



UNIVERSITAS INDONESIA

**ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF LINGKARAN DENGAN
TALI BUSUR – TALI BUSUR DAN NILAI TOTAL
KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA**

SKRIPSI

**SITI LUTPIAH
0706261940**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011**



UNIVERSITAS INDONESIA

**ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF LINGKARAN DENGAN
TALI BUSUR – TALI BUSUR DAN NILAI TOTAL
KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA**

SKRIPSI

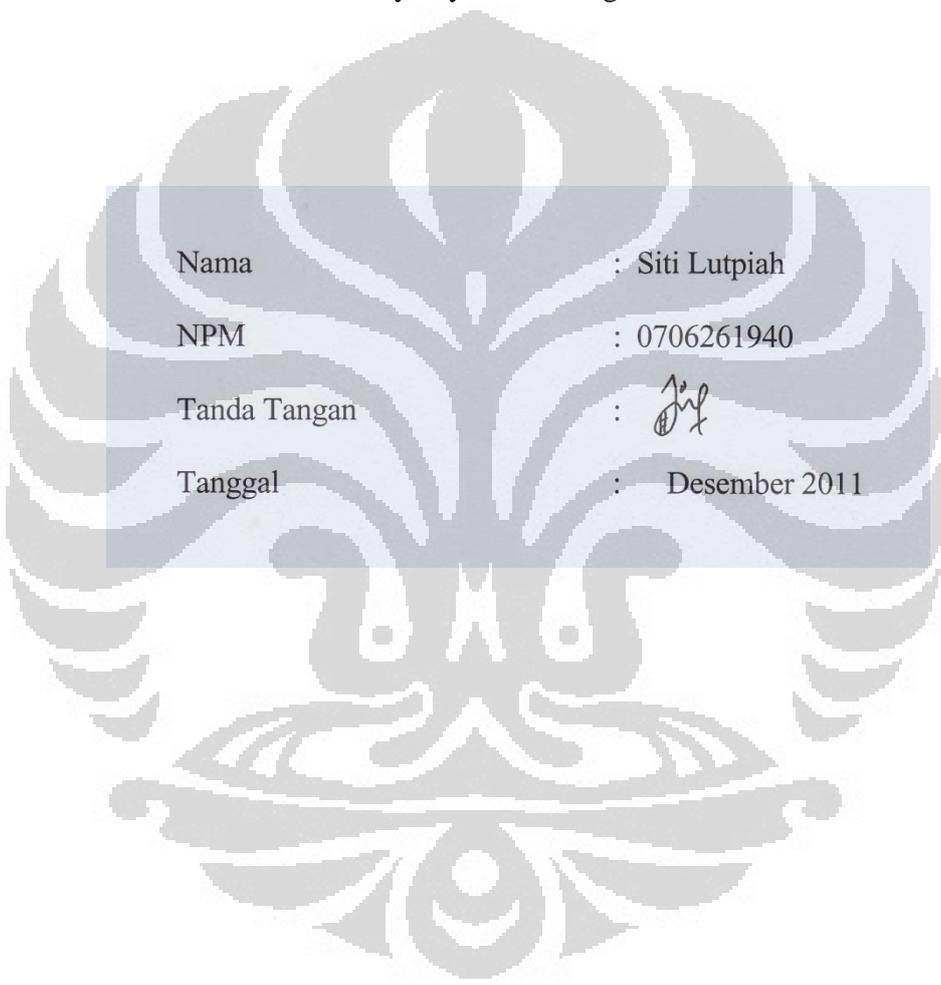
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

**SITI LUTPIAH
0706261940**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.



Nama	:	Siti Lutpiah
NPM	:	0706261940
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	Desember 2011

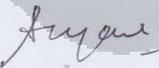
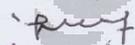
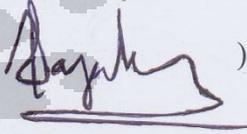
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Siti Lutpiah
NPM : 0706261940
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur – Tali Busur dan Nilai Total Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dra. Denny R. Silaban, M.Kom	()
Pembimbing II	: Dr. Kiki A. Sugeng	()
Penguji I	: Dr. Hengki Tasman	()
Penguji II	: Dra. Siti Aminah, M.Kom	()
Penguji III	: Dr. Al Haji Akbar B., M.Sc	()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 13 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing I dan Dr. Kiki A. Sugeng selaku pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Dr. Yudi Satria, MT. selaku ketua departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
3. Dosen pengajar Dept. Matematika FMIPA UI, Dra. Siti Aminah, M.Kom, Suarsih, Dr. Hengki Tasman, M.Sc, Prof. Dr. Djati Kerami, M.Si, Dr. Al Haji Akbar B., M.Sc dll. yang telah memberi saran dan kritik penulis selama masa skripsi.
4. Seluruh staf pengajar di Matematika UI atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan.
5. Seluruh karyawan (Ibu Santi, Pak Saliman, Ibu Rusmi, Pak Salman, Pak Wawan, dkk.) di departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan.
6. Ayah, Ibu yang selalu memberikan doa, nasihat, semangat, dan dukungan, serta kakak - kakak dan adik - adikku tersayang.
7. Teman – teman GGL (Hikmah, Ka Stefano, Andi) yang telah berjuang bersama selama penyusunan skripsi ini dan stasiun kota yang menjadi tempat inspirasi bagi penulis.

8. Teman Pondok Rambut Mita, Nana, Aul, Adis, Sela, Yayah, Ka Indah, dan Ka Widi yang juga telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis terutama selama penyusunan skripsi ini.
9. Hikmah, Andi, Mita, Afni, Arif, Siska, Sica, Isna, Putri, Misda, Bapet, Iki, Shafira, Nora, Lois, Farah, Winda, Widya, Manda, Nene, Anis, Zul, Adit, Ferdy, Bowo, Adi, Ayat, Stefi, Fauzan, Yos, Hanip, Gamar, Anjar, Shafa, dan semua teman-teman angkatan 07 tercinta.
10. Semua teman-teman di Matematika UI angkatan 2006, 2009, dan 2008 (Wulan, Arief, Fani, Cindy, Maimun, Nita, Ifah, Awe, Arman, Tuti, Numa, Luthfa, Dhea, Emy, Hindun, Andy, dkk.) terima kasih atas semangat dan dukungannya.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2011

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Lutpiah
NPM : 0706261940
Program Studi : Sarjana Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur – Tali Busur dan Nilai Total Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : Desember 2011
Yang menyatakan



(Siti Lutpiah)

ABSTRAK

Nama : Siti Lutpiah
Program Studi : Matematika
Judul : Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur – Tali Busur dan Nilai Total Ketakteraturan Simpul Sama dengan Dua

Misalkan graf $G=G(V, E)$ adalah graf sederhana berhingga dengan $|V|$ simpul dan $|E|$ busur. Pelabelan- k total tak teratur simpul pada graf G adalah pemetaan f dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, k\}$ sehingga setiap bobot simpul pada graf G berbeda. Bobot simpul adalah penjumlahan label simpul dan label semua busur yang hadir pada simpul tersebut. Nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) dari G atau $tvs(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak teratur simpul. Telah diketahui bahwa $tvs(K_n) = 2$ dan tidak bergantung pada n , sedangkan $tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$, bertambah sesuai dengan bertambahnya n . Untuk graf dengan banyak simpul sama, graf yang memiliki busur yang lebih sedikit dapat memiliki tvs yang lebih besar. Dalam skripsi ini diberikan algoritma untuk mengkonstruksi graf lingkaran dengan tali busur sesedikit mungkin tetapi tetap memiliki tvs sama dengan dua. Graf ini diperoleh dengan menghapus tali busur dari graf lengkap.

Kata Kunci : Nilai total ketakteraturan simpul, graf lengkap, lingkaran, algoritma, tali busur.
xii + 40 halaman : 19 gambar; 10 tabel
Daftar Pustaka : 5 (2002-2010)

ABSTRACT

Name : Siti Lutpiah
Study Program : Mathematics
Title : Algorithm to Construct a Cycle Graph with Chords and Total Vertex Irregularity Strength is Two

Let $G=G(V, E)$ be a finite simple graph with $|V|$ vertices and $|E|$ edges. A vertex irregular total k -labelling on G is a mapping f from $V \cup E$ to $\{1, 2, \dots, k\}$ so that the weight of every two distinct vertices is different. A weight of a vertex is the sum of label of the vertex and labels of all its incident edges. Total vertex irregularity strength of G , $tvs(G)$, is the minimum positive integer k for which there exists a vertex irregular total k -labelling of G . It is known that $tvs(K_n) = 2$ which is not dependent on n . On otherhand $tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ which is increasing according to the increasing value of n . For some graphs with same number of vertices, graph which has less number of edges can have bigger tvs . This *skripsi* give the algorithm to construct a cycle graph with minimum chords and has tvs is 2. The graph is constructed by deleting some chords from complete graph.

Keywords : Total vertex irregularity strength, complete graph, cycle, algorithm, and chord.
xii + 40 pages : 19 pictures; 10 table
Bibliography : 5 (2002-2010)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
KATA PENGANTAR.....	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR TABEL	xii
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup	2
1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan	3
1.4 Tujuan penelitian	3
2. LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf	4
2.2 Jenis-jenis Graf	8
2.3 Pelabelan graf.....	9
2.4 Nilai Total Ketakteraturan Simpul.....	10
2.5 Hasil-hasil yang telah diketahui.....	11
3. ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF LINGKARAN DENGAN TALI BUSUR – TALI BUSUR DAN NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA	18
3.1 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur	18
3.1.1 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur untuk n Ganjil.....	18
3.1.2 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur untuk n Genap	25
3.2 Banyak tali busur pada graf hasil konstruksi	34
4. KESIMPULAN	39
DAFTAR PUSTAKA.....	40

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Contoh graf tidak sederhana G	5
Gambar 2.2	Contoh (a) graf G dan (b) subgraf $G' = G - F$	6
Gambar 2.3	Dua graf G dan H yang isomorfik	7
Gambar 2.4	Contoh graf terhubung G dan graf tidak terhubung H	7
Gambar 2.5	C_5	8
Gambar 2.6	C_5 ditambah tali busur e_9	9
Gambar 2.7	K_5	9
Gambar 2.8	(a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, dan (c) Pelabelan total pada K_5	10
Gambar 2.9	(a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul, (b) Pelabelan-3 total tak teratur simpul, dan (c) Pelabelan yang bukan pelabelan total tak teratur simpul pada K_7	11
Gambar 2.10	Graf C_3 , C_4 dan C_5	13
Gambar 2.11	Contoh proses konstruksi pelabelan tak teratur untuk C_6 , C_7 , C_8 dari C_5	15
Gambar 3.1	(a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul pada K_9 dan (b) Penamaan untuk tiap simpul pada K_9	20
Gambar 3.2	Penyesuaian label v_2	22
Gambar 3.3	Penyesuaian label $\frac{v_{n-1}}{2}$ dan $\frac{v_{n-1}}{2}$ $\frac{v_{n+1}}{2}$	23
Gambar 3.4	(a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul pada K_{10} dan (b) Penamaan untuk tiap simpul pada K_{10}	26
Gambar 3.5	Penyesuaian label v_2	28
Gambar 3.6	Penyesuaian label $v_i v_{i+1}$ dan v_3	30
Gambar 3.7	(a) Graf K_9 dan (b) Graf G_9	36
Gambar 3.8	(a) Graf K_{10} dan (b) Graf G_{10}	38

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 3).....	22
Tabel 3.2	Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 4).....	23
Tabel 3.3	Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 5).....	24
Tabel 3.4	Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (langkah 3).....	27
Tabel 3.5	Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (Langkah 4).....	29
Tabel 3.6	Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (Langkah 5).....	30
Tabel 3.7	Banyak tali busur yang dihapus pada $\frac{v_{n-1}}{2}$	32
Tabel 3.8	Banyak tali busur yang dihapus pada $\frac{v_{n+1}}{2}$ dan v_n	33
Tabel 3.9	Banyak tali busur yang dihapus dalam Algoritma 3.1.....	36
Tabel 3.10	Banyak tali busur yang dihapus dalam Algoritma 3.2.....	38

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Banyak persoalan akan menjadi lebih jelas untuk diterangkan jika dapat direpresentasikan dalam bentuk graf.

Suatu graf $G = G(V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan busur. Banyaknya simpul pada G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya busur dinotasikan dengan $|E|$.

Graf dengan ciri-ciri tertentu dapat diberi nama khusus seperti graf lingkaran dan graf lengkap. Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n , adalah graf teratur berderajat dua. Dalam graf lingkaran berlaku $|V| = n$ dan $|E| = n$. Graf lengkap (*complete graph*) dengan n simpul, dinotasikan dengan K_n , adalah graf teratur berderajat $n - 1$. Dalam graf lengkap berlaku $|V| = n$ dan $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. Graf lengkap juga dapat dipandang sebagai graf yang diperoleh dari graf lingkaran ditambah sejumlah tertentu tali busur (*chord*) didalamnya. Suatu busur e dikatakan tali busur dari suatu graf jika busur e tersebut menghubungkan dua simpul yang tidak bertetangga pada graf lingkaran. Sehingga graf lingkaran memiliki banyak busur yang lebih sedikit dibandingkan graf lengkap.

Suatu pelabelan total jika yang diberi label adalah simpul dan busur graf. Bobot simpul adalah penjumlahan dari label simpul dan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut. Graf G dikatakan memiliki bobot yang berurutan jika bobot untuk setiap simpul memiliki nilai yang berurutan.

