UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN GRACEFUL-BUSUR PADA GRAF CATERPILLAR TAK TERATUR

SKRIPSI

STEFANO
0606067824

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN GRACEFUL-BUSUR PADA GRAF CATERPILLAR TAK TERATUR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

STEFANO
0606067824

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Stefano
NPM	: 0606067824
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 13 Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Stefano
NPM	:	0606067824
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Pelabelan Graceful-Busur pada Graf Caterpillar Tak Teratur

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	( )
Pembimbing II	: Dra. Denny R. Silaban, M.Kom.	( )
Penguji	: Arie Wibowo S.Si., M.Si.	( )
Penguji	: Dr. Sri Mardiyati M.Kom.	( )
Penguji	: Dra. Siti Aminah M.Kom.	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 13 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebanyak-banyaknya kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah:

1) Ibu Dr. Kiki Ariyanti Sugeng selaku pembimbing I skripsi sekaligus pembimbing akademis penulis dan Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom. selaku pembimbing II skripsi yang bersedia untuk meluangkan waktu, memberikan saran-saran dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2) Bapak Dr. Yudi Satria, Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech. dan Ibu Dr. Dian Lestari sebagai kepala Departemen Matematika, sekertaris Departemen Matematika, dan koordinator pendidikan atas bantuan dan dukungannya dalam mempermudah prosedur penyelesaian tugas akhir dan sampai wisuda.
3) Seluruh staf pengajar di Departemen Matematika UI, terima kasih atas segala ilmu dan pelajaran yang telah diberikan.
4) Pak Saliman, Mba Santi, Mba Rusmi, Mas Ansori, dan seluruh karyawan di Departemen Matematika UI, terima kasih atas segala bantuan dan kemudahan yang telah diberikan untuk penulis.
5) Mendiang Papa yang telah banyak memberikan nasehat serta menjadi teladan yang hebat bagi anak-anaknya hingga saat terakhirnya. Mama yang selalu memberikan doa dan dukungan bagi penulis.

6) Usagi dan Bagus sebagai kakak penulis yang selalu memberikan pengalaman mereka sebagai pembelajaran, dukungan baik materi maupun moral, dan perdebatan yang seru.
7) Priscilla Ayu Natalia Nuyten yang telah banyak menghabiskan waktu, pikiran dan memberikan kasih sayang kepada penulis dikala bimbang dan kehilangan semangat.
8) Rita, Syaf, Lee, Yuri, Aliman, Yuko, Ojak, Budi, Bara, Rendy, Mekel, Bekti terima kasih atas semua kegembiraan, keseruan, keusilan, dan lika-liku yang sangat berkesan.
9) Luthfi, Karis, Dito, Affa, Imam, Agung, Bayu, Ricon, Andre, Ade, Rijal, Cis, dan Wiyo yang telah menemani penulis selama di Pondok Bukit Pisang.
10) Teman-teman yang sering berdiskusi di depan gedung matematika sebagai tempat berbagi tawa, riang, semua ketidakjelasan serta menerawang masa depan bersama.
11) GGL (Grup Graf Labeling) terdiri dari Andi, Hikmah, Siti serta penulis yang selalu bersama dalam suka maupun duka selama proses penulisan skripsi.
12) Teman-teman seperjuangan skripsi Tika, Zul, Adi, Yos, Dheni, Misda, Syahrul, Riski, Siska, Putri, yang selalu meramaikan perpus matek selama pengerjaan skripsi.
13) Teman-teman 2006: Teguh, Tino, Muhardani, Rama, Dodi, Rafly, Ali, Sutisna, Pangky, Rita,Anggha, Oppie, Mei, Inne, Rizkyatul, Rahanti, Stefani, Alfa, Mella, Milla, Tami, Annisa, Widya, Latief, Hot, Noor, Farah, Putri Helmet, Dian, Purwita, Nurgi, Lena, Nadia, Reza, Rifza, Yunita, Indra, Puspa, Febrian, Rendy, Poe, Tasya, Billy, Rahmanita, Kiki, Nobo, Tika, Rontu, Lani, Dita untuk kebersamaan yang telah dijalani.
14) Teman-teman Matematika UI angkatan 2004, 2005, 2007, 2008, 2009, 2010
15) Dan semua orang yang namanya tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang telah mendoakan, mendukung, mengingatkan, mengajarkan, menegur, menginspirasi penulis baik dalam penulisan skripsi ini maupun dalam kehidupan penulis sehari-hari.

Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurang-an dalam skripsi ini. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Stefano
NPM	: 0606067824
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: FMIPA
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pelabelan Graceful-Busur pada Graf Caterpillar Tak Teratur

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : Desember 2011

Yang menyatakan

(Stefano)

ABSTRAK

Nama : Stefano
Program Studi : Matematika
Judul : Pelabelan Graceful-Busur pada Graf Caterpillar Tak Teratur

Graf $G = (V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan tak kosong simpul V dan himpunan busur E. Pelabelan pada graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul dan atau himpunan busur dari graf ke suatu himpunan bilangan, biasanya ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan graceful-busur pada graf G adalah fungsi bijektif $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi pemetaan bijektif $f^+ : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |V| - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^+(v) = \sum f(uv) \pmod{|V|}$ dengan $uv \in E$. Pada skripsi ini dibuktikan bahwa graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1, r_2 berbeda paritas dan graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, untuk nilai r_i, $i = 1, \dots, m$ tertentu memiliki pelabelan graceful-busur.

Kata Kunci : pelabelan graceful-busur, graf caterpillar tak teratur, graf bintang ganda.
xiii+42 halaman : 10 gambar
Daftar Pustaka : 10 (1988-2011)

ABSTRACT

Name : Stefano
Program Study : Mathematics
Title : Edge-Graceful Labeling on non-Regular Caterpillar Graphs

Graph $G = (V, E)$ is a system contains of a nonempty set of vertices V and a set of edges E. Labeling on a graph G is a mapping from Vor E or both to nonnegative integer set. An edge-graceful labeling on graph G is a bijection $f : E \to \{1, 2, \dots, |E|\}$ which induce a bijection $f^+ : V \to \{0, 1, 2, \dots, |V| - 1\}$ defined by $f^+(v) = \sum f(uv) \pmod{|V|}$ where $uv \in E$. The edge graceful labeling construction of double star graph S_{r_1,r_2} where r_1, r_2 have different parity and non-regular caterpillar graphs $S_{r_1,r_2,\dots,r_m}$for special value of r_i , $i = 1, \dots, m$,will be shown in this *skripsi*.

Key Words : edge-graceful labeling, non-regular caterpillar graph, double star graph
xiii+42 pages : 10 pictures
Bibliography : 10 (1988-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan secara formal oleh Rosa pada tahun 1967 (Gallian, 2010). Pelabelan graf merupakan cabang dari pengembangan teori graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan yang memetakan himpunan simpul dan atau himpunan busur dari graf ke suatu himpunan bilangan, biasanya ke himpunan bilangan bulat positif. Beberapa jenis pelabelan sudah ditemukan antara lain adalah pelabelan ajaib, pelabelan harmonis, pelabelan graceful, pelabelan graceful-busur, dan masih banyak jenis lainnya.

Suatu graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan suatu himpunan tak kosong, dan E merupakan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut dari anggota-anggota himpunan V. Anggota dari V disebut simpul dari G, dan anggota dari E disebut busur dari G. Banyaknya anggota Vditulis $n = |V|$ dan $e = |E|$ untuk banyaknya anggota E. Banyaknya anggota V di graf G biasa disebut dengan order dari G (Hartsfield dan Ringel, 1990). Beberapa graf khusus telah dikenal seperti graf lintasan, graf lingkaran, graf pohon, graf lengkap, graf bipartit, graf kubik, graf Petersen, graf roda, graf sapu, graf caterpilar, dan masih banyak jenis lainnya.

Pada tahun 1967 Rosa memperkenalkan pelabelan-β yang kemudian dipopulerkan sebagai pelabelan graceful oleh Golomb (Gallian, 2010). Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf graceful jika terdapat fungsi injektif $g : V \to \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ sedemikian sehingga menginduksi pemetaan bijektif $g^* : E \to \{1, 2, \dots, |E|\}$ yang didefinisikan oleh $g^*(ab) = |g(a) - g(b)|$ untuk setiap $ab \in E$ (Lee, Seah, dan Wang, 1990).

Pada tahun 1985, Lo memperkenalkan pelabelan graceful-busur. Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf graceful-busur jika terdapat fungsi bijektif $f : E \to \{1, 2, \dots, |E|\}$ sedemikian sehingga menginduksi pemetaan bijektif $f^+ : V \to \{0, 1, 2, \dots, |V| - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^+(u) = \sum_v f(uv) \pmod{|V|}$

dengan $uv \in E$. Nilai $f^{+}(u)$ juga disebut sebagai bobot simpul u. Syarat perlu suatu graf dengan n simpul dan e busur dapat dilabelkan secara graceful-busur adalah $e(e+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}$ (Lee, Kitagaki, Young dan Kocay, 2006).

Saat ini belum banyak kajian mengenai graf yang memiliki pelabelan graceful-busur. Beberapa contoh graf yang telah diteliti adalah graf *grid* (Lee dkk, 2002), graf lengkap (Lee, Lee, dan Murthy, 1988), graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, graf *superstar* (Alifah, 2005), dan graf caterpillar teratur (Triputra, 2011). Masih banyak graf yang belum diketahui apakah dapat dilabelkan secara graceful-busur atau tidak.Salah satu contoh kelas graf yang belum diteliti adalah graf caterpillar tak teratur. Penelitian ini dilakukan untuk melengkapi hasil penelitian mengenai pelabelan graceful-busur pada caterpillar teratur yang dilakukan oleh Triputra (2011). Oleh karena itu dalam skripsi ini akan dicari konstruksi pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkupnya

Bagaimanakah konstruksi pelabelan graceful-busur pada kelas graf caterpillar?

Dalam skripsi ini pembahasan dibatasi hanya untuk pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar takteratur, yaitu graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1, r_2 berbeda paritas dan graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, untuk nilai $r_i,\ i = 1, \dots, m$, tertentu.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Penelitian dilakukan dengan studi pustaka dari beberapa sumber seperti buku dan jurnal yang menunjang untuk menganalisa dan mengkonstruksi pelabelan graceful-busur pada kelas graf caterpillartak teratur.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengkonstruksi pelabelan graceful-busur pada kelas graf caterpillartak teratur, yaitu pelabelan graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1, r_2 berbeda paritas dan graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, untuk nilai $r_i,\ i = 1, \dots, m$, tertentu.

BAB 2

TEORI PENUNJANG

Pada Bab ini akan dipaparkan definisi-definisi dan beberapa istilah dalam teori graf, serta beberapa jenis graf, dan pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya. Bab ini ditutup dengan memberikan hasil pelabelan graceful-busur yang telah diketahui.

