



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**ANALISIS STABILITAS DAN IMPLEMENTASI MODEL  
BRENNAN-SCHWARTZ**

**TESIS**

**TRI HANDHIKA**

**0906577431**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**DEPOK**

**JULI 2011**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**ANALISIS STABILITAS DAN IMPLEMENTASI MODEL  
BRENNAN-SCHWARTZ**

**TESIS**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains**

**TRI HANDHIKA**

**0 9 0 6 5 7 7 4 3 1**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**KONSENTRASI KEUANGAN**

**DEPOK**

**JULI 2011**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Tri Handhika

NPM : 0906577431

Tanda Tangan :



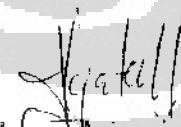
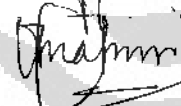

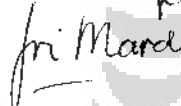
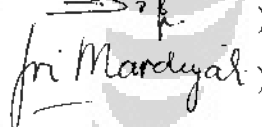
Tanggal : 6 Juli 2011

## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :  
Nama : Tri Handhika  
NPM : 0906577431  
Program Studi : Matematika  
Judul Tesis : Analisis Stabilitas dan Implementasi Model  
Brennan-Schwartz

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Gatot F. Hertono, Ph.D. (  )  
Pembimbing : Bevina D. Handari, Ph.D. (  )  
Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami (  )  
Penguji : Dr. rer. nat. Hendri Murfi (  )  
Penguji : Dr. Sri Mardiyati M.Kom (  )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 6 Juli 2011

*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi,  
dan pergantian malam dan siang,  
terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah)  
bagi orang yang berakal,  
(QS Ali 'Imran: 190)*

*Dia memberikan hikmah kepada siapa yang Dia kehendaki.  
Barang siapa diberi hikmah, sesungguhnya dia telah  
diberi kebaikan yang banyak. Dan tidak ada yang dapat  
mengambil pelajaran kecuali orang-orang yang mempunyai  
akal sehat.  
(QS Al-Baqarah: 269)*

*Tulisan ini kupersembahkan untuk  
Ayah, Ibu, Kakak, dan Istriku*

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Allah Yang Maha Kuasa karena hanya atas berkat dan rahmat-Nya sajalah sehingga penyusunan Tesis ini dapat terselesaikan.

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (S2) pada Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan, bimbingan, dan pengarahan yang sangat berharga dalam penyelesaian Tesis ini kepada:

1. Kedua orang tuaku (Muchid Arifin dan Yati Rani Anggraini), kedua mertuaku (Lauw Eng Tjoan dan Lo Er Nie), istriku (Murni), serta kakak-kakakku (Ika Arifiyanti dan Dwi Arifiyanto) yang selalu memberikan doa, semangat, dan kasih sayang kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
2. Gatot F. Hertono, Ph.D dan Bevina D. Handari, Ph.D selaku pembimbing Tesis yang telah membimbing dan mengarahkan penulis.
3. Prof. Dr. Djati Kerami dan Dr. rer. nat. Hendri Murfi selaku Ketua dan Sekretaris Program Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia serta Dr. Dian Lestari selaku Dosen Wali.
4. Prof. Dr. Djati Kerami, Gatot F. Hertono, Ph.D, dan Dr. Sri Mardiyati M.Kom selaku penguji sidang Tesis.
5. Universitas Gunadarma selaku penyandang dana bagi penulis selama menjalani pendidikan Program Magister, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia tahun anggaran 2009-2011.

6. Rekan-rekan Staf Pengajar pada Pusat Studi Komputasi Matematika (PSKM), Universitas Gunadarma, Ernastuti, Edi Sukirman, Asep Juarna, Adang Suhendra, Ahmad Sabri, Lismanto, Onggo Wiryawan, Ias Sri Wahyuni, Dina Indarti, Nola Marina, Aini Suri Talita, dan Murni.
7. Segenap Staf Pengajar, Karyawan Tata Usaha, dan Perpustakaan Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.
8. Sahabatku Reza Henganing Ayodya, Bong Novi Herawati, Eva Rida Meilina Simatupang, Milka Hutagalung, dan Murni yang selalu memberi inspirasi bagi penulis.
9. Rekan-rekan Asisten Dosen Departemen Manajemen, Fakultas Ekonomi, Universitas Indonesia, terutama Ajat Adriansyah, Lenny Suardi, dan Agung Faradynawati yang membantu penulis dalam menjawab pertanyaan-pertanyaan yang muncul selama penyelesaian Tesis ini.
10. Rekan-rekan peneliti SISORCO (*Science and Social Research Consultant*), Reza Henganing Ayodya, Murni, Adhika Jati, Dina Indarti, Ias Sri Wahyuni, dan Nola Marina yang memberi banyak pengalaman dalam berorganisasi dan memahami dasar-dasar penelitian dengan baik.
11. Teman-teman Program Magister Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia angkatan 2009 yang telah mewarnai kehidupan penulis selama dua tahun di Universitas Indonesia.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa Tesis ini masih belum sempurna dan perlu dilakukannya studi yang lebih mendalam. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran sebagai bekal penyempurnaan penulisan-penulisan selanjutnya di kemudian hari. Akhir kata, penulis berharap semoga tulisan ini dapat bermanfaat dalam pengembangan Ilmu Matematika dan disiplin ilmu lainnya.

Depok, Juli 2011

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS  
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tri Handhika  
NPM : 0906577431  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Tesis

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Analisis Stabilitas dan Implementasi Model Brennan-Schwartz**

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan memublikasikan Tugas Akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 6 Juli 2011

Yang menyatakan



(Tri Handhika)



## ABSTRAK

Nama : Tri Handhika

Program Studi : Matematika

Judul : Analisis Stabilitas dan Implementasi Model Brennan-Schwartz

Tesis ini bertujuan untuk menganalisis stabilitas model Brennan-Schwartz dan menggunakannya sebagai panduan dalam menganalisis tingkat bunga. Stabilitas penting untuk menggambarkan ketahanan suatu model terhadap gangguan pada nilai awal ataupun parameter modelnya. Pada Tesis ini akan dibahas dua cara untuk menentukan stabilitas stokastik, yaitu stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Kriteria-kriteria stabilitas yang diperoleh dapat digunakan sebagai panduan untuk memilih parameter sehingga model menjadi tahan terhadap gangguan. Akan tetapi, pada kenyataannya parameter model Brennan-Schwartz tidak diketahui nilainya sehingga perlu dilakukan penaksiran terlebih dahulu. Pada Tesis ini, metode yang digunakan dalam menaksir parameter model Brennan-Schwartz adalah metode *Maximum Likelihood* dan dilanjutkan secara iteratif menggunakan Algoritma Nelder-Mead. Dalam implementasi, taksiran parameter diperoleh melalui penerapan konsep perubahan *measure*. Hasil implementasi menunjukkan bahwa solusi model Brennan-Schwartz cukup baik dalam menggambarkan pergerakan tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari tahun 1982 hingga Februari 2011 yang datanya diunduh dari [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk).

**Kata kunci:** Model Brennan-Schwartz; Stabilitas Model Stokastik; *Maximum Likelihood*; Algoritma Nelder-Mead; Perubahan *Measure*.

**Bibliografi:** 26 (1974 – 2011)

## ABSTRACT

Name : Tri Handhika

Study Program: Mathematics

Title : Stability Analysis of Brennan-Schwartz Model with  
Implementation

This thesis aims to analyze the stability of the Brennan-Schwartz model and use it as a guideline to analyze interest-rate. Stability is important to describe resistance of the model to the perturbation in the initial state or parameters of the model. Two ways to define stochastic stability will be considered in this thesis: stochastically asymptotically stable and mean-square stability. These stability criteria can be used as guidelines for selecting parameters that make the model resistant to the perturbation. However, Brennan-Schwartz model requires estimation of parameters whose values are unknown. In this thesis, the method which is used to estimate parameters of Brennan-Schwartz model is the maximum likelihood estimation method and will be continued iteratively using the Nelder-Mead Algorithm. In the application, parameter estimators are obtained by applying change of measure concept. Implementations show that Brennan-Schwartz model is good enough to approximate the real data of monthly interest-rate from a zero-coupon bond with maturity time of 5 years: January, 1982 - February, 2011 in which data is downloaded from [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk).