Chartrand dkk. telah memperkenalkan pelabelan tak teratur pada tahun 1988. Suatu pelabelan disebut sebagai pelabelan tak teratur (*irregular*) dari graf G jika bobot pada setiap simpul berbeda. Wallis dan beberapa jurnal pada pelabelan

total membahas pelabelan total tak teratur. Misalkan G adalah suatu graf, fungsi $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k total tak teratur simpul (*vertex irregular total k -labelling*) pada G , jika bobot setiap simpul di V berbeda. Nilai total ketakteraturan simpul (*total vertex irregularity strength*) dari G , didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak teratur simpul (Bača dkk., 2007).

Bača dkk. telah membuktikan bahwa $tvs(K_n) = 2$ dan $tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ (Bača dkk., 2007). Dengan perkataan lain $tvs(K_n) = 2$ dan tidak bergantung pada n sedangkan $tvs(C_n)$, bertambah sesuai dengan bertambahnya n . Untuk graf dengan banyak simpul sama, tetapi memiliki busur yang lebih sedikit dapat memiliki nilai tvs yang lebih besar. Oleh karena itu, ingin dicari suatu graf dengan tvs sama dengan 2 yang memiliki busur yang lebih sedikit dibandingkan graf lengkap dan lebih banyak dibandingkan graf lingkaran dengan cara menghapus tali busur-tali busur pada graf lengkap.

Dalam skripsi ini diberikan algoritma untuk mengkonstruksi graf lingkaran dengan banyak tali busur sesedikit mungkin tetapi tetap mempertahankan nilai total ketakteraturan simpul sama dengan 2. Konstruksi dilakukan dengan cara menghapus tali busur-tali busur dari graf lengkap.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

- a) Bagaimana algoritma penghapusan tali busur pada graf lengkap untuk menghasilkan graf lingkaran dengan banyak tali busur lebih sedikit dan tetap memiliki nilai total ketakteraturan simpul sama dengan 2?
- b) Berapa banyak tali busur yang tersisa (sesedikit mungkin) untuk graf yang dihasilkan (untuk sembarang nilai n)?

Ruang lingkup pembahasan masalah dalam skripsi ini adalah proses pencarian graf lingkaran dengan tali busur dan nilai total ketakteraturan simpul sama dengan 2 dengan cara menghapus sejumlah tali busur pada graf lengkap.

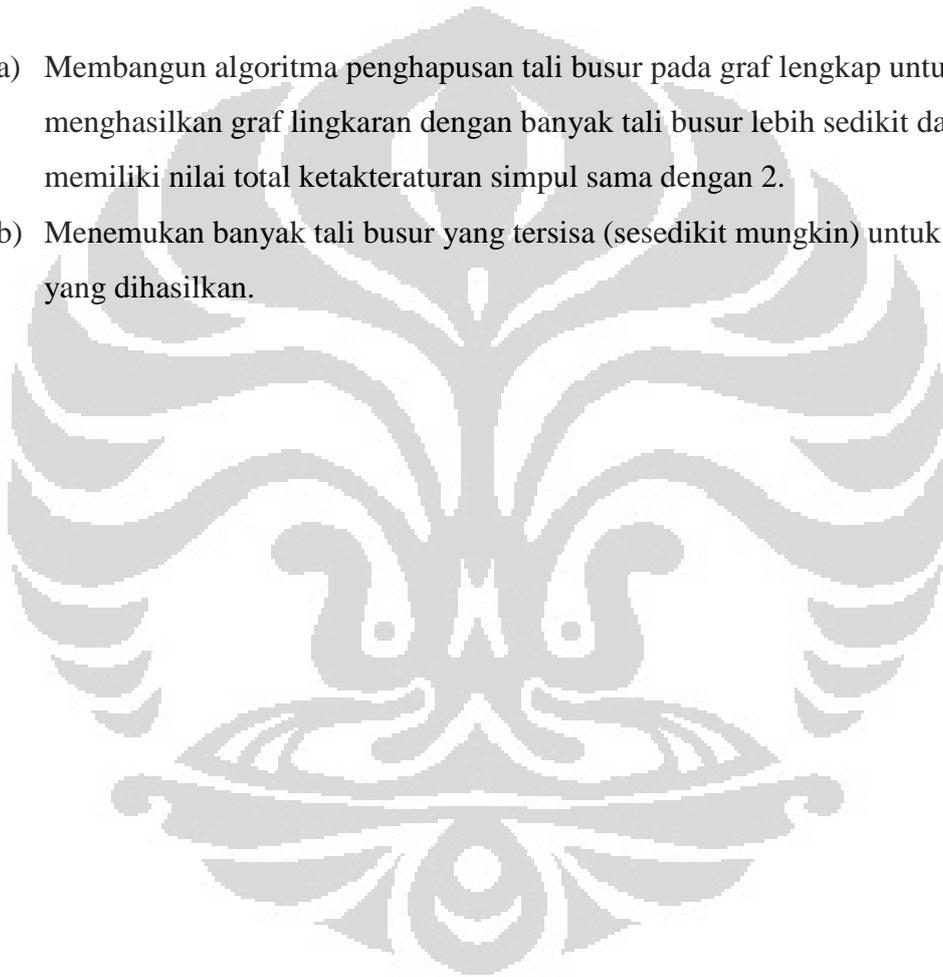
1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Penelitian dilakukan dengan studi pustaka yang dikembangkan untuk menganalisa dan membangun algoritma penghapusan tali busur pada graf lengkap dan menghitung banyak tali busur yang tersisa pada graf hasil.

1.4 Tujuan penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- a) Membangun algoritma penghapusan tali busur pada graf lengkap untuk menghasilkan graf lingkaran dengan banyak tali busur lebih sedikit dan tetap memiliki nilai total ketakteraturan simpul sama dengan 2.
- b) Menemukan banyak tali busur yang tersisa (sesedikit mungkin) untuk graf yang dihasilkan.



BAB 2 LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, pengertian tali busur dan nilai total ketakaturan simpul (tv_s) yang akan digunakan pada bab selanjutnya, serta bukti nilai total ketakaturan simpul dari graf lengkap dan lingkaran.

2.1 Definisi dan Istilah dalam Teori Graf

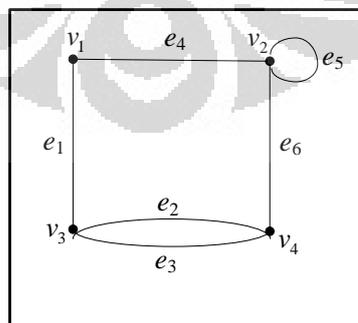
Pada umumnya definisi-definisi yang digunakan dalam Subbab ini diambil dari Rosen (2007). Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas V , suatu himpunan tak-kosong **simpul** (*vertices*) dan E , suatu himpunan **busur** (*edges*). Tiap busur memiliki satu atau dua simpul yang terhubung dengan busur tersebut, simpul tersebut disebut **simpul ujung** (*endpoints*). Busur tersebut juga dikatakan **menghubungkan** (*connect*) simpul ujung tersebut.

Dua simpul u dan v dikatakan **bertetangga** (*adjacent/neighbors*) di G jika simpul u dan v adalah simpul ujung dari suatu busur di G . Jika e terhubung dengan uv , maka busur e disebut **hadir** (*incident*) pada simpul u dan v . Busur e juga dikatakan menghubungkan u dan v . Simpul u dan v disebut simpul ujung dari busur $e = uv$. **Gelung** (*loop*) adalah suatu busur yang menghubungkan satu simpul ke dirinya sendiri. Dua busur pada suatu graf dikatakan **busur berganda** (*multiple edges*) bila kedua busur tersebut memiliki simpul-simpul ujung yang sama. Graf yang tidak mengandung gelung dan busur berganda disebut sebagai **graf sederhana** (*simple graph*).

Derajat (*degree*) dari suatu simpul pada graf G adalah banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut kecuali untuk gelung yang memberikan dua kali untuk menghitung derajat dari simpul. Derajat dari suatu simpul v dinotasikan dengan $deg(v)$. Simpul dengan derajat nol disebut **simpul terpencil** (*isolated vertex*) dan suatu simpul disebut **anting-anting** (*pendant*) jika dan hanya jika simpul tersebut memiliki derajat 1.

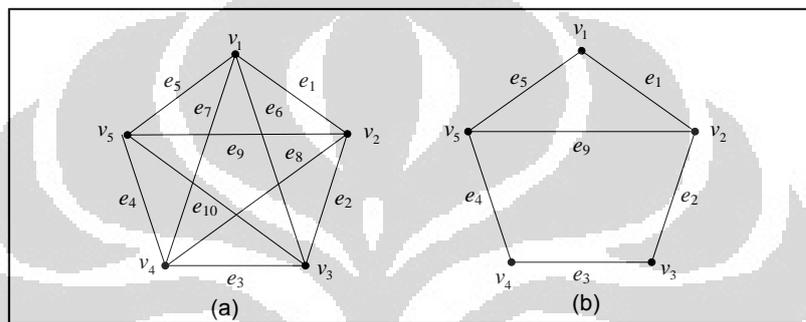
Order dari G dinotasikan dengan $|V|$ adalah banyaknya simpul-simpul di G . **Ukuran** (*size*) dari G dinotasikan dengan $|E|$ adalah banyaknya busur-busur di G . Suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar, dimana simpul-simpul direpresentasikan sebagai titik-titik dan busur-busur direpresentasikan sebagai segmen garis yang menghubungkan simpul-simpul. Biasanya, simpul ditulis sebagai v , sedangkan busur ditulis sebagai e atau sebagai pasangan kedua simpul ujung uv , $u, v \in V$. Derajat terbesar dari graf G dinyatakan dengan $\Delta(G)$, derajat terkecil dinyatakan dengan $\delta(G)$. Graf G dikatakan teratur jika $\Delta(G) = \delta(G)$. Graf G disebut **teratur berderajat r** (*r-regular*) jika derajat bersamanya adalah r (West, 2002).

Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf G dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan busur $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{v_1v_3, v_3v_4, v_3v_4, v_1v_2, v_2v_2, v_2v_4\}$. Busur e_5 merupakan gelung, dan busur e_2 dan e_3 merupakan busur berganda atau busur sejajar karena kedua busur ini menghubungkan dua simpul yang sama yaitu v_3 dan v_4 . Graf G bukan merupakan graf sederhana, karena G mengandung gelung dan busur berganda. Simpul v_1 dan v_3 di graf G bertetangga karena terdapat busur e_1 yang menghubungkan kedua simpul tersebut, dan simpul v_1 dan v_3 hadir dengan busur e_1 . Begitu pula busur e_1 dan e_2 bertetangga karena kedua busur tersebut terhubung ke simpul v_3 . Derajat setiap simpul pada Gambar 2. 1 adalah $deg(v_1) = 2$, $deg(v_3) = deg(v_4) = 3$, $deg(v_2) = 4$. Karena $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 4$, maka graf G bukan graf teratur.



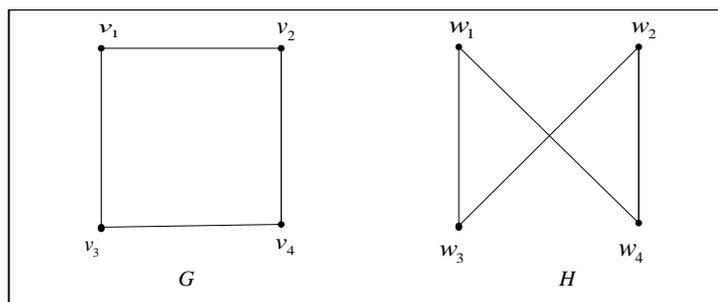
Gambar 2.1 Contoh graf tidak sederhana G

Subgraf dari graf $G = (V, E)$ adalah graf $G' = (V', E')$ dimana $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$ (Rosen, 2007). Pada Gambar 2.2 diberikan contoh subgraf G' dari suatu graf G dimana graf G memiliki himpunan simpul dan busur, yaitu $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\})$ dan graf G' memiliki himpunan simpul dan busur, yaitu $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_9\})$. Karena $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$, maka G' adalah subgraf dari G . Pada Gambar 2.2 graf G' adalah subgraf dari graf G yang diperoleh hanya dari penghapusan himpunan busur $F = \{e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$.



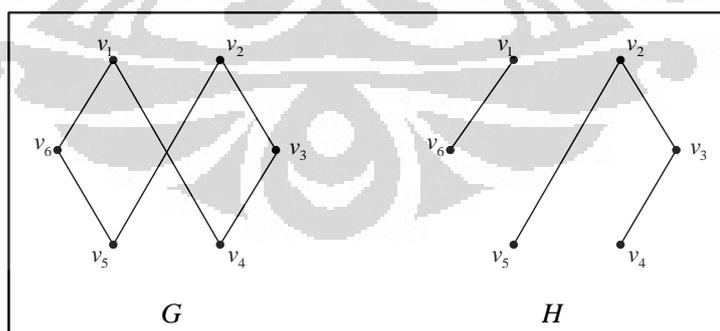
Gambar 2.2 Contoh (a) graf G dan (b) subgraf $G' = G - F$

Dua graf $G = (V, E)$ dan $H = (W, F)$ dikatakan **isomorfik** apabila terdapat pemetaan bijektif f dari V ke W dengan sifat bahwa simpul v_1 dan v_2 bertetangga di G jika dan hanya jika simpul $f(v_1)$ dan $f(v_2)$ bertetangga di H , pemetaan bijektif f ini untuk setiap simpul di G . Pemetaan bijektif f disebut **isomorfisma** (Rosen, 2007). Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf yang isomorfik karena terdapat pemetaan bijektif f dari V ke W dengan aturan $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_4, f(v_3) = w_3, f(v_4) = w_2$. Untuk melihat pemetaan bijektif ini mempertahankan ketetanggaan, perhatikan simpul-simpul yang bertetangga di G yaitu v_1 dan v_2, v_1 dan v_3, v_2 dan v_4, v_3 dan v_4 . Tiap pasang $f(v_1) = w_1$ dan $f(v_2) = w_4, f(v_1) = w_1$ dan $f(v_3) = w_3, f(v_2) = w_4$ dan $f(v_4) = w_2, f(v_3) = w_3$ dan $f(v_4) = w_2$ juga bertetangga di H . Derajat setiap simpul yang bersesuaian pada kedua graf ini juga sama.



