil *k*, sedemikian sehingga fungsi *f* yang memetakan himpunan busur dari graf G pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai *k* dengan bobot setiap simpul pada graf berbeda. Dalam hal ini yang dimaksud dengan bobot adalah penjumlahan dari setiap label busur-busur yang hadir pada simpul yang bersangkutan. Dalam perkembangannya juga akan diperkenalkan *total vertex irregularity strength of graph* G, $tvs(G)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil *k*, sedemikian sehingga fungsi *f* yang memetakan himpunan simpul dan busur dari graf G pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai *k* dengan bobot setiap simpul pada graf berbeda. Dalam hal ini, bobot adalah jumlah dari label simpul dan setiap label busur-busur yang hadir pada simpul bersangkutan.

Hasil penelitian untuk $s(G)$ beberapa kelas graf sudah diperoleh. Misalnya, untuk $s(G)$ graf *sirkulan* $(C_n(1,k))$ adalah $\left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil$ (Baril dkk. 2005), $tvs(C_n(1,2))$ untuk graf adalah $\left\lceil \frac{n+5}{6} \right\rceil$ (Ahmad, 2008). Pada tugas akhir ini akan dicari $tvs(C_n(1,2,3))$ dengan terlebih dahulu membuat kontruksi yang tepat dan teratur.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Dalam skripsi ini, yang menjadi permasalahan adalah bagaimana menentukan konstruksi pelabelan-*k* total tak teratur simpul dari suatu graf *G* untuk memperoleh nilai dari $tvs(G)$.

Ruang lingkup pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi untuk graf $C_n(1,2,3)$.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang digunakan

Penelitian dilakukan dengan studi pustaka yang dikembangkan untuk mengkonstruksi pelabelan-k total tak teratur simpul dan menghitung nilai tvs graf $C_n(1,2,3)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mengkonstruksi pelabelan-k total tak teratur simpul dan menentukan $tvs(C_n(1,2,3))$.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan istilah dasar dari teori graf, jenis-jenis graf yang digunakan pada bab selanjutnya, pelabelan graf, *irregularity strength* (*s*) dari suatu graf, *total vertex irregularity strength* (*tvs*) dari suatu graf, serta hasil penemuan yang telah ada.

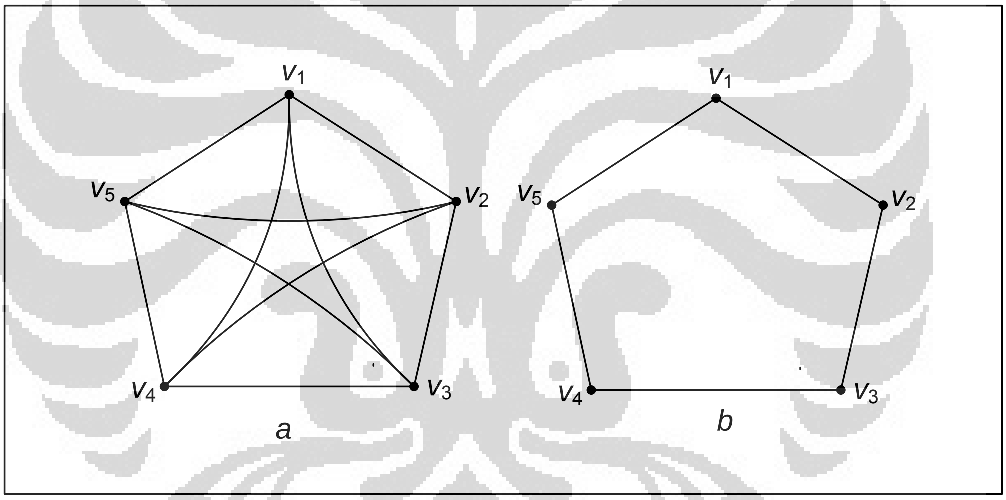
2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf

Suatu **graf** $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tak kosong dari **simpul-simpul** (*vertices*) V dan himpunan **busur-busur** (*edges*) E, himpunan pasangan tak terurut yang berbeda dari elemen *V* disebut busur. Selanjutnya untuk penyederhanaan $G = (V, E)$ akan ditulis *G*. Himpunan busur dapat berupa himpunan kosong (disebut juga graf kosong). Jika suatu busur menghubungkan satu simpul ke simpul itu sendiri, maka busur tersebut disebut **gelung** (*loop*). Jika dua simpul dihubungkan oleh lebih dari satu busur, maka busur tersebut disebut **busur berganda** (*multiple edges*). Graf yang tidak mengandung gelung dan busur berganda disebut **graf sederhana** (*simple graph*). Banyaknya simpul pada graf *G* dinyatakan sebagai |*V*| dan banyaknya busur dinyatakan sebagai |*E*|. Apabila |*V*| berhingga, maka graf *G* disebut **graf berhingga** (*finite graph*). Dua simpul *u* dan *v* pada suatu graf *G* dikatakan **bertetangga** (*adjacent/neighbors*) di *G* apa bila $\{u, v\}$ adalah suatu busur pada graf *G*. Jika $e = \{u, v\}$ maka e dikatakan **hadir** (*incident*) pada simpul u dan v. Busur e juga dikatakan **terhubung** pada simpul u dan v. Simpul u dan v disebut **simpul ujung** dari busur $\{u, v\}$ (Rosen, 2003). Untuk pembahasan selanjutnya $\{u, v\}$ akan ditulis sebagai uv.

Jumlah busur yang hadir pada suatu simpul *v* disebut **derajat** (*degree*) dari simpul *v* (ditulis *deg*(*v*)). **Derajat terkecil** dari suatu graf *G* dinyatakan dengan $\delta = \min_{v \in V} deg(v)$ dan **derajat terbesar** dinyatakan dengan $\Delta =$

maks$_{v \in V}$ $deg(v)$. Jika $\delta = \Delta = r$, maka graf G disebut sebagai **graf teratur berderajat *r*** (*r-regular graph*) (West, 2002).

Subgraf dari graf $G = (V, E)$ adalah graf $G' = (V', E')$ dimana jika $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$. Setiap subgraf dari G dapat diperoleh dengan cara menghapus simpul-simpul dan (atau) busur-busur yang ada di G tanpa menghapus simpul ujung busur-busur yang tersisa (Rosen, 2003). Pada Gambar 2.2 diberikan contoh subgraf $G' = C_5$ dari graf $G = K_5$ dimana graf K_5 memiliki himpunan simpul dan busur $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, v_1 v_5, v_2 v_3, v_2 v_4, v_2 v_5, v_3 v_4, v_3 v_5, v_4 v_6\})$ dan graf C_5 memiliki himpunan simpul dan busur, yaitu $(V', E') = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_1 v_5\})$. Karena $V(C_5) \subseteq V(K_5)$ dan $E(C_5) \subseteq E(K_5)$, maka C_5 adalah subgraf dari K_5.



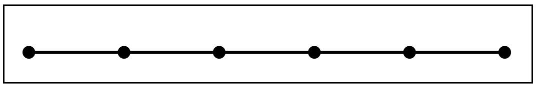
Gambar 2.1 Graf C_5 (b) yang merupakan Subgraf dari K_5 (a)

Dalam skripsi ini, graf-graf yang akan dibahas adalah graf berhingga, sederhana, terhubung, dan berderajat-*r*. Pada subbab berikutnya diberikan definisi dan contoh dari jenis-jenis graf yang ada.

2.2 Jenis-Jenis Graf

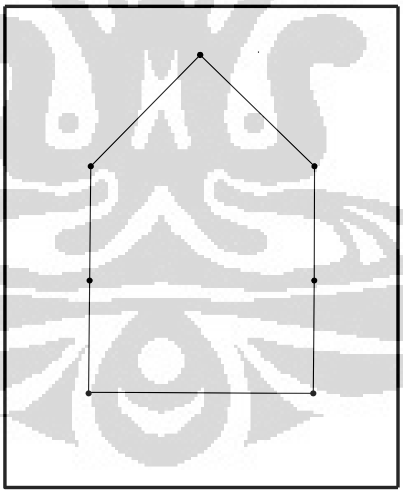
Graf lintasan (*path graph*), P_n, adalah graf dengan n simpul ($n \geq 2$) dengan busur $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ atau dapat juga dinotasikan dalam $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots$

$\rightarrow v_n$. Simpul v_1 disebut simpul awal dan simpul v_n adalah simpul akhir. Semua simpul berderajat dua kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat satu. Dalam graf lintasan berlaku $|V| = |E| + 1$.