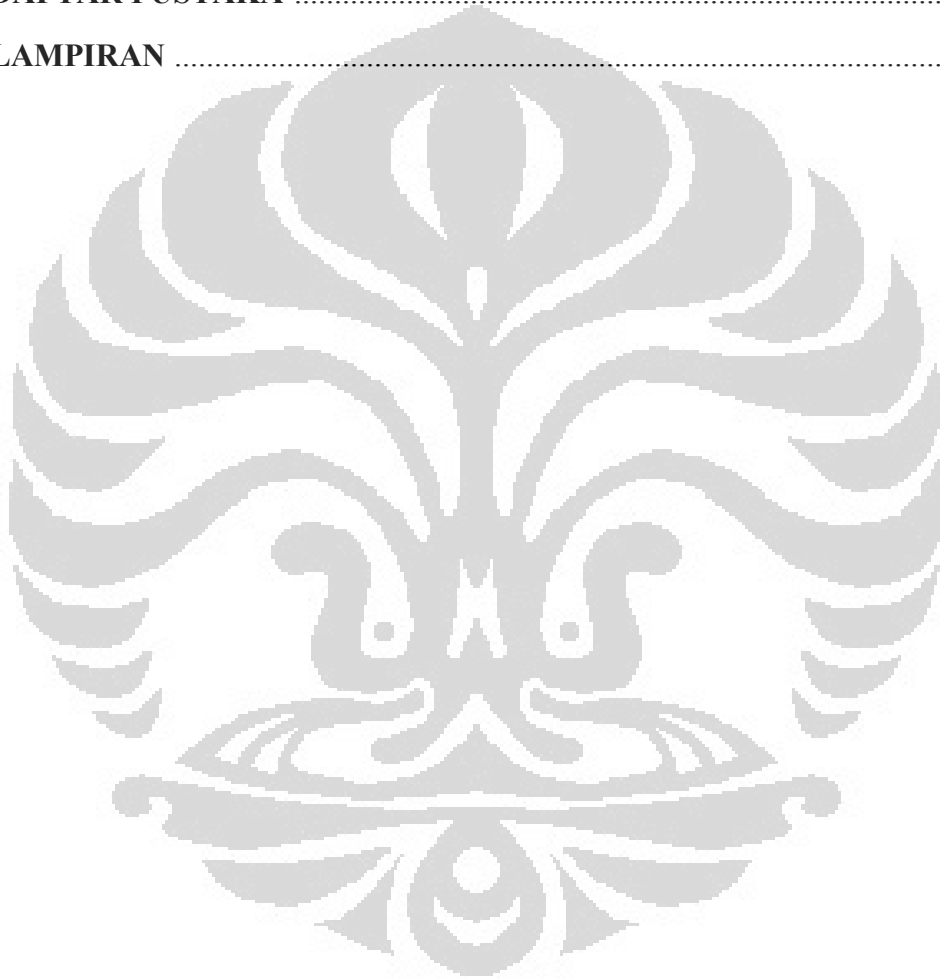
**Key words:** Brennan-Schwartz Model; Stability of Stochastic Model; Maximum Likelihood; Nelder-Mead Algorithm; Change of Measure.

**Bibliography:** 26 (1974 – 2011)

## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR ORISINALITAS .....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
KATA PENGANTAR .....	v
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH .....	vii
ABSTRAK .....	viii
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penulisan .....	4
1.4 Sistematika Penulisan .....	4
<b>BAB 2. LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Teori Probabilitas	
2.1.1 Proses Stokastik .....	6
2.1.2 Perubahan <i>Measure</i> .....	16
2.2 <i>Brownian Motion</i> dan Kalkulus Stokastik	
2.2.1 <i>Brownian Motion</i> .....	18
2.2.2 Kalkulus Stokastik: Ito-Doeblin <i>Formula</i> .....	20
2.3 Stabilitas Persamaan Diferensial Stokastik Ito .....	23
2.4 Estimasi Parameter	
2.4.1 Metode <i>Maximum Likelihood</i> .....	25
2.4.2 Algoritma Nelder-Mead .....	27
2.5 <i>Asset Pricing</i> .....	29

<b>BAB 3. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Model Brennan-Schwartz .....	33
3.2 Stabilitas Model Brennan-Schwartz .....	39
3.3 Penaksiran Parameter Model Brennan-Schwartz .....	46
<b>BAB 4. IMPLEMENTASI</b> .....	52
<b>BAB 5. KESIMPULAN</b> .....	60
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	61
<b>LAMPIRAN</b> .....	64



## DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.2.1	Daerah stabilitas stokastik asimtotik untuk sebarang nilai awal model Brennan-Schwartz terkait parameter $\gamma$ dan $\beta$ .....	45
Gambar 3.2.2	Daerah stabilitas <i>mean-square</i> model Brennan-Schwartz terkait parameter $\gamma$ dan $\beta$ .....	45
Gambar 4.1	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana $\gamma = 0,2; \alpha = 0,02$ ; dan $\beta = 0,2$ .....	53
Gambar 4.2	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana $\gamma = -0,05; \alpha = 0,02$ ; dan $\beta = 0,1$ .....	53
Gambar 4.3	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana $r_0 = 14,94\%$ .....	54
Gambar 4.4	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan <i>mean-square</i> di mana $\gamma = 0,2; \alpha = 0,02$ ; dan $\beta = 0,5$ .....	55

Gambar 4.5	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan <i>mean-square</i> di mana $\gamma = 0,1$ ; $\alpha = 0,02$ ; dan $\beta = 0,5$ .....	55
Gambar 4.6	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan <i>mean-square</i> di mana $\gamma = -0,1$ ; $\alpha = 0,02$ ; dan $\beta = 0,3$ .....	56
Gambar 4.7	Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai parameter berbeda untuk uji kestabilan <i>mean-square</i> di mana $r_0 = 14,94\%$ .....	56
Gambar 4.8	Pergerakan tingkat bunga bulanan dari suatu <i>zero-coupon bond</i> dengan <i>maturity time</i> 5 tahun periode Januari 1982 hingga Februari 2011 dengan menggunakan model Brennan-Schwartz.....	59

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 <i>Flowchart</i> Nelder-Mead untuk Metode <i>Maximum Likelihood</i> .....	64
Lampiran 2 Skema Analisis .....	65
Lampiran 3 Data tingkat bunga bulanan dari suatu <i>zero coupon bond</i> pada Bank of England periode Januari 1982 hingga Februari 2011 .....	66
Lampiran 4 Stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda .....	70
Lampiran 5 Stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter yang berbeda-beda .....	71
Lampiran 6 Stabilitas <i>mean-square</i> model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda.....	72
Lampiran 7 Stabilitas <i>mean-square</i> model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter yang berbeda-beda .....	73
Lampiran 8 Algoritma Nelder-Mead dalam menaksir parameter model Brennan-Schwartz dengan menggunakan metode <i>Maximum</i> <i>Likelihood</i> .....	74
Lampiran 9 Pergerakan tingkat bunga dengan model Brennan-Schwartz.....	78

## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Dalam menentukan harga suatu aset/produk keuangan (*asset pricing*), para ekonom mendasarinya atas dua hal, yakni preferensi resiko investor atau biasa dikenal sebagai “*taste*” investor dan distribusi *payments* suatu produk keuangan di masa depan atau “teknologi” ekonomi. Preferensi resiko seorang investor haruslah konsisten dengan suatu fungsi utilitas yang diharapkan (Pennacchi, 2008). Daniel Bernoulli telah menunjukkan bahwa fungsi utilitas yang dimaksud merupakan fungsi *increasing* dan konkaf terhadap harta yang dimiliki seorang investor. Semakin besar harta yang dimiliki seseorang tidak meningkatkan kepuasan seseorang dengan cukup signifikan. Hal ini dapat disebabkan oleh ketakutan seorang investor akan kehilangan harta yang dimiliki sehingga umumnya investor dalam pasar keuangan tergolong *risk averse*.

Untuk menangani *risk averse*, dalam dunia asuransi dikenal istilah *risk premium*, yaitu harga yang harus dibayar oleh seseorang untuk mengalihkan resiko yang mungkin terjadi. Sedangkan dalam masalah *asset pricing*, *risk premium* didefinisikan sebagai ekspektasi tingkat pengembalian suatu produk keuangan yang dimiliki oleh seorang investor. Dengan kata lain, resiko *payoff* suatu produk keuangan di masa depan, seperti obligasi, opsi, atau *swap*, menentukan tingkat pengembalian produk-produk keuangan tersebut pada tingkat bunga tertentu.

Pembahasan mengenai ketergantungan pada tingkat bunga diperlukan pula dalam hal manajemen resiko maupun dalam spekulasi bisnis yang menuntun pada *asset pricing* (Csajkova, 2007; Pennacchi, 2008). Ketidakpastian pergerakan tingkat bunga di masa depan merupakan bagian penting dalam teori pengambilan keputusan keuangan. Ketidakpastian ini juga merupakan kendala dalam



menentukan harga suatu produk turunan tingkat bunga maupun dalam hal manajemen resiko (Yolcu, 2005).

Secara matematis, fenomena pergerakan tingkat bunga direpresentasikan dengan Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Dalam Tesis ini akan dibahas mengenai salah satu model tingkat bunga, yaitu model Brennan-Schwartz (Brennan, 1980). Model Brennan-Schwartz mendeskripsikan pergerakan tingkat bunga menurut satu sumber resiko atau satu variabel ketidakpastian. Seperti halnya model Vasicek, Rendleman-Bartter, maupun CIR, model Brennan-Schwartz juga tergolong ke dalam model ekuilibrium yang memiliki sifat *mean reversion*. Model Brennan-Schwartz mirip dengan model Vasicek, tetapi koefisien difusi bersifat multiplikatif.

Seperti halnya dalam persamaan diferensial deterministik, suatu PDS juga mengandung parameter. Dalam beberapa kasus, parameter-parameter tersebut terkadang diketahui nilainya, seperti pada eksperimen dalam laboratorium fisika maupun kimia. Berbeda dengan kasus eksperimen, dalam konteks keuangan seringkali parameter-parameter tersebut tidak diketahui nilainya sehingga perlu ditaksir terlebih dahulu pada saat implementasi model terhadap data riil. Oleh sebab itu, perlu dilakukan penaksiran terhadap parameter model Brennan-Schwartz dengan menggunakan data observasi yang tersedia.

Dalam penaksiran parameter model Brennan-Schwartz terdapat masalah perbedaan *measure* karena data observasi yang digunakan memenuhi asumsi *actual probability measure*  $P$ . Sedangkan, model Brennan-Schwartz memenuhi asumsi *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ . Dengan kata lain, terdapat kemungkinan bahwa parameter yang diperoleh tidak sesuai dengan yang diharapkan atau menyimpang dari yang sebenarnya. Taksiran parameter yang menyimpang dapat mengakibatkan solusi yang menyimpang pula. Dengan demikian, solusi dari masalah yang diselesaikan mungkin juga menyimpang dari solusi masalah sebenarnya (Anggono, 2004).