Gambar 2.3 Dua graf G dan H yang isomorfik

Jalan (*walk*) adalah suatu barisan dari simpul-simpul dan busur-busur yaitu $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, sehingga untuk $1 \leq i \leq n$, busur e_i memiliki simpul-simpul ujung v_{i-1} dan v_i . **Jejak** (*trail*) adalah suatu jalan tanpa busur berulang. Jalan $u-v$ atau jejak $u-v$ memiliki simpul awal u dan simpul akhir v , dimana u dan v merupakan simpul-simpul ujung. **Lintasan** (*path*) $u-v$ adalah suatu lintasan dimana simpul memiliki derajat 1 (simpul-simpul ujung) yaitu u dan v , sedangkan simpul-simpul lainnya adalah **simpul-simpul internal**. Panjang dari jalan, jejak, lintasan atau lingkaran merupakan banyak busur-busur (jalan, jejak, lintasan atau lingkaran) tersebut. Jalan atau jejak disebut tertutup jika jalan atau jejak tersebut mulai dan berakhir pada simpul yang sama. Dua busur dengan simpul ujung yang sama merupakan bentuk lingkaran dengan panjang dua. Gelung merupakan lingkaran dengan panjang satu (West, 2002).



Gambar 2.4 Contoh graf terhubung G dan graf tidak terhubung H

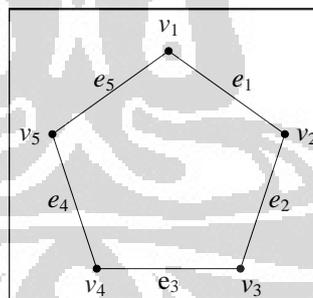
Suatu graf G dikatakan **terhubung** (*connected*) jika terdapat suatu lintasan $u-v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ (jika tidak demikian, graf G dikatakan tak terhubung (*disconnected*)) (West, 2002). Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf terhubung

G dan graf tidak terhubung H . Graf G adalah graf terhubung karena untuk setiap pasang simpul di dalamnya terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya. Graf H adalah graf yang tak terhubung karena untuk simpul v_1 dan v_4 tidak ada lintasan pada graf H yang menghubungkan keduanya, begitu pula untuk simpul v_5 dan v_6 tidak ada lintasan pada graf H yang menghubungkan keduanya.

Dalam skripsi ini, graf-graf yang akan dibahas adalah graf berhingga, sederhana, dan terhubung. Pada Subbab selanjutnya diberikan definisi dan contoh dari jenis-jenis graf yang akan digunakan untuk selanjutnya.

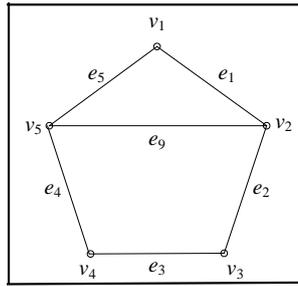
2.2 Jenis-jenis Graf

Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n , adalah graf dengan n simpul ($n \geq 3$) yang terdiri atas simpul-simpul v_1, v_2, \dots, v_n dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ dan v_nv_1 (Rosen, 2007). Graf lingkaran merupakan graf teratur berderajat dua. Dalam graf lingkaran berlaku $|V| = n$ dan $|E| = n$. Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf lingkaran dengan 5 simpul, C_5 .



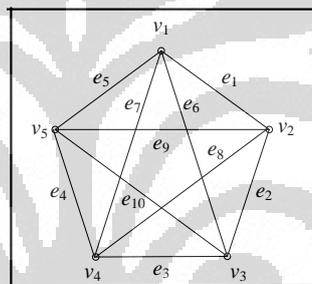
Gambar 2.5 C_5

Busur-busur yang menghubungkan dua simpul yang tidak bertetangga pada graf lingkaran disebut **tali busur** (*chord*). Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf lingkaran dengan satu tali busur v_2v_5 atau e_9 .



Gambar 2. 6 C_5 ditambah tali busur e_9

Graf lengkap (*complete graph*) dengan n simpul, K_n , adalah graf sederhana yang memiliki tepat satu busur di antara setiap pasang simpul-simpul yang berbeda (Rosen, 2007). Dalam graf lengkap berlaku $|V| = n$ dan $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf lengkap dengan 5 simpul, K_5 .



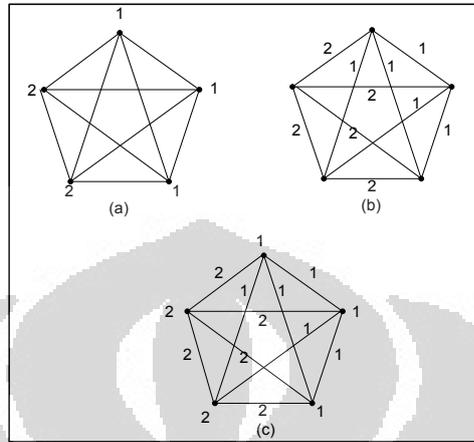
Gambar 2.7 K_5

Graf lengkap juga dapat dipandang sebagai graf yang diperoleh dari graf lingkaran ditambah sejumlah tertentu tali busur didalamnya. Banyak tali busur pada graf lengkap K_n adalah $\frac{n(n-3)}{2}$. Pada Subbab selanjutnya diberikan pembahasan mengenai pelabelan graf.

2.3 Pelabelan graf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Suatu **pelabelan graf** didefinisikan sebagai suatu fungsi f dari himpunan bagian unsur-unsur dari graf G ke suatu himpunan bilangan asli. Bilangan asli tersebut disebut label. Daerah asal yang paling sering digunakan yaitu himpunan simpul atau V (**pelabelan simpul**), himpunan busur atau E (**pelabelan busur**) dan himpunan simpul dan busur atau $V \cup E$ (**pelabelan total**) (Bača dkk., 2007).

Pada Gambar 2.8 diberikan contoh graf dengan pelabelan simpul (a), pelabelan busur (b), dan pelabelan total (c) pada graf lengkap K_5 . Pada Subbab selanjutnya dibahas pelabelan- k total tak teratur.

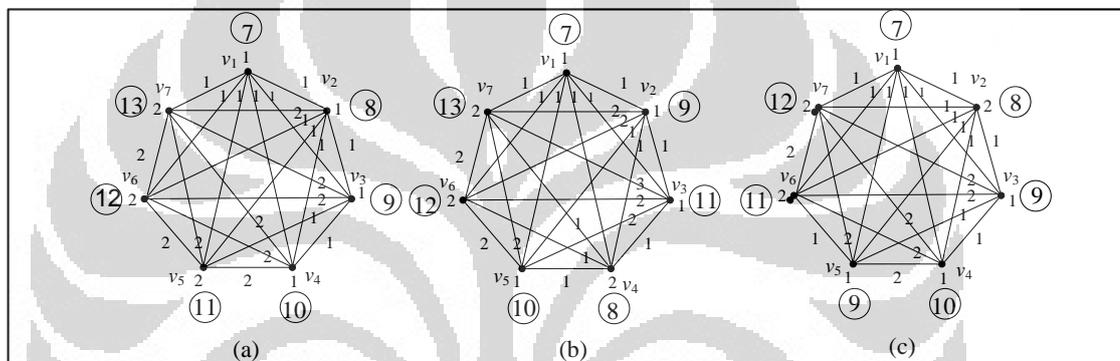


Gambar 2.8 (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, dan (c) Pelabelan total pada K_5

2.4 Nilai Total Ketakteraturan Simpul

Istilah bahasa Indonesia yang digunakan pada skripsi ini mengacu pada (Nurdin, 2010). Misalkan G adalah suatu graf, fungsi $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut **pelabelan- k total tak teratur simpul** (*vertex irregular total k -labelling*) pada G , jika setiap dua simpul yang berbeda di V mempunyai bobot yang berbeda, yakni nilai $f(x) + \sum_{xy \in E} f(xy) \neq f(u) + \sum_{uv \in E} f(uv)$ untuk $x \neq u, \forall x, u \in V$. **Nilai total ketakteraturan simpul** (*total vertex irregularity strength*) dari G , dilambangkan dengan $tvs(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak teratur simpul (Bača dkk., 2007). **Bobot simpul** (*weight of vertex*) adalah penjumlahan label suatu simpul ($f(x)$) dan label semua busur ($f(xy)$) yang hadir pada simpul, dapat dinyatakan sebagai $w(x)$, yaitu $w(x) = f(x) + \sum_{xy \in E} f(xy)$. Terlihat pada Gambar 2.9 (a) bahwa simpul-simpul dan busur-busur K_7 dilabeli dengan label 1 dan 2 serta bobot simpul (angka diberi bulatan kecil) 7 sampai 13. Bobot simpul pada v_1 atau $w(v_1)$ yaitu 7 diperoleh dari penjumlahan label v_1 dan label semua busur yang hadir pada v_1 .

Pada Gambar 2.9 diberikan contoh pelabelan-2 total tak teratur simpul (a), pelabelan-3 total tak teratur simpul (b), dan pelabelan yang bukan pelabelan- k total tak teratur simpul (c) pada K_7 . Pelabelan pada Gambar 2.9 (a) adalah pelabelan-2 total tak teratur pada K_7 karena label terbesar adalah 2 dan bobot setiap simpul berbeda. Pelabelan pada Gambar 2.9 (b) adalah pelabelan-3 total tak teratur pada K_7 karena label terbesar adalah 3 dan bobot setiap simpul berbeda. Pelabelan pada Gambar 2.9 (c) bukan pelabelan total tak teratur simpul pada K_7 karena ada dua simpul memiliki bobot yang sama (bobot simpul 9) yaitu pada v_3 dan v_5 . T_{VS} dari K_7 adalah 2 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9 (a).



Gambar 2.9 (a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul, (b) Pelabelan-3 total tak teratur simpul, dan (c) Pelabelan yang bukan pelabelan total tak teratur simpul pada K_7

2.5 Hasil-hasil yang telah diketahui

Beberapa nilai total ketakteraturan simpul (tvs) pada graf-graf tertentu telah ditemukan, hasil lengkap dapat dilihat di jurnal (Gallian, 2010). Nilai total ketakteraturan simpul graf lengkap dan graf lingkaran juga telah diperoleh. Beberapa hasil penelitian yang akan digunakan pada skripsi ini diberikan pada Teorema 2.1-2.3.

Teorema 2.1 (Bača dkk. 2007)

Misalkan G adalah graf yang memiliki n simpul dan m busur dengan derajat terkecil δ dan derajat terbesar Δ , maka

$$\left\lceil \frac{n + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + \Delta - 2\delta + 1.$$

Karena yang dibahas dalam skripsi adalah graf lingkaran dengan tali busur yang diperoleh dari graf lengkap maka pada Teorema 2.2 diberikan tvs graf lingkaran dan pada Teorema 2.3 diberikan tvs graf lengkap. Untuk membuktikan Teorema 2.2 diperlukan Teorema 2.1.

Teorema 2.2 (Bača dkk. 2007)

$$tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \text{ untuk } n \geq 3.$$

Bukti.

(i) Akan dibuktikan bahwa $tvs(C_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$

Graf C_n adalah graf yang memiliki n simpul dan n busur. Graf C_n memiliki n simpul yang semuanya berderajat 2. Oleh karena itu, derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = 2$. Berdasarkan Teorema 2.1 maka berlaku

$$\left\lceil \frac{n+2}{2+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + 2 - 2(2) + 1$$
$$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq tvs(G)$$

Akibatnya $tvs(C_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

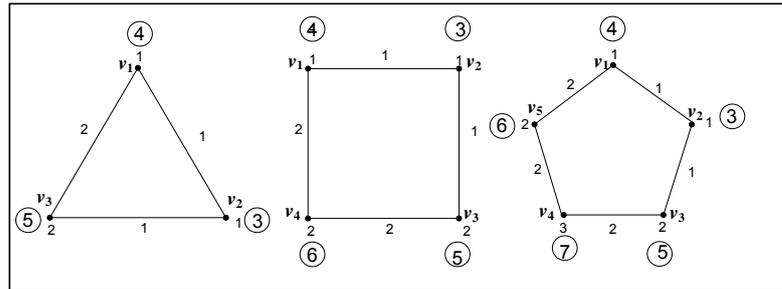
(ii) Akan dibuktikan bahwa $tvs(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$

Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_nv_1\}$.

Pembuktian akan diberikan dengan induksi pada n .