Gambar 2.2 Graf lintasan P_6

Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n, adalah graf dengan n simpul ($n \geq 3$) yang terdiri atas simpul-simpul $v_1, v_2, ..., v_n$ dan busur-busur (v_1, v_2),(v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n) dan (v_n, v_1) sehingga graf lingkaran merupakan graf teratur berderajat dua. Dengan kata lain graf lingkaran adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n yang diberi tambahan busur antara simpul awal dan simpul akhir (busur v_nv_1). Dalam graf lingkaran berlaku $|V| = n$ dan $|E| = n$. Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf lingkaran dengan 7 simpul, C_7 (Rosen, 2003).



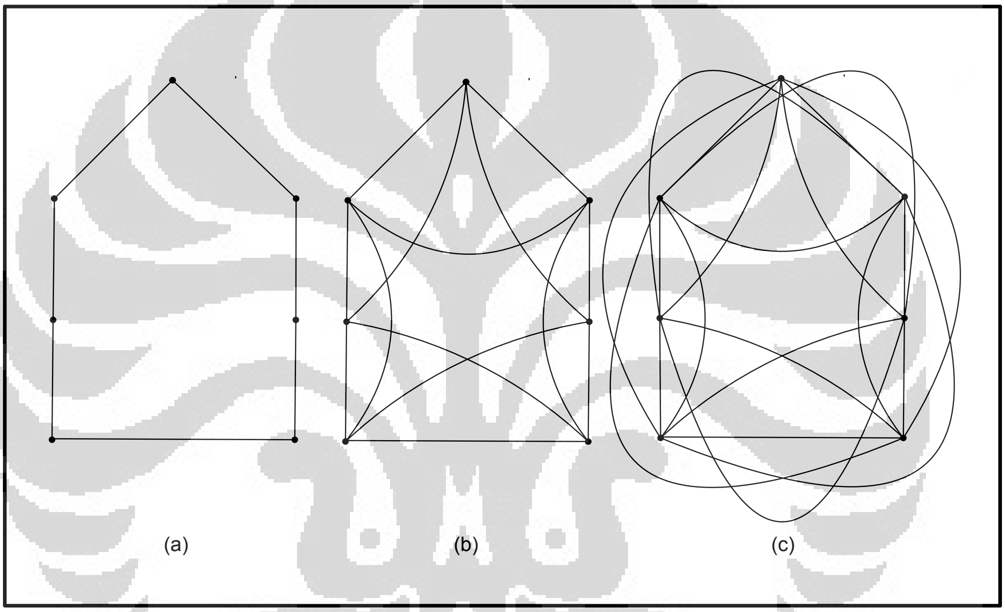
Gambar 2.3 Graf lingkaran C_7

Misalkan n, m dan $a_1, \dots, a_m$ adalah bilangan bulat positif, $1 \leq a_i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dan $a_i \neq a_j$ untuk semua $1 \leq i \leq j \leq m, n \geq 3$. Suatu graf tak berarah dengan himpunan simpul $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ dan himpunan busur $E = \left\{v_i v_{i+a_j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\right\}$, indeks yang diambil dari modulo n, disebut **graf sirkulan** dan dinotasikan dengan $C_n(a_1, \dots, a_m)$. Graf sirkulan $C_n(a_1, \dots, a_m)$ adalah graf reguler dengan derajat-r, dimana

$$r = \begin{cases} 2m-1, & \text{jika } \frac{n}{2} \in \{a_1, \dots, a_m\} \\ 2m, & \text{lainnya} \end{cases}$$

(Ahmad, 2008).

Pada Gambar 2.4 merupakan contoh-contoh graf sirkulan menurut definisi diatas, dengan $n = 7$ dan m masing-masing bernilai 1, 2 dan 3.



Gambar 2.4 Graf sirkulan $C_7(1)$ (a), graf sirkulan $C_7(1,2)$ (b), graf sirkulan $C_7(1,2,3)$(c)

Graf sirkulan $\boldsymbol{C_n(1)}$ dengan $n \geq 3$ juga dapat disebut sebagai graf lingkaran (Gambar 2.4 (a)). **Graf sirkulan $\boldsymbol{C_n(1,2)}$**, $n \geq 5$, adalah graf dengan n simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ dan $v_1v_3, v_2v_4, \dots, v_{n-2}v_n, v_{n-1}v_1$. Dengan kata lain graf sirkulan $C_n(1,2)$ adalah graf yang dapat dibangun dari graf lingkaran dengan n simpul dan menambahkan busur-busur pada setiap dua simpul dengan jarak dua. Graf sirkulan $C_n(1,2)$ merupakan graf teratur berderajat-4 (Gambar 2.4 (b)).

Graf sirkulan $\boldsymbol{C_n(1,2,3)}$, $n \geq 7$ adalah graf dengan n simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ dan $v_1v_3, v_2v_4, \dots, v_{n-2}v_n, v_{n-1}v_1$ dan $v_1v_4, v_2v_5, \dots, v_{n-3}v_n, v_{n-2}v_1$. Dengan kata lain graf sirkulan $C_n(1,2,3)$ adalah graf yang dapat dibangun dari graf $C_n(1,2)$ dengan n simpul dan menambahkan busur-busur pada setiap dua simpul dengan jarak tiga. Graf sirkulan $C_n(1,2,3)$ merupakan graf teratur berderajat-6 (Gambar 2.4 (c)).

2.3 Pelabelan Graf

Suatu **pelabelan** f dari graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan bijektif dari himpunan simpul V atau himpunan busur E, atau $V \cup E$ ke suatu subhimpunan bilangan asli. Bilangan asli tersebut disebut label. Apabila daerah asal dari pemetaan adalah himpunan simpul (atau himpunan busur), maka pelabelannya disebut **pelabelan simpul** (atau **pelabelan busur**). Apabila daerah asalnya merupakan gabungan dari himpunan simpul dan busur ($V \cup E$), maka pelabelannya disebut **pelabelan total** (Gallian, 2010).

Jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen graf pada pelabelan total disebut **bobot**. Bobot dapat dihitung untuk simpul dan busur. Jumlah dari label suatu simpul ($f(v_i)$) dan label semua busur ($f(v_iv_j)$) yang hadir pada simpul disebut **bobot simpul** ($weight\ of\ vertex$), $w(x)$ yaitu

$$w(v_i) = f(v_i) + \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_iv_j)$$

dimana $N(v_i)$ adalah simpul yang bertetangga (*neighborhood*) dengan v_i.

Bobot busur v_iv_j atas pelabelan simpul f yang dinyatakan sebagai $w(v_iv_j)$ adalah jumlah dari label dua simpul yang dihubungkan oleh busur v_iv_j dan label busur v_iv_j itu sendiri, yaitu

$$w(v_iv_j) = f(v_i) + f(v_iv_j) + f(v_j)$$

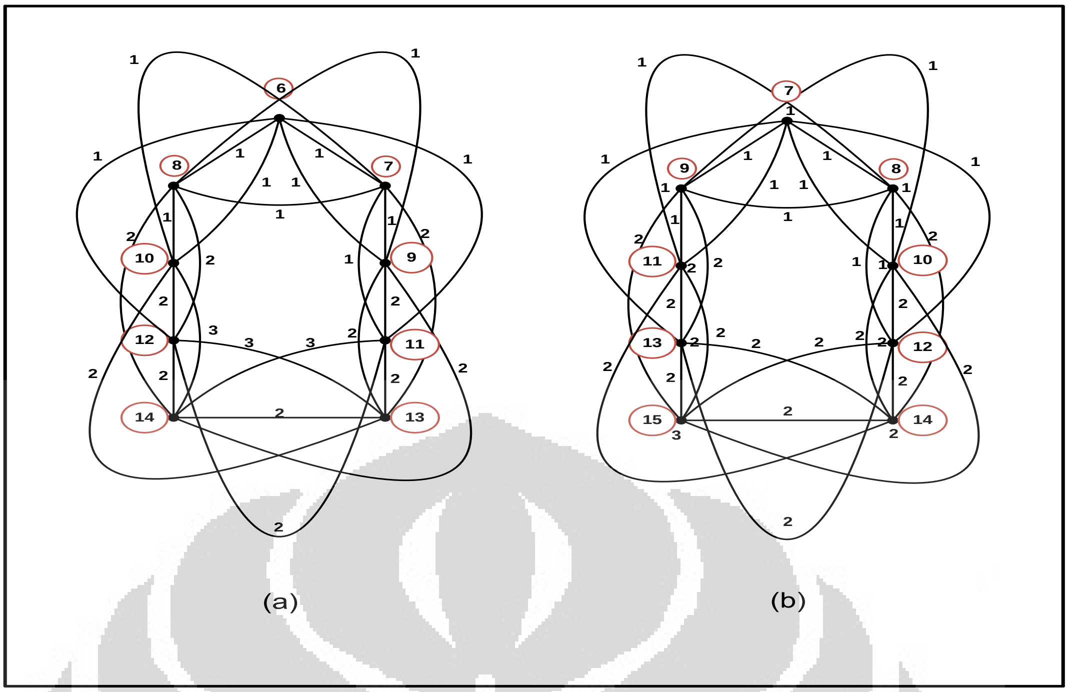
(Bača dkk., 2007).