2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf

Graf G merupakansuatu pasangan himpunan (V, E) dimana V himpunan tak kosong, dan E himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut dari anggota-anggota himpunan V. Anggota himpunan Vdisebut **simpul** dari G, dan anggota himpunan E disebut **busur** dari G. Misalkan u dan v merupakan simpul dari graf G, u dikatakan **bertetangga** dengan v jika terdapat busur antara u dan v, biasanya ditulis dengan busur uv. Banyaknya anggota himpunan Vditulis $n = |V|$ dan $e = |E|$ untuk banyaknya anggota himpunan E. Banyaknya anggota himpunan V di graf G biasa disebut dengan **order** dari G dan banyaknya anggota himpunan E di graf G biasa disebut dengan **ukuran** dari G. Simpul u dikatakan **hadir** pada busur e, jika u merupakan titik ujung dari e.Busur e dikatakan hadir pada simpul u, jika u merupakan titik ujung dari e (Hartsfield dan Ringel, 1990).

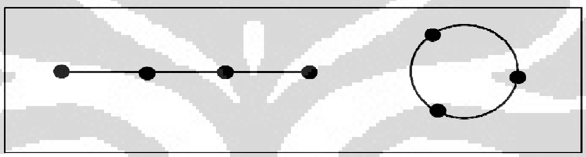
Derajat dari suatu simpul $v$merupakan banyaknya busur yang hadir pada v. Simpul yang memiliki derajat 0 disebut **simpul terpencil** dan simpul yang ber-derajat 1 disebut **simpul ujung** atau **daun**. Graf G dengan derajat k dikatakan **teratur**, atau k-teratur, jika setiap simpul di G berderajat k (Hartsfield dan Ringel, 1990).

Graf G dengan jumlah simpulnya $n + 1$ simpul yaitu simpulnya $v_0, v_1, \dots, v_n$ dengan n busur $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ merupakan **lintasan** dengan panjang n. Suatu graf G dikatakan **terhubung** jika untuk sembarang dua simpul u dan v pada G terdapat lintasan dari u ke v (Hartsfield dan Ringel, 1990).

Subgraf dari graf G adalah suatu graf H dimana setiap simpulnya merupakan simpul dari G dan setiap busur dari H merupakan busur dari G. Jadi, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Misalkan diberikan graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, sehingga **gabungan** dari graf G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, yaitu graf dimana $V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$ (Hartsfield dan Ringel, 1990).

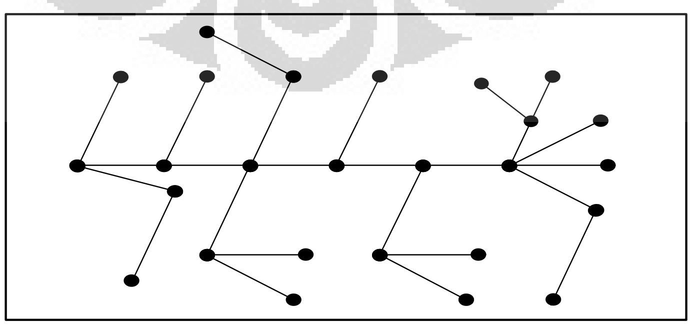
2.2 Jenis-jenis Graf

Pada sub bab ini akan dibahas tentang beberapa jenis graf yang sudah dikenal secara umum dan akan dipakai pada bab selanjutnya.



Gambar 2.1 Graf lintasan P_4 dan graf lingkaran C_3

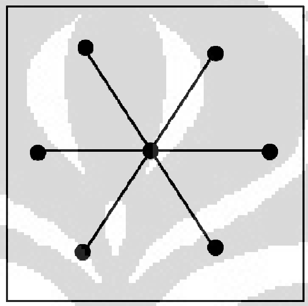
Graf **lintasan** P_n adalah graf dengan $n + 1$ simpul yaitu simpulnya $v_0, v_1, \ldots, v_n$ dengan n busur $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n$. Simpul v_0 disebut simpul awal dan simpul v_n disebut simpul akhir. Simpul $v_1, \ldots, v_{n-1}$ berderajat dua kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir. Graf **lingkaran** C_n adalah graf dengan n simpul yaitu $v_0, v_1, \ldots, v_n$ dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3 \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf lintasan P_4 dan graf lingkaran C_3.



Gambar 2.2 Graf pohon

Graf **pohon** merupakan graf terhubung yang tidak memiliki subgraf berupa lingkaran (Hartsfield dan Ringel, 1990). Pada Gambar 2.2 diberikan contoh graf pohon.

Graf **bintang** S_{n-1} merupakan graf yang dibangun dari suatu simpul pusat dengan menambahkan $n-1$ simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki n simpul dan $n-1$ busur (Choudum dan Kishore, 1996). Pada Gambar 2.3 memberikan contoh graf bintang S_6.



Gambar 2.3 Graf bintang $\boldsymbol{S_6}$

Graf **caterpillar** $S_{r_1,\dots,r_m}$ merupakan graf yang dibangun dari suatu lintasan P_m dengan menambahkan sejumlah daun pada setiap lintasan tersebut. Lintasan P_m pada graf caterpillar disebut **tulang belakang** atau ***backbone***.r_i daun pada simpul pusat $c_i \in P_m$, dimana $r_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,m$

$$V\left(S_{r_1,r_2,\dots,r_m}\right) = \{c_i | i = 1,2,\dots,m\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{{x_i}^j | j = 1,2,\dots,r_i\}$$

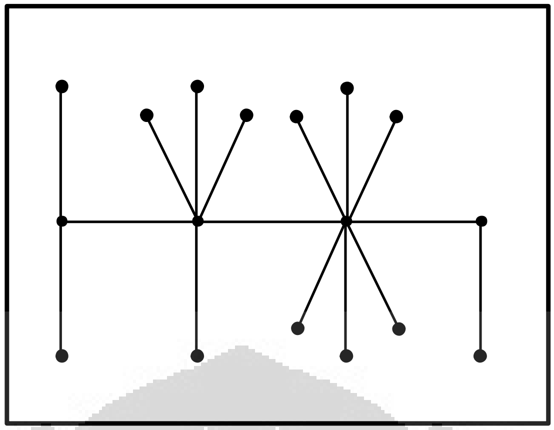
$$E\left(S_{r_1,r_2,\dots,r_m}\right) = \{c_i c_{i+1} | i = 1,2,\dots,m-1\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{c_i {x_i}^j | j = 1,2,\dots,r_i\}.$$

$$\left|V\left(S_{r_1,r_2,\dots,r_m}\right)\right| = m + \sum_{i=1}^{m} r_i$$

$$\left|E\left(S_{r_1,r_2,\dots,r_m}\right)\right| = m - 1 + \sum_{i=1}^{m} r_i$$

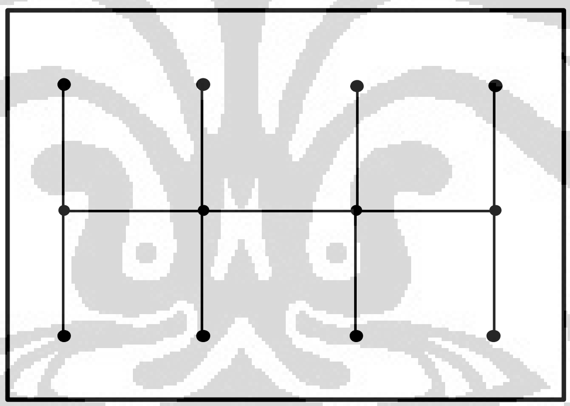
(Sugeng, dkk, 2005).

c_i menyatakan simpul pusat ke-i dan v_i^j menyatakan simpul daun ke-j dari simpul pusat ke-i dari graf caterpillar. Pada Gambar 2.4 diberikan graf caterpillar $S_{2,4,6,1}$



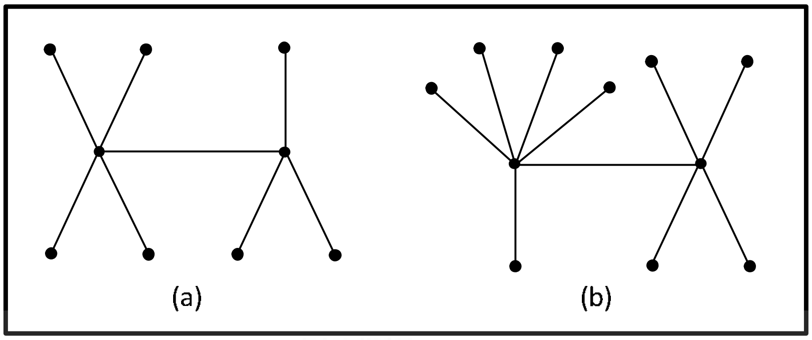
Gambar 2.4 Graf caterpillar $\boldsymbol{S_{2,4,6,1}}$

Graf **caterpillar dikatakan teratur** jika $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m$ dan $m \geq 2$. Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf caterpillar teratur $S_{2,2,2,2}$



Gambar 2.5 Graf caterpillar teratur $\boldsymbol{S_{2,2,2,2}}$

Graf **bintang ganda** S_{r_1,r_2} merupakan graf caterpillar $S_{r_1,r_2,\dots,r_m}$ dengan $m = 2$. Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf bintang ganda $S_{4,3}$ (r_1 genap, r_2 ganjil) dan graf bintang ganda $S_{5,4}$ (r_1 ganjil, r_2 genap).



Gambar 2.6 (a) Graf bintang ganda $S_{4,3}$ dan (b) graf bintang ganda $S_{5,4}$.

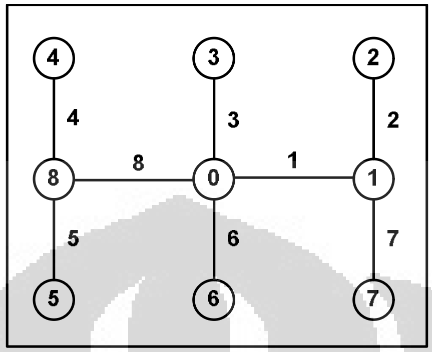
2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul dan atau himpunan busur dari graf ke suatu himpunan bilangan, biasanya ke himpunan bilangan bulat positif. Sampai saat ini banyak jenis pelabelan yang telah dikenal, salah satunya adalah pelabelan graceful (Gallian, 2010).

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf graceful jika terdapat fungsi injektif $g : V \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, |E|\}$ sedemikian sehingga menginduksi pemetaan bijektif $g^* : E \rightarrow \{1, 2, \ldots, |E|\}$ yang didefinisikan oleh $g^*(ab) = |g(a) - g(b)|$ untuk setiap $ab \in E$ (Lee, Seah, dan Wang, 1990).

Pada tahun 1985, Lo memperkenalkan graf graceful-busur. Suatu graf $G = (V, E)$ dengan n simpul dan e busur dikatakan **graceful-busur** jika terdapat fungsi bijektif $f : E \rightarrow \{1, 2, \ldots, |E|\}$ sedemikian sehingga menginduksi pemetaan bijektif $f^+ : V \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, |V| - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^+(u) = \sum_v f(uv) \pmod{|V|}$ dengan $uv \in E$. Nilai $f^+(u)$ juga disebut sebagai bobot simpul u. Syarat perlu suatu graf dapat dilabelkan secara graceful-busur adalah $e(e+1) \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod{n}$ (Lee, Kitagaki, Young,dan Kocay, 2006).