Pada induksi awal diperoleh $tvs(C_3) = \left\lceil \frac{3+2}{3} \right\rceil = 2$, $tvs(C_4) = \left\lceil \frac{4+2}{3} \right\rceil = 2$, dan

$tvs(C_5) = \left\lceil \frac{5+2}{3} \right\rceil = 3$ dengan pelabelan seperti diberikan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf C_3 , C_4 dan C_5

Hipotesa:

Misalkan diasumsikan lingkaran C_n memiliki $tvS(C_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ dengan pelabelan tak teratur dari C_n untuk $n = 3(m - 1) + 2$, $m \geq 2$ dengan simpul v_{n-1} dan busur-busur yang hadir di simpul v_{n-1} dilabelkan sebagai berikut:

$f(v_{n-1}) = m + 1$, $f(v_{n-2}v_{n-1}) = f(v_{n-1}v_n) = m$. Karena label terbesar adalah $m + 1$ maka $tvS(C_n) = k = m + 1$.

Tahap induksi diberikan untuk 3 kasus, yaitu lingkaran C_{n+1} , lingkaran C_{n+2} , dan lingkaran C_{n+3} .

Kasus 1. lingkaran C_{n+1}

Simpul v_{n-1} pada C_n diganti dengan dua simpul x_1 dan x_2 dengan menambahkan satu busur x_1x_2 . Busur $v_{n-2}v_{n-1}$ menjadi $v_{n-2}x_1$ dan busur $v_{n-1}v_n$ menjadi x_2v_n .

Label simpul x_1 , x_2 dan x_1x_2 dengan $f(x_1) = m + 1$, $f(x_1x_2) = m + 1$, $f(x_2) = m$.

Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi $n+3$ dan bobot simpul x_2 sama dengan bobot simpul v_{n-1} yaitu $n+2$. Karena label terbesar adalah $m + 1$ maka $tvS(C_{n+1}) = m + 1 = k$. Dengan kata lain $tvS(C_{n+1}) = tvS(C_n) = k$.

Kasus 2. lingkaran C_{n+2}

Simpul v_{n-1} pada C_n diganti dengan tiga simpul x_1 , x_2 , dan x_3 dengan menambahkan dua busur x_1x_2 dan x_2x_3 . Busur $v_{n-2}v_{n-1}$ menjadi $v_{n-2}x_1$ dan busur $v_{n-1}v_n$ menjadi x_3v_n . Label simpul x_1 , x_2 , x_3 , x_1x_2 dan x_2x_3 dengan $f(x_1x_2) =$

$f(x_2x_3) =$

$m + 1$, $f(x_1) = f(x_2) = m + 1$ dan $f(x_3) = m$. Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi $n+3$, bobot simpul x_2 menjadi $n+4$ dan bobot simpul x_3 sama dengan bobot simpul v_{n-1} yaitu $n+2$. Karena label terbesar adalah $m + 1$ maka

$tv_s(C_{n+2}) = m + 1 = k$. Dengan kata lain $tv_s(C_{n+2}) = tv_s(C_n) = k$.

Kasus 3. lingkaran C_{n+3}

Simpul v_{n-1} pada C_n diganti dengan empat simpul x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan menambahkan tiga busur x_1x_2, x_2x_3 dan x_3x_4 . Busur $v_{n-2}v_{n-1}$ menjadi $v_{n-2}x_1$ dan busur $v_{n-1}v_n$ menjadi x_4v_n . Label simpul $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3$ dan x_3x_4 dengan $f(x_1x_2) = f(x_2x_3) = f(x_3x_4) = m + 1$, $f(x_1) = f(x_3) = m + 1$ dan $f(x_2) = m + 2$, $f(x_4) = m$. Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi $n+3$, bobot simpul x_2 menjadi $n+5$, bobot simpul x_3 menjadi $n+4$ dan bobot simpul x_4 sama dengan bobot simpul v_{n-1} yaitu $n+2$. Karena label terbesar adalah $m + 2$ maka $tv_s(C_{n+3}) = m + 2 = k + 1$. Dengan kata lain $tv_s(C_{n+3}) = tv_s(C_n) + 1 = k + 1$.

Untuk C_{n+3} , simpul-simpul dan busur-busur diurutkan kembali sehingga simpul x_2 mengambil peran v_{n-1} dari konstruksi. Akibatnya $tv_s(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

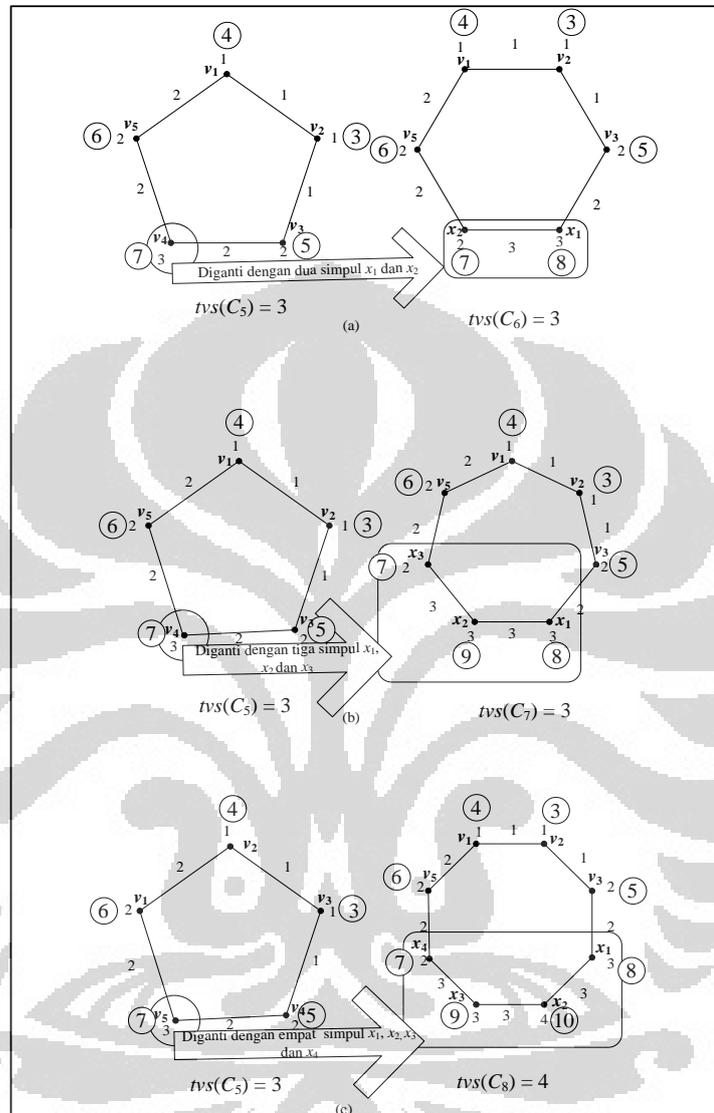
Karena berlaku $tv_s(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ dan $tv_s(C_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ maka dapat disimpulkan $tv_s(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$. ■

Pada Gambar 2.11 diberikan contoh pelabelan tak teratur untuk C_5 dengan $tv_s(C_5) = \left\lceil \frac{5+2}{3} \right\rceil = 3$, dan proses konstruksi pelabelan tak teratur untuk graf C_6, C_7 dan C_8 dengan $tv_s(C_6) = \left\lceil \frac{6+2}{3} \right\rceil = 3$, $tv_s(C_7) = \left\lceil \frac{7+2}{3} \right\rceil = 3$, dan $tv_s(C_8) = \left\lceil \frac{8+2}{3} \right\rceil = 4$.

Pada Gambar 2.11 pada awalnya diberikan graf lingkaran C_5 . Graf C_5 memiliki $tv_s(C_5) = \left\lceil \frac{5+2}{3} \right\rceil = 3$. Karena $n = 5 = 3(m - 1) + 2$ maka $m = 2$ dengan simpul v_4 dan busur-busur yang hadir di simpul v_4 dilabelkan sebagai berikut: $f(v_4) = m + 1 = 3$, $f(v_3v_4) = f(v_4v_5) = m = 2$. Karena label terbesar adalah 3 maka $tv_s(C_5) = 3$.

Untuk mengkonstruksi pelabelan tak teratur pada C_6 dari C_5 ganti simpul v_4 dengan dua simpul x_1 dan x_2 dengan menambahkan satu busur x_1x_2 (Gambar 2.11(a)). Busur v_3v_4 menjadi v_3x_1 dan busur v_4v_5 menjadi x_2v_5 . Label x_1, x_2 , dan x_1x_2 dengan $f(x_1) = m + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(x_1x_2) = m + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(x_2) = m = 2$. Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi 8 dan bobot simpul x_2

sama dengan bobot simpul v_4 yaitu 7. Karena label terbesar adalah 3 maka $tv_s(C_6) = 3$.



Gambar 2.11 Contoh proses konstruksi pelabelan tak teratur untuk C_6, C_7, C_8 dari C_5

Untuk mengkonstruksi pelabelan tak teratur pada C_7 dari C_5 ganti simpul v_4 dengan tiga simpul x_1, x_2 , dan x_3 dengan menambahkan dua busur x_1x_2 dan x_2x_3 (Gambar 2.11(b)). Busur v_3v_4 menjadi v_3x_1 dan busur v_4v_5 menjadi x_3v_5 . Label x_1, x_2, x_3, x_1x_2 dan x_2x_3 dengan $f(x_1x_2) = f(x_2x_3) = m + 1 = 2 + 1 = 3, f(x_1) = f(x_2) =$

$m + 1 = 2 + 1 = 3$ dan $f(x_3) = m = 2$. Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi 8, bobot simpul x_2 menjadi 9 dan bobot simpul x_3 sama dengan bobot simpul v_4 yaitu 7. Karena label terbesar adalah 3 maka $tvs(C_7) = 3$.

Untuk mengkonstruksi pelabelan tak teratur pada C_8 dari C_5 ganti simpul v_4 dengan empat simpul x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan menambahkan tiga busur x_1x_2, x_2x_3 dan x_3x_4 (Gambar 2.11(c)). Busur v_3v_4 menjadi v_3x_1 dan busur v_4v_5 menjadi x_4v_5 . Label $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3$ dan x_3x_4 dengan $f(x_1x_2) = f(x_2x_3) = f(x_3x_4) = m + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(x_1) = f(x_3) = m + 1 = 2 + 1 = 3$ dan $f(x_2) = m + 2 = 2 + 2 = 4$, $f(x_4) = m = 2$. Dengan pelabelan ini diperoleh bobot simpul x_1 menjadi 8, bobot simpul x_2 menjadi 10, bobot simpul x_3 menjadi 9 dan bobot simpul x_4 sama dengan bobot simpul v_4 yaitu 7. Karena label terbesar adalah 4 sehingga $tvs(C_8) = 4$. Konstruksi pelabelan tak teratur untuk C_6, C_7, C_8 dari C_5 merupakan contoh penerapan bukti graf C_n untuk $n = 5$.

Teorema 2.3 adalah Teorema Bača dkk, namun dalam skripsi ini, pembuktian dilakukan dengan cara yang berbeda.

Teorema 2.3 (Bača dkk., 2007)

$tvs(K_n) = 2$ untuk $n \geq 2$.

Bukti.

(i) Akan dibuktikan bahwa $tvs(K_n) \leq 2$

Nyatakan himpunan simpul dan himpunan busur dari K_n dengan

$V = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ dan $E = \{v_iv_j | i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j\}$.

Label simpul-simpul K_n dengan

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 2 & \text{untuk } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n \end{cases}$$

dan label busur-busur K_n dengan

$$f(v_iv_j) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 1 \leq j \leq n - i + 1 \\ 2 & \text{untuk } n - i + 2 \leq j \leq n \end{cases} \text{ dimana } i \neq j.$$

Bobot simpul didefinisikan

$$w(v_i) = f(v_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n f(v_i v_j).$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

$$\begin{aligned} w(v_i) &= f(v_i) + \sum_2^{n-i+1} 1 + \sum_{n-i+2}^n 2 \\ &= 1 + 1(n - i + 1 - 1) + 2(n - (n - i + 1)) \\ &= 1 + n - i + 2(i - 1) \\ &= n + i - 1. \end{aligned}$$

Jika nilai i , dimana $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, disubstitusikan ke $w(v_i)$ diperoleh himpunan

$$\text{bobot simpul } \{w(v_i) \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \{n, n + 1, \dots, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}.$$

Untuk $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} w(v_i) &= f(v_i) + \sum_1^{n-i+1} 1 + \sum_{n-i+2}^{n-1} 2 \\ &= 2 + 1(n - i + 1) + 2(n - 1 - (n - i + 1)) \\ &= 2 + n - i + 1 + 2(i - 2) \\ &= n + i - 1. \end{aligned}$$

Jika nilai i , dimana $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n$, disubstitusikan ke $w(v_i)$ diperoleh himpunan

$$\text{bobot simpul } \{w(v_i) \mid \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n\} = \{n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2n\}.$$

Himpunan bobot simpul $\{w(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{n, n + 1, \dots, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2n\}$. Terlihat bahwa bobot simpul pada setiap simpul i berurutan dan berbeda. Sehingga terbukti bahwa $tvS(K_n) \leq 2$.

(ii) Akan dibuktikan bahwa $tvS(K_n) \geq 2$

Menggunakan bukti kontradiksi. Misal label dari semua simpul dan busur dari K_n adalah 1 maka semua bobot setiap simpul pada K_n akan sama. Hal ini melanggar definisi dari tvS . Sehingga terbukti bahwa $tvS(K_n) \geq 2$.