2.4 Nilai Total Ketakteraturan Simpul

Istilah bahasa Indonesia yang digunakan pada skripsi ini mengacu pada (Nurdin, 2010). Misalkan G adalah suatu graf yang berorder lebih besar sama dengan 3, fungsi $f: E \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ disebut **pelabelan-*k* tak teratur** (*irregular k-labeling*) pada G, jika setiap dua simpul yang berbeda dalam V mempunyai bobot yang berbeda, yakni $\sum_{xy \in E} f(xy) \neq \sum_{uv \in E} f(uv)$ untuk setiap dua simpul x dan u di V dengan $x \neq u$. Pelabelan tak teratur berbeda dengan jenis pelabelan graf lainnya karena fungsi pelabelannya tidak harus fungsi satu-satu (Ahmad, 2008).

Pada tahun 1988 Chartrand dkk. memperkenalkan nilai ketakteraturan (*irregularity strength of a graph*) dan nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength of graph*). **Nilai ketakteraturan** dari graf G atau $s(G)$ adalah suatu bilangan terkecil k sedemikian sehingga $f: E \rightarrow \{1, ..., k\}$ dimana $w(v_i) \neq w(v_j)\ \forall v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$ dimana $w(v_i) = \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_i v_j)$ (Ahmad, 2008).

Misalkan G adalah suatu graf, fungsi $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ disebut **pelabelan-*k* total tak teratur simpul** (*vertex irregular total k-labelling*) pada G, jika setiap dua simpul yang berbeda di V mempunyai bobot yang berbeda Ahmad, 2008, yakni nilai $f(v_i) + \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_i v_j) \neq f(v_k) + \sum_{v_l \in N(v_k)} f(v_k v_l)$ untuk setiap dua simpul v_i dan v_k yang berbeda di V. **Nilai total ketakteraturan simpul** (*total vertex irregularity strength of graph*) atau $tvs(G)$ adalah suatu bilangan terkecil k sedemkian sehingga $f: V \cup E \rightarrow \{1 ..., k\}$ dimana $w(v_i) \neq w(v_j)\ \forall v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$ dimana $w(v_i) = f(v_i) + \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_i v_j)$.



Gambar 2.5 Pelabelan tak teratur pada $C_{9(1,2,3)}$

Pada Gambar 2.5 merupakan contoh pelabelan *irregularity strength*(s) (a) dan *total vertex irregularity strength (tvs)* (b) pada graf sirkulan $C_9(1,2,3)$. Nilai $s(C_9(1,2,3))$ = 3 dengan bobot terbesarnya 14 dan $tvs(C_9(1,2,3)$ = 3 dan bobot terbesarnya 15.

2.5 Hasil-hasil yang telah diketahui

Beberapa ilmuwan telah meneliti pelabelan tvs pada beberapa bentuk graf sirkulan, berikut hasil-hasil penelitian mengenai graf sirkulan.

Teorema 2.1 (Anholcer, 2011)

Untuk graf $C_n(1,2,\ldots,l)$ dimana $l \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ maka

$$tvs(C_n(1,2,\ldots,l)) = \left\lceil \frac{n+l}{l+1} \right\rceil.$$

Teorema 2.2 (Ahmad, 2008)

Untuk graf $C_n(1,2)$ dimana $n \geq 3$ maka

$$tvs(C_n(1,2)) = \left\lceil \frac{n+4}{5} \right\rceil.$$

Dari Teorema 2.1 telah ditemukan nilai *tvs* untuk graf sirkulan $tvs(Cn(1,2,\dots,l)) = \left\lceil \frac{n+l}{l+1} \right\rceil$, namun pada skripsi ini hanya akan dibahas $C_n(1,2,3)$ dengan pola konstruksi yang berbeda dari Teorema 2.1 dengan nilai *tvs* yang sama.

BAB 3

PELABELAN TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL PADA GRAF SIRKULAN (C_n(1,2,3))

Pada bab ini akan diberikan konstruksi pelabelan dari nilai ketakteraturan simpul pada graf $C_n(1,2,3)$. Pada Bab 2 telah dijelaskan bahwa nilai total ketakteraturan simpul suatu graf G atau $tvs(G)$ adalah suatu bilangan terkecil k sedemkian sehingga $f: V \cup E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ dimana $w(v_i) \neq w(v_j)$ $\forall v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$ dengan $w(v_i) = f(v_i) + \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_i v_j)$, $i, j = 1,2, \dots, |V|$. Untuk mengkonstruksi pelabelan dan menunjukan $tvs(C_n(1,2,3))$, maka secara garis besar pembuktian dilakukan dengan alur sebagai berikut -mendefinisikan fungsi pelabelan untuk simpul dan busur, kemudian menunjukan bahwa semua bobot simpul-simpul yang diperoleh dari pelabelan tersebut berbeda, dimana bobot yang dimaksud adalah jumlah label pada simpul dan label pada busur yang hadir pada simpul, serta menunjukkan bahwa label terbesar dari $C_n(1,2,3)$adalah $tvs(C_n(1,2,3))$.

Dalam makalahnya, Baca dkk (2006) menunjukkan bahwa nilai *tvs* dari graf teratur *G* yang dengan derajat-*r* memiliki batas bawah dan batas atas tertentu, seperti yang diberikan pada Teorema 3.1. Karena yang digunakan pada skripsi ini adalah batas bawah saja, maka hanya diberikan bukti untuk batas bawah.

Teorema 3.1 (Bača dkk., 2007)
Untuk graf teratur *G* dengan *n* simpul berderajat-*r* maka

$$\left\lceil \frac{n+r}{r+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + r - 1.$$

Bukti.

Akan dibuktikan $tvs(G) \geq \left\lceil \frac{n+r}{r+1} \right\rceil$.

Untuk graf teratur *G* berderajat *r*, maka bobot setiap simpul merupakan penjumlahan dari $r + 1$ label. Bobot terkecil pada pelabelan ini terjadi ketika label pada simpul dan r busur yang hadir pada simpul adalah 1, sehingga bobot pada simpul tersebut adalah $r+1$. Dikarenakan nilai bobot untuk setiap simpul harus berbeda maka bobot terbesar paling tidak adalah $n+r$ atau dengan kata lain bobot-bobot simpul berurutan dari $(1+r),(2+r),\dots,(n+r)$. Maka label terbesar yang menjadikan nilai bobot simpul menjadi $n+r$ pastilah $\left\lceil\frac{n+r}{r+1}\right\rceil$. Jadi berlaku $tvs(G)\geq\left\lceil\frac{n+r}{r+1}\right\rceil$. ■

Pada Bab 2 telah dijelaskan bahwa graf sirkulan $C_n(1,2,3), n\geq 7$ adalah graf teratur berderajat 6. Pada Teorema 3.2 diberikan *tvs* dari $C_n(1,2,3)$.