Penyimpangan solusi yang terjadi akibat gangguan-gangguan baik berupa kesalahan penaksiran parameter maupun penentuan nilai awal solusi

menyebabkan diperlukannya suatu panduan mengenai kriteria nilai taksiran parameter yang dapat diterima sehingga model Brennan-Schwartz dapat diimplementasikan pada data riil. Salah satu panduan yang dapat digunakan adalah stabilitas model. Stabilitas model cukup menarik untuk dibahas karena dapat menggambarkan ketahanan suatu model terhadap gangguan-gangguan tersebut sehingga modelnya dapat digunakan dalam peramalan untuk jangka waktu tertentu. Pada model yang stabil sedikit perubahan pada nilai awal ataupun nilai parameter suatu PDS hanya akan menyebabkan sedikit perubahan pada keseluruhan solusinya (Anggono, 2004; Arnold, 1974; Kloeden, 1992).

Dalam Tesis ini, akan dibahas mengenai stabilitas dan penaksiran parameter pada salah satu model tingkat bunga, yakni model Brennan-Schwartz. Model Brennan-Schwartz merupakan PDS non-homogen yang memiliki solusi analitik (Bayazit, 2004). Walaupun demikian, secara kualitatif terkadang hanya diperhatikan sifat stabilitas model tanpa menentukan solusinya terlebih dahulu (Kreyszig, 1999). Selain itu, penentuan kriteria stabilitas model Brennan-Schwartz tetap diperlukan dalam menggambarkan ketahanan model tersebut terhadap gangguan. Kriteria stabilitas model stokastik yang akan dibahas adalah kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* (Allen, 2007; Higham, 2001; Kloeden, 1992). Dengan melakukan analisis stabilitas dan penaksiran parameter terhadap model Brennan-Schwartz, diharapkan dapat diketahui apakah hasil taksiran parameter model Brennan-Schwartz berdasarkan data observasi tingkat bunga yang tersedia menghasilkan solusi model yang cukup baik dalam menggambarkan pergerakan tingkat bunga tersebut atau tidak.

## 1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana menentukan kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz serta implementasi model pada data riil.

### 1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan Tesis ini adalah untuk menentukan kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz serta implementasi model pada data riil dengan memberi informasi mengenai

- penaksiran parameter model Brennan-Schwartz; dan
- solusi model dalam menggambarkan pergerakan tingkat bunga.

### 1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tesis ini dibagi menjadi lima bab, yaitu:

- Bab 1 membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.
- Bab 2 membahas landasan teori mengenai teori probabilitas, *Brownian Motion* dan kalkulus stokastik, stabilitas persamaan diferensial stokastik, estimasi parameter, dan *asset pricing* yang diperlukan pada pembahasan selanjutnya.
- Bab 3 membahas mengenai model Brennan-Schwartz berikut dengan kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* serta penaksiran parameter model.
- Bab 4 membahas perbandingan tingkat bunga bulanan dari suatu *zero coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari 1982 hingga Februari 2011 melalui model Brennan-Schwartz dengan menggunakan data observasi yang diunduh dari [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk).
- Bab 5 berisi kesimpulan untuk Tesis ini.

## BAB 2

### LANDASAN TEORI

Pada Bab 2 berikut akan dibahas mengenai dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan Tesis ini, yakni teori probabilitas. Teori probabilitas perlu dibahas terlebih dahulu sebelum pembahasan lebih lanjut mengenai model tingkat bunga yang tidak sederhana di mana model berupa Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Teori probabilitas mencakup proses stokastik, informasi dan  $\sigma$ -aljabar, serta perubahan *measure*. Selain itu, dibahas pula mengenai *Brownian Motion* berikut dengan sifat-sifatnya. Salah satu sifat yang cukup penting untuk dibahas adalah variasi kuadrat dari *Brownian motion* karena menjadi dasar pembahasan mengenai kalkulus stokastik yang mencakup integral stokastik Ito dan formula Ito-Doeblin. Kemudian, pembahasan dilanjutkan dengan pengenalan PDS Ito berikut dengan stabilitasnya. PDS mengandung parameter-parameter yang tidak diketahui nilainya sehingga diperlukan data riil/historis untuk menaksir nilai-nilai parameter tersebut. Pada Tesis ini metode penaksiran parameter yang digunakan adalah metode *Maximum Likelihood* dan salah satu metode optimisasi numerik, yaitu algoritma Nelder-Mead. Pada akhir Bab 2 dibahas pula mengenai konsep matematika keuangan dalam menentukan harga aset/produk keuangan. Harga aset yang terbentuk haruslah memenuhi kondisi *no arbitrage*, yakni kondisi di mana suatu aset diperdagangkan pada harga yang sama walaupun pada tempat yang berbeda. Proses penentuan harga aset tersebut dapat melalui konsep perubahan *measure* yang dinyatakan dalam Teorema Girsanov. Berdasarkan Teorema Girsanov dapat didefinisikan suatu *probability measure* yang merupakan *risk-neutral probability measure* sehingga harga aset yang diperoleh tersebut memenuhi kondisi *no arbitrage* sesuai dengan Teorema Fundamental *Asset Pricing*.

## 2.1 Teori Probabilitas

### 2.1.1 Proses Stokastik

Pada Tesis ini akan dibahas salah satu masalah dalam matematika keuangan, yaitu pergerakan tingkat bunga di mana harga dari suatu aset/produk keuangan ditentukan pada tingkat bunga tertentu, seperti yang telah dijelaskan pada Bab 1. Pergerakan tingkat bunga tersebut dapat dimodelkan ke dalam suatu PDS di mana variabelnya merupakan suatu proses stokastik yang didefinisikan pada ruang probabilitas tertentu. Oleh sebab itu, pertama-tama akan dijelaskan mengenai ruang probabilitas. Diberikan ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  dengan  $\Omega$  adalah himpunan seluruh hasil yang mungkin dari suatu percobaan acak. Dalam pergerakan tingkat bunga,  $\Omega$  berupa nilai tingkat bunga yang mungkin terjadi, yaitu  $\Omega = \mathbb{R}$ . Sedangkan,  $\mathfrak{F}$  menyatakan koleksi *subset-subset* dari ruang sampel yang disebut sebagai ruang kejadian yang memenuhi sifat  $\sigma$ -aljabar. Dalam pergerakan tingkat bunga, pada suatu  $\mathfrak{F}$  dapat ditentukan probabilitas nilai tingkat bunga pada waktu tertentu, misal  $P$ .  $P$  merupakan fungsi dengan *domain*  $\mathfrak{F}$  dan *codomain*  $[0,1]$ .  $P$  menggambarkan distribusi dari tingkat bunga tersebut, misalkan probabilitas nilai tingkat bunga bulan depan berada pada interval 5% - 10%.

Setelah mengetahui definisi ruang probabilitas, akan ditentukan probabilitas dari suatu kejadian. Dengan kata lain, akan dimodelkan percobaan acak tersebut sehingga dapat diperoleh nilai probabilitasnya. Untuk tujuan pemodelan dapat didefinisikan suatu peubah acak yang menggambarkan kejadian-kejadian tersebut. Sedangkan, pada pergerakan tingkat bunga, tidak cukup hanya didefinisikan suatu peubah acak, melainkan barisan peubah acak yang disebut sebagai proses stokastik karena bergantung pula pada waktu.

Untuk menentukan probabilitas dari kejadian tertentu terkait peubah acak tersebut dapat didefinisikan suatu *Cumulative distribution function* (cdf) yang merupakan fungsi dengan *domain*  $\mathbb{R}$  dan *codomain*  $[0,1]$ . Selanjutnya, percobaan

acak tersebut (pergerakan tingkat bunga) dapat dimodelkan (digambarkan) untuk melihat karakteristiknya dengan *probability density function* (pdf) kontinu yang merupakan fungsi dengan *domain*  $\mathbb{R}$  dan *codomain*  $[0, \infty)$ . Berikut ini diberikan beberapa definisi yang diperlukan dalam pembahasan teori probabilitas (Boes, 1974; Dokuchaev, 2007).

#### Definisi 2.1.1.1 ( $\sigma$ -aljabar)

Sebarang kumpulan *subset-subset*  $\mathfrak{S}$  pada himpunan  $\Omega$  disebut  $\sigma$ -aljabar dari *subset-subset* pada  $\Omega$  jika memenuhi

- a)  $\Omega \in \mathfrak{S}$ .
- b) Jika  $A \in \mathfrak{S}$  maka  $\Omega \setminus A \in \mathfrak{S}$ .
- c) Jika  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$  maka  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathfrak{S}$ .

#### Definisi 2.1.1.2 (Peubah Acak)

Diberikan ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ , suatu peubah acak  $X$  atau  $X(\cdot)$  merupakan suatu fungsi dengan *domain*  $\Omega$  dan *codomain*  $\mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $A_r = \{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{S}, \forall r \in \mathbb{R}$ .

#### Definisi 2.1.1.3 (Cdf)

Cdf dari suatu peubah acak  $X$  yang dinotasikan dengan  $F_X(\cdot)$  didefinisikan sebagai fungsi dengan *domain*  $\mathbb{R}$  dan *codomain*  $[0, 1]$  yang memenuhi

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1.1, 2.1.1.2 dan 2.1.1.3 telah dibahas mengenai definisi  $\sigma$ -aljabar, peubah acak, dan cdf dari peubah acak di mana cdf menggambarkan distribusi dari nilai-nilai peubah acak. Selain itu, peubah acak dapat dibedakan atas peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu. Oleh karena nilai tingkat bunga memiliki distribusi yang kontinu, maka pada Tesis ini hanya dibahas mengenai peubah acak kontinu di mana distribusinya dapat dijelaskan

dengan *probability density function* (pdf). Sedangkan, pembahasan mengenai peubah acak diskrit dapat dilihat pada Boes (1974).