Pada Gambar 2.7 diberikan contoh pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar teratur $S_{2,2,2}$ Busur-busur pada $S_{2,2,2}$ dilabel dengan {1, 2, 3, …, 8}. Karena pada setiap simpul daun hanya satu busur yang hadir, maka bobot simpul-simpul daun sama dengan label busur yang hadir pada simpul tersebut, sedangkan bobot simpul-simpul pusat adalah jumlah label busur yang hadir pada simpul di mod dengan 9 (banyak simpul). Terlihat bahwa himpunan bobot simpul adalah {0, 1, 2, …, 8}.



Gambar 2.7 Pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar teratur $S_{2,2,\cdots,2}$

2.4 Hasil-Hasil yang Telah Diketahui

Pada Tabel 2.1 diberikan beberapa hasil yang telah diketahui untuk pelabelan graceful-busur pada beberapa jenis graf.

Tabel 2.1 Hasil pelabelan graceful-busur yang telah diketahui

Jenis Graf	**Penemu**	**Catatan/Persyaratan**
Graf lengkap K_n	Lee dkk, 1988	jika dan hanya jika $n \neq 2\ (mod\ 4)$
Graf *grid* $P_m \times P_n$	Lee dkk, 2002	jika dan hanya jika $m = n = 2$
Graf lintasan P_n	Alifah, 2005	jika n adalah bilangan ganjil
Graf lingkaran C_n	Alifah, 2005	jika n adalah bilangan ganjil
Graf bintang S_{n-1}	Alifah, 2005	jika n adalah bilangan ganjil
Graf caterpillar $S_{r_1,r_2,\ldots,r_m}$	Triputra, 2011	jika dan hanya jika mempunyai sejumlah ganjil simpul pusat (m) dan sejumlah genap simpul daun pada tiap pusatnya (r) (order ganjil)

Pada Bab 3 diberikan konstruksi pelabelan graceful-busur untuk graf caterpillar tak teratur. Konstruksi ini dilakukan untuk melengkapi hasil penelitian Triputra (2011) pada kelas graf caterpillar.

BAB 3

PELABELAN GRACEFUL-BUSUR PADA GRAF CATERPILLAR TAK TERATUR

Pada Bab 2 telah dijelaskan bahwa pelabelan graceful-busur untuk kelas graf caterpillar teratur telah dibuktikan oleh Triputra (2011). Maka untuk melengkapi pelabelan graceful-busur pada kelas graf caterpillar, pada bab ini akan diberikan kontruksi pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur yang dimulai dengan kelas graf bintang ganda. Pada Bab 2 telah dijelaskan bahwa suatu fungsi bijektif $f : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E|\}$ dikatakan pelabelan graceful-busur, jika f menginduksi suatu pemetaan bijektif $f^{+} : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |V| - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^{+}(u) = \sum_{v} f(uv) \pmod{|V|}$ dengan $uv \in E$ (Lee dkk, 2006). Untuk mengkonstruksi pelabelan dan menunjukkan bahwa konstruksi yang dibuat adalah graceful-busur, maka secara garis besar pembuktian dilakukan dengan alur sebagai berikut: definisikan fungsi pelabelan untuk busur, lalu ditunjukkan bahwa semua bobot simpul yang diperoleh dari pelabelan tersebut merupakan penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\mathrm{mod}|V|)$ dan membentuk barisan $0, 1, 2, \dots, |V| - 1$, dan pada akhirnya ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan tersebut adalah fungsi bijektif.

Dalam makalahnya, Lee dkk (2006) menyebutkan bahwa,Lo memberikan syarat agar suatu graf G dapat dilabelkan secara graceful-busur. Syarat perlu tersebut dituangkan dalam suatu teorema yang dikenal dengan kondisi Lo.

Teorema 3.1Kondisi Lo (Lee dkk, 2006)

Syarat perlu suatu graf terhubung G, dengan n simpul dan e busur, dapat dilabelkan secara graceful-busur adalah

$$e(e+1) \equiv \frac{n\,(n-1)}{2} (\mathrm{mod}\; n\,).$$

Bukti.

Misalkan G merupakan graf terhubung, dengan $|V| = n$ dan $|E| = e$. Jika G dapat dilabelkan secara graceful-busur, maka himpunan label busur di G adalah $\{1, 2, \dots, e\}$ dan himpunan label simpul di G adalah $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Karena setiap busur menghubungkan dua simpul, maka

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i) = 2\sum_{i=1}^{e} f(u_i) \ (\bmod n)$$

sedemikian sehingga,

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + e) \ (\bmod n)$$

$$\frac{(n-1)}{2}(1 + n - 1) = 2\left(\frac{e}{2}(1 + e)\right) \ (\bmod n).$$

Jadi,

$$\frac{n(n-1)}{2} = e(e+1)(\bmod n).$$

Maka syarat perlu suatu graf terhubung G, dengan n simpul dan e busur, dapat dilabelkan secara graceful-busur adalah $e(e+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \ (\bmod n)$■

3.1 Pelabelan Graceful-Busur pada Graf Bintang Ganda

Graf bintang ganda S_{r_1,r_2} merupakan graf yang terdiri dari dua graf bintang S_{r_1} dan S_{r_2} yang simpul pusatnya saling bertetangga. Graf bintang ganda memiliki sebanyak $n = r_1 + r_2 + 2$ simpul dan $e = r_1 + r_2 + 1 = n - 1$ busur. Graf bintang ganda merupakan kasus khusus dari graf caterpillar. Kondisi Lo digunakan untuk memeriksa apakah graf bintang ganda dapat dilabel dengan pelabelan graceful-busur. Dengan mensubstitusikan banyak simpul dan banyak busur graf bintang ganda ke kondisi Lo, akan didapatkan

$$e(e+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \ (\bmod n).$$

Karena $e = n - 1$, maka

$$(n-1)(n-1+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} (\bmod n)$$

$$(n-1)n \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}.$$

Observasi 3.1

Graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan $n = r_1 + r_2 + 2$ merupakan bilangan genap (order genap) tidak mempunyai pelabelan graceful-busur.

Penjelasan.

Jika n suatu bilangan genap, maka banyaknya busur $e = n - 1$ merupakan bilangan ganjil dan nilai $(n-1)n \equiv 0 \pmod{n}$. Sedangkan $\frac{n(n-1)}{2} \equiv a \pmod{n}$ dimana $a \neq 0$, sehingga untuk n bilangan genap, kondisi Lo tidak dapat dipenuhi.

Diketahui $n = r_1 + r_2 + 2$ bernilai genap, jika r_1, r_2 keduanya merupakan bilangan genap atau r_1, r_2 keduanya merupakan bilangan ganjil. Sehingga graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1, r_2 keduanya merupakan bilangan genap atau keduanya merupakan bilangan ganjil, dapat disimpulkan tidak mempunyai pelabelan graceful-busurdari Observasi 3.1.■

Observasi 3.2

Graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan $n = r_1 + r_2 + 2$ merupakan bilangan ganjil (order ganjil) dapat memenuhi kondisi Lo.

Penjelasan.

Jika n suatu bilangan ganjil, maka banyaknya busur $e = n - 1$ merupakan bilangan genap dan nilai $(n-1)n \equiv \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$. Sehingga untuk n bilangan ganjil, kondisi Lo terpenuhi.

Diketahui $n = r_1 + r_2 + 2$ bernilai ganjil jika r_1 dan r_2 berbeda paritas, yaitu jika r_1 bilangan genap dan r_2 bilangan ganjil atau r_1 bilangan ganjil dan r_2 bilangan genap.■

Berikut ini diberikan Teorema 3.2 mengenai pelabelan graceful-busur pada kelas graf bintang ganda dengan r_1 dan r_2 berbeda paritas (r_1 genap dan r_2 ganjil atau r_1 ganjil dan r_2 genap). Pembuktian diberikan untuk kasus r_1 genap dan r_2 ganjil dan kasus r_1 ganjil dan r_2 genap karena dapat memberikan konstruksi pelabelan yang berbeda.

Teorema 3.2

Graf bintang ganda S_{r_1,r_2}, memiliki pelabelan graceful-busur apabila r_1 dan r_2 berbeda paritas.

Bukti.

Dari Observasi 3.2 dapat disimpulkan bahwa pembuktian graf bintang ganda S_{r_1,r_2} mempunyai pelabelan graceful-busur dapat dibagi menjadi dua kasus: kasus pertama untuk r_1 genap dan r_2 ganjil dan kasus kedua untuk r_1 ganjil dan r_2 genap. Untuk tahap pembuktiannya dilakukan sebagai berikut, definisikan fungsi pelabelan untuk busur, lalu ditunjukkan bahwa semua bobot simpul yang diperoleh dari pelabelan tersebut merupakan penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\mathrm{mod}\ |V|)$ dan membentuk barisan $0, 1, 2, \dots, |V| - 1$, dan pada akhirnya ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan tersebut adalah fungsi bijektif. Nyatakan simpul-simpul pusat graf bintang ganda dengan c_1 dan c_2, simpul-simpul daun dari c_1 dengan $v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{r_1}$ dan simpul daun dari c_2 dengan $v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{r_2}$.

Kasus 1. r_1 genap, r_2 ganjil

Didefinisikan fungsi f yang memberi label busur-busur pada graf bintang ganda, yaitu $f : E(S_{r_1,r_2}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ sebagai berikut

$$f(c_1c_2) = 1$$

$$f(c_1v_1^j) = 1 + \frac{r_2 - 1}{2} + j, \quad j = 1, \dots, r_1$$

$$f(c_2v_2^j) = \begin{cases} 1 + j, & j = 1, \dots, \frac{r_2 - 1}{2} \\ 1 + r_1 + j, & j = \frac{r_2 + 1}{2}, \dots, r_2 \end{cases}.$$

Fungsi f tersebut menginduksi label simpul $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$f^+(v_i^j) = f(c_i v_i^j)(\mathrm{mod}\ n) \qquad i = 1,2\ ;\ 1 \le j \le_i r$$

dan

$$f^+(c_i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \\ 0 & , \quad i = 2 \end{cases}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f dan f^+ merupakan fungsi bijektif.

Pertama, akan dibuktikan $f : E(S_{r_1,r_2}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.

Jelas terlihat untuk f berlaku

$$f : \{c_1 c_2\} \to \{1\}$$

$$f : \left\{c_1 v_1^1, c_1 v_1^2 \dots, c_1 v_1^{r_1/2}, c_2 v_2^1, c_2 v_2^2 \dots, c_2 v_2^{r_2-1/2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 3}{2}, \dots\ , 2\right\}$$

$$f : \left\{c_1 v_1^{r_1+2/2}, c_1 v_1^{r_1+4/2} \dots, c_1 v_1^{r_1}, c_2 v_2^{r_2+1/2}, c_2 v_2^{r_2+3/2} \dots, c_2 v_2^{r_2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 7}{2}, \dots\ , e\right\}.$$

Jadi, bila diurutkan label untuk busur-busur pada graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1 genap dan r_2 ganjil, diperoleh

$$1, 2, \dots, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \dots\ , e.$$

Fungsi f merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap busur memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,r_2}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.