Teorema 3.2

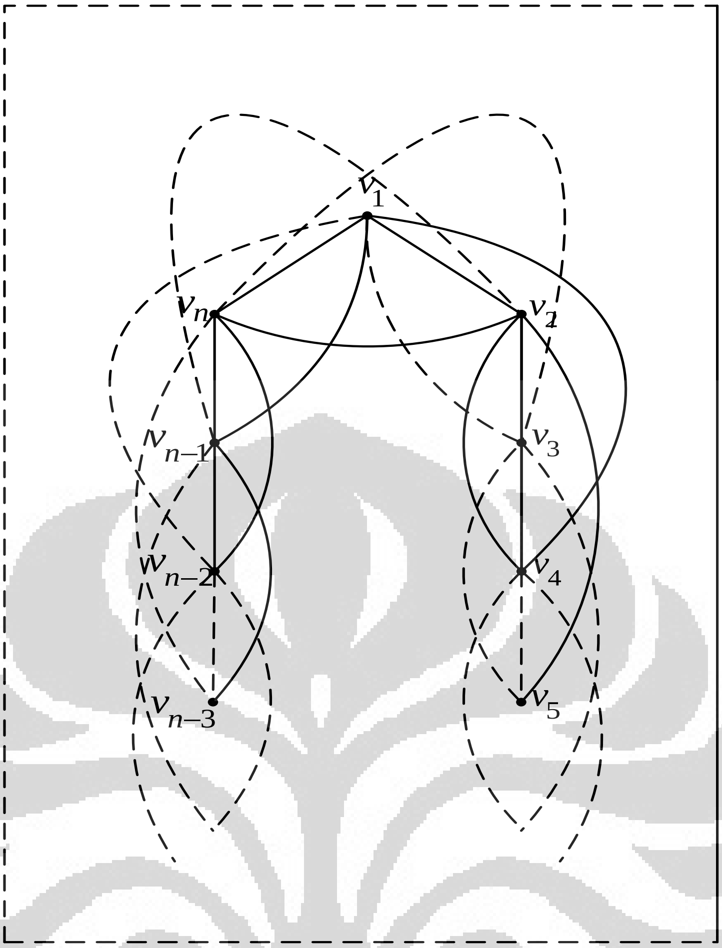
Untuk $n\geq 7$, maka $tvs\big(C_n(1,2,3)\big)=\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Bukti.

Karena $C_n(1,2,3)$ adalah graf teratur dengan derajat $r=6$, maka menurut Teorema 3.1, $tvs\big(C_n(1,2,3)\big)\geq\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Sekarang akan dibuktikan $tvs\big(C_n(1,2,3)\big)\leq\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$ dengan menunjukkan $C_n(1,2,3)$ mempunyai pelabelan k-total ketakteraturan simpul dengan nilai $k=\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$. Nyatakan himpunan simpul-simpul dari $C_n(1,2,3)$ dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ dan himpunan busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan $E=\{v_iv_{(i+1)\bmod n}, i=1,2,3,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{(i+2)\bmod n}, i=1,2,3,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{(i+3)\bmod n}, i=1,2,3,\cdots,n\}$ (Gambar 3.1).

Pembuktian dibagi dalam 6 kasus yaitu untuk $n\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 7)$, $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 7)$, $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$, $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$, $n\equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$, $n\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$ sehingga akan berlaku untuk semua nilai n



Gambar 3.1 Penamaan simpul $C_n(1,2,3)$

Kasus 1. $n \equiv 0, 1 \pmod 7$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_1 sebagai berikut.

Untuk $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$$f_1(v_i) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 4, 5, 6 \pmod 7 \end{cases}$$

$$f_1(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 0, 1, 2 \pmod 7 \\ 2 + \ 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 3, 4, 5, 6 \pmod 7 \end{cases}$$

$$f_1(v_i v_{i+2}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 0, 1, 2 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 3, 4, 5 \pmod 7 \\ 3 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$$

$$f_1(v_i v_{i+3}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 0, 1 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 2, 3, 4, 5 \pmod 7 \\ 3 + 2\left\lfloor \frac{i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } i \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$$

Untuk $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq i \leq n - 1$

$$f_1(v_i) = \begin{cases} 1 + 2\frac{(n-i)}{7}, & \text{jika } (n-i) \equiv 0 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 7 \\ 3 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 5, 6 \pmod 7 \end{cases}$$

$$f_1(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 0, 1 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 2, 3, 4 \pmod 7 \\ 3 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 5, 6 \pmod 7 \end{cases}$$

Untuk $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq i \leq n - 2$

$$f_1(v_i v_{i+2}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 0 \pmod 7 \\ 2 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 7 \\ 3 + 2\left\lfloor \frac{n-i}{7} \right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 5, 6 \pmod 7 \end{cases}$$

Untuk $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1 \leq i \leq n-3$

$$f_1(v_iv_{i+3}) = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor\dfrac{n-i}{7}\right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 0 \text{ (mod 7)} \\ 2 + 2\left\lfloor\dfrac{n-i}{7}\right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 1, 2, 3 \text{ (mod 7)} \\ 3 + 2\left\lfloor\dfrac{n-i}{7}\right\rfloor, & \text{jika } (n-i) \equiv 4, 5, 6 \text{ (mod 7)} \end{cases}$$

Lainnya untuk

$$f_1(v_n) = f_1(v_nv_1) = f_1(v_nv_2) = f_1(v_nv_3) = f_1(v_{n-1}v_1) = f_1(v_{n-1}v_2) = f_1(v_{n-2}v_1) = 1.$$

Menggunakan pelabelan di atas maka f_1 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \ldots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_1(v_i)$ adalah bobot simpul v_i maka

$$w_1(v_i) = f_1(v_i) + f_1(v_iv_{i+1}) + f_1(v_{i-1}v_i) + f_1(v_iv_{i+2}) + f_1(v_{i-2}v_i) + f_1(v_iv_{i+3}) + f_1(v_{i-3}v_i)$$

Dengan mensubstitusi nilai yang bersesuaian diperoleh

$$w_1(v_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i = 1 \\ 4 + 2i, & \text{untuk } 2 \leq i \leq \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor + 1 \\ 2n + 9 - 2i, & \text{untuk } \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ke $w_1(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7, 8, 9, \ldots, (n+6)$. Karena $f(V \cup E) = \left\{1, 2, 3, \ldots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda, maka untuk $n \equiv 0, 1$ mod 7 dapat disimpulkan $tvs(C_n(1,2,3)) \leq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Kasus 2. $n \equiv 2(\text{mod } 7)$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_2 sebagai berikut.

$$f_2(v_i) = \begin{cases} f_1(v_i), & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil, & \text{untuk } i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \\ f_1(v_i), & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ 1, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$f_2(v_i v_{i+1}) = f_1(v_i v_{i+1}), \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1$$

$$f_2(v_i v_{i+2}) = f_1(v_i v_{i+2}), \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-2$$

$$f_2(v_i v_{i+3}) = f_1(v_i v_{i+3}), \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-3$$

$f_2(v_n v_1) = f_2(v_n v_2) = f_2(v_n v_3) = f_2(v_{n-1} v_1) = f_2(v_{n-1} v_2) = f_2(v_{n-2} v_1) = 1.$

Menggunakan pelabelan di atas maka f_2 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_2(v_i)$ adalah bobot simpul v_i maka

$w_2(v_i) = f_2(v_i) + f_2(v_i v_{i+1}) + f_2(v_{i-1} v_i) + f_2(v_i v_{i+2}) + f_2(v_{i-2} v_i) + f_2(v_i v_{i+3}) + f_2(v_{i-3} v_i).$

Dengan mensubstitusi nilai yang bersesuaian diperoleh

$$w_2(v_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i = 1 \\ 4 + 2i, & \text{untuk } 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \\ 2n + 9 - 2i, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ke $w_2(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7, 8, 9, \dots, (n+6)$. Karena $f(V \cup E) =$

$\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda, maka untuk $n \equiv 2 \bmod 7$ dapat disimpulkan $tvs(C_n(1,2,3)) \leq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Kasus 3. $n \equiv 3 \pmod 7$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_3 sebagai berikut.

$$f_3(v_i) = f_2(v_i), \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$

untuk $n \equiv 10 \pmod{14}$

$$f_3(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } i = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

untuk $n \equiv 3 \pmod{14}$

$$f_3(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } i = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1 \\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$f_3(v_iv_{i+2}) = f_1(v_iv_{i+2}), \qquad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-2$$

$$f_3(v_iv_{i+3}) = f_1(v_iv_{i+3}), \qquad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-3$$

$f_3(v_nv_1) = f_3(v_nv_2) = f_3(v_nv_3) = f_3(v_{n-1}v_1) = f_3(v_{n-1}v_2) = f_3(v_{n-2}v_1) = 1$.