#### Definisi 2.1.1.4 (Peubah Acak Kontinu)

Suatu peubah acak  $X$  dikatakan kontinu jika terdapat suatu fungsi  $f_X(\cdot)$

sedemikian sehingga  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du ; \forall x \in \mathbb{R}$ .

#### Definisi 2.1.1.5 (Pdf dari suatu Peubah Acak Kontinu)

Jika  $X$  merupakan peubah acak kontinu, fungsi  $f_X(\cdot)$  pada

$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$  disebut pdf dari  $X$ .

Pdf suatu peubah acak kontinu dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)}{2\Delta x},$$

sehingga  $f_X(x) \cdot 2\Delta x \approx F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x) = P[x - \Delta x < X < x + \Delta x]$  yang berarti bahwa probabilitas  $X$  terdapat di dalam interval kecil yang mengandung nilai  $x$  diaproksimasi oleh  $f_X(x)$  dikali lebar interval. Untuk peubah acak kontinu,  $f_X(\cdot)$  adalah suatu fungsi dengan domain  $\mathbb{R}$  dan kodomain  $[0, \infty)$ . Pdf dapat pula digunakan untuk menghitung probabilitas suatu kejadian yang terdefinisi pada peubah acak kontinu  $X$ , contohnya:  $P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$  untuk  $a < b$ .

Berdasarkan definisi-definisi yang telah dibahas sebelumnya, maka probabilitas dari suatu kejadian telah dapat ditentukan dan percobaan acak tersebut dapat dimodelkan (digambarkan). Kemudian, pembahasan dilanjutkan dengan definisi ekspektasi (*mean*) dan variansi yang banyak digunakan dalam masalah-masalah terkait peubah acak ataupun distribusi yang digunakan pada Bab 3 (Boes, 1974; Shreve, 2004).

**Definisi 2.1.1.6 (Mean)**

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas dan misalkan pula  $X$  adalah suatu peubah acak. *Mean* dari  $X$  yang dinotasikan dengan  $\mu_X$  atau  $E(X)$  didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

jika  $X$  kontinu dengan pdf  $f_X(x)$ . Selain itu,

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx,$$

untuk sebarang peubah acak  $X$ .

**Definisi 2.1.1.7 (Variansi)**

Misalkan  $X$  adalah suatu peubah acak. Variansi dari  $X$  yang dinotasikan dengan  $\sigma_X^2$  atau  $Var(X)$  didefinisikan sebagai

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx,$$

jika  $X$  kontinu dengan pdf  $f_X(x)$ . Selain itu,

$$Var(X) = \int_0^{\infty} 2x [1 - F_X(x) + F_X(-x)] dx - \mu_X^2,$$

untuk sebarang peubah acak  $X$ .

Untuk  $X$  kontinu,  $E(X)$  dan  $Var(X)$  dapat terdefinisi jika integralnya ada. Selain itu, dikatakan *mean* dan variansinya tidak ada atau tidak terdefinisi. Berikut ini adalah Definisi dan Teorema mengenai ekspektasi bersyarat serta hubungannya dengan ruang probabilitas yang akan banyak digunakan dalam penyelesaian masalah pergerakan tingkat bunga pada Bab 3. Namun, sebelumnya akan dibahas definisi mengenai *measurable* dan saling bebas (*independent*) yang digunakan pada Definisi dan Teorema ekspektasi bersyarat (Shreve, 2004).



**Definisi 2.1.1.8 (Measurable)**

Misalkan  $X$  suatu peubah acak yang terdefinisi pada suatu ruang sampel tidak kosong  $\Omega$ . Misalkan  $\mathcal{G}$  suatu  $\sigma$ -aljabar dari subset  $\Omega$ . Jika setiap himpunan di dalam  $\sigma$ -aljabar  $\sigma(X)$  juga termasuk di dalam  $\mathcal{G}$ , maka  $X$  disebut *measurable* di  $\mathcal{G}$ .

**Definisi 2.1.1.9 (Independent)**

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas dan misalkan  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  adalah barisan dari sub- $\sigma$ -aljabar  $\mathfrak{F}$ . Untuk suatu bilangan bulat positif  $n$ , dikatakan bahwa  $n$   $\sigma$ -aljabar  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  *independent* jika

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \text{ untuk setiap}$$

$$A_1 \in \mathcal{G}_1, A_2 \in \mathcal{G}_2, \dots, A_n \in \mathcal{G}_n.$$

Misalkan  $X_1, X_2, X_3, \dots$  adalah barisan peubah acak pada  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Dikatakan bahwa  $n$  peubah acak  $X_1, X_2, \dots, X_n$  *independent* jika  $\sigma$ -aljabar- $\sigma$ -aljabar  $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots, \sigma(X_n)$  *independent*. Dikatakan bahwa seluruh barisan  $\sigma$ -aljabar  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  *independent* jika untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ ,  $n$   $\sigma$ -aljabar  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$  *independent*. Dikatakan bahwa seluruh barisan peubah acak  $X_1, X_2, X_3, \dots$  *independent* jika untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ ,  $n$  peubah acak  $X_1, X_2, \dots, X_n$  *independent*.

**Definisi 2.1.1.10 (Ekspektasi Bersyarat)**

Misalkan diberikan ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  di mana  $\mathcal{G}$  merupakan sub- $\sigma$ -aljabar dari  $\mathfrak{F}$ , dan misalkan pula  $X$  adalah peubah acak yang non-negatif atau *integrable*,  $(E(|X|) < \infty)$ . Ekspektasi bersyarat  $X$  diberikan  $\mathcal{G}$  yang dinotasikan dengan  $E(X|\mathcal{G})$  adalah sebarang peubah acak yang memenuhi

- a) (**Measurability**)  $E(X|\mathcal{G})$  measurable.
- b) (**Partial Averaging**)  $\int_A E(X|\mathcal{G})(\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathcal{G}$ .

Jika  $\mathcal{G}$  adalah suatu  $\sigma$ -aljabar yang dibangun oleh beberapa peubah acak  $W$ , maka ekspektasi bersyarat  $X$  diberikan  $\sigma$ -aljabar  $\sigma(\mathcal{G})$  secara umum dinotasikan dengan  $E(X|\mathcal{G})$  daripada  $E(X|\sigma(\mathcal{G}))$ .

### **Teorema 2.1.1.11 (Ekspektasi Bersyarat)**

Misalkan diberikan ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  dan misalkan pula  $\mathcal{G}$  merupakan sub- $\sigma$ -aljabar dari  $\mathfrak{F}$ .

- a) Jika  $X$  dan  $Y$  merupakan peubah acak - peubah acak yang *integrable* dan  $c_1$  serta  $c_2$  merupakan konstanta, maka

$$E(c_1X + c_2Y|\mathcal{G}) = c_1E(X|\mathcal{G}) + c_2E(Y|\mathcal{G}).$$

- b) Jika  $X$ ,  $Y$ , dan  $XY$  merupakan peubah acak - peubah acak yang *integrable*, dan  $X$  *measurable* di  $\mathcal{G}$ , maka

$$E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G}).$$

- c) Jika  $\mathcal{G}$  suatu sub- $\sigma$ -aljabar dari  $\mathcal{G}$  dan  $X$  merupakan peubah acak yang *integrable*, maka

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}).$$

- d) Jika  $X$  *integrable* dan *independent* dari  $\mathcal{G}$ , maka

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

Setelah dibahas definisi dan teorema yang berkaitan dengan peubah acak kontinu, *mean*, variansi, serta ekspektasi bersyarat, selanjutnya akan dipelajari distribusi kontinu dari nilai tingkat bunga yang dibahas pada Tesis ini, yaitu distribusi lognormal, seperti didefinisikan berikut ini (Karlin, 1998):

**Definisi 2.1.1.12 (Distribusi Normal dan Lognormal)**

Suatu peubah acak  $X$  dikatakan berdistribusi Normal jika memiliki pdf sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}; \quad -\infty < x < \infty,$$

dengan *mean*  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$ .

Jika logaritma natural dari suatu peubah acak  $V$  berdistribusi Normal, maka  $V$  memiliki distribusi Lognormal. Sebaliknya, jika  $X$  berdistribusi Normal dengan *mean*  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$ , maka  $V = e^X$  merupakan peubah acak berdistribusi Lognormal. Berikut ini diberikan pdf dari  $V$ :

$$f_V(v) = \frac{1}{\sigma v\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(v)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

dengan *mean* dan variansi masing-masing adalah

$$E(V) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

dan

$$\text{Var}(V) = \exp\left\{2\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\} \cdot \{\exp(\sigma^2) - 1\}.$$

Selanjutnya, perlu diketahui bahwa dalam masalah matematika keuangan, khususnya tingkat bunga, kejadian-kejadian (nilai tingkat bunga) terkait dengan waktu sehingga pada tiap waktu perlu didefinisikan suatu peubah acak. Oleh sebab itu, dalam menggambarkan nilai tingkat bunga perlu didefinisikan lebih dari satu peubah acak. Berikut ini akan dibahas beberapa definisi terkait dengan hal tersebut (Dokuchaev, 2007).

**Definisi 2.1.1.13**

Suatu barisan peubah acak  $\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$ , disebut sebagai suatu proses stokastik dengan waktu diskret.

**Definisi 2.1.1.14**

Misalkan diberikan  $T \in [0, +\infty]$ . Suatu pemetaan  $\xi: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  disebut sebagai suatu proses stokastik dengan waktu kontinu jika  $\xi(t, \omega)$  merupakan peubah acak untuk hampir setiap  $t$ .