Kedua, akan dibuktikan $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ bijektif, dengan semua bobot simpul diperoleh dari penjumlahan label-label busur yang hadir pada simpul tersebut dengan operasi penjumlahan mod $|V|$.

Untuk simpul pusat diperoleh

$$f^+(c_i) = f(c_1 c_2) + \sum_{j=1}^{r_i} f(c_i v_i^j)\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Untuk $i = 1$

$$f^+(c_1) \;=\; f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right) (\text{mod } n) = 1 + \sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right) (\text{mod } n).$$

Akan ditunjukkkan bahwa $\sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right) (\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_1v_1^j$ dan $c_1v_1^{r_1+1-j}$, dimana $j = 1, \dots, \frac{r_1}{2}$.

$$\begin{aligned} f(c_1v_1^1) + f\left(c_1v_1^{r_1}\right)(\text{mod } n) \\ &= \left[1 + \frac{r_2-1}{2} + 1\right] + \left[1 + r_2 - \frac{r_2+1}{2} + r_1\right] (\text{mod } n) \\ &= r_1 + r_2 + 2 \;(\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n). \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} f\left(c_1v_1^{\frac{r_1}{2}}\right) + f\left(c_1v_1^{\frac{r_1}{2}+1}\right)(\text{mod } n) \\ &= \left[1 + \frac{r_2-1}{2} + \frac{r_1}{2}\right] + \left[1 + r_2 - \frac{r_2+1}{2} + \frac{r_1}{2} + 1\right] (\text{mod } n) \\ &= r_1 + r_2 + 2 (\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n). \end{aligned}$$

Karena $\sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right) (\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n)$ sehingga $f^+(c_1) \;=\; 1 + 0 \;(\text{mod } n) = 1 \;(\text{mod } n)$.

Untuk $i = 2$

$$f^+(c_2) \;=\; f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2v_2^j\right) (\text{mod} n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2v_2^j\right) (\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_2v_2^j$ dan $c_2v_2^{r_2-j}$, dimana $j = 1, \dots, \frac{r_2-1}{2}$ dan label pasangan busur c_1c_2 dan $c_2v_2^{r_2}$.

$$\begin{aligned} f\left(c_2v_2^{\frac{r_2-1}{2}}\right) + f\left(c_2v_2^{\frac{r_2+1}{2}}\right)(\text{mod } n) &= \left[1 + \frac{r_2-1}{2}\right] + \left[1 + r_1 + \frac{r_2+1}{2}\right] (\text{mod } n) \\ &= r_1 + r_2 + 2 \;(\text{mod } n) = 0 \;(\text{mod } n). \end{aligned}$$

$$\left(c_2 v_2^{\frac{r_2-3}{2}}\right) + f\left(c_2 v_2^{\frac{r_2+3}{2}}\right) (\mathrm{mod}\ n) = \left[1 + \frac{r_2-3}{2}\right] + \left[1 + r_1 + \frac{r_2+3}{2}\right] (\mathrm{mod}\ n)$$

$$= r_1 + r_2 + 2\ (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

$$\vdots$$

$$f(c_2 v_2^1) + f(c_2 v_2^{r_2-1}) (\mathrm{mod} n) = [1+1] + [1 + r_1 + r_2 - 1] (\mathrm{mod} n)$$

$$= r_1 + r_2 + 2\ (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

$$f(c_1 c_2) + f(c_2 v_2^{r_2}) (\mathrm{mod}\ n) = 1 + r_1 + r_2 + 1\ (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Karena $f(c_1 c_2) + \sum_{j=1}^{r_2} f(c_2 v_2^j)\ (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ sehingga $f^+(c_2) = 0\ (\mathrm{mod} n)$.

Terbukti bahwa

$$f^+(c_i) = \begin{cases} 1 & , i = 1 \\ 0 & , i = 2 \end{cases},$$

jadi

$$f^+ : \{c_1, c_2\} \to \{0, 1\}.$$

Untuk simpul daun, jelas bahwa $f^+(v_i^j) = \sum f(c_i v_i^j) \quad (\mathrm{mod}\ n)$ karena pada simpul daun hanya terdapat satu busur yang hadir. Sehingga,

$$f^+(v_i^j) = \sum f(c_i v_i^j) = f(c_i v_i^j)\ (\mathrm{mod} n), i = 1,2\ ;\ 1 \le j \le r_i.$$

Karena

$$f : \left\{c_1 v_1^1, c_1 v_1^2 \ldots,\ c_1 v_1^{r_1/2}, c_2 v_2^1, c_2 v_2^2 \ldots,\ c_2 v_2^{r_2-1/2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 3}{2}, \ldots\ , 2\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_1^1, v_1^2 \ldots,\ v_1^{r_1/2}, v_2^1, v_2^2 \ldots,\ v_2^{r_2-1/2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 - 3}{2}, \ldots\ , 2\right\}.$$

Dan karena

$$f : \left\{c_1 v_1^{r_1+2/2}, c_1 v_1^{r_1+4/2} \dots, c_1 v_1^{r_1}, c_2 v_2^{r_2+1/2}, c_2 v_2^{r_2+3/2} \dots, c_2 v_2^{r_2}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 7}{2}, \dots, e\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_1^{r_1+2/2}, v_1^{r_1+4/2} \dots, v_1^{r_1}, v_2^{r_2+1/2}, v_2^{r_2+3/2} \dots, v_2^{r_2}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 7}{2}, \dots, e\right\}.$$

Jadi, untuk simpul daun didapatkan

$$f^+(v_i^j) \in \left\{2, \dots, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \dots, e.\right\}.$$

Bila diurutkan label untuk simpul-simpul pada graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1 genap dan r_2 ganjil, diperoleh

$$0, 1, \dots, \frac{r_1 + r_2 - 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 1}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 3}{2}, \frac{r_1 + r_2 + 5}{2}, \dots, e.$$

Fungsi f^+ merupakan fungsi pada karena seluruh label habis dipakai dan f^+ merupakan fungsi 1-1karena untuk tiap simpul memiliki label yang berbeda , sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{0,1, 2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif dengan $f^+(u) = \sum_v f(uv) \pmod n$.

Jadi, dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{1,2, \dots, e\}$ dan $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{0,1,2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif.

Kasus 2. r_1 ganjil, r_2 genap

Didefinisikan fungsi f yang melabelkan busur-busur pada graf bintang ganda, yaitu $f : E(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{1, 2, \dots, e\}$ sebagai berikut

$$f(c_1 c_2) = 1$$

$$f(c_1 v_1^j) = \begin{cases} 1 + \frac{r_2}{2} + j, & j = 1, \dots, r_1 - 1 \\ 1 + r_1 + r_2, & j = r_1 \end{cases}$$

$$(c_2 v_2^j) = \begin{cases} 2 + \frac{r_2}{2} - j, & j = 1, \dots, \frac{r_2}{2} \\ r_1 + j, & j = \frac{r_2}{2} + 1, \dots, r_2 \end{cases}.$$

Fungsi f tersebut menginduksi label simpul $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$f^+(v_i^j) = f(c_i v_i^j) (\text{mod } n) \qquad i \qquad = 1,2 \; ; \; 1 \leq j \leq r_i$$

dan

$$f^+(c_i) = \begin{cases} 0 & , i = 1 \\ 1 & , i = 2 \end{cases}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f dan f^+ merupakan fungsi bijektif.

Pertama, akan dibuktikan $f : E(S_{r_1,r_2}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.

Jelas terlihat untuk f berlaku

$$f : \{c_1 c_2\} \to \{1\}$$

$$f : \left\{c_1 v_1^1, c_1 v_1^2 \dots, c_1 v_1^{r_1-2}, c_1 v_1^{r_1-1}, c_2 v_2^1, c_2 v_2^2 \dots, c_2 v_2^{r_2/2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{2r_1 + r_2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 - 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 - 4}{2}, \dots, 2\right\}$$

$$f : \left\{c_1 v_1^{r_1}, c_2 v_2^{r_2+2/2}, c_2 v_2^{r_2+4/2} \dots, c_2 v_2^{r_2}\right\}$$

$$\to \left\{\frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 6}{2}, \dots, e\right\}.$$

Jadi, bila diurutkan label untuk busur-busur pada graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1 ganjil dan r_2 genap, maka diperoleh

$$1, 2, \dots, \frac{2r_1 + r_2 - 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \dots, e.$$

Fungsi f merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap busur memiliki label yang berbeda , sehingga dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,r_2}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.

Kedua, akan dibuktikan $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ bijektif, dengan semua bobot simpul diperoleh dari penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\text{mod } |V|)$.

Untuk simpul pusat diperoleh

$$f^+(c_i) \;=\; f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_i} f\left(c_i v_i^j\right) \;(\mathrm{mod}\; n\,).$$

Untuk $i = 1$

$$f^+(c_1) \;=\; f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1 v_1^j\right) (\mathrm{mod}\; n\,).$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right)\,(\mathrm{mod}\; n) = 0\;(\mathrm{mod}\; n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_1v_1^j$ dan $c_1v_1^{r_1-j}$, dimana $j = 1, \dots, \frac{r_1-1}{2}$ dan label pasangan busur c_1c_2 dan $c_1v_1^{r_1}$.

$$f(c_1v_1^1) + f\left(c_1v_1^{r_1-1}\right)(\mathrm{mod}\; n) = \left[1 + \frac{r_2}{2} + 1\right] + \left[1 + \frac{r_2}{2} + r_1 - 1\right](\mathrm{mod}\;\; n)$$

$$= r_1 + r_2 + 2\;(\mathrm{mod}\; n) = 0\;(\mathrm{mod}\; n).$$

$$\vdots$$

$$f\left(c_1v_1^{\frac{r_1-1}{2}}\right) + f\left(c_1v_1^{\frac{r_1+1}{2}}\right)(\mathrm{mod} n\,)$$

$$= \left[1 + \frac{r_2}{2} + \frac{r_1-1}{2}\right] + \left[1 + \frac{r_2}{2} + \frac{r_1+1}{2}\right](\mathrm{mod}\; n)$$

$$= r_1 + r_2 + 2\;(\mathrm{mod} n\,) = 0\;(\mathrm{mod}\; n).$$

$$f(c_1c_2) + f\left(c_1v_1^{r_1}\right)(\mathrm{mod}\; n\,) = [1] + [1 + r_1 + r_2](\mathrm{mod}\; n) = 0\;(\mathrm{mod}\; n).$$

Karena $f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1v_1^j\right)(\mathrm{mod}\; n\,) = 0\;(\mathrm{mod}\; n)$ sehingga $f^+(c_1) \;=$ $0\;(\mathrm{mod}\;\; n)$.