Menggunakan pelabelan di atas maka f_3 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_3(v_i)$ adalah bobot simpul v_i maka

$$w_3(v_i) = f_3(v_i) + f_3(v_i v_{i+1}) + f_3(v_{i-1} v_i) + f_3(v_i v_{i+2}) + f_3(v_{i-2} v_i) + f_3(v_{i+3} v_i) + f_3(v_{i-3} v_i)$$

Dengan mensubstitusi nilai yang bersesuaian diperoleh

$$w_3(v_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i = 1 \\ 4 + 2i, & \text{untuk } 2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \\ 2n + 9 - 2i, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le i \le n \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ke $w_2(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7, 8, 9, \dots, (n + 6)$. Karena $f(V \cup E) = \left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda, maka untuk $n \equiv 3$ mod 7 dapat disimpulkan $tvs(C_n(1,2,3)) \le \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil$.

Kasus 4. $n \equiv 4 \text{ (mod 7)}$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_4 sebagai berikut.

untuk $n \equiv 11 (\text{mod } 14)$

$$f_4(v_i) = \begin{cases} f_1(v_i), & \text{untuk } 1 \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \\ \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil, & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \\ f_1(v_i), & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \le i \le n - 1 \\ 1, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

untuk $n \equiv 4 (\text{mod } 14)$

$$f_4(v_i) = \begin{cases} f_1(v_i), & \text{untuk } 1 \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil, & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \\ f_1(v_i), & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3 \le i \le n-1 \\ 1, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$f_4(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} f_1(v_i v_{i+1}), & \text{untuk } 1 \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \\ \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil, & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le i \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \\ f_1(v_i v_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$f_4(v_i v_{i+2}) = f_1(v_i v_{i+2}), \qquad \text{untuk } 1 \le i \le n-2$$

$$f_4(v_i v_{i+3}) = f_1(v_i v_{i+3}), \qquad \text{untuk } 1 \le i \le n-3$$

$$f_4(v_n v_1) = f_4(v_n v_2) = f_4(v_n v_3) = f_4(v_{n-1} v_1) = f_4(v_{n-1} v_2) = f_4(v_{n-2} v_1) = 1.$$

Menggunakan pelabelan di atas maka f_4 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_4(v_i)$ adalah bobot simpul v_i maka

$$w_4(v_i) = f_4(v_i) + f_4(v_i v_{i+1}) + f_4(v_{i-1} v_i) + f_4(v_i v_{i+2}) + f_4(v_{i-2} v_i) + f_4(v_i v_{i+3}) + f_4(v_{i-3} v_i)$$

Dari rumus diatas dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang bersesuaian diperoleh

$$w_4(v_i)=\begin{cases}7, & \text{untuk } i=1\\ 4+2i, & \text{untuk } 2\le i\le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\\ 2n+9-2i, & \text{untuk } \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le i\le n\end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i=1,2,3,\dots,n$ ke $w_4(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7,8,9,\dots,(n+6)$. Karena $f_4(V\cup E)=\left\{1,2,3,\dots,\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda maka untuk $n\equiv 4$ mod 7 $tvs(C_n(1,2,3))\le\left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Kasus 5. $n\equiv 5$ (mod 7)

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_5 sebagai berikut.

$$f_5(v_i)=f_4(v_i),\qquad \text{untuk } 1\le i\le n$$

$$f_5(v_iv_{i+1})=f_4(v_iv_{i+1}),\qquad \text{untuk } 1\le i\le n-1$$

untuk $n\equiv 12(\text{mod } 14)$

$$f_5(v_iv_{i+2})=\begin{cases}f_1(v_iv_{i+2}), & \text{untuk } 1\le i\le\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-2\\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } i=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\le i\le n-1\end{cases}$$

untuk $n\equiv 5(\text{mod } 14)$

$$f_5(v_iv_{i+2})=\begin{cases}f_1(v_iv_{i+2}), & \text{untuk } 1\le i\le\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } i=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\le i\le n-1\end{cases}$$

$$f_5(v_iv_{i+3})=f_4(v_iv_{i+3}),\qquad \text{untuk } 1\le i\le n-3$$

$f_5(v_n v_1) = f_5(v_n v_2) = f_5(v_n v_3) = f_5(v_{n-1} v_1) = f_5(v_{n-1} v_2) = f_5(v_{n-2} v_1) = 1.$

Menggunakan pelabelan di atas maka f_5 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_5(v_i)$ adalah bobot simpul v_i, maka

$w_5(v_i) = f_5(v_i) + f_5(v_i v_{i+1}) + f_5(v_{i-1} v_i) + f_5(v_i v_{i+2}) + f_5(v_{i-2} v_i) + f_5(v_i v_{i+3}) + f_5(v_{i-3} v_i)$

Dari rumus diatas diperoleh,

$$w_5(v_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i = 1 \\ 4 + 2i, & \text{untuk } 2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \\ 2n + 9 - 2i, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le i \le n \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ke $w_5(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7, 8, 9, \dots, (n + 6)$. Karena $f(V \cup E) = \left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda, maka untuk $n \equiv 5 \bmod 7$ dapat disimpulkan $tvs(C_n(1,2,3)) \le \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil$.

Kasus 6. $n \equiv 6 \pmod 7$

Label simpul-simpul dan busur-busur dari $C_n(1,2,3)$ dengan pelabelan f_6 sebagai berikut.

$$f_6(v_i) = f_4(v_i), \qquad \text{untuk } 1 \le i \le n$$

$$f_6(v_i v_{i+1}) = f_4(v_i v_{i+1}), \qquad \text{untuk } 1 \le i \le n - 1$$

untuk $n \equiv 13 (\text{mod } 14)$

$$f_6(v_iv_{i+2}) = \begin{cases} f_1(v_iv_{i+2}), & \text{untuk } 1 \le i \le \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 2 \\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \text{ dan } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1 \\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \text{ dan } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

untuk $n \equiv 6 \pmod{14}$

$$f_6(v_iv_{i+2}) = \begin{cases} f_1(v_iv_{i+2}), & \text{untuk } 1 \le i \le \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 2 \text{ dan } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil, & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \text{ dan } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1 \\ f_1(v_iv_{i+1}), & \text{untuk } \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$f_6(v_iv_{i+3}) = f_4(v_iv_{i+3}), \qquad \text{untuk } 1 \le i \le n-3$$

$f_6(v_nv_1) = f_6(v_nv_2) = f_6(v_nv_3) = f_6(v_{n-1}v_1) = f_6(v_{n-1}v_2) = f_6(v_{n-2}v_1) = 1$.

Menggunakan pelabelan di atas maka f_6 adalah pemetaan dari $V \cup E$ pada bilangan $\left\{1, 2, 3, \ldots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap simpul di $C_n(1,2,3)$ berbeda. Misalkan $w_6(v_i)$ adalah bobot simpul v_i maka,

$w_6(v_1) = f_6(v_i) + f_6(v_iv_{i+1}) + f_6(v_{i-1}v_i) + f_6(v_iv_{i+2}) + f_6(v_{i-2}v_i) + f_6(v_iv_{i+3}) + f_6(v_{i-3}v_i)$