Karena berlaku $tvS(K_n) \leq 2$ dan $tvS(K_n) \geq 2$ maka dapat disimpulkan $tvS(K_n) = 2$. ■

Pada Bab 2 ini telah diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, pengertian tali busur dan tvS , teorema serta bukti K_n dan C_n . Pada Bab selanjutnya dibahas algoritma penghapusan tali busur pada graf lengkap untuk

mengkonstruksi graf lingkaran dengan tali busur dan tv_s graf tersebut sama dengan 2.

BAB 3

ALGORITMA KONSTRUKSI GRAF LINGKARAN DENGAN TALI BUSUR – TALI BUSUR DAN NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SIMPUL SAMA DENGAN DUA

Pada bab ini dibahas cara mengkonstruksi graf G_n , yaitu graf lingkaran dengan tali busur dan nilai total ketakteraturan simpul sama dengan 2. Graf tersebut dikonstruksi dengan membangun algoritma untuk menghapus tali busur - tali busur dari graf lengkap. Graf yang dihasilkan mempunyai tv_s sama dengan 2 dan banyak tali busur sesedikit mungkin. Selain itu diberikan juga banyak tali busur pada graf yang dihasilkan untuk sembarang n simpul.

3.1 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur

Secara garis besar algoritma ini ditujukan untuk mengkonstruksi graf dengan nilai total ketakteraturan simpul dua (untuk sembarang n simpul), dimana banyak tali busur pada graf yang dihasilkan sesedikit mungkin dan tetap mempertahankan lingkaran luar dari K_n . Langkah-langkah dalam algoritma ini tidak mempertahankan tv_s sama dengan dua artinya pada pertengahan proses ada kemungkinan bobot dua simpul sama tetapi pada akhir proses didapat graf lingkaran dengan tali busur dan tv_s graf tersebut sama dengan dua. Karena didapat pola yang berbeda, algoritma ini dibagi menjadi 2 bagian, yaitu pada saat n ganjil dan n genap.

3.1.1 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur untuk n Ganjil

Algoritma 3.1, untuk $n \geq 7$, terdiri dari 2 tahap, tahap awal dan tahap penghapusan. Pada tahap awal dilakukan pelabelan-2 total tak teratur simpul pada graf lengkap, K_n , kemudian diberikan nama setiap simpul yang akan digunakan pada tahap selanjutnya. Tahap penghapusan terdiri dari 3 langkah penghapusan

tali busur-tali busur. Penghapusan pertama adalah untuk tali busur-tali busur yang berhubungan dengan dua simpul pertama. Penghapusan kedua untuk tali busur yang berhubungan dengan simpul $3, \dots, \frac{n-1}{2}$, dan penghapusan ketiga untuk tali busur yang berhubungan dengan simpul $\frac{n-1}{2}, \dots, n-2$. Dalam tahap penghapusan terdapat langkah penyesuaian label yang diperlukan untuk membuat banyak tali busur pada graf yang dihasilkan sesedikit mungkin. Pada Algoritma 3.1 diberikan penghapusan tali busur pada graf K_n untuk n ganjil.

Algoritma 3.1 (n ganjil dan $n \geq 7$)

Input : Graf lengkap K_n , n ganjil dan $n \geq 7$.

Tahap Awal

- 1) Label graf K_n dengan pelabelan f (pelabelan-2 total tak teratur simpul) yang diberikan pada bukti Teorema 2.3.
- 2) Beri nama simpul-simpul pada K_n dengan v_1, v_2 sampai v_n sesuai dengan urutan bobot dimulai dari bobot terkecil.

Tahap Penghapusan

- 3) Untuk $i = 1, 2$

Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$

Hapus $v_i v_j$

$$\text{padding-left: 80px; } w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$$

$$\text{padding-left: 80px; } w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$$

Ganti $f(v_2) = 2$

(penyesuaian label)

$$\text{padding-left: 40px; } w(v_2) = w(v_2) + 1$$

- 4) Untuk $i = 3, \dots, (n-1)/2$

Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 1)$

Hapus $v_i v_j$

$$\text{padding-left: 80px; } w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$$

$$\text{padding-left: 80px; } w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$$

Ganti $f(v_{(n-1)/2}) = 2$

(penyesuaian label)

Ganti $f(v_{(n-1)/2} v_{(n+1)/2}) = 2$

(penyesuaian label)

$$\text{padding-left: 40px; } w(v_{(n-1)/2}) = w(v_{(n-1)/2}) + 2$$

$$\text{padding-left: 40px; } w(v_{(n+1)/2}) = w(v_{(n+1)/2}) + 1$$

- 5) Untuk $i = (n+1)/2, \dots, n-2$

Untuk $j = i + 2, \dots, n$

Hapus $v_i v_j$

$$\text{padding-left: 80px; } w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$$

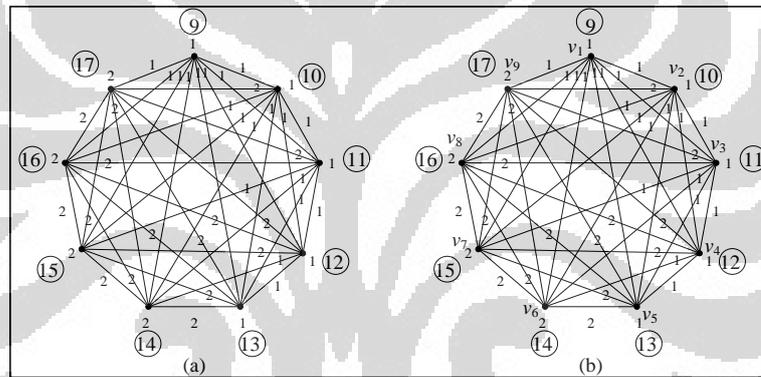
$$\text{padding-left: 80px; } w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$$

Output: G_n (graf lingkaran dengan tali busur) dengan $tv_s(G_n) = 2$.

Untuk mempermudah pengertian dari Algoritma 3.1, akan diperlihatkan contoh penerapan Algoritma 3.1 pada graf K_9 .

Tahap Awal

- 1) Pertama label graf K_9 dengan pelabelan f (pelabelan-2 total tak teratur simpul) yang diberikan pada bukti Teorema 2.3 (Gambar 3.1 (a)).
- 2) Pemberian nama pada masing-masing simpul, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$. Pemberian nama pada setiap simpul ini diurutkan dimulai dari bobot terkecil, yaitu 9 (v_1) sampai dengan bobot tertinggi, yaitu 17 (v_9) (Gambar 3.1 (b)).



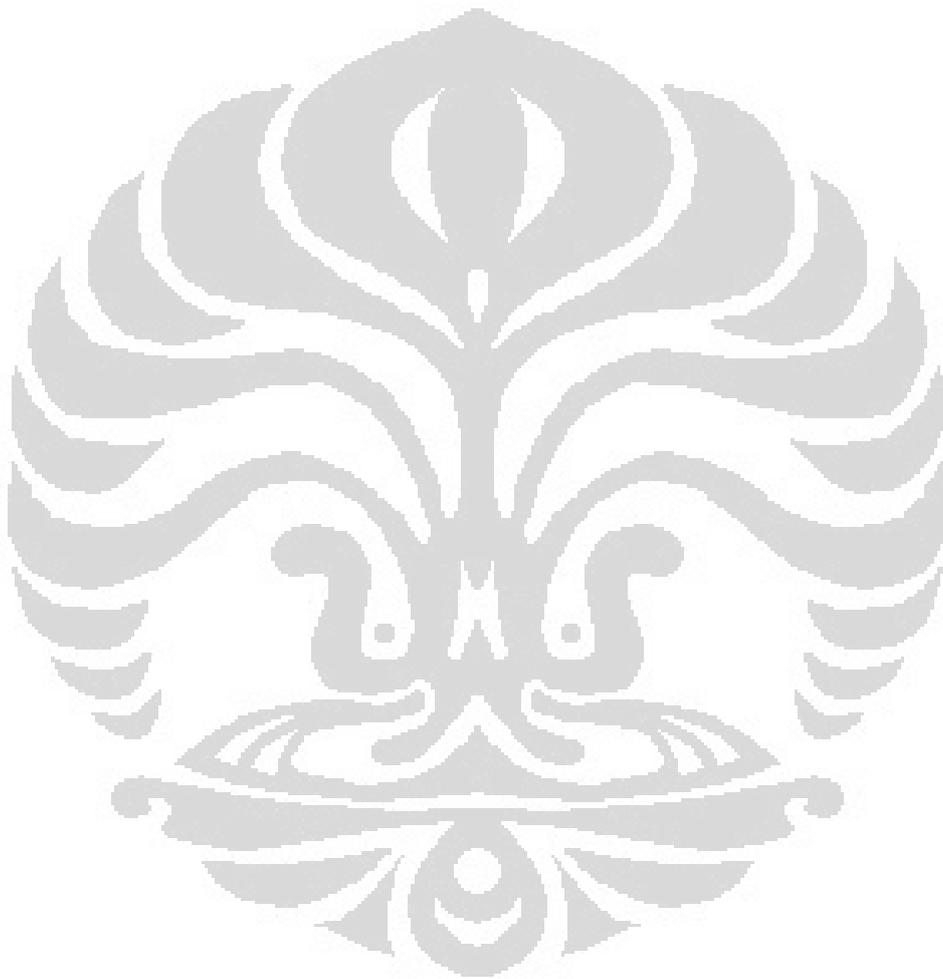
Gambar 3.1 (a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul pada K_9 dan (b) Penamaan untuk tiap simpul pada K_9

Tahap Penghapusan

- 3) Untuk $i = 1, 2$ dan untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$, hapus $v_i v_j$ sehingga $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Kemudian ganti $f(v_2) = 2$ sehingga $w(v_2) = w(v_2) + 1$.

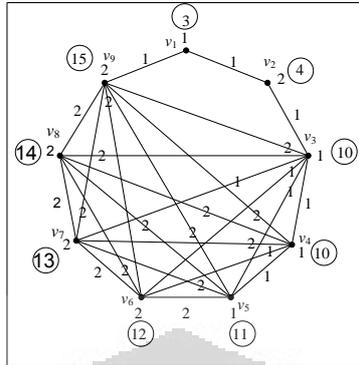
Pada Tabel 3.1 diberikan ilustrasi proses penghapusan tali busur pada langkah 3. Baris pertama adalah untuk $i = 1, j = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sehingga graf pada Gambar (a) pada Tabel 3.1 diperoleh dengan menghapus $v_1 v_3$ dari K_9 . Gambar (b) diperoleh dengan menghapus $v_1 v_4$ dari graf pada Gambar (a), dan seterusnya. Baris kedua pada Tabel 3.1 adalah untuk $i = 2, j = 4, 5, 6, 7, 8$, dan

9. Pada Gambar 3.2 dilakukan penyesuaian label pada v_2 , terlihat graf yang dihasilkan memiliki bobot simpul pada v_1 dan v_2 yang berbeda. Hal ini perlu karena pada langkah selanjutnya tidak ada lagi tali busur pada v_1 atau v_2 yang akan dihapus.



Tabel 3.1 Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 3)

$i \backslash j$	3	4	5	6	7	8	9	
1								
2								

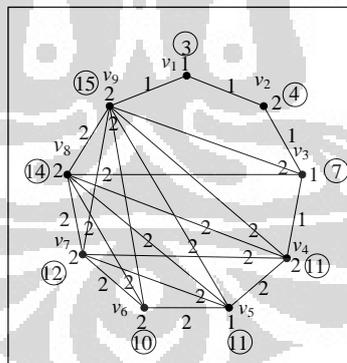
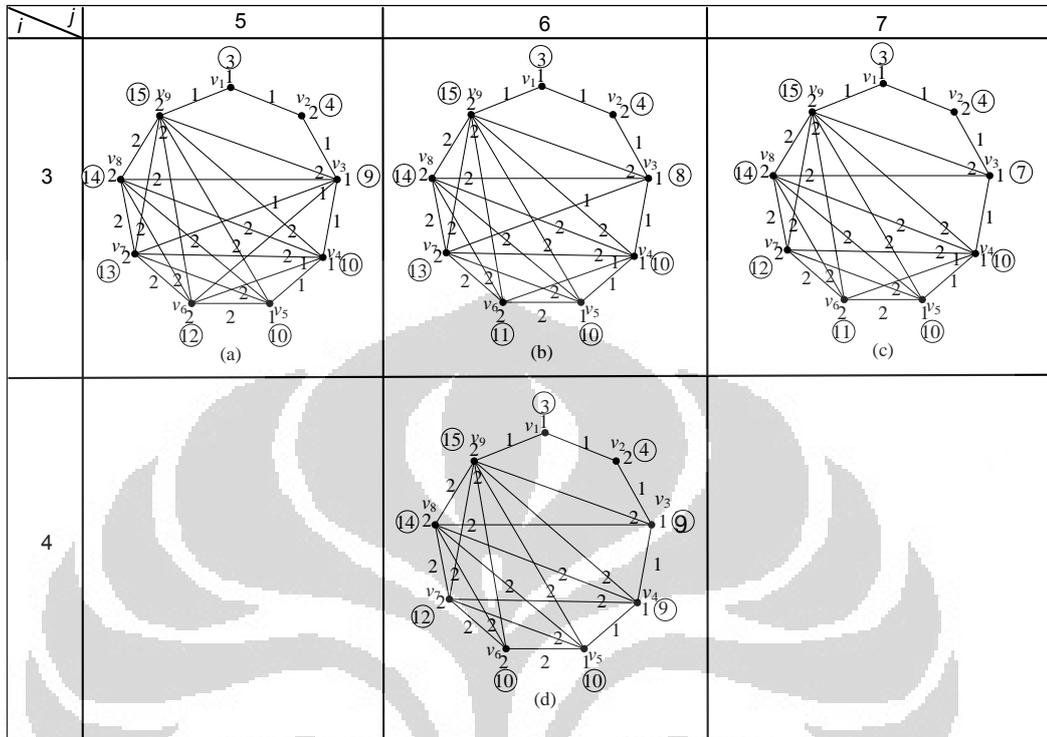


Gambar 3.2 Penyesuaian label v_2

- 3) Untuk $i = 3, \dots, \frac{n-1}{2}$ dan untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 1)$ hapus $v_i v_j$ sehingga $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Kemudian ganti $f\left(\frac{v_{n-1}}{2}\right) = 2$ dan ganti $f\left(\frac{v_{n-1}}{2} v_{\frac{n+1}{2}}\right) = 2$ sehingga $w\left(\frac{v_{n-1}}{2}\right) = w\left(\frac{v_{n-1}}{2}\right) + 2$ dan $w\left(\frac{v_{n+1}}{2}\right) = w\left(\frac{v_{n+1}}{2}\right) + 1$.