Suatu proses stokastik memiliki dua peubah *independent* ( $t$  dan  $\omega$ ), proses tersebut dapat ditulis sebagai  $\xi_t(\omega)$ ,  $\xi(t, \omega)$ , atau hanya  $\xi_t$ ,  $\xi(t)$ . Pada Tesis ini nilai tingkat bunga dinyatakan sebagai suatu proses stokastik yang dinotasikan dengan  $r_t$ . Berikut ini diberikan beberapa definisi yang dapat digunakan untuk menggambarkan suatu proses stokastik (Kloeden, 1992):

**Definisi 2.1.1.15**

Untuk setiap  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi(\cdot, \omega): [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$  disebut sebagai suatu realisasi, *sample path*, atau *trajectory*.

Teori proses stokastik mempelajari sifat-sifat *sample path* (sifat-sifat *trajectories*)  $\xi(t, \omega)$  untuk  $\omega$  yang diberikan.

**Definisi 2.1.1.16**

Suatu proses  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$  dengan waktu kontinu disebut kontinu (*sample path* kontinu), jika *trajectories*  $\xi(t, \omega)$  hampir pasti (*almost surely*) kontinu di  $t$  (dengan probabilitas 1 atau untuk hampir setiap (*almost every*)  $\omega$ ).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai *white noise* dan *random walk* yang menjadi dasar dalam *Brownian motion* pada Subbab 2.2.1. *Brownian motion* ini memegang peranan penting dalam pembentukan suatu model tingkat bunga yang menjadi objek masalah pada Tesis ini.

**Definisi 2.1.1.17**

Misalkan  $\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$ , merupakan proses stokastik dengan waktu diskrit sedemikian sehingga  $\xi_t$  *mutually independent* dan memiliki distribusi yang sama, serta  $E(\xi_t) = 0$ . Maka, proses  $\xi_t$  disebut sebagai suatu *white noise* dengan waktu diskrit.

**Definisi 2.1.1.18**

Misalkan  $\xi_t$  *white noise* dengan waktu diskrit, dan misalkan  $\eta_t \triangleq \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$  di mana  $x \triangleq X$  berarti bahwa  $x$  terdefinisi sedemikian sehingga  $x = X$ . Maka, proses  $\eta_t$  disebut sebagai suatu *random walk*.

Nilai tingkat bunga dipengaruhi oleh informasi-informasi nilai tingkat bunga sebelumnya. Dalam konsep ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , informasi-informasi yang dimaksud tidak hanya untuk mengetahui nilai  $\omega \in \Omega$  yang terkait saja, melainkan untuk mengetahui kemungkinan munculnya nilai-nilai  $\omega$  tersebut. Oleh sebab itu, dalam teori probabilitas informasi tersebut dimodelkan dengan menggunakan konsep  $\sigma$ -aljabar. Selanjutnya, berikut ini akan dibahas beberapa definisi terkait ekspektasi suatu proses stokastik bersyarat informasi sebelumnya. Pertama-tama, asumsikan bahwa definisi-definisi berikut ini berlaku untuk waktu  $t \in [0, +\infty)$  atau  $t = 0, 1, 2, \dots$  (Dokuchaev, 2007):

**Definisi 2.1.1.19**

Suatu himpunan dari  $\sigma$ -aljabar  $\{\mathfrak{F}_t\}$  disebut sebagai suatu filtrasi jika  $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$  untuk  $s < t$ .

**Definisi 2.1.1.20**

Misalkan  $\xi_t$  merupakan suatu proses stokastik, dan misalkan pula bahwa  $\mathfrak{F}_t$  adalah suatu filtrasi. Proses  $\xi(\cdot)$  disebut *adapted* terhadap filtrasi  $\mathfrak{F}_t$ , jika sebarang peubah acak  $\xi_t$  *measurable* terhadap  $\mathfrak{F}_t$  (contohnya:  $\{\xi_t \in B\} \in \mathfrak{F}_t$  dengan  $B \subset \mathfrak{R}$  merupakan sebarang interval buka).

**Definisi 2.1.1.21**

Misalkan  $\xi_t$  merupakan suatu proses stokastik. Filtrasi  $\mathfrak{F}_t$  yang dibangun oleh  $\xi_t$  didefinisikan sebagai filtrasi minimal sedemikian sehingga  $\xi_t$  *adapted* terhadap  $\mathfrak{F}_t$ .

**Definisi 2.1.1.22**

Proses stokastik  $\xi(\cdot)$  dan  $\eta(\cdot)$  disebut *independent* jika dan hanya jika kejadian-kejadian  $\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in A\}$  dan  $\{(\eta_{\tau_1}, \dots, \eta_{\tau_m}) \in B\}$  *independent* untuk semua  $m, n$ , semua waktu  $(t_1, \dots, t_n)$  dan  $(\tau_1, \dots, \tau_m)$ , serta semua himpunan  $A \subset \mathfrak{R}^n$  dan  $B \subset \mathfrak{R}^m$ .

Proses-proses *independent* jika dan hanya jika semua kejadian-kejadian dari filtrasi yang dibangun oleh proses-proses tersebut *mutually independent*. Selanjutnya, pembahasan dilanjutkan dengan konsep *martingale* yang memegang peranan penting dalam teori *asset pricing*. Teori mengenai *asset pricing* akan dijelaskan lebih lanjut pada Subbab 2.5.

**Definisi 2.1.1.23**

Misalkan  $\xi_t$  merupakan suatu proses sedemikian sehingga  $E(|\xi_t|^2) < +\infty$  untuk semua  $t$ , dan misalkan  $\mathfrak{F}_t$  adalah suatu filtrasi.  $\xi_t$  disebut sebagai suatu *martingale* terhadap  $\mathfrak{F}_t$  jika

$$E(\{\xi_t | \mathfrak{F}_s\}) = \xi_s \text{ almost surely } \forall s, t : s < t.$$

**Definisi 2.1.1.24**

Misalkan  $\xi(t)$  merupakan suatu proses, dan misalkan pula  $\mathfrak{F}_t^\xi$  adalah suatu filtrasi yang dibangun oleh proses ini.  $\xi(t)$  disebut sebagai suatu *martingale* terhadap filtrasi  $\mathfrak{F}_t^\xi$ .

### 2.1.2 Perubahan *Measure*

Dalam matematika keuangan, khususnya harga aset, pembentukan model-modelnya didasarkan pada suatu ruang sampel  $\Omega$  yang dapat dianggap sebagai himpunan skenario-skenario yang mungkin di masa depan. Himpunan skenario-skenario yang mungkin ini memenuhi *actual probability measure*  $P$ . Walaupun demikian, untuk tujuan *asset pricing* akan digunakan suatu *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  sehingga perlu dilakukan suatu perubahan *measure* pada model terkait. Akan tetapi, diketahui bahwa  $P$  dan  $\tilde{P}$  merupakan dua buah *measure* yang ekuivalen. Dengan kata lain, keduanya memiliki pandangan yang sama mengenai mungkin atau tidak mungkinnya suatu kejadian, walaupun berbeda dalam hal nilai kemungkinannya. Perubahan dari *actual* ke *risk-neutral probability measure* hanya mengubah distribusi dari harga asetnya saja tanpa mengubah harga aset itu sendiri (Shreve, 2004). Penjelasan lebih lanjut mengenai *asset pricing* ini dapat dilihat pada Subbab 2.5.

Dalam matematika keuangan, perubahan *measure* dapat dilakukan dengan menerapkan Teorema Girsanov. Beberapa Definisi dan Teorema penting terkait perubahan *measure* yang menjadi dasar dalam Teorema Girsanov pada Subbab 2.5 akan dibahas berikut ini (pembuktian selengkapnya dapat dilihat pada Shreve (2004)):

#### **Teorema 2.1.2.1**

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas dan  $Z$  merupakan suatu peubah acak *almost surely* non-negatif dengan  $E(Z) = 1$ . Untuk  $A \in \mathfrak{F}$ , definisikan

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega).$$

Maka  $\tilde{P}$  merupakan suatu *probability measure*. Lebih jauh lagi, jika  $X$  adalah suatu peubah acak non-negatif, maka

$$E^{\tilde{P}}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\tilde{P}(\omega) = E^P(XZ).$$

Jika  $Z$  *almost surely strictly positive*, dapat juga didefinisikan

$$E^P(Y) = E^{\tilde{P}}\left(\frac{Y}{Z}\right)$$

untuk setiap peubah acak non-negatif  $Y$ .

### Definisi 2.1.2.2

Misalkan  $\Omega$  merupakan suatu himpunan tidak kosong dan  $\mathfrak{S}$  adalah suatu  $\sigma$ -aljabar dari subhimpunan-subhimpunan  $\Omega$ . *Probability measure*  $P$  dan  $\tilde{P}$  pada  $(\Omega, \mathfrak{S})$  disebut ekuivalen jika keduanya bersama-sama memberikan nilai probabilitas nol untuk himpunan yang sama pada  $\mathfrak{S}$ .

### Definisi 2.1.2.3

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas, misalkan  $\tilde{P}$  *probability measure* lain pada  $(\Omega, \mathfrak{S})$  yang ekuivalen dengan  $P$ , dan misalkan  $Z$  merupakan suatu peubah acak *almost surely* positif yang menghubungkan  $P$  dan  $\tilde{P}$  melalui Teorema 2.1.2.1. Maka  $Z$  disebut turunan Radon-Nikodym dari  $\tilde{P}$  terhadap  $P$  dan ditulis  $Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}$ .

### Teorema 2.1.2.4

Misalkan  $P$  dan  $\tilde{P}$  merupakan dua *probability measure* yang ekuivalen dan terdefinisi pada  $(\Omega, \mathfrak{S})$ . Maka terdapat sebuah peubah acak  $Z$  yang *almost surely* positif sedemikian sehingga  $E^P(Z) = 1$  dan  $\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega)$  untuk setiap  $A \in \mathfrak{S}$ .