Dari rumus diatas diperoleh,

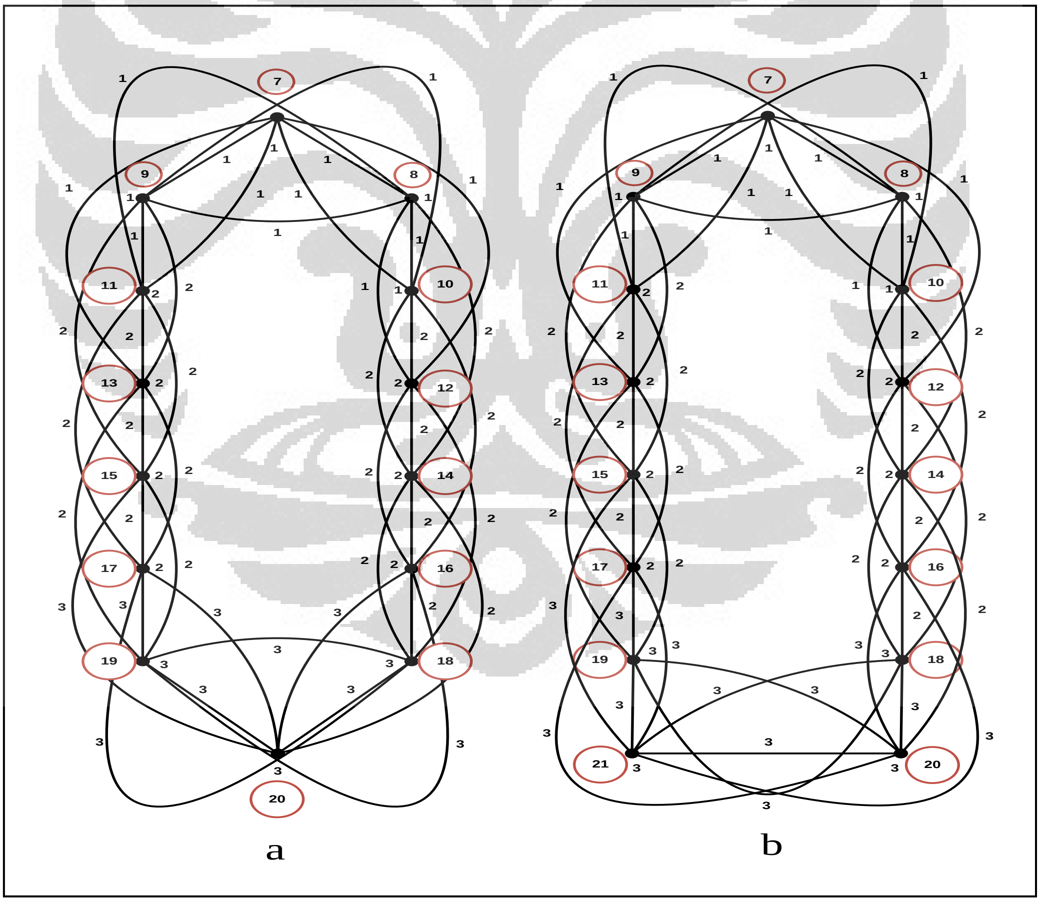
$$w_6(v_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i = 1 \\ 4 + 2i, & \text{untuk } 2 \le i \le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 \\ 2n + 9 - 2i, & \text{untuk } \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2 \le i \le n \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ke $w_6(v_i)$ diperoleh bobot simpul merupakan bilangan berurutan $7, 8, 9, \ldots, (n+6)$. Karena $f(V \cup E) =$

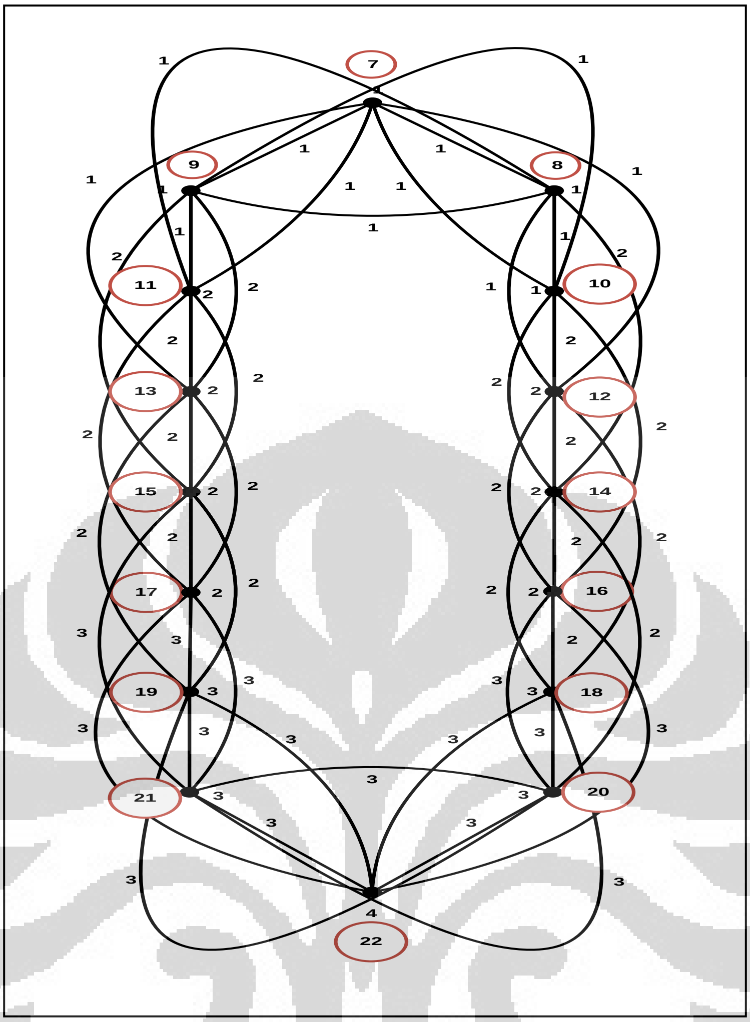
$\left\{1, 2, 3, \dots, \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil\right\}$ dan bobot setiap simpul berbeda, maka untuk $n \equiv 6 \bmod 7$ dapat disimpulkan $tvs(C_n(1,2,3)) \leq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$.

Dari 6 kasus diatas yang akan berlaku untuk semua n, maka nilai $tvs\big(C_n(1,2,3)\big) \leq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$. Karena $tvs\big(C_n(1,2,3)\big) \leq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$ dan $tvs\big(C_n(1,2,3)\big) \geq \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$ maka $tvs\big(C_n(1,2,3)\big) = \left\lceil\frac{n+6}{7}\right\rceil$. ■

Untuk memperjelas fungsi pelabelan yang didefinisikan pada bukti Teorema 3.2, akan diberikan visualisasi untuk seluruh kasus, di mulai dari kasus 1, yaitu untuk $n \equiv 0, 1 \pmod 7$. Pada Gambar 3.2 diberikan pelabelan total takteratur simpul untuk yaitu *n* = 14 (0 mod 7) (Gambar 3.2.a) dan *n* = 15 (1 mod 7) (Gambar 3.2.a) dengan $tvs\big(C_{14}(1,2,3)\big) = tvs\big(C_{15}(1,2,3)\big) = 3$.



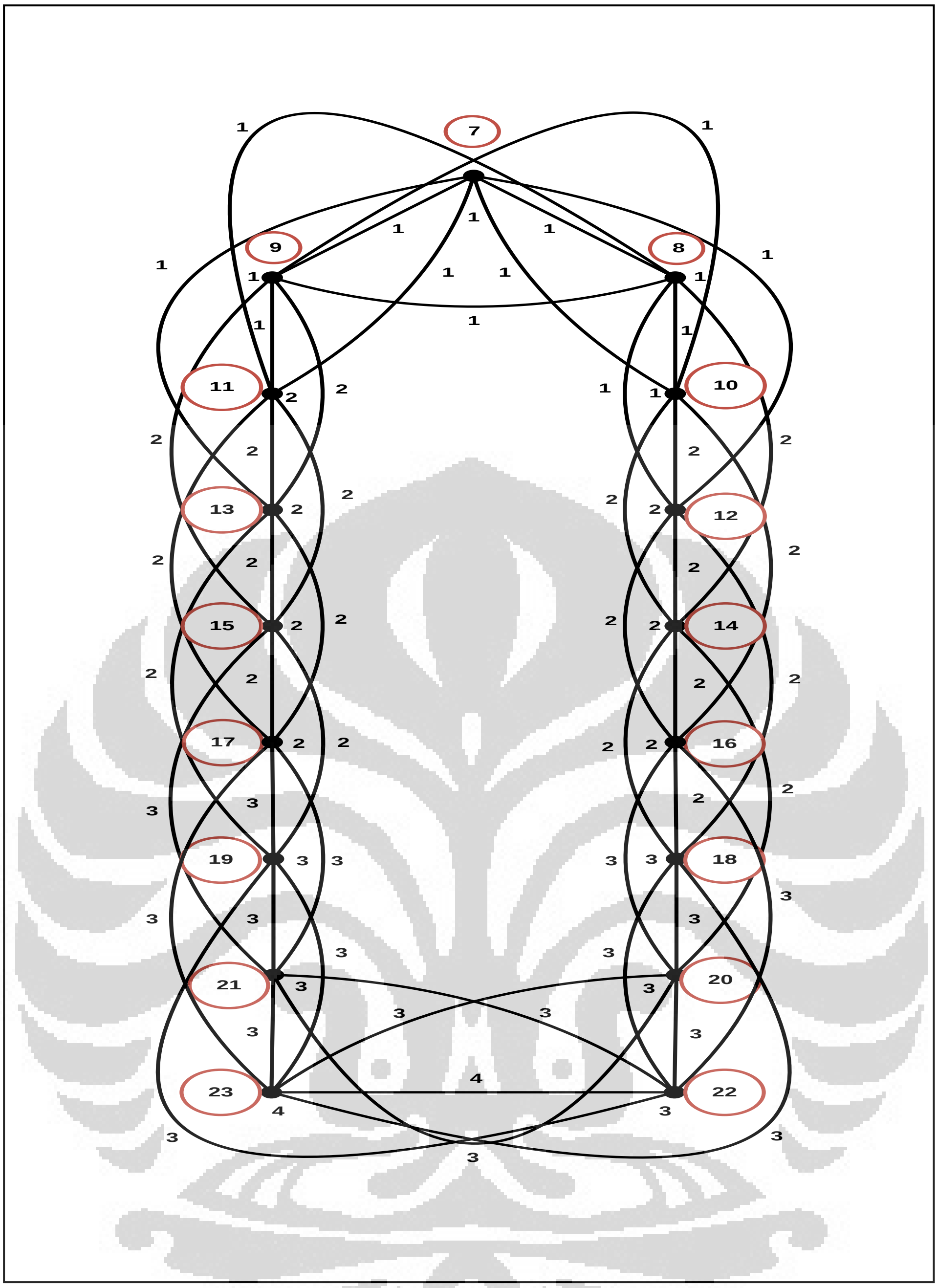
Gambar 3.2 Pelabelan total takteratur simpul pada $C_{14}(1,2,3)$ dengan $tvs\big(C_{14}(1,2,3)\big) = 3$ (a) dan $C_{15}(1,2,3)$ dengan $tvs\big(C_{15}(1,2,3)\big) = 3$ (b)