Untuk $i = 2$

$$f^+(c_2) \;=\; f(c_1c_2) + \sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2 v_2^j\right)(\mathrm{mod} n\,) = 1 + \sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2v_2^j\right)(\mathrm{mod}\; n\,).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2v_2^j\right)\,(\mathrm{mod}\; n) = 0\;(\mathrm{mod}\; n)$ dengan

menjumlahkan label pasangan busur $c_2v_2^j$ dan $c_2v_2^{\frac{r_2}{2}+j}$, dimana $j = 1, \dots, \frac{r_2}{2}$.

$$(c_2v_2^1)+f\left(c_2v_2^{\frac{r_2}{2}+1}\right)(\text{mod } n)=\left[1+\frac{r_2}{2}\right]+\left[r_1+\frac{r_2}{2}+1\right](\text{mod} n)$$

$$=r_1+r_2+2\ (\text{mod} n)=0\ (\text{mod } n).$$

$$\vdots$$

$$f\left(c_2v_2^{\frac{r_2}{2}}\right)+f\left(c_2v_2^{r_2}\right)(\text{mod } n)=[2]+[r_1+r_2](\text{mod } n)=r_1+r_2+2\ (\text{mod } n)$$

$$=0\ (\text{mod } n).$$

Karena $\sum_{j=1}^{r_2} f\left(c_2v_2^j\right)(\text{mod } n)=0\ (\text{mod } n)$ sehingga $f^+(c_2)\ =\ 1+0\ (\text{mod } n)=1\ (\text{mod } n)$.

Terbukti

$$f^+(c_i)=\begin{cases}0 & ,i=1\\ 1 & ,i=2\end{cases},$$

jadi

$$f^+:\{c_1,c_2\}\rightarrow\{0,1\}.$$

Untuk simpul daun, jelas bahwa $f^+\left(v_i^j\right)=\sum f(c_iv_i^j)\quad(\text{mod } n)$ karena pada simpul daun hanya terdapat satu busur yang hadir. Sehingga,

$$f^+\left(v_i^j\right)=\sum f(c_iv_i^j)=f(c_iv_i^j)\ (\text{mod} n),i=1,2\ ;\ 1\leq j\leq r_i.$$

Karena

$$f:\left\{c_1v_1^1,c_1v_1^2\ldots,\ c_1v_1^{r_1-2},c_1v_1^{r_1-1},c_2v_2^1,c_2v_2^2\ldots,\ c_2v_2^{r_2/2}\right\}$$

$$\rightarrow\left\{\frac{2r_1+r_2}{2},\frac{2r_1+r_2-2}{2},\frac{2r_1+r_2-4}{2},\ldots\ ,2\right\}$$

maka

$$f^+:\left\{v_1^1,v_1^2\ldots,\ v_1^{r_1-2},v_1^{r_1-1},v_2^1,v_2^2\ldots,\ v_2^{r_2/2}\right\}$$

$$\rightarrow\left\{\frac{2r_1+r_2}{2},\frac{2r_1+r_2-2}{2},\frac{2r_1+r_2-4}{2},\ldots\ ,2\right\}.$$

Dan karena

$$f : \left\{c_1 v_1^{r_1}, c_2 v_2^{r_2+2/2}, c_2 v_2^{r_2+4/2} \ldots,\ c_2 v_2^{r_2}\right\} \rightarrow \left\{\frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 6}{2}, \ldots\ , e\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_1^{r_1}, v_2^{r_2+2/2}, v_2^{r_2+4/2} \ldots,\ v_2^{r_2}\right\} \rightarrow \left\{\frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 6}{2}, \ldots\ , e\right\}.$$

Jadi, untuk simpul daun didapatkan

$$f^+(v_i^j) \in \left\{2, \ldots, \frac{2r_1 + r_2 - 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \ldots\ , e\right\}.$$

Jadi, bila diurutkan label untuk simpul-simpul pada graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1 ganjil dan r_2 genap, maka diperoleh

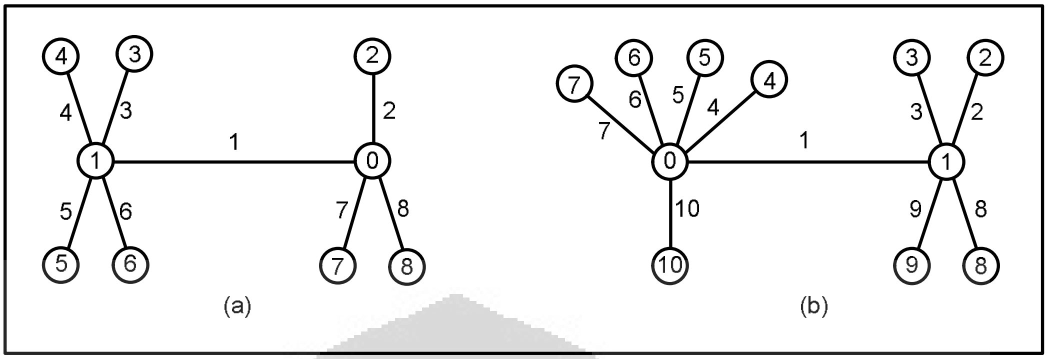
$$0, 1, 2, \ldots, \frac{2r_1 + r_2 - 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 2}{2}, \frac{2r_1 + r_2 + 4}{2}, \ldots\ , e.$$

Fungsi f^+ merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f^+ merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap simpul memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{0,\ 1, 2, \ldots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif dengan $f^+(u) = \sum_v f(uv)\ (\mathrm{mod}\, n)$.

Jadi, dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{1, 2, \ldots, e\}$ dan $f^+ : V(S_{r_1,r_2}) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif.

Dari pembuktian kedua kasus maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang ganda S_{r_1,r_2}, memiliki pelabelan graceful-busur apabila r_1 dan r_2 berbeda paristas.■

Pada Gambar 3.1 diberikan contoh pelabelan graceful-busur pada graf bintang ganda.



Gambar 3.1 Pelabelan graceful-busur graf bintang ganda (a) $S_{4,3}$ (r_1 genap, r_2 ganjil) dan (b) $S_{5,4}$ (r_1 ganjil, r_2 genap).

Pada subbab berikutnya akan diberikan pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur.

3.2 Pelabelan Graceful-Busur pada Graf Caterpillar Tak Teratur

Graf caterpillar $S_{r_1,\ldots,r_m}$ merupakan graf yang terdiri dari $m$graf bintang $S_{r_1}, \ldots, S_{r_m}$ yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Misalkan banyaknya simpul pada graf caterpillar adalah n dan banyaknya busur pada graf caterpillar adalah $e = n - 1$. Kondisi Lo akan digunakan untuk memeriksa apakah graf caterpillar dapat dilabel dengan pelabelan graceful-busur. Dengan mensubstitusi banyaknya simpul dan banyaknya busur graf caterpillar ke kondisi Lo, akan didapatkan persamaan sebagai berikut

$$e(e+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}.$$

Karena $e = n - 1$, maka

$$(n-1)(n-1+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}$$

$$(n-1)n \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}.$$

Observasi 3.3

Graf caterpillar $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan banyaknya simpul n merupakan bilangan genap (order genap) tidak mempunyai pelabelan graceful-busur.

Penjelasan.

Jika n suatu bilangan genap, maka banyaknya busur $e = n - 1$ merupakan bilangan ganjil dan nilai $(n-1)n \equiv 0 \ (\text{mod } n)$. Sedangkan $\frac{n(n-1)}{2} \equiv a (\text{mod } n)$ dimana $a \neq 0$, sehingga untuk n bilangan genap, kondisi Lo tidak dapat dipenuhi.■

Observasi 3.4

Graf caterpillar $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan banyaknya simpul n merupakan bilangan ganjil (order ganjil) dapat memenuhi kondisi Lo.

Penjelasan.

Jika n suatu bilangan ganjil, maka banyaknya busur $e = n - 1$ merupakan bilangan genap dan nilai $(n-1)n \equiv \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \ (\text{mod } n)$. Sehingga untuk n bilangan ganjil, kondisi Lo terpenuhi.

Jadi, pelabelan graceful-busur untuk graf caterpillar $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan banyaknya simpul ganjil memenuhi kondisi Lo.■

Tabel 3.1Kasus graf caterpillar $\boldsymbol{S_{r_1,\dots,r_m}}$ terhadap kondisi Lo

Jumlah simpul pusat (m)	**Jumlah bintang genap (k)**	**Jumlah bintang ganjil (l)**	**Memenuhi Kondisi Lo**
Genap	Genap	0	Tidak
	0	Genap	Tidak
	Genap	Genap	Tidak
	Ganjil	Ganjil	Ya
Ganjil	Ganjil	0	Ya
	0	Ganjil	Tidak
	Genap	Ganjil	Tidak
	Ganjil	Genap	Ya
	Ganjil	Ganjil	Tidak

Hasil dari Observasi 3.3 dan Observasi 3.4 dapat dirangkumkan dalam Tabel 3.1.

Graf caterpillar teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil sudah dibuktikan dapat dilabel dengan graceful-busur (Triputra, 2011). Selanjutnya akan dibahas untuk graf caterpilar tak teratur dengan m ganjil dan k ganjil. Sehingga didapatkan teorema mengenai pelabelan graceful-busur pada kelas graf caterpilar tak teratur dengan m ganjil dan k ganjil.

Teorema 3.3
Graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, memiliki pelabelan graceful-busur apabila jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil.

Bukti.
Graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan banyak simpul $n = \sum_{k=1}^{m} r_k + m$ dan banyak busur $e = \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1$, dari Tabel 3.1 diketahui bahwa graf caterpillar $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil dapat dilabel graceful-busur. Tahap pembuktiannya sebagai berikut definisikan fungsi pelabelan untuk busur, lalu ditunjukkan bahwa semua bobot simpul yang diperoleh dari pelabelan tersebut merupakan penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\text{mod } |V|)$ sehingga membentuk barisan $0, 1, 2, \dots, |V| - 1$, dan pada akhirnya ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan tersebut adalah fungsi bijektif. Misalkan c_i menyatakan simpul pusat ke-i dari graf caterpillar dan v_i^j menyatakan simpul daun ke-j dari simpul pusat ke-i, dimana $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, r_i$.