## 2.2 *Brownian Motion* dan Kalkulus Stokastik

### 2.2.1 *Brownian Motion*

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, pada Tesis ini *Brownian motion* memegang peranan penting dalam pembentukan model tingkat bunga yang direpresentasikan sebagai suatu Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Pada Subbab ini akan dibahas mengenai pembentukan *Brownian motion*. *Brownian motion*,  $W_t$ , dapat dinyatakan sebagai

$$W_t = \lim_{n \rightarrow \infty} W_t^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

di mana  $W_t^{(n)}$  disebut sebagai *scaled symmetric random walk*, sedangkan  $M_{nt}, nt = 0, 1, 2, \dots$ , disebut sebagai *symmetric random walk*, yakni:

$$M_{nt} = \sum_{j=1}^{nt} X_j, nt = 1, 2, \dots,$$

dengan  $M_0 = 0$  dan  $X_j = \begin{cases} 1 & ; \text{jika } \omega_j = H, \\ -1 & ; \text{jika } \omega_j = T, \end{cases}$

untuk barisan tak hingga  $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots$  dari suatu percobaan acak, misalnya pelemparan koin setimbang (probabilitas muncul masing-masing muka/*head* ( $H$ ) dan belakang/*tail* ( $T$ ) untuk setiap pelemparan adalah  $\frac{1}{2}$ ) dengan  $\omega_j$  adalah hasil yang mungkin keluar pada pelemparan ke- $j$ . *Symmetric random walk* ini tentunya memenuhi definisi *random walk* yang sebelumnya telah dibahas pada Definisi 2.1.1.18. Secara formal, *Brownian motion* didefinisikan sebagai berikut (Shreve, 2004):

**Definisi 2.2.1.1**

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas. Untuk setiap  $\omega \in \Omega$ , misalkan terdapat suatu fungsi kontinu  $W_t, t \geq 0$ , yang memenuhi  $W_0 = 0$  dan bergantung pada  $\omega$ . Maka  $W_t, t \geq 0$ , adalah suatu *Brownian motion* jika untuk setiap  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ , *increment*

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}},$$

*independent* dan setiap *increment-increment* tersebut berdistribusi normal dengan

$$E(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0 \text{ dan } \text{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = t_{i+1} - t_i.$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1.20, 2.1.1.21, dan 2.1.1.22, berikut ini akan didefinisikan suatu filtrasi dari *Brownian motion* untuk merepresentasikan informasi-informasi terkait dengan *Brownian motion* di setiap waktu,:

**Definisi 2.2.1.2**

Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  merupakan suatu ruang probabilitas di mana *Brownian motion*  $W_t, t \geq 0$ , didefinisikan. Suatu filtrasi untuk *Brownian motion* adalah koleksi dari  $\sigma$ -aljabar  $\mathfrak{F}_t$  yang memenuhi:

- a) **(Akumulasi informasi)** Untuk  $0 \leq s < t$ , setiap himpunan dalam  $\mathfrak{F}_s$  juga termasuk ke dalam  $\mathfrak{F}_t$ . Dengan kata lain, informasi yang diperoleh pada waktu  $t$ , yaitu  $\mathfrak{F}_t$  mengandung informasi yang diperoleh pada waktu  $s$ , yaitu  $\mathfrak{F}_s$ .
- b) **(Adaptif)** Untuk setiap  $t \geq 0$ , *Brownian motion*  $W_t$  pada waktu  $t$  *measurable* terhadap  $\mathfrak{F}_t$ . Dengan kata lain, informasi yang terdapat pada waktu  $t$  cukup untuk menentukan *Brownian motion*  $W_t$  pada waktu tersebut.
- c) **(Independent dari increment untuk waktu yang akan datang)** Untuk  $0 \leq t < u$ , *increment*  $W_u - W_t$  *independent* terhadap  $\mathfrak{F}_t$ . Dengan kata lain, sebarang *increment* dari *Brownian motion* setelah waktu  $t$  *independent* dengan informasi yang terdapat pada waktu  $t$ .

Berdasarkan definisi filtrasi tersebut, dapat dibuktikan *Brownian motion* memenuhi sifat *martingale* dan *almost surely* memiliki variasi kuadrat  $[W, W]_T = T$  untuk setiap  $T \geq 0$  (Shreve, 2004).

## 2.2.2 Kalkulus Stokastik: Formula Ito-Doebelin

Pada Subbab 2.2.1 telah dijelaskan beberapa sifat dari *Brownian motion*, salah satunya adalah *Brownian motion* memiliki variasi kuadrat yang tidak nol (*non-zero quadratic variation*). Sifat ini menimbulkan masalah karena model tingkat bunga pada waktu kontinu mengandung suatu *Brownian motion* di mana Integral Riemann, Lebesgue, maupun Riemann-Stieltjes dalam kalkulus deterministik tidak dapat diterapkan dalam menyelesaikan pemodelan tersebut karena integral-integral tersebut didasarkan pada asumsi *zero quadratic variation*. Dengan demikian, diperlukan suatu rumusan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut di atas yang dikenal sebagai formula Ito-Doebelin. Akan tetapi, sebelum membahas lebih lanjut mengenai formula Ito-Doebelin, berikut ini akan didefinisikan terlebih dahulu integral Ito berikut dengan sifat-sifatnya yang diperlukan dalam perumusan tersebut.

Pertama-tama, misalkan  $\Delta_t$  merupakan suatu proses stokastik yang *adapted* terhadap filtrasi  $\mathfrak{F}_t$ , dan kontinu pada waktu  $t \geq 0$  dalam setiap subinterval  $[t_j, t_{j+1})$  di mana  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  untuk suatu bilangan positif  $T$ , serta memenuhi  $E\left(\int_0^t \Delta_u^2 du\right) < \infty$ . Dalam matematika keuangan,  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$  dapat diartikan sebagai waktu perdagangan suatu aset. Sedangkan,  $\Delta_{t_0}, \Delta_{t_1}, \dots, \Delta_{t_{n-1}}$  diartikan sebagai posisi (jumlah saham) yang dijual/dibeli di setiap waktu perdagangan dan dieksekusi pada waktu perdagangan berikutnya. Selanjutnya, untuk tujuan ilustrasi misalkan *Brownian motion*  $W_t$  diartikan sebagai harga per saham dari suatu aset pada waktu  $t$  (walaupun  $W_t$  memiliki kemungkinan bernilai

negatif sehingga tidak layak untuk memodelkan harga dari suatu aset). Secara umum, keuntungan dari suatu perdagangan pada waktu  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  adalah sebagai berikut:

$$I_t = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \Delta_{t_k} (W_t - W_{t_k}),$$

atau dalam notasi integral dapat ditulis sebagai

$$I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u, \quad (2.2.2.1)$$

di mana integral tersebut mengandung suatu *Brownian motion*  $W_u$  dan filtrasi dari  $W_u$ , yaitu  $\mathfrak{F}_u$ . Proses  $I_t$  pada persamaan (2.2.2.1) dikenal dengan nama integral Ito. Beberapa sifat yang dimiliki integral Ito dibahas pada Teorema berikut ini (Shreve, 2004):

#### **Teorema 2.2.2.2**

Misalkan  $T$  adalah suatu konstanta positif dan  $\Delta_t, 0 \leq t \leq T$ , merupakan suatu proses stokastik yang *adapted* dan memenuhi  $E\left(\int_0^T \Delta_t^2 dt\right) < \infty$ . Maka

$I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$  memiliki sifat:

- Kekontinuan, yakni sebagai fungsi dari limit atas terhadap integrasi  $t$ , lintasan  $I_t$  kontinu.
- Adapted*, untuk setiap  $t$ ,  $I_t$  *measurable* terhadap  $\mathfrak{F}_t$ .

- Linier, yakni jika  $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$  dan  $J_t = \int_0^t \Gamma_u dW_u$  maka

$I_t \pm J_t = \int_0^t (\Delta_u \pm \Gamma_u) dW_u$ . Lebih jauh lagi, untuk setiap konstanta  $c$  berlaku

$$cI_t = \int_0^t c\Delta_u dW_u.$$

- Martingale*.

- Ito isometri, yakni  $E(I_t^2) = E\left(\int_0^t \Delta_u^2 du\right)$ .

f) Variasi kuadrat tidak nol, yakni  $[I, I]_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$ .

Dengan menggunakan konsep integral Ito di atas, dapat diperoleh formula Ito-Doebelin untuk menyelesaikan masalah yang kerap muncul pada banyak kasus pemodelan dalam matematika keuangan, seperti tingkat bunga, saham, opsi, dan lain sebagainya. Akan tetapi, sebelumnya perlu diketahui bahwa formula Ito-Doebelin yang digunakan pada Tesis ini adalah formula Ito-Doebelin dari suatu proses Ito yang didefinisikan sebagai berikut (Shreve, 2004):

### Definisi 2.2.2.3

Misalkan  $W_t, t \geq 0$ , adalah suatu *Brownian motion* dan misalkan  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ , adalah suatu filtrasi yang bersesuaian. Proses Ito adalah suatu proses stokastik yang berbentuk

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta_u dW_u + \int_0^t \theta_u du,$$

di mana  $X_0$  tidak acak (*non-random*) dan  $\Delta_u$  serta  $\theta_u$  merupakan proses stokastik yang *adapted*.