Gambar 3.3 Pelabelan total tak teratur simpul pada $C_{16}(1,2,3)$ dengan

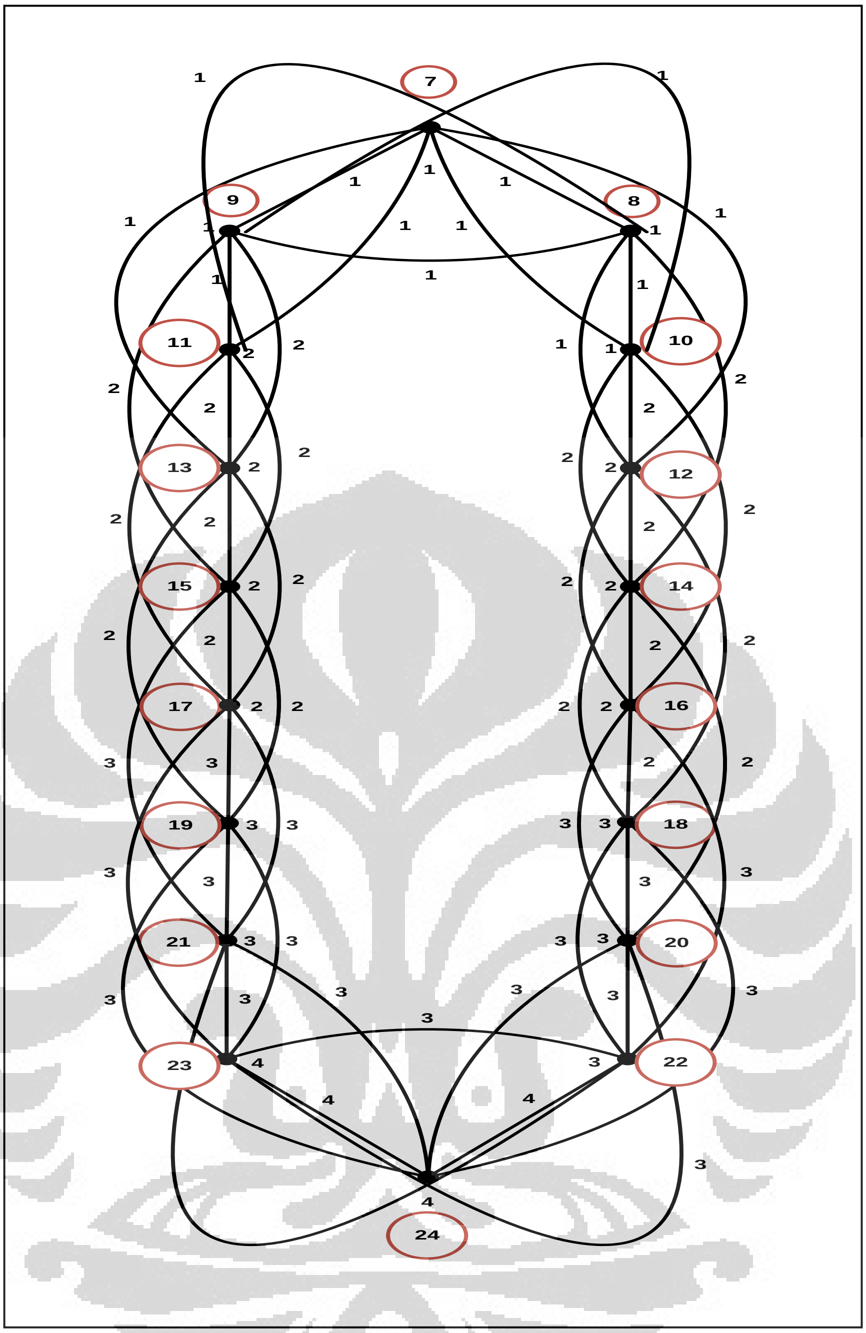
$$tvs\big(C_{16}(1,2,3)\big) = 4$$

Pada Gambar 3.3 diberikan contoh pelabelan total ketakteraturan simpul pada kasus 2 dengan n = 16 (2 mod 7) dengan $tvs(C_{16}(1,2,3)) = 4$. Label terbesar terletak pada simpul ke-9 ($f_2(v_9)$).



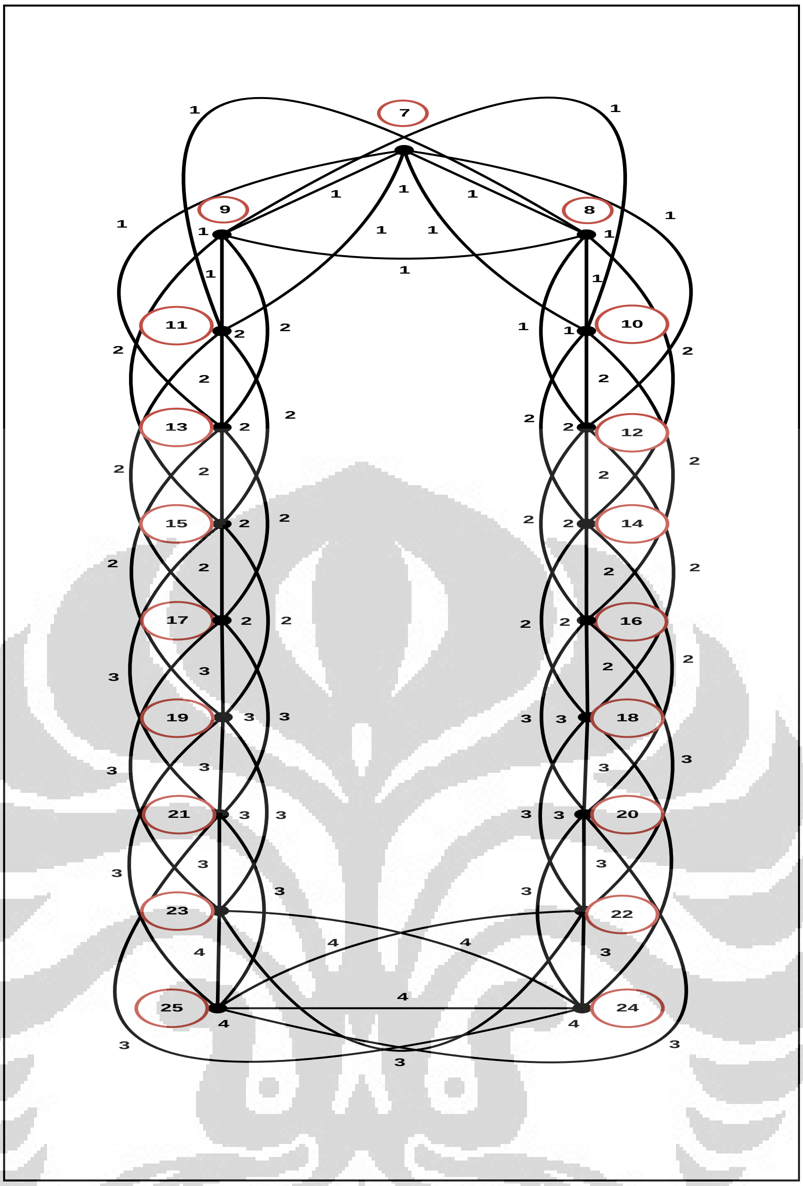
Gambar 3.4 Pelabelan total takteratur simpul pada $C_{17}(1,2,3)$ dengan $tvs\left(C_{17}(1,2,3)\right) = 4$