Label busur-busur caterpillar dengan $f : E\left(S_{r_1,\dots,r_m}\right) \to \{1, 2, \dots, e\}$ sebagai berikut

$$f\left(c_i v_i^j\right) = \begin{cases} \dfrac{(m-1) + \sum_{k=i+1}^{m} r_k + 2j}{2}, & i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, \dfrac{r_i}{2}, \\ \dfrac{(m-1) + \sum_{k=1}^{m} r_k + \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 2j - r_i}{2}, & i = 1, \dots, m;\ j = \dfrac{r_i}{2} + 1, \dots, r_i \end{cases}$$

$$(c_i c_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{2n-m+i}{2} &, \quad i \text{ ganjil} \\ \dfrac{i}{2} &, \quad i \text{ genap} \end{cases} \quad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Fungsi f tersebut menginduksi label simpul $f^+ : V\left(S_{r_1,\dots,r_m}\right) \to \{0,1,2,\dots,n-1\}$

$$f^+\left(v_i^j\right) = f\left(c_i v_i^j\right) (\mathrm{mod}\ n) \qquad 1 \le i \le m\,;\ 1 \le j \le r_i$$

dan

$$f^+(c_i) = \frac{2n-m+2i-1}{2} (\mathrm{mod}\ n), \qquad i = 1,2,\dots,m-1.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f dan f^+ merupakan fungsi bijektif.

Pertama, akan dibuktikan $f : E(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{1,2,\dots,e\}$ bijektif.

Jelas terlihat untuk f berlaku

$$f : \{c_i c_{i+1}, i \ \text{ genap}\} \to \left\{1,2,3,\dots,\frac{m-1}{2}\right\}$$

$$f : \{c_i c_{i+1}, i \ \text{ ganjil}\} \to \left\{\frac{2n-m+1}{2}, \frac{2n-m+3}{2}, \frac{2n-m+5}{2}, \dots, e\right\}$$

$$f : \left\{c_i v_i^j, i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots \frac{r_i}{2}\right\} \to \left\{{}^{e}\!/_{2}, {}^{e}\!/_{2} - 1, {}^{e}\!/_{2} - 2, \dots, \frac{m+1}{2}\right\}$$

$$f : \left\{c_i v_i^j, i = 1,\dots,m;\ j = \frac{r_i}{2} + 1,\dots,r_i\right\}$$

$$\to \left\{{}^{e}\!/_{2} + 1, {}^{e}\!/_{2} + 2, {}^{e}\!/_{2} + 3, \dots, \frac{2n-m-1}{2}\right\}.$$

Jadi, bila diurutkan label untuk busur-busur pada graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil, maka diperoleh

$$1,2,\dots,\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \dots\ {}^{e}\!/_{2} - 1, \frac{e}{2}, {}^{e}\!/_{2} + 1, {}^{e}\!/_{2}$$
$$+2,\dots, \frac{2n-m-1}{2}, \frac{2n-m+1}{2}, \frac{2n-m+3}{2}, \frac{2n-m+5}{2}, \dots, e.$$

Fungsi f merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap busur memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{1,2,\dots,e\}$ bijektif.

Kedua, akan dibuktikan $f^+ : V(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{0,1,2,\dots,n-1\}$ bijektif, dengan semua bobot simpul diperoleh dari penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\bmod |V|)$.

Untuk semua simpul pusat berlaku

$f^+(c_i) \;=\; f(c_{i-1}c_i) + f(c_ic_{i+1}) + \sum_{j=1}^{r_i} f(c_iv_i^j)$ (mod n) dimana jika $i = 1$ maka $f(c_0c_1) = 0$ dan jika $i = m$ maka $f(c_mc_{m+1}) = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{j=1}^{r_i} f(c_iv_i^j) \equiv 0 \pmod{n}$.

$$\sum_{j=1}^{r_i} f(c_iv_i^j) =$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{r_i}{2}} \frac{(m-1) + \sum_{k=i+1}^{m} r_k + 2j}{2} + \sum_{j=\frac{r_i}{2}+1}^{r_i} \frac{(m-1) + \sum_{k=1}^{m} r_k + \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 2j - r_i}{2} =$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{r_i}{2}} \frac{(m-1) + \sum_{k=1}^{m} r_k - \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 2j - r_i}{2} +$$

$$\sum_{j=\frac{r_i}{2}+1}^{r_i} \frac{(m-1) + \sum_{k=1}^{m} r_k + \sum_{k=1}^{i-1} r_k + 2j - r_i}{2} =$$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \frac{(m-1) + \sum_{k=1}^{m} r_k + 2j - r_i}{2} = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{(m-1) + n - m + 2j - r_i}{2} =$$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \frac{n-1+2j-r_i}{2} = r_i\left(\frac{n-1-r_i}{2}\right) + \sum_{j=1}^{r_i} j = r_i\left(\frac{n-1-r_i}{2}\right) + \frac{r_i(r_i+1)}{2} =$$

$$\frac{r_i}{2}(n) \equiv 0 \mod n.$$

Jadi,

$$f^+(c_i) = f(c_{i-1}c_i) + f(c_ic_{i+1}) \pmod{n}.$$

Untuk $i = 1$

$$f^+(c_1) = f(c_1c_2) \pmod{n} = \frac{2n-m+1}{2} \pmod{n}.$$

Untuk $i = 2, 4, \dots, m-1$

$$f^+(c_i) = f(c_{i-1}c_i) + f(c_i c_{i+1}) (\mathrm{mod}\ n) = \frac{2n-m+i-1}{2} + \frac{i}{2} (\mathrm{mod}\ n)$$

$$= \frac{2n-m+2i-1}{2} (\mathrm{mod}\ n).$$

Untuk $i = 3, 5, \dots, m-2$

$$f^+(c_i) = f(c_{i-1}c_i) + f(c_i c_{i+1}) (\mathrm{mod}\ n) = \frac{i-1}{2} + \frac{2n-m+i}{2} (\mathrm{mod}\ n)$$

$$= \frac{2n-m+2i-1}{2} (\mathrm{mod}\ n).$$

Untuk $i = m$

$$f^+(c_1) = f(c_{m-1}c_m)\ (\mathrm{mod}\ n) = \frac{m-1}{2}\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Sehingga terbukti bahwa

$$f^+(c_i) = \frac{2n-m+2i-1}{2} (\mathrm{mod}\ n), \qquad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Akibatnya,

$$f^+ : \left\{c_1, c_2, \dots, c_{\frac{m-1}{2}}\right\} \to \left\{\frac{2n-m+1}{2}, \frac{2n-m+3}{2}, \dots, e\right\}$$

$$f^+ : \left\{c_{\frac{m+1}{2}}\right\} \to \{0\}$$

dan

$$f^+ : \left\{c_{\frac{m+3}{2}}, c_{\frac{m+5}{2}}, \dots, c_m\right\} \to \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}\right\}.$$

Jadi,

$$f^+(c_i) \in \left\{0, 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{2n-m+1}{2}, \frac{2n-m+3}{2}, \dots, e\right\}.$$

Untuk simpul daun, jelas bahwa $f^+(v_i^j) = \sum f(c_i v_i^j)$ (mod n) karena pada simpul daun hanya terdapat satu busur yang hadir. Sehingga,

$$f^+(v_i^j) = \sum f(c_i v_i^j) = f(c_i v_i^j)\ (\mathrm{mod}\ n)$$

$$f^+(v_i^j) = f(c_i v_i^j)\ (\mathrm{mod}\ n) \qquad 1 \le i \le m\ ;\ 1 \le j \le r_i.$$

Karena

$$f : \left\{c_i v_i^j, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots \frac{r_i}{2}\right\} \to \left\{{}^e/_2, {}^e/_2 - 1, {}^e/_2 - 2, \dots, \frac{m+1}{2}\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_i^j, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots \frac{r_i}{2}\right\}, \to \left\{{}^e/_2, {}^e/_2 - 1, {}^e/_2 - 2, \dots, \frac{m+1}{2}\right\}.$$

Dan karena

$$f : \left\{c_i v_i^j, i = 1, \dots, m;\ j = \frac{r_i}{2} + 1, \dots, r_i\right\}$$
$$\to \left\{{}^e/_2 + 1, {}^e/_2 + 2, {}^e/_2 + 3, \dots, \frac{2n-m-1}{2}\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_i^j, i = 1, \dots, m;\ j = \frac{r_i}{2} + 1, \dots, r_i\right\}$$
$$\to \left\{{}^e/_2 + 1, {}^e/_2 + 2, {}^e/_2 + 3, \dots, \frac{2n-m-1}{2}\right\}.$$

Jadi, untuk simpul daun didapatkan

$$f^+(v_i^j) \in \left\{\frac{m+1}{2}, \dots, {}^e/_2 - 1, \frac{e}{2}, {}^e/_2 + 1, {}^e/_2 + 2, \dots, \frac{2n-m-1}{2}\right\}.$$

Bila diurutkan label untuk simpul-simpul pada graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil, maka diperoleh

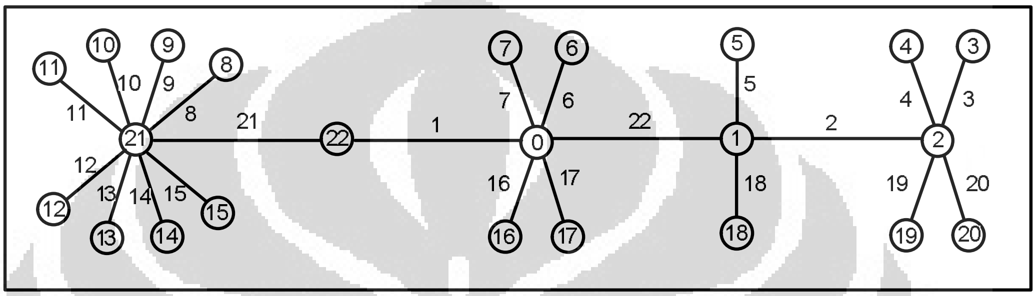
$$0, 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \dots, {}^e/_2 - 1, \frac{e}{2}, {}^e/_2 + 1, {}^e/_2$$
$$+ 2, \dots, \frac{2n-m-1}{2}, \frac{2n-m+1}{2}, \frac{2n-m+3}{2}, \frac{2n-m+5}{2}, \dots, e.$$

Fungsi f^+ merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f^+ merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap simpul memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^+ : V(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif dengan $f^+(u) = \sum_v f(uv)\ (\mathrm{mod}\, n)$.

Jadi, dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ dan $f^+ : V(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif.

Dari pembuktian dapat disimpulkan bahwa graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil. ■

Pada Gambar 3.2 diberikan contoh pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur dengan m ganjil dan k ganjil.



Gambar 3.2 Pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur dengan m ganjil dan k ganjil$S_{8,0,4\ \ ,2;4}$

Teorema 3.4

Graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, memiliki pelabelan graceful-busur apabila jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$.

Bukti.

Graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ adalah graf dengan banyak simpul $n = \sum_{k=1}^{m} r_k + m$ dan banyak busur $e = \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1$. Dari Tabel 3.1 diketahui bahwa graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan $r_1$genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$ dapat dilabel graceful-busur. Tahap pembuktiannya sebagai berikut definisikan fungsi pelabelan untuk busur, lalu ditunjukkan bahwa semua bobot simpul yang diperoleh dari pelabelan tersebut merupakan penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\text{mod}|V|)$ dan membentuk barisan $0, 1, 2, \dots, |V| - 1$, dan pada akhirnya ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan tersebut adalah fungsi bijektif.