Ilustrasi proses penghapusan tali busur untuk Langkah 4 diberikan pada Tabel 3.2. Karena $n = 9$ maka $\frac{n-1}{2} = \frac{9-1}{2} = 4$, sehingga $i = 3, 4$. Baris pertama adalah untuk $i = 3, j = 5, 6, 7$ sehingga graf pada Gambar (a) pada Tabel 3.2 diperoleh dengan menghapus $v_3 v_5$ dari Gambar 3.2. Gambar (b) diperoleh dengan menghapus $v_3 v_6$ dari graf pada Gambar (a), dan Gambar (c) diperoleh dengan menghapus $v_3 v_7$ dari graf pada Gambar (b). Baris kedua pada Tabel 3.2 adalah untuk $i = 4, j = 6$ sehingga graf pada Gambar (d) pada Tabel 3.2 diperoleh dengan menghapus $v_4 v_6$ dari Gambar (c). Pada Gambar 3.3 dilakukan penyesuaian $\frac{v_{n-1}}{2}$ dan $\frac{v_{n-1}}{2} v_{\frac{n+1}{2}}$.

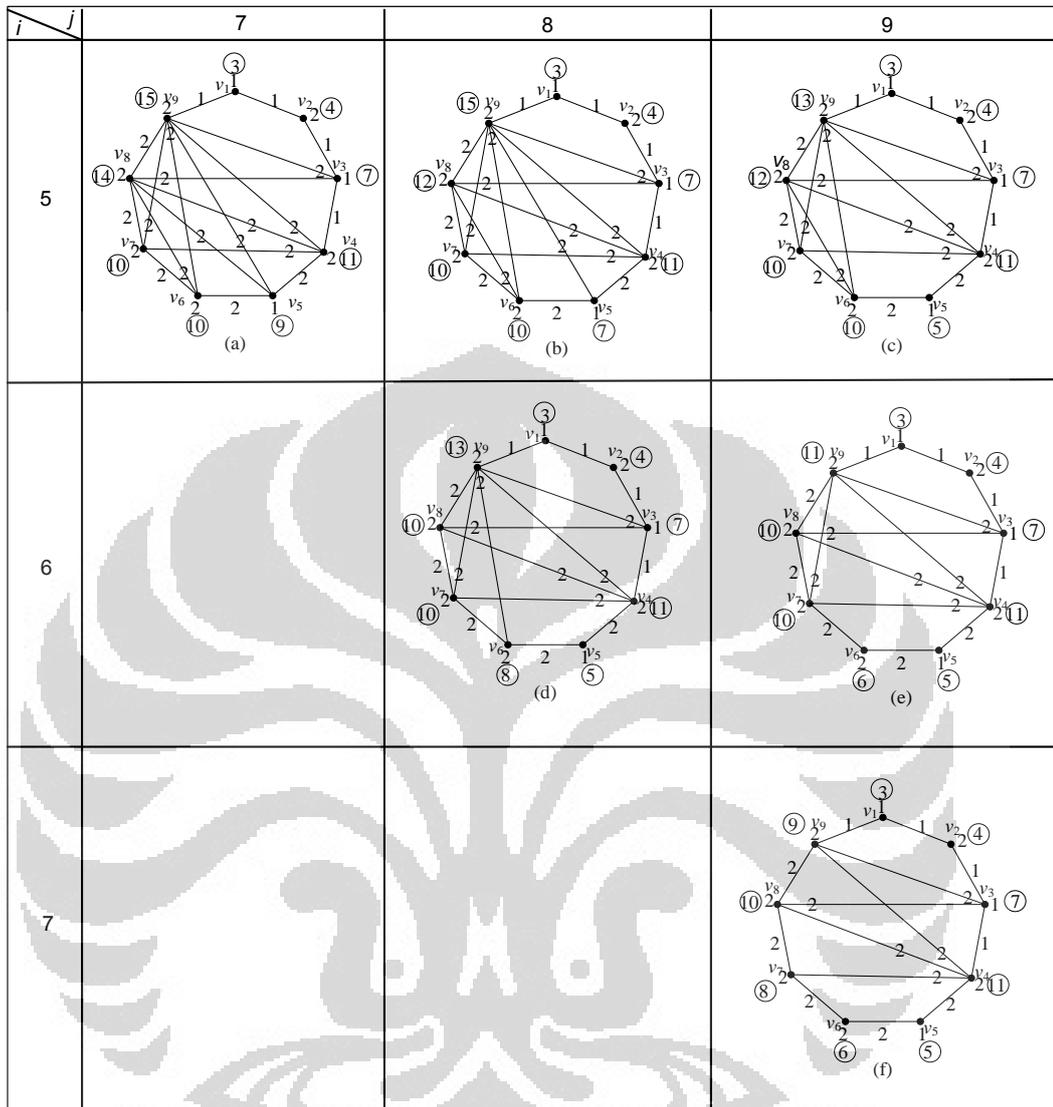
Tabel 3.2 Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 4)



Gambar 3.3 Penyesuaian label $v_{\frac{n-1}{2}}$ dan $v_{\frac{n-1}{2}} v_{\frac{n+1}{2}}$

- 5) Untuk $i = \frac{n+1}{2}, \dots, n-2$ dan untuk $j = i+2, \dots, n$, hapus $v_i v_j$
 Sehingga $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$.

Tabel 3.3 Proses penghapusan tali busur pada K_9 (Langkah 5)



Ilustrasi proses penghapusan tali busur untuk Langkah 5 diberikan pada Tabel 3.3. Karena $n = 9$ maka $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ dan $n-2 = 9-2 = 7$, sehingga $i = 5, 6, 7$. Baris pertama adalah untuk $i = 5, j = 7, 8, 9$. Baris kedua pada Tabel 3.3 adalah untuk $i = 6, j = 8, 9$. Baris ketiga pada Tabel 3.3 adalah untuk $i = 7, j = 9$ sudah dihasilkan sebuah graf G_n dengan $n = 9$ yang mengandung lingkaran luar dari graf lengkap dan $tv_s(G_9) = 2$ serta mempunyai banyak tali busur lebih sedikit dari graf lengkap dengan $n = 9$ tetapi lebih banyak dari graf lingkaran dengan $n = 9$.

3.1.2 Algoritma Konstruksi Graf Lingkaran dengan Tali Busur untuk n Genap

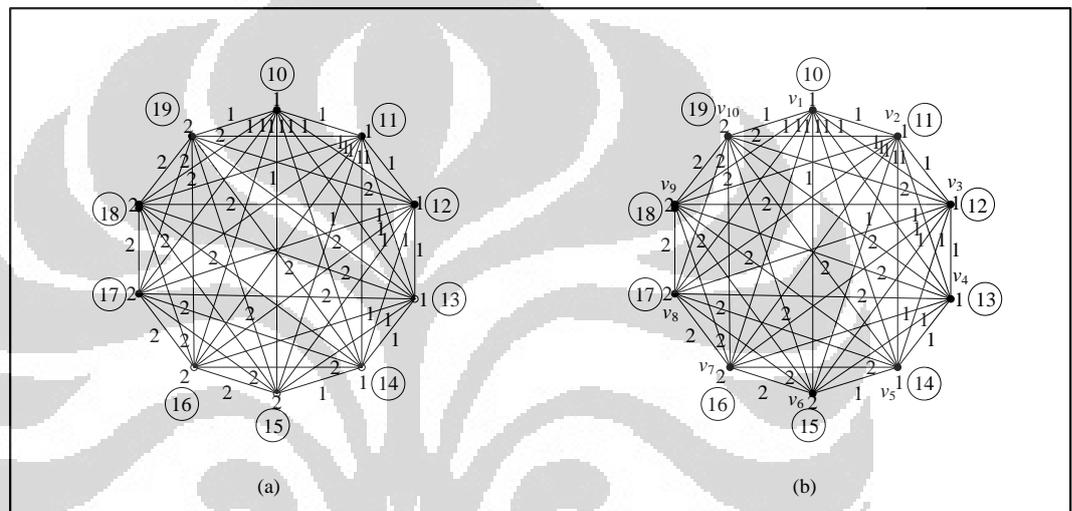
Algoritma 3.2, untuk $n \geq 6$, terdiri dari 2 tahap, tahap awal dan tahap penghapusan. Pada tahap awal dilakukan pelabelan-2 total tak teratur simpul pada graf lengkap, K_n , kemudian diberikan nama setiap simpul yang akan digunakan pada tahap selanjutnya. Tahap penghapusan terdiri dari 3 langkah penghapusan tali busur-tali busur. Penghapusan pertama adalah untuk tali busur-tali busur yang berhubungan dengan dua simpul pertama. Penghapusan kedua untuk tali busur yang berhubungan dengan simpul $3, \dots, \frac{n}{2}$, dan penghapusan ketiga untuk tali busur yang berhubungan dengan simpul $\frac{n}{2} + 2, \dots, n - 2$. Dalam tahap penghapusan terdapat langkah penyesuaian label yang diperlukan untuk membuat banyak tali busur pada graf yang dihasilkan sesedikit mungkin.

Algoritma 3.2 (n genap dan $n \geq 6$)
Input : Graf lengkap K_n , n genap dan $n \geq 6$.
Tahap Awal
 1) Label graf K_n dengan pelabelan f (pelabelan-2 total tak teratur simpul) yang diberikan pada bukti Teorema 2.3.
 2) Beri nama simpul-simpul pada K_n dengan v_1, v_2 sampai v_n sesuai dengan urutan bobot dimulai dari bobot terkecil.
Tahap Penghapusan
 3) Untuk $i = 1, 2$
 Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$
 Ganti $f(v_2) = 2$ (penyesuaian label)
 $w(v_2) = w(v_2) + 1$
 4) Untuk $i = 3, \dots, n/2$
 Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 3)$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$
 Ganti $f(v_i v_{i+1}) = 2$ (penyesuaian label)
 Ganti $f(v_3) = 2$ (penyesuaian label)
 $w(v_i) = w(v_i) + 2$
 $w(v_{(n/2)+1}) = w(v_{(n/2)+1}) + 1$
 5) Untuk $i = (n/2) + 2, \dots, n - 2$
 Untuk $j = i + 2, \dots, n$
 Hapus $v_i v_j$
 $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$
 $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$
Output: G_n (graf lingkaran dengan tali busur) dengan $tvs(G_n) = 2$.

Untuk mempermudah pengertian dari Algoritma 3.2, akan diperlihatkan contoh penerapan Algoritma pada graf K_{10} .

Tahap Awal

- 1) Pertama label graf K_{10} dengan pelabelan f (pelabelan-2 total tak teratur simpul) yang diberikan pada bukti Teorema 2.3 (Gambar 3.4 (a)).
- 2) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$. Pemberian nama pada setiap simpul ini diurutkan dimulai dari bobot terkecil, yaitu 10 (v_1) sampai dengan bobot tertinggi, yaitu 19 (v_9) (Gambar 3.4 (b)).