Pada Gambar 3.4 diberikan contoh pelabelan nilai total ketakteraturan simpul pada kasus 3 dengan n = 17 (3 mod 7) dengan $tvs(C_{17}(1,2,3)) = 4$. Label terbesar terletak pada simpul ke-10 atau $f_3(v_{10})$ dan pada busur $f_3(v_9 v_{10})$.



Gambar 3.5 Pelabelan total takteratur simpul pada $C_{18}(1,2,3)$ dengan $tvs\left(C_{18}(1,2,3)\right) = 4$

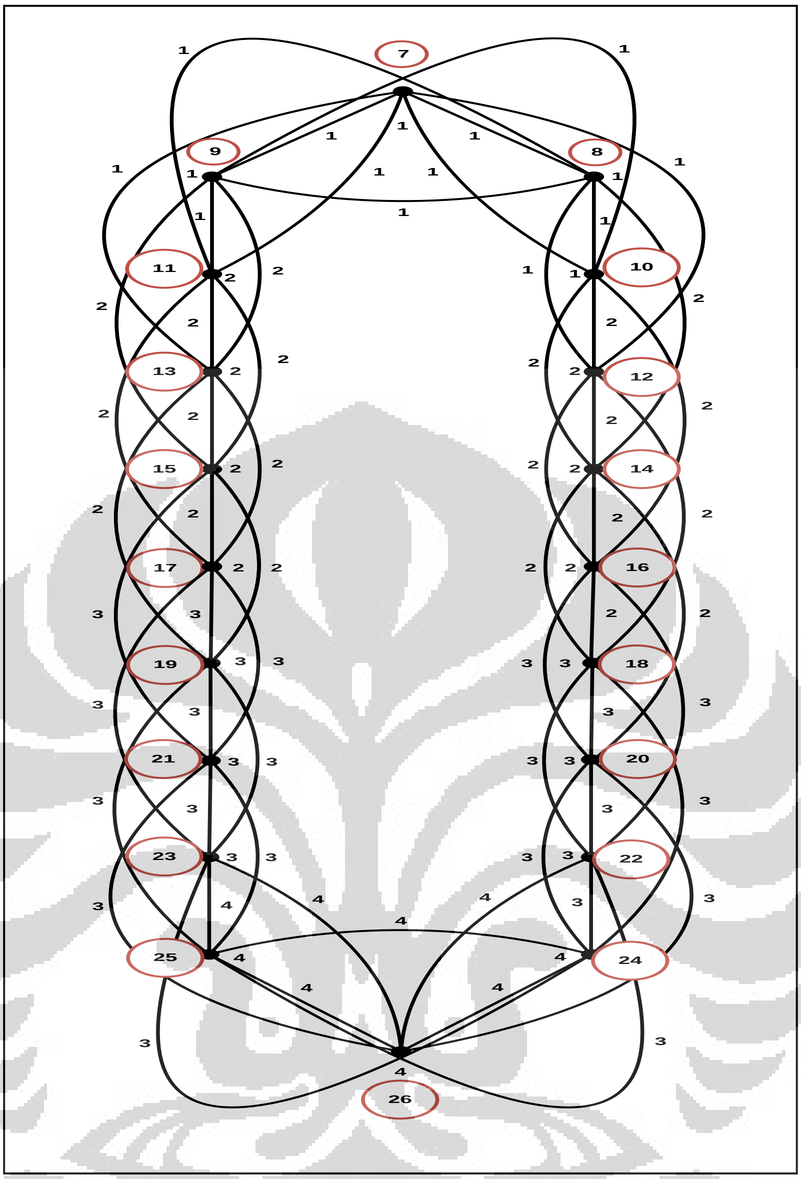
Pada Gambar 3.5 diberikan contoh pelabelan total ketakteraturan simpul pada kasus 4 dengan *n* =18 (4 mod 7) dengan $tvs(C_{18}(1,2,3)) = 4$. Label terbesar yaitu 4 terletak pada $f_4(v_{10})$ dan $f_4(v_{11})$ dan pada busur $f_4(v_9v_{10})$ dan $f_4(v_{10}v_{11})$.



Gambar 3.6 Pelabelan total takteratur simpul pada $C_{19}(1,2,3)$ dengan

$$tvs\big(C_{19}(1,2,3)\big) = 4$$

Pada Gambar 3.6 diberikan contoh pelabelan total ketakteraturan simpul pada kasus 5 dengan *n* = 19 (5 mod 7) dengan $tvs(C_{19}(1,2,3)) = 4$, dengan label terbesar 4 terletak pada $f_5(v_{10})$ dan $f_5(v_{11})$ dan pada busur $f_5(v_9v_{11})$, $f_5(v_9v_{11})$, $f_5(v_{10}v_{12})$ dan $f_5(v_{11}v_{12})$.



Gambar 3.7 Pelabelan total takteratur simpul pada $C_{20}(1,2,3)$ dengan $tvs\left(C_{20}(1,2,3)\right) = 4$

Pada Gambar 3.7 diberikan contoh pelabelan total ketakteraturan simpul pada kasus 6 dengan n = 20 (6 mod 7) dengan $tvs(C_{20}(1,2,3)) = 4$. Label terbesar, yaitu 4, terletak pada $f_6(v_{10})$, $f_6(v_{11})$ dan $f_6(v_{12})$ dan pada busur $f_6(v_9v_{11})$, $f_6(v_{10}v_{11})$, $f_6(v_{10}v_{12})$, $f_6(v_{11}v_{12})$, $f_6(v_{11}v_{13})$ dan $f_6(v_{12}v_{13})$.

BAB 4
KESIMPULAN

Pada skripsi ini telah dibahas konstruksi pelabelan total ketakteraturan simpul pada graf $C_n(1,2,3)$ dengan $tvs\left(C_n(1,2,3)\right) = \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil$. Pelabelan total ketakteraturan simpul pada graf sirkulan $C_n(1,2,3)$ sebenarnya telah dikonstruksi oleh Anholcer (2011), akan tetapi konstruksi yang diperoleh pada skripsi ini tidak sama dengan konstruksi Anholcer. Hal ini menunjukkan pelabelan nilai total ketakteraturan simpul pada graf $C_n(1,2,3)$ tidaklah unik.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, A. 2005. *On Irregular Total Labelings*, Disertasi, Abdus Salam School of Mathematical Sciences GC University, Lahore, Pakistan.

Anholcer, M. 2011. Irregular Labellings of Circulant Graphs. Pozna´n University of Economics, Pozna´n, Poland, *preprint*.

Bača M., S. Jendrol , M. Miller and J. Ryan. 2007. On Irregular Total Labellings, Discrete Math. 307. 1378-1388.

Baril, J.-L., Kheddouci H., Togni, O. 2005. The Irregularity Strength of Circulant Graphs. *Discrete Mathematics* 304, 1 – 10.

Chartrand G., Jacobson M.S., Lehel J., Oellermann O.R., Ruiz S., Saba F. 1988. Irregular Networks, *Congressus Numerantium* 64, 187 - 192.

Gallian, J. A. 2009. A Dynamic Survey of Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics 5 , #DS6.

Nurdin. 2010. *Nilai Total Ketakteraturan dari Suatu Graf*. Disertasi. Departemen Matematika, Institut Teknologi bandung.

Rosen, K.H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

West, D. B. 2002. Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall International, Inc.