Pelabelan graceful-busur pada graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$ didapatkan dengan mendefinisikan fungsi f yang melabelkan busur-busur pada graf caterpillar tak teratur dengan dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$, yaitu $f : E\left(S_{r_1,\dots,r_m}\right) \to \{1,\ 2, \dots, e\}$ sebagai berikut

$$f\left(c_i v_i^j\right) =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=i+1}^{m} \frac{r_k+1}{2} + j, & i = 2, \dots, m;\ j = 1, \dots, \dfrac{r_i+1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=i+1}^{m} \frac{r_k+1}{2} + j, & i = 1;\ j = 1, \dots, \dfrac{r_1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + (j - r_1), & i = 1;\ j = \dfrac{r_1}{2} + 1, \dots, r_1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=i}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + (i-1) + \left(j - \frac{r_i+1}{2}\right), & i = 2, \dots, m;\ j = \dfrac{r_i+3}{2}, \dots, r_i \end{cases}$$

$$f(c_i c_{i+1}) = \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=i+1}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + i, \qquad i = 1, \dots, m-1.$$

Fungsi f tersebut menginduksi label simpul $f^+ : V\left(S_{r_1,\dots,r_m}\right) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$f^+\left(v_i^j\right) = f\left(c_i v_i^j\right) (\mathrm{mod}\ n) \qquad 1 \le i \le m\ ;\ 1 \le j \le r_i$$

dan

$$f^+(c_i) = \begin{cases} f(c_i c_{i+1}) (\mathrm{mod}\ n), & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ 0\ \ (\mathrm{mod}\ n), & i = m \end{cases}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f dan f^+ merupakan fungsi bijektif.
Pertama, akan dibuktikan $f : E(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.
Jelas terlihat untuk f berlaku

$$: \{c_1c_2, c_2c_3, \dots, c_{m-1}c_m\} \rightarrow$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + 1, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=3}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + 2, \dots, \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + m - 1\right\}$$

$$f : \left\{c_1v_1^1, c_1v_1^2 \dots, c_1v_1^{\frac{r_1}{2}}, c_2v_2^1, c_2v_2^2 \dots, c_2v_2^{\frac{r_2+1}{2}}, \dots, c_mv_m^1, c_mv_m^2, \dots, c_mv_m^{\frac{r_m+1}{2}}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\sum_{k=2}^{m}\frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2}, \sum_{k=2}^{m}\frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \dots, 2, 1\right\}$$

$$f : \left\{c_1v_1^{\frac{r_1}{2}+1}, c_1v_1^{\frac{r_1}{2}+2} \dots, c_1v_1^{r_1}, c_2v_2^{\frac{r_2+3}{2}}, c_2v_2^{\frac{r_2+5}{2}} \dots, c_2v_2^{r_2}, \dots, c_mv_m^{\frac{r_m+3}{2}}, c_mv_m^{\frac{r_m+5}{2}} \dots, c_mv_m^{r_m}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+2}{2} - r_1\right), \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_1+4}{2} - r_1\right), \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1\right\}.$$

Jadi, bila diurutkan label untuk busur-busur pada graf caterpilar tak teratur $S_{r_1, \dots, r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$, maka diperoleh

$$1, 2, \dots, \sum_{k=2}^{m}\frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \sum_{k=2}^{m}\frac{r_k+1}{2}$$

$$+ \frac{r_1}{2}, \sum_{k=2}^{m}\frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2} + 1, \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 2, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1.$$

Fungsi f merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap busur memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1, \dots, r_m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, e\}$ bijektif.
Kedua, akan dibuktikan $f^+ : V(S_{r_1, \dots, r_m}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ bijektif, dengan semua bobot simpul diperoleh dari penjumlahan bobot-bobot busur yang hadir $(\mathrm{mod}\ |V|)$.

Untuk semua simpul pusat berlaku

$f^+(c_i) = f(c_{i-1}c_i) + f(c_i c_{i+1}) + \sum_{j=1}^{r_i} f\left(c_i v_i^j\right)$ (mod n) dimana jika $i = 1$ maka $f(c_0 c_1) = 0$ dan jika $i = m$ maka $f(c_m c_{m+1}) = 0$.

Untuk $i = m$

$$f^+(c_m) = f(c_{m-1}c_m) + \sum_{j=1}^{r_m} f\left(c_m v_m^j\right) (\text{mod } n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(c_{m-1}c_m) + \sum_{j=1}^{r_m} f\left(c_m v_m^j\right) (\text{mod } n) = 0 \ (\text{mod } n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_m v_m^j$ dan $c_m v_m^{r_m+1-j}$, dimana $j = 1, \ldots, \frac{r_m-1}{2}$ dan label pasangan $c_m v_m^{\frac{r_m+1}{2}}$ dan $c_{m-1}c_m$.

$$\begin{aligned} f(c_m v_m^1) + f\left(c_m v_m^{r_m}\right)(\text{mod } n) &= \left[\sum_{k=m+1}^{m} \frac{r_k+1}{2} + 1\right] \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + m - 1 + r_m - \frac{r_m+1}{2}\right] (\text{mod } n) \\ &= \sum_{k=1}^{m} r_k + m - \frac{r_m-1}{2} + \frac{r_m-1}{2} (\text{mod } n) = \sum_{k=1}^{m} r_k + m \ (\text{mod} n) \\ &= (n - m + m)(\text{mod } n) = 0 \ (\text{mod } n). \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f\left(c_m v_m^{\frac{r_m-1}{2}}\right) + f\left(c_m v_m^{\frac{r_m+3}{2}}\right) (\text{mod } n) =$$

$$\left[\sum_{k=m+1}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_m-1}{2}\right]$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + m - 1 + \frac{r_m+3}{2} - \frac{r_m+1}{2}\right] (\text{mod } n) =$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} r_k + m + \frac{r_m-1}{2} - \frac{r_m-1}{2} (\text{mod } n) &= \sum_{k=1}^{m} r_k + m \ (\text{mod } n) \\ &= (n - m + m)(\text{mod } n) = 0 \ (\text{mod } n). \end{aligned}$$

$$f\left(c_m v_m^{\frac{r_m+1}{2}}\right) + f\,(c_{m-1}c_m) (\mathrm{mod}\ n)$$

$$= \left[\sum_{k=m+1}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_m+1}{2}\right]$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + m - 1\right] (\mathrm{mod}\ n)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k + m + \frac{r_m+1}{2} - \frac{r_m-1}{2} - 1 (\mathrm{mod}\ n\ )$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k + m\ (\mathrm{mod}\ n) = (n - m + m)(\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Karena $f(c_{m-1}c_m) + \sum_{j=1}^{r_m} f\left(c_m v_m^j\right) (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ sehingga $f^+(c_m) = 0\ (\mathrm{mod} n\ )$.

Untuk $i = m - 1$

$$f^+(c_{m-1}) = f(c_{m-1}c_m) + f(c_{m-2}c_{m-1}) + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} f\left(c_{m-1}v_{m-1}^j\right) (\mathrm{mod}\ n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(c_{m-2}c_{m-1}) + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} f\left(c_{m-1}v_{m-1}^j\right) (\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_{m-1}v_{m-1}^j$ dan $c_{m-1}v_{m-1}^{r_{m-1}+1-j}$, dimana $j = 1, \ldots, \frac{r_{m-1}-1}{2}$ dan label pasangan $c_{m-1}v_{m-1}^{\frac{r_{m-1}+1}{2}}$ dan $c_{m-2}c_{m-1}$.

$$(c_{m-1}v_{m-1}^{1}) + f\left(c_{m-1}v_{m-1}^{r_{m-1}}\right)(\text{mod } n)$$

$$= \left[\sum_{k=m}^{m}\frac{r_k+1}{2}+1\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m-1}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + m-2 + r_{m-1} - \frac{r_{m-1}+1}{2}\right](\text{mod } n)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k + m-1 + \frac{r_m+1}{2} - \frac{r_m-1}{2} - \frac{r_{m-1}-1}{2}$$

$$+\frac{r_{m-1}-1}{2}(\text{mod } n) = \sum_{k=1}^{m} r_k + m\ (\text{mod } n)$$

$$= (n-m+m)(\text{mod } n) = 0\ (\text{mod } n).$$

$$\vdots$$

$$f\left(c_{m-1}v_{m-1}^{\frac{r_{m-1}-1}{2}}\right) + f\left(c_{m-1}v_{m-1}^{\frac{r_{m-1}+3}{2}}\right)(\text{mod } n)$$

$$= \left[\sum_{k=m}^{m}\frac{r_k+1}{2}+\frac{r_{m-1}-1}{2}\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=m-1}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right) + m-2 + \frac{r_{m-1}+3}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{r_{m-1}+1}{2}\right](\text{mod } n)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k + m-1 + \frac{r_m+1}{2} + \frac{r_{m-1}-1}{2} - \frac{r_m-1}{2}$$

$$-\frac{r_{m-1}-1}{2}(\text{mod} n) = \sum_{k=1}^{m} r_k + m\ (\text{mod } n)$$

$$= (n-m+m)(\text{mod } n) = 0\ (\text{mod } n).$$

$$\left(c_{m-1}v_{m-1}^{\frac{r_{m-1}+1}{2}}\right)+f\left(c_{m-2}c_{m-1}\right)(\mathrm{mod}\ n)$$

$$= \left[\sum_{k=m}^{m}\frac{r_k+1}{2}+\frac{r_{m-1}+1}{2}\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}r_k-\left(\sum_{k=m-1}^{m}\frac{r_k-1}{2}\right)+m-2\right](\mathrm{mod}\ n)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}r_k+m-2+\frac{r_m+1}{2}+\frac{r_{m-1}+1}{2}-\frac{r_{m-1}-1}{2}$$

$$-\frac{r_m-1}{2}(\mathrm{mod}\ n)=\sum_{k=1}^{m}r_k+m\ (\mathrm{mod}\ n)$$

$$=(n-m+m)(\mathrm{mod}\ n)=0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Karena $f\left(c_{m-2}c_{m-1}\right)+\sum_{j=1}^{r_{m-1}}f\left(c_{m-1}v_{m-1}^{j}\right)(\mathrm{mod}\ n)=0\ (\mathrm{mod}\ n)$ sehingga $f^{+}\left(c_{c_{m-1}}\right)\ =\ f(c_{m-1}c_m)(\mathrm{mod}\ n)$.