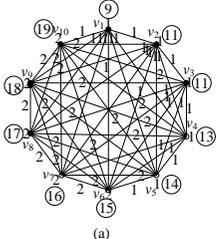
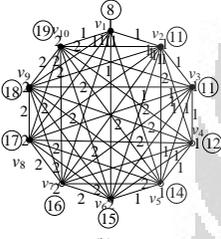
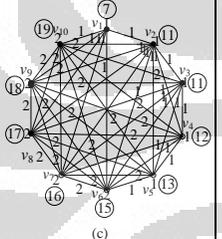
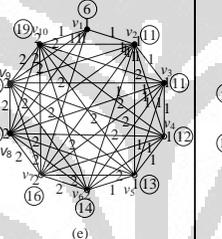
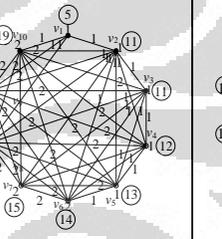
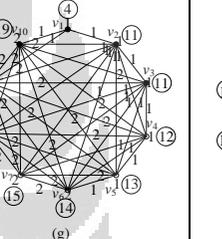
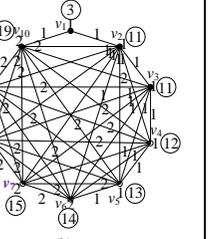
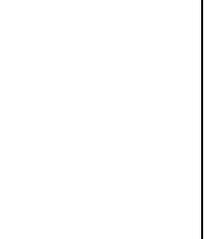
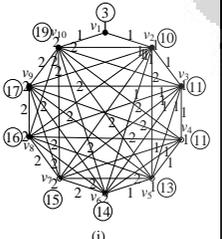
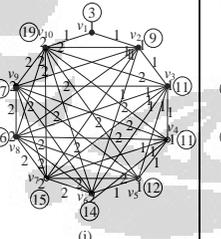
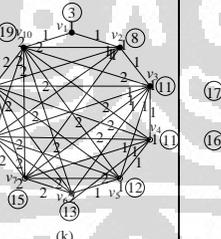
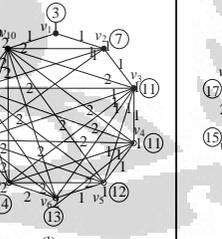
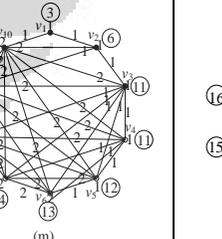
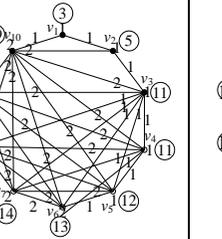
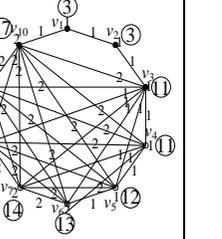


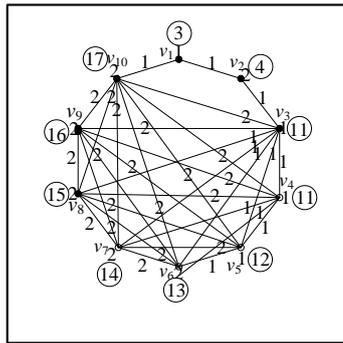
Gambar 3.4 (a) Pelabelan-2 total tak teratur simpul pada K_{10} dan
(b) Penamaan untuk tiap simpul pada K_{10}

Tahap Penghapusan

- 3) Untuk $i = 1, 2$ dan untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$, hapus $v_i v_j$ sehingga $w(v_i) = w(v_i) - f(v_i v_j)$ dan $w(v_j) = w(v_j) - f(v_i v_j)$. Kemudian ganti $f(v_2) = 2$ sehingga $w(v_2) = w(v_2) + 1$.

Tabel 3.4 Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (langkah 3)

$i \backslash j$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	 <p>(a)</p>	 <p>(b)</p>	 <p>(c)</p>	 <p>(d)</p>	 <p>(e)</p>	 <p>(f)</p>	 <p>(g)</p>	 <p>(h)</p>
2		 <p>(i)</p>	 <p>(j)</p>	 <p>(k)</p>	 <p>(l)</p>	 <p>(m)</p>	 <p>(n)</p>	 <p>(o)</p>



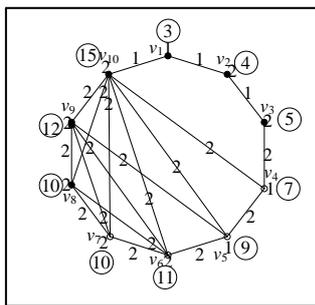
Gambar 3.5 Penyesuaian label v_2

Pada Tabel 3.4 diberikan ilustrasi proses penghapusan tali busur pada langkah 3. Baris pertama adalah untuk $i = 1, j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sehingga graf pada Gambar (a) pada Tabel 3.4 diperoleh dengan menghapus v_1v_3 dari K_{10} . Gambar (b) diperoleh dengan menghapus v_1v_4 dari graf pada Gambar (a), dan seterusnya. Baris kedua Tabel 3.4 adalah untuk $i = 2, j = 4, 5, 6, 7, 8, \text{ dan } 9, 10$. Pada Gambar 3.5 dilakukan penyesuaian label, terlihat graf yang dihasilkan memiliki bobot simpul pada v_1 dan v_2 yang berbeda. Hal ini perlu karena pada langkah selanjutnya tidak ada lagi tali busur yang hadir pada v_1 atau v_2 akan dihapus. Terlihat bahwa Langkah ketiga dalam tahap penghapusan untuk n ganjil dan n genap sama.

Pada Tabel 3.5 diberikan ilustrasi proses penghapusan tali busur pada langkah 4. Karena $n = 10$ maka $\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$, sehingga $i = 3, 4, 5$. Baris pertama adalah untuk $i = 3, j = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sehingga graf pada Gambar (a) pada Tabel 3.5 diperoleh dengan menghapus v_3v_5 dari Gambar 3.5. Gambar (b) diperoleh dengan menghapus v_3v_6 dari graf pada Gambar (a), dan seterusnya. Pada Baris kedua pada Tabel 3.5 adalah untuk $i = 4, j = 6, 7, 8, 9$. Baris ketiga pada Tabel 3.5 adalah untuk $i = 5, j = 7, 8, 9$. Pada Gambar 3.6 dilakukan penyesuaian label pada $v_i v_{i+1}$ dan v_3 .

Tabel 3.5 Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (Langkah 4)

$i \backslash j$	5	6	7	8	9	10
3	<p>(a)</p>	<p>(b)</p>	<p>(c)</p>	<p>(d)</p>	<p>(e)</p>	<p>(f)</p>
4		<p>(g)</p>	<p>(h)</p>	<p>(i)</p>	<p>(j)</p>	
5			<p>(k)</p>	<p>(l)</p>		



Gambar 3.6 Penyesuaian label $v_i v_{i+1}$ dan v_3

Tabel 3.6 Proses penghapusan tali busur pada K_{10} (Langkah 5)

$i \backslash j$	9	10
7	<p>(a)</p>	<p>(b)</p>
8		<p>(c)</p>

Pada Tabel 3.6 diberikan ilustrasi proses penghapusan tali busur pada langkah 5. Karena $n = 10$ maka $\frac{n}{2} + 2 = \frac{10}{2} + 2 = 7$ dan $n-2 = 10-2 = 8$, sehingga $i = 7, 8$. Baris pertama adalah untuk $i = 7, j = 9, 10$. Baris kedua pada Tabel 3.6 adalah untuk $i = 8, j = 10$. Pada langkah ini sudah dihasilkan sebuah graf G_n yang mengandung lingkaran luar dari graf lengkap dan $tvs(G_{10}) = 2$ serta

mempunyai banyak tali busur lebih sedikit dari graf lengkap dengan $n = 10$ tetapi lebih banyak dari graf lingkaran dengan $n = 10$.

Untuk menunjukkan bahwa tvs dari graf yang diperoleh dengan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 adalah dua, terlebih dahulu diberikan Observasi 3.1.

Observasi 3.1

Derajat terkecil (δ) dan derajat terbesar (Δ) dari graf G_n yang diperoleh dengan Algoritma 3.1 atau 3.2 adalah sebagai berikut.

Algoritma	δ	Δ
3.1 (n ganjil, $n \geq 7$)	2	$\frac{n+1}{2}$
3.2 (n genap, $n \geq 6$)	2	$\frac{n}{2}$

Penjelasan.

Berdasarkan Algoritma 3.1 ataupun Algoritma 3.2, pada Langkah 3 semua tali busur yang hadir pada v_1 dan v_2 dihapus sehingga derajat terkecil untuk n ganjil dan n genap adalah 2 (di antaranya) terletak pada v_1 dan v_2 . Pada Langkah inipun tali busur yang hadir pada simpul selain v_1 dan v_2 dihapus sebanyak satu tali busur. Pada Langkah 4 dalam Algoritma 3.1, tali busur-tali busur yang hadir pada $i = v_3$ sampai dengan $v_{\frac{n-1}{2}}$ dihapus. Dengan bertambahnya nilai i , tali busur yang dihapus semakin sedikit sehingga tali busur yang dihapus paling sedikit terletak pada $v_{\frac{n-1}{2}}$. Pada Langkah 5, $v_{\frac{n+1}{2}}$ sampai dengan v_{n-2} , dihapus semua tali busur yang menghubungkan simpul tersebut dengan simpul setelahnya. Maka derajat terbesar (Δ) graf G_n untuk n ganjil pada $v_{\frac{n-1}{2}}$. Untuk menghitung derajat terbesar, terlebih dahulu dihitung banyak tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n-1}{2}}$.

Pada Tabel 3.7 diberikan 2 tali busur yang dihapus pada Langkah 3 yaitu $v_1 v_{\frac{n-1}{2}}$ dan $v_2 v_{\frac{n-1}{2}}$, pada Langkah 4 dihapus satu tali busur yaitu $v_{\frac{n-1}{2}} v_{\frac{n+1}{2}}$ dan $\frac{n-9}{2}$ tali busur yaitu tali busur yang hadir pada v_3 sampai $v_{\frac{n-5}{2}}$ (karena tali busur berjarak minimal dua simpul), dan Langkah 5 tidak ada tali busur yang hadir pada $v_{\frac{n-1}{2}}$ dihapus karena pada i dan j tidak ada $v_{\frac{n-1}{2}}$. Khusus pada $n = 7$,

Langkah 3 bernilai satu yaitu v_1v_3 karena $v_{\frac{7-1}{2}} = v_3$ dan 4(b) bernilai nol karena $\frac{7-9}{2}$ bernilai negatif (banyak tali busur tidak mungkin negatif sehingga dianggap nol). Pada Tabel 3.7 diberikan pula total tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n-1}{2}}$ adalah $\frac{n-3}{2}$. Derajat setiap simpul pada K_n adalah $n - 1$. Sisa busur pada $v_{\frac{n-1}{2}}$ (derajat $v_{\frac{n-1}{2}}$) adalah $n - 1 - \left(\frac{n-3}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$.

Tabel 3.7 Banyak tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n-1}{2}}$

Tahap penghapusan	Banyak tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n-1}{2}}$
3) Untuk $i = 1, 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$ Hapus $v_i v_j$	2
4) Untuk $i = 3, \dots, (n - 1)/2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 1)$ Hapus $v_i v_j$	(a) $\sum_{i=\frac{n-1}{2}+2}^{n-(\frac{n-1}{2}-1)} 1 = 1$ (b) $\sum_{i=3}^{\frac{n-5}{2}} 1 = \frac{n-5}{2} - 2 = \frac{n-9}{2}$
5) Untuk $i = (n - 1)/2, \dots, n - 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n$ Hapus $v_i v_j$	0
Total tali busur yang dihapus	$\frac{n - 3}{2}$

Untuk n genap, derajat terbesar terletak pada $v_{\frac{n}{2}+1}$ dan v_n . Karena pada Langkah 4 dalam Algoritma 3.2, tali busur-tali busur yang hadir pada $i = v_3$ sampai dengan $v_{\frac{n}{2}}$ dihapus. Dengan bertambahnya nilai i , tali busur yang dihapus semakin sedikit sehingga tali busur yang dihapus paling sedikit terletak pada $v_{\frac{n}{2}}$. Namun $v_{\frac{n}{2}+1}$ tidak terdapat pada i sehingga tali busur yang hadir pada $v_{\frac{n}{2}+1}$ lebih banyak dibandingkan tali busur yang hadir pada $v_{\frac{n}{2}}$. Pada langkah ini pun, hanya satu tali busur yang dihapus pada v_n . Pada Langkah 5, $v_{\frac{n+1}{2}}$ sampai dengan v_{n-2} , dihapus semua tali busur yang menghubungkan simpul tersebut dengan simpul-simpul setelahnya sehingga tali busur yang hadir pada v_n sama dengan $v_{\frac{n}{2}+1}$.

Pada Tabel 3.8 diberikan 2 tali busur yang dihapus pada Langkah 3 yaitu $v_1 v_{\frac{n}{2}+1}$ dan $v_2 v_{\frac{n}{2}+1}$, sedangkan satu tali busur yang hadir pada v_n yaitu $v_2 v_n$, kemudian pada Langkah 4 dan Langkah 5 dihitung tali busur yang dihapus dengan menggunakan bantuan sumasi (karena tali busur berjarak minimal dua simpul sehingga pada Langkah 4 untuk $v_{\frac{n}{2}+1}$ memiliki batas atas $\frac{n}{2} - 1$). Pada Tabel 3.8 diberikan pula total tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n}{2}+1}$ sama dengan v_n yaitu $\frac{n}{2} - 1$. Derajat setiap simpul pada K_n adalah $n - 1$. Sisa busur pada $v_{\frac{n}{2}+1}$ atau derajat $v_{\frac{n}{2}+1}$ adalah $n - 1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n}{2}$.

Tabel 3.8 Banyak tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n}{2}+1}$ dan v_n

Tahap penghapusan	Banyak tali busur yang dihapus pada $v_{\frac{n}{2}+1}$	Banyak tali busur yang dihapus pada v_n
3) Untuk $i = 1, 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$ Hapus $v_i v_j$	2	1
4) Untuk $i = 3, \dots, n/2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 3)$ Hapus $v_i v_j$	$\sum_{i=3}^{\frac{n}{2}-1} 1 = \frac{n}{2} - 1$ $- 2$ $= \frac{n}{2} - 3$	1
5) Untuk $i = (n/2) + 2, \dots, n - 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n$ Hapus $v_i v_j$	0	$\sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} 1 = n - 2 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ $= \frac{n}{2} - 3$
Total tali busur dihapus	$\frac{n}{2} - 1$	$\frac{n}{2} - 1$

Teorema 3.1

Misalkan graf G_n adalah graf yang diperoleh dengan menerapkan Algoritma 3.1 atau 3.2 maka $tvs(G_n) = 2$

Bukti.