Proses Ito memiliki variasi kuadrat  $[X, X]_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$ . Proses Ito dapat dituliskan pula ke dalam notasi diferensial  $dX_t = \Delta_t dW_t + \theta_t dt$ . Proses Ito dalam notasi diferensial ini dikenal dengan Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) Ito yang akan dijelaskan lebih lanjut pada Subbab 2.3. Selain itu, dapat didefinisikan pula integral terhadap suatu proses Ito sebagai berikut (Shreve, 2004):

### Definisi 2.2.2.4

Misalkan  $X_t, t \geq 0$ , adalah suatu proses Ito pada Definisi 2.2.2.3, dan misalkan pula  $\Gamma_t, t \geq 0$ , adalah suatu proses yang *adapted*. Maka dapat didefinisikan integral terhadap suatu proses Ito berikut ini

$$\int_0^t \Gamma_u dX_u = \int_0^t \Gamma_u \Delta_u dW_u + \int_0^t \Gamma_u \theta_u du.$$

Akhirnya, dapat diperoleh formula Ito-Doebelin sebagai berikut (Shreve, 2004):

### **Teorema 2.2.2.5**

Misalkan  $X_t, t \geq 0$ , adalah suatu proses Ito pada Definisi 2.2.2.3, dan misalkan  $f(t, x)$  adalah suatu fungsi dengan turunan parsial  $f_t(t, x), f_x(t, x)$ , dan  $f_{xx}(t, x)$  terdefinisi serta kontinu. Maka, untuk setiap berlaku

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f_0(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d[X, X]_t \\ &= f_0(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \Delta_t dW_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) \theta_t dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \Delta_t^2 dt. \end{aligned}$$

Selain itu, berikut ini juga dibahas suatu Akibat dari formula Ito-Doebelin yang akan digunakan pada pembuktian Subbab 3.1 ketika menentukan solusi analitik model Brennan-Schwartz:

### **Akibat 2.2.2.6**

Misalkan  $X_t$  dan  $Y_t$  adalah proses Ito. Maka  $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$ .

## **2.3 Stabilitas Persamaan Diferensial Stokastik Ito**

Pada Tesis ini, pergerakan tingkat bunga dimodelkan ke dalam suatu PDS yang dikenal dengan model Brennan-Schwartz. Berdasarkan Definisi 2.2.2.3, model ini termasuk ke dalam kategori PDS Ito yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$dX_t = g(t, X_t) dt + h(t, X_t) dW_t.$$

Seperti halnya persamaan diferensial deterministik, sebelum menyelesaikan suatu PDS, terlebih dahulu harus ditentukan keberadaan solusi unik dari PDS tersebut. Hal tersebut dapat ditunjukkan melalui teorema berikut ini (Oksendal, 1998; Yolcu, 2005):

**Teorema 2.3.1**

Suatu PDS memiliki solusi yang unik jika memenuhi tiga kondisi berikut ini:

1.  $|g(t, X'_t) - g(t, X''_t)| + |h(t, X'_t) - h(t, X''_t)| \leq C |X'_t - X''_t|$  untuk suatu konstanta  $C$ .
2.  $|g(t, X_t)| + |h(t, X_t)| \leq D(1 + |X_t|)$  untuk suatu konstanta  $D$ .
3.  $E(|X_0|^2) < \infty$ .

Jika telah diketahui bahwa suatu PDS memiliki solusi yang unik, selanjutnya dapat dilakukan pendekatan kuantitatif melalui penentuan solusi analitik dari PDS tersebut dengan menggunakan formula Ito-Doebelin. Akan tetapi, seringkali solusi analitik dari suatu PDS tidak dapat ditentukan sehingga perlu dilakukan pendekatan kualitatif untuk mempelajari karakteristik dari suatu PDS. Salah satu pendekatan kualitatif yang dapat dilakukan adalah dengan melihat sifat stabilitas PDS tersebut. Pertama-tama, misalkan diberikan masalah nilai awal stokastik berikut ini:

$$\begin{cases} dX_t = g(t, X_t)dt + h(t, X_t)dW_t \text{ untuk } 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

dengan  $g(t, 0) = h(t, 0) = 0$ , maka  $X_t \equiv 0$  merupakan solusi stasioner dari masalah nilai awal stokastik tersebut. Terdapat banyak cara dalam mendefinisikan stabilitas stokastik untuk suatu solusi stasioner dari sebuah persamaan diferensial stokastik. Akan tetapi, hanya dua cara yang akan dibahas berikut ini, yakni stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut (Kloeden, 1992):

### Definisi 2.3.2

Jika  $\lim_{x_0 \rightarrow 0} P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t| \rightarrow 0\right) = 1$ , maka  $X_t \equiv 0$  stabil secara stokastik asimtotik.

### Definisi 2.3.3

Jika  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(|X_t|^2\right) = 0, \forall |x_0| < \delta_0$ , di mana  $\delta_0 > 0$  maka  $X_t \equiv 0$  stabil secara *mean-square*.

## 2.4 Estimasi Parameter

### 2.4.1 Metode *Maximum Likelihood*

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, PDS mengandung parameter yang tidak diketahui nilainya sehingga perlu ditaksir dengan menggunakan data historis. Salah satu metode penaksiran parameter yang dapat digunakan adalah metode *Maximum Likelihood*. Pertama-tama, misalkan  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  adalah vektor *random* dengan pdf  $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \in \mathbb{R}^p$  di mana  $\boldsymbol{\theta}$  merupakan suatu vektor dari  $p$ -parameter yang tidak diketahui nilainya. Dalam melakukan penaksiran *Maximum Likelihood* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan. Pertama, tentukan *joint* pdf dari  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , yaitu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})$ . Oleh karena  $\mathbf{X}$  adalah vektor *random* dari  $X_1, X_2, \dots, X_n$  maka  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ .

Selanjutnya, tentukan fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai *joint* pdf dari  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dan dapat dianggap sebagai fungsi dari  $\boldsymbol{\theta}$ . Misalkan fungsi *likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$ , maka (Casella, 1992)

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}).$$



Kemudian, lakukan penaksiran terhadap  $\theta$ . Dalam metode *Maximum Likelihood*, taksiran dari  $\theta$  diperoleh dengan menentukan nilai  $\theta$ , sebut  $\hat{\theta}$ , yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Maka  $\hat{\theta}$  ini disebut taksiran *Maximum Likelihood* dari  $\theta$ .

Menentukan nilai  $\theta$  yang memaksimumkan fungsi  $\ln L(\theta; \mathbf{x})$ , sebut  $l(\theta; \mathbf{x})$ , akan memberikan hasil yang sama dengan menentukan nilai  $\theta$  yang memaksimumkan  $L(\theta; \mathbf{x})$ . Maka baik  $L(\theta; \mathbf{x})$  atau  $l(\theta; \mathbf{x})$  dapat digunakan untuk menentukan nilai  $\hat{\theta}$ .

Nilai  $\theta$  yang memaksimumkan  $l(\theta; \mathbf{x})$  dapat diperoleh secara simultan dengan menentukan solusi dari persamaan-persamaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta; \mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta; \mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{1}{L(\theta; \mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\theta; \mathbf{x}) &= 0; \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, p.\end{aligned}$$

Walaupun demikian, untuk mencegah angka yang kecil pada perhitungan, akan lebih baik jika menentukan nilai  $\theta$  yang meminimumkan fungsi  $-\ln L(\theta; \mathbf{x})$ , sebut  $D(\theta; \mathbf{x})$ , dibandingkan dengan menentukan nilai  $\theta$  yang memaksimumkan fungsi  $\ln L(\theta; \mathbf{x})$  (Allen, 2007). Adakalanya sistem persamaan ini dapat diselesaikan secara analitik. Jika tidak, metode optimisasi numerik (misal: algoritma Nelder-Mead) dapat digunakan. Selain itu, dalam menjalankan prosedur penaksiran parameter dengan metode *Maximum Likelihood* di atas, terkadang metode numerik (misal: aproksimasi Euler) juga dapat digunakan dalam mengaproksimasi pdf dari suatu peubah acak apabila pdf tersebut tidak mudah untuk ditentukan (Allen, 2007).

### 2.4.2 Algoritma Nelder-Mead

Dalam bidang keuangan, penentuan harga suatu produk keuangan, seperti saham, *option*, maupun dalam hal penentuan tingkat bunga biasanya memerlukan nilai maksimum/minimum dari fungsi dengan dua atau lebih variabel. Salah satu optimisasi numerik yang sangat berguna dan populer dalam menentukan akar-akar dari fungsi-fungsi multivariat tersebut adalah dengan menggunakan algoritma Nelder-Mead. Algoritma ini mudah untuk diimplementasikan dan sangat cepat konvergen walaupun sebarang nilai awal digunakan. Algoritma Nelder-Mead diterapkan untuk menentukan nilai minimum dari suatu fungsi multivariat tanpa harus menentukan nilai diferensialnya terlebih dahulu. Dalam menentukan nilai maksimum dari suatu fungsi dapat dilakukan dengan mengubah tanda dari fungsi tersebut untuk selanjutnya menentukan nilai minimum dari fungsi yang diubah tandanya tersebut (Rouah, 2007).