Dengan cara yang sama dilakukan untuk $i=m-2,m-3,\ldots,3,2$ diperoleh

$$\begin{aligned} f^{+}(c_{m-2}) &= f(c_{m-2}c_{m-1})(\mathrm{mod}\ n)\\ f^{+}(c_{m-3}) &= f(c_{m-3}c_{m-2})(\mathrm{mod}\ n)\\ &\vdots\\ f^{+}(c_3) &= f(c_3c_4)(\mathrm{mod}\ n)\\ f^{+}(c_2) &= f(c_2c_3)(\mathrm{mod}\ n)\end{aligned}$$

Untuk $i=1$

$$f^{+}(c_1)\ =\ f(c_1c_2)+\sum_{j=1}^{r_1}f\left(c_1v_1^{j}\right)(\mathrm{mod}\ n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{j=1}^{r_1}f\left(c_1v_1^{j}\right)(\mathrm{mod}\ n)=0\ (\mathrm{mod}\ n)$ dengan menjumlahkan label pasangan busur $c_1v_1^{j}$ dan $c_1v_1^{r_1+1-j}$, dimana $j=1,\ldots,\frac{r_1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
&(c_1 v_1^1) + f\left(c_1 v_1^{r_1}\right)(\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \left[\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + 1\right]\\
&\qquad + \left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + (r_1 - r_1)\right] (\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \sum_{k=2}^{m} r_k + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2} (\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{m} r_k + 1 + m - 1\ (\mathrm{mod}\ n) = (n - m + m)(\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = 0\ (\mathrm{mod}\ n)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&f\left(c_1 v_1^{\frac{r_1}{2}}\right) + f\left(c_1 v_1^{\frac{r_1}{2}+1}\right)(\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \left[\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2}\right]\\
&\qquad + \left[\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + (\frac{r_1}{2} + 1 - r_1)\right] (\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \sum_{k=2}^{m} r_k + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2} (\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{m} r_k + 1 + m - 1\ (\mathrm{mod}\ n) = (n - m + m)(\mathrm{mod}\ n)\\
&\qquad = 0\ (\mathrm{mod}\ n).
\end{aligned}
$$

Karena $\sum_{j=1}^{r_1} f\left(c_1 v_1^j\right)(\mathrm{mod}\ n) = 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ sehingga $f^+(c_1) = f(c_1 c_2)(\mathrm{mod}\ n)$.

Terbukti bahwa

$$f^+(c_i) = \begin{cases} f(c_i c_{i+1})(\mathrm{mod}\ n), & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ 0\ (\mathrm{mod}\ n), & i = m \end{cases}.$$

Akibatnya,

$$f^+ : \{c_1, c_2, \dots, c_{m-1}\}$$
$$\to \left\{ \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k - 1}{2} \right) + 1, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=3}^{m} \frac{r_k - 1}{2} \right) + 2, \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k - \frac{r_m - 1}{2} + m - 1 \right\}$$

dan

$$f^+ : \{c_m\} \to \{0\}.$$

Jadi,

$$f^+(c_i) \in \left\{ 0, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k - 1}{2} \right) + 1, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=3}^{m} \frac{r_k - 1}{2} \right) + 2, \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k - \frac{r_m - 1}{2} + m - 1 \right\}.$$

Untuk simpul daun, jelas bahwa $f^+\left(v_i^j\right) = \sum f(c_i v_i^j) \pmod n$, karena pada simpul daun hanya terdapat satu busur yang hadir. Sehingga,

$$f^+\left(v_i^j\right) = \sum f(c_i v_i^j) = f(c_i v_i^j) \pmod n$$
$$f^+\left(v_i^j\right) = f\left(c_i v_i^j\right) \pmod n \qquad 1 \le i \le m\ ;\ 1 \le j \le r_i.$$

Karena

$$f : \left\{ c_1 v_1^1, c_1 v_1^2 \dots, c_1 v_1^{\frac{r_1}{2}}, c_2 v_2^1, c_2 v_2^2 \dots, c_2 v_2^{\frac{r_2+1}{2}}, \dots, c_m v_m^1, c_m v_m^2, \dots, c_m v_m^{\frac{r_m+1}{2}} \right\}$$
$$\to \left\{ \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k + 1}{2} + \frac{r_1}{2}, \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k + 1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \dots, 2, 1 \right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{ v_1^1, v_1^2 \dots, v_1^{\frac{r_1}{2}}, v_2^1, v_2^2 \dots, v_2^{\frac{r_2+1}{2}}, \dots, v_m^1, v_m^2, \dots, v_m^{\frac{r_m+1}{2}} \right\},$$
$$\to \left\{ \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k + 1}{2} + \frac{r_1}{2}, \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k + 1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \dots, 2, 1 \right\}.$$

Dan karena

$$f:\left\{c_1v_1^{\frac{r_1}{2}+1}, c_1v_1^{\frac{r_1}{2}+2} \ldots, c_1v_1^{r_1}, c_2v_2^{\frac{r_2+3}{2}}, c_2v_2^{\frac{r_2+5}{2}} \ldots, c_2v_2^{r_2}, \ldots, c_mv_m^{\frac{r_m+3}{2}}, c_mv_m^{\frac{r_m+5}{2}} \ldots, c_mv_m^{r_m}\right\}$$

$$\to \left\{\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+2}{2} - r_1\right), \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+4}{2} - r_1\right), \ldots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1\right\}$$

maka

$$f^+ : \left\{v_1^{\frac{r_1}{2}+1}, v_1^{\frac{r_1}{2}+2} \ldots, v_1^{r_1}, v_2^{\frac{r_2+3}{2}}, v_2^{\frac{r_2+5}{2}} \ldots, v_2^{r_2}, \ldots, v_m^{\frac{r_m+3}{2}}, v_m^{\frac{r_m+5}{2}} \ldots, v_m^{r_m}\right\}$$

$$\to \left\{\sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+2}{2} - r_1\right), \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+4}{2} - r_1\right), \ldots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1\right\}.$$

Jadi, untuk simpul daun didapatkan

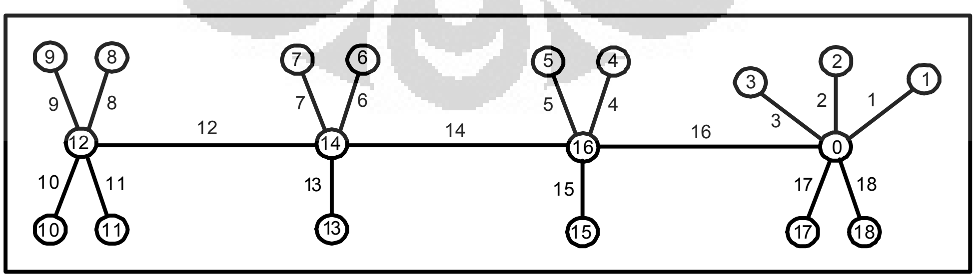
$$f^+(v_i^j) \in \left\{1, 2, \ldots, \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2}, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+2}{2} - r_1\right), \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + \left(\frac{r_1+4}{2} - r_1\right), \ldots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1\right\}.$$

Bila diurutkan label untuk simpul-simpul pada graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\ldots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \ldots, m$, maka diperoleh barisan berikut

$$
\begin{aligned}
0, 1, \quad 2, \dots, &\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2} - 1, \sum_{k=2}^{m} \frac{r_k+1}{2} + \frac{r_1}{2}, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{r_1+2}{2} - r_1\right), \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{r_1+4}{2} - r_1\right), \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) \\
&+ 1, \sum_{k=1}^{m} r_k - \left(\sum_{k=3}^{m} \frac{r_k-1}{2}\right) + 2, \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k - \frac{r_m-1}{2} + m \\
&- 1, \dots, \sum_{k=1}^{m} r_k + m - 1.
\end{aligned}
$$

Fungsi f^+ merupakan fungsi pada, karena seluruh label habis dipakai dan f^+ merupakan fungsi 1-1 karena untuk tiap simpul memiliki label yang berbeda, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^+ : V(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif dengan $f^+(u) = \sum_v f(uv) \, (\mathrm{mod}\, n)$.

Jadi, dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $f : E(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{1, 2, \dots, e\}$ dan $f^+ : V(S_{r_1,\dots,r_m}) \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ merupakan fungsi bijektif. Dari pembuktian dapat disimpulkan bahwa graf caterpilar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$, dengan jumlah simpul pusat (m)sebarang bilangan bulat positifdan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$.■



Gambar 3.3 Pelabelan graceful-busur pada graf caterpilar tak teratur $S_{4,3,3,5}$

Pada Gambar 3.3 diberikan contoh pelabelan graceful-busur pada graf caterpillar tak teratur dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$.

Di dalam Bab ini telah diberikan konstruksi pelabelan graceful-busur dari graf bintang ganda berbeda paritas, graf caterpilar tak teratur dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil dan jumlah bintang genap (k) ganjil dan graf caterpilar tak teraturdengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$. Pada Bab berikutnya akan diberikan rangkuman untuk seluruh hasil pada skripsi ini.

BAB 4

KESIMPULAN

Di dalam skripsi ini telah dibahas konstruksi pelabelan graceful-busur pada graf bintang ganda S_{r_1,r_2} dengan r_1 dan r_2 berbeda paritas (r_1 genap dan r_2 ganjil atau r_1 ganjil dan r_2 genap), graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) dan jumlah bintang genap (k) ganjil, graf caterpillar tak teratur $S_{r_1,\dots,r_m}$ dengan jumlah simpul pusat (m) sebarang bilangan bulat positif dan r_1 genap dan r_i ganjil untuk $i = 2, \dots, m$.

Pada skripsi ini belum ditemukan konstruksi pelabelan graceful-busur untuk semua kasus graf caterpillar tak teratur. Berikut dua kasus yang belum ditemukan, pertama graf caterpillar tak teratur dengan jumlah simpul pusat (m) genap, jumlah bintang genap (k) ganjil dan jumlah bintang ganjil (l) ganjil dan kedua graf caterpillar tak teratur dengan jumlah simpul pusat (m) ganjil, jumlah bintang genap (k) ganjil dan jumlah bintang ganjil (l) genap. Kasus ini dapat dijadikan bahan untuk penelitian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Alifah. (2005). Pelabelan edge-graceful pada graf lintasan, graf sikel, graf bintang, dan graf superstar. *Skripsi*. Departemen Matematika Universitas Jember.

Choudum, S. A., & Kishore, S. P. (1996). All 5-star are Skolem graceful. *Indian J. Pure and Appl. Math,* 27, 1101-1105.

Gallian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics 17* #DS6.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (1990). *Pearls in graph theory: A Comprehensive Introduction.* Academic Press.

Lee, L., Lee, S., & Murthy, G. (1988). On edge-graceful labelings of complete graphs. *Congressus Numeratium 62*, 225-233.

Lee, S. M., Kitagaki, M., Young, J., & Kocay, W. (2006). On edge-graceful and edge-magic maximal outerplanar graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.,* 59, 119-129.

Lee, S. M., Ma, P. N., Valdes, L., & Tong, S.-M. (2002). On the edge-graceful grids. *Congressus Numerantium 154*, 61-77.

Lee, S. M., Seah, E., & Wang, P. (1990). On edge-gracefulness of the k^{th} power graph. *Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica 18*, 1-11.

Sugeng, K. A., Miller, M., Slamin & Baca, M. (2005). (a,d)-edge-antimagic total labeling of caterpillars. *Lecture Notes Comput. Sci.,* 3330, 169-180.

Triputra, R. A. (2011). Pelabelan edge-graceful pada graf caterpillar reguler. *Skripsi*. Departemen Matematika Universitas Indonesia.