Bukti dibagi menjadi dua kasus yaitu untuk n ganjil dan untuk n genap

Kasus 1. Untuk n ganjil, $n \geq 7$

Berdasarkan Algoritma 3.1 diperoleh $tvs(G_n) \leq 2$.

Menurut Teorema 2.1, $\left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G_n) \leq n + \Delta - 2\delta + 1$

$$tvs(G_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{\frac{n+1}{2}+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(n+2)}{n+3} \right\rceil = 2.$$

Sehingga terbukti bahwa $tvs(G_n) \geq 2$ untuk n ganjil, $n \geq 7$.

Kasus 2. Untuk n genap, $n \geq 6$

Berdasarkan Algoritma 3.2 diperoleh $tvs(G_n) \leq 2$.

Menurut Teorema 2.1, $\left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G_n) \leq n + \Delta - 2\delta + 1$

$$tvs(G_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{\frac{n}{2}+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(n+2)}{n+2} \right\rceil = 2.$$

Sehingga terbukti bahwa $tvs(G_n) \geq 2$ untuk n genap, $n \geq 6$.

Karena berlaku $tvs(G_n) \leq 2$ dan $tvs(G_n) \geq 2$ maka dapat disimpulkan $tvs(G_n) = 2$. ■

3.2 Banyak tali busur pada graf hasil konstruksi

Sebagaimana algoritma yang dibagi dalam 2 bagian, yaitu pada saat n ganjil dan genap. Banyak tali busur inipun terbagi menjadi dua seperti pembagian pada algoritma. Banyak tali busur ini didapatkan berdasarkan langkah-langkah dalam tahap penghapusan pada algoritma yang diberikan pada subbab sebelumnya. Misalkan G_n adalah graf lingkaran dengan tali busur yang diperoleh dari Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2

Akibat 3.1

Banyak tali busur pada graf G_n yang diperoleh dari Algoritma 3.1 untuk n ganjil dan $n \geq 7$ adalah $\frac{n^2-4n-5}{8}$ tali busur.

Bukti.

Menghitung banyak tali busur yang dihapus mengikuti pada langkah-langkah dalam tahap penghapusan pada Algoritma 3.1.

Pada Langkah 3, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = 1, 2$, $j = i + 2, i + 3, \dots, n - (2 - i)$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+2}^{n-(2-i)} 1 &= \sum_{i=1}^2 (n - (2 - i) - (i + 1)) \\
&= \sum_{i=1}^2 (n - 2 + i - i - 1) \\
&= \sum_{i=1}^2 (n - 3) = \sum_{i=1}^2 n - \sum_{i=1}^2 3 \\
&= n(2 - 1) - (3(2 - 1)) \\
&= n - 3.
\end{aligned}$$

Pada Langkah 4, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = 3, \dots, \frac{n-1}{2}$,
 $j = i + 2, i + 3, \dots, n - (i - 1)$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=i+2}^{n-(i-1)} 1 &= \sum_{i=1}^2 (n - (i - 1) - (i + 1)) \\
&= \sum_{i=1}^2 (n - i + 1 - i - 1) \\
&= \sum_{i=1}^2 (n - 2i) \\
&= \sum_{i=1}^2 n - 2 \sum_{i=1}^2 i \\
&= n \left(\frac{n-1}{2} - 2 \right) - 2 \left(\frac{\frac{n-1}{2} \frac{n+1}{2}}{2} - 3 \right) \\
&= \frac{2n^2 - 10n - n^2 + 1 + 24}{4} \\
&= \frac{n^2 - 10n + 25}{4}.
\end{aligned}$$

Pada Langkah 5, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = \frac{n+1}{2}, \dots, n - 2$
 $j = i + 2, i + 3, \dots, n$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} (n - (i + 1)) \\
&= \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} (n - i - 1) \\
&= \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} n - \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} i - \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-2} 1 \\
&= n \left(n - 2 - \frac{n-1}{2} \right) - 2 \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{\frac{n-1}{2} \frac{n+1}{2}}{2} \right) \\
&= \frac{n^2 - 4n + 3}{8}.
\end{aligned}$$

Pada Tabel 3. 9 diberikan banyak tali busur yang dihapus dalam Algoritma 3.1 (n ganjil). Untuk K_n dimana n ganjil dan $n \geq 7$ memiliki total tali busur yang

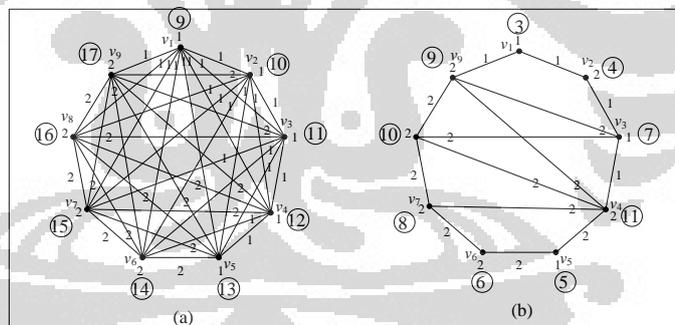
dihapus adalah $\frac{3n^2 - 8n + 5}{8}$ tali busur. Karena banyak tali busur pada K_n adalah

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-3)}{2} \text{ dan banyak tali busur pada graf hasil adalah } \frac{n(n-3)}{2} - \left(\frac{3n^2 - 8n + 5}{8} \right) &= \\
\frac{4n^2 - 3n^2 - 12n + 8n - 5}{8} = \frac{n^2 - 4n - 5}{8} \text{ tali busur. } \blacksquare
\end{aligned}$$

Contoh banyak tali busur pada graf yang dihasilkan untuk $n = 9$ adalah $\frac{(9)^2 - 4(9) - 5}{8} = 5$ tali busur. Pada Gambar 3.7 terlihat bahwa (a) Graf K_9 dengan 27 tali busur dan setelah menggunakan Algoritma 3.1 didapat graf hasil (b) Graf G_9 memiliki 5 tali busur sesuai dengan Akibat 3.1.

Tabel 3.9 Banyak tali busur yang dihapus dalam Algoritma 3.1

Langkah	Algoritma 3.1	Banyak tali busur yang dihapus
3	Untuk $i = 1, 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$	$n - 3$
4	Untuk $i = 3, \dots, (n - 1)/2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 1)$	$\frac{n^2 - 10n + 25}{4}$
5	Untuk $i = (n + 1)/2, \dots, n - 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n$	$\frac{n^2 - 4n + 3}{8}$
Total		$\frac{3n^2 - 8n + 5}{8}$



Gambar 3.7 (a) Graf K_9 dan (b) Graf G_9

Akibat 3.2

Banyak tali busur ada graf G_n yang diperoleh dari Algoritma 3.2 untuk n genap dan $n \geq 6$ adalah $\frac{n^2 - 6n + 8}{8}$ tali busur.

Bukti.

Menghitung banyak tali busur yang dihapus mengikuti pada langkah-langkah dalam tahap penghapusan pada Algoritma 3.2.

Pada Langkah 3, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = 1, 2$,
 $j = i + 2, i + 3, \dots, n - (2 - i)$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+2}^{n-(2-i)} 1 &= \sum_{i=1}^2 (n - (2 - i) - (i + 1)) \\ &= \sum_{i=1}^2 (n - 2 + i - i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^2 (n - 3) \\ &= \sum_{i=1}^2 n - \sum_{i=1}^2 3 \\ &= n(2 - 1) - 3(2 - 1) \\ &= n - 3. \end{aligned}$$

Pada Langkah 4, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = 3, \dots, \frac{n}{2}$,
 $j = i + 2, i + 3, \dots, n - (i - 3)$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=i+2}^{n-(i-3)} 1 &= \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} (n - (i - 3) - (i + 1)) \\ &= \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} (n - 2i + 2) \\ &= \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} n - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i + \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} 2 \\ &= n \left(\frac{n}{2} - 2 \right) - 2 \left(\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)}{2} - 3 \right) + 2 \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{n^2 - 6n + 8}{4}. \end{aligned}$$

Pada Langkah 5, tali busur yang dihapus adalah $v_i v_j$, $i = \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 2$,
 $j = i + 2, i + 3, \dots, n$ sehingga banyak tali busur yang dihapus adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n 1 &= \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} (n - (i + 1)) \\ &= \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} (n - i - 1) \\ &= \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} n - \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} i - \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-2} 1 \\ &= n \left(n - 2 - \frac{n}{2} - 1 \right) - \left(2 \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{\frac{n}{2}+1}{2} \frac{\frac{n}{2}+2}{2} \right) \right) - \left(n - 2 - \frac{n}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n^2 - 10n + 24}{8}. \end{aligned}$$

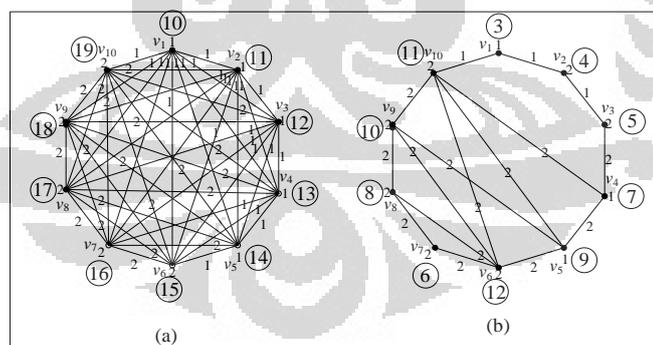
Pada Tabel 3. 10 diberikan banyak tali busur yang dihapus dalam
 Algoritma 3.2 (n genap). Untuk K_n dimana $n \geq 6$ memiliki total tali busur yang
 dihapus adalah $\frac{3n^2 - 6n - 8}{8}$ tali busur. Karena banyak tali busur pada K_n adalah

$\frac{n(n-3)}{2}$. Maka banyak tali busur pada graf hasil adalah $\frac{n(n-3)}{2} - \frac{3n^2-6n-8}{8} = \frac{n^2-6n+8}{8}$ tali busur. ■

Tabel 3.10 Banyak tali busur yang dihapus dalam Algoritma 3.2

Langkah	Algoritma 3.2	Banyak tali busur yang dihapus
3	Untuk $i = 1, 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (2 - i)$	$n - 3$
4	Untuk $i = 3, \dots, n/2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n - (i - 3)$	$\frac{n^2 - 6n + 8}{4}$
5	Untuk $i = (n + 1)/2, \dots, n - 2$ Untuk $j = i + 2, \dots, n$	$\frac{n^2 - 10n + 24}{8}$
Total		$\frac{3n^2 - 8n + 5}{8}$

Contoh banyak tali busur pada graf yang dihasilkan untuk $n = 10$ adalah $\frac{(10)^2-6(10)+8}{8} = 6$ tali busur. Pada Gambar 3.8 terlihat bahwa (a) Graf K_{10} dengan 35 tali busur dan setelah menggunakan Algoritma 3.2 didapat graf hasil (b) Graf G_{10} memiliki 6 tali busur sesuai dengan Teorema 3.2.



Gambar 3.8 (a) Graf K_{10} dan (b) Graf G_{10}

Pada Bab 3 ini telah dibuktikan bahwa tv_s graf hasil sama dengan dua pada Teorema 3.1 dan banyak tali busur graf hasil pada Akibat 3.1 dan Akibat 3.2. Pada Bab selanjutnya akan diberikan kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh.

BAB 4 KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa Algoritma penghapusan tali busur dibagi menjadi 2 yaitu Algoritma 3.1 (untuk n ganjil, $n \geq 7$) dan Algoritma 3.2 (untuk n genap, $n \geq 6$). Algoritma penghapusan tali busur pada K_n untuk mengkonstruksi suatu graf lingkaran dengan tali busur sesedikit mungkin dan tvs sama dengan 2.

Berdasarkan Observasi 3.1. Derajat terkecil (δ) dan terbesar (Δ) dari graf G_n yang diperoleh dengan Algoritma 3.1 (n ganjil, $n \geq 7$) atau 3.2 (n genap, $n \geq 6$) adalah sebagai berikut.

Algoritma	δ	Δ
3.1 (n ganjil, $n \geq 7$)	2	$\frac{n+1}{2}$
3.2 (n genap, $n \geq 6$)	2	$\frac{n}{2}$

Graf hasil (Graf G_n) yang diperoleh dengan Algoritma 3.1 atau Algoritma 3.2 memiliki tvs sama dengan dua terbukti pada Teorema 3.1. Banyak tali busur pada graf G_n dijabarkan dalam Akibat 3.1 dan Akibat 3.2. Banyak tali busur pada graf G_n juga dapat ditentukan berdasarkan tahapan-tahapan algoritma.

Algoritma	Banyak tali busur pada graf G_n
3.1 (n ganjil, $n \geq 7$)	$\frac{n^2 - 4n - 5}{8}$
3.2 (n genap, $n \geq 6$)	$\frac{n^2 - 6n + 8}{8}$

DAFTAR PUSTAKA

- Baça M., Jendrol' S., Miller M., and Ryan J. 2007. On irregular total labellings, *Discrete Math.* 307 (1-12). 1378-1388.
- Gallian, J. A. 2010. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 17, #DS6.
- Nurdin. 2010. *Nilai Total Ketakteraturan dari Suatu Graf*. Bandung: Matematika, Institut Teknologi Bandung.
- Rosen, K. H. 2007. *Discrete Mathematics and its Application* (6ed.). New York: McGraw-Hill.
- West, D. B. 2002. *Introduction to Graph Theory* (2ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