Untuk suatu fungsi  $f(x)$  dengan  $n$  variabel, algoritma Nelder-Mead memerlukan  $n+1$  nilai awal. Susun  $n+1$  nilai awal tersebut sebagai berikut:

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1}, \quad (2.4.2.1)$$

di mana  $f_k \equiv f(x_k)$  dan  $x_i \in R^n (i = 1, 2, \dots, n+1)$ . Terlihat bahwa nilai terbaik dari vektor ini adalah  $x_1$  karena menghasilkan nilai  $f(x)$  terkecil dan nilai terburuk adalah  $x_{n+1}$  karena menghasilkan nilai  $f(x)$  terbesar. Sedangkan, vektor sisanya terletak di tengah. Untuk memulai iterasi, terlebih dahulu hitung suatu titik *reflection*  $x_r = 2\bar{x} - x_{n+1}$  di mana  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$  adalah *mean* dari  $n$  titik terbaik,

kemudian hitung  $f_r = f(x_r)$ . Pada setiap iterasi, nilai-nilai terbaik  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ditahan dan nilai terburuk  $x_{n+1}$  diganti. Iterasi tetap dilanjutkan selama memenuhi toleransi tertentu yang ditetapkan, yakni toleransi antara nilai terbaik dengan nilai terburuk menurut aturan berikut ini:

1. (*Reflection Rule*) Jika  $f_1 \leq f_r < f_n$  maka  $x_{n+1}$  diganti dengan  $x_r$ ,  $n+1$  titik  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_r$  diurut berdasarkan nilai fungsinya sebagaimana halnya diberikan pada persamaan (2.4.2.1) yang menghasilkan himpunan lain dari titik-titik terurut  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Iterasi selanjutnya adalah memulai dengan titik terburuk  $x_{n+1}$ . Jika tidak terpenuhi  $f_1 \leq f_r < f_n$ , maka proses dilanjutkan dengan aturan berikutnya.
2. (*Expansion Rule*) Jika  $f_r < f_1$  hitung titik *expansion*  $x_e = 2x_r - \bar{x}$  dan nilai dari fungsi  $f_e = f(x_e)$ . Jika  $f_e < f_r$  maka ganti  $x_{n+1}$  dengan  $x_e$ , urutkan kembali titik-titik tersebut dan mulai dengan iterasi selanjutnya. Jika tidak terpenuhi  $f_r < f_1$  atau  $f_e < f_r$ , proses dilanjutkan dengan aturan berikutnya.
3. (*Outside Contraction Rule*) Jika  $f_n \leq f_r < f_{n+1}$  hitung titik *outside contraction*  $x_{oc} = \frac{1}{2}x_r + \frac{1}{2}\bar{x}$  dan nilai  $f_{oc} = f(x_{oc})$ . Jika  $f_{oc} \leq f_r$  maka ganti  $x_{n+1}$  dengan  $x_{oc}$ , urutkan titik-titik tersebut, dan mulai dengan iterasi selanjutnya. Jika tidak terpenuhi  $f_n \leq f_r < f_{n+1}$  atau  $f_{oc} \leq f_r$ , proses dilanjutkan dengan aturan 5 yang menunjukkan suatu langkah penyusutan (*shrink step*).
4. (*Inside Contraction Rule*) Jika  $f_r \geq f_{n+1}$  hitung titik *inside contraction*  $x_{ic} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}x_{n+1}$  dan nilai  $f_{ic} = f(x_{ic})$ . Jika  $f_{ic} < f_{n+1}$  ganti  $x_{n+1}$  dengan  $x_{ic}$ , urutkan titik-titik tersebut, dan mulai dengan iterasi selanjutnya. Jika tidak terpenuhi  $f_r \geq f_{n+1}$  atau  $f_{ic} < f_{n+1}$ , proses dilanjutkan dengan aturan 5 yang menunjukkan suatu langkah penyusutan (*shrink step*).
5. (*Shrink Step*) Hitung  $f(x)$  pada titik-titik  $v_i = x_1 + \frac{1}{2}(x_i - x_1)$  untuk  $i = 2, 3, \dots, n+1$ . Titik-titik baru yang tidak terurut adalah  $n+1$  titik  $x_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$ . Urutkan titik-titik tersebut dan mulai dengan iterasi selanjutnya.

Untuk memudahkan pemahaman, algoritma Nelder-Mead di atas dapat digambarkan ke dalam *flowchart*, seperti diberikan pada Lampiran 1 di mana  $f(x)$  merupakan suatu fungsi *likelihood*.

## 2.5 *Asset Pricing*

Salah satu konsep dasar dalam menentukan harga suatu aset/produk keuangan adalah harga aset tersebut haruslah sama walaupun diperdagangkan di tempat yang berbeda. Kondisi semacam ini dalam matematika keuangan dikenal dengan istilah *no arbitrage*. Secara formal, kondisi *arbitrage* sendiri dapat didefinisikan sebagai berikut (Shreve, 2004):

### Definisi 2.5.1

Suatu *arbitrage* adalah suatu kondisi di mana proses nilai aset memenuhi  $X_0 = 0$  dan juga  $P(X_T \geq 0) = 1$  serta  $P(X_T > 0) > 0$  untuk  $T > 0$ .

Dengan kata lain, seorang investor yang menginvestasikan modalnya pada suatu aset dengan kondisi *arbitrage* pada pembentukan harga asetnya, maka dapat dipastikan bahwa investor tersebut akan memperoleh keuntungan. Padahal, semua jenis investasi memiliki faktor resiko. Oleh sebab itu, diperlukan suatu cara untuk mengetahui apakah suatu aset/produk keuangan memenuhi kondisi *no arbitrage* atau tidak. Berikut ini dibahas suatu teorema yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut (Shreve, 2004):

### Teorema 2.5.2 (Teorema Fundamental *Asset Pricing*)

Jika suatu model pasar memenuhi suatu *risk-neutral probability measure*, maka tidak terdapat *arbitrage* pada model pasar tersebut.

Berdasarkan Teorema 2.5.2, terlebih dahulu perlu diketahui definisi mengenai keberadaan dari suatu *risk-neutral probability measure* sebagai berikut (Shreve, 2004):

**Definisi 2.5.3 (Keberadaan (*Existence*) *Risk-Neutral Probability Measure*)**

Suatu *probability measure*  $\tilde{P}$  dikatakan *risk-neutral* jika

- a)  $\tilde{P}$  dan  $P$  ekuivalen, yakni  $\forall A \in \mathfrak{F}, P(A) = 0 \leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$ ; dan
- b) di bawah asumsi  $\tilde{P}$ , harga aset saat ini (*discounted asset price*) memenuhi sifat *martingale* untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu aset/produk keuangan akan memenuhi kondisi *no arbitrage* jika memenuhi Definisi 2.5.3. Walaupun masalah pada Tesis ini hanya meliputi tingkat bunga, namun pembahasan mengenai *asset pricing* tetap diperlukan sebagai dasar pemodelan tingkat bunga di bawah asumsi *risk-neutral probability measure*.

Seperti telah dijelaskan sebelumnya pada Subbab 2.1.2, pembentukan model-model matematika keuangan, khususnya harga aset, didasarkan pada suatu ruang sampel  $\Omega$  yang memenuhi suatu *actual probability measure*  $P$ . Oleh sebab itu, untuk tujuan *asset pricing* akan dilakukan perubahan *measure* pada model harga aset yang sebelumnya memenuhi *actual probability measure*  $P$  menjadi *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ . Sebelumnya, diketahui bahwa  $P$  dan  $\tilde{P}$  merupakan dua buah *measure* yang ekuivalen. Perubahan *measure* ini dapat dilakukan dengan menerapkan suatu teorema yang dikenal dengan Teorema Girsanov, seperti diberikan berikut ini (Shreve, 2004):

**Teorema 2.5.4 (Teorema Girsanov)**

Misalkan  $W_t, 0 \leq t \leq T$ , adalah suatu *Brownian motion* pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , dan misalkan pula  $\mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T$ , adalah suatu filtrasi untuk *Brownian motion* ini. Misalkan  $\theta_t, 0 \leq t \leq T$ , adalah suatu proses yang *adapted*. Definisikan

$$Z_t = \exp \left\{ -\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_u^2 du \right\},$$

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_u du,$$

dan asumsikan bahwa  $E \left( \int_0^T \theta_u^2 Z_u^2 du \right) < \infty$ . Bentuk  $Z = Z_T$ . Maka  $E(Z) = 1$  dan di bawah asumsi *probability measure*  $\tilde{P} = \int_A Z(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathfrak{F}$ , maka proses  $\tilde{W}_t, 0 \leq t \leq T$ , juga merupakan suatu *Brownian motion*.

Pada Tesis ini, Teorema 2.5.4 digunakan sebaliknya untuk mengubah model tingkat bunga di bawah asumsi *risk-neutral probability measure* menjadi model tingkat bunga di bawah asumsi *actual probability measure*  $\tilde{P}$ . Perbedaan penerapan teorema ini disebabkan oleh model tingkat bunga semula di bawah asumsi *risk-neutral probability measure* mengandung sejumlah parameter yang tidak diketahui nilainya sehingga perlu dilakukan penaksiran terlebih dahulu dengan menggunakan data riil di bawah asumsi *actual probability measure*  $P$ .

## BAB 3

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab 3 ini akan dibahas mengenai salah satu model tingkat bunga, yaitu model Brennan-Schwartz. Pertama-tama akan dibahas mengenai karakteristik model Brennan-Schwartz. Oleh karena model Brennan Schwartz merupakan suatu Persamaan Diferensial Stokastik (PDS), maka solusi analitiknya tidak dapat diselesaikan menggunakan integral Riemann, Lebesgue, maupun Riemann-Stieltjes, melainkan dengan menggunakan integral Ito. Salah satu teorema penting yang akan dibahas terkait dengan integral Ito adalah formula Ito-Doebelin. Pembahasan dilanjutkan mengenai kriteria stabilitas model Brennan-Schwartz. Walaupun banyak dikenal beberapa kriteria stabilitas model stokastik, dalam Tesis ini hanya akan dibahas kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* dari model Brennan-Schwartz. Akan tetapi, stabilitas model Brennan-Schwartz ternyata sulit untuk ditentukan karena *steady solution* dari masalah nilai awal stokastik model Brennan-Schwartz ini merupakan *non-zero solution*. Padahal, definisi-definisi terkait stabilitas model stokastik didasarkan pada *steady solution* yang berupa *zero solution*. Dengan demikian, diperlukan suatu transformasi pada masalah nilai awal stokastik sehingga *steady solution* dari masalah nilai awal stokastik tersebut yang sebelumnya berupa *non-zero solution* dapat menjadi *zero solution*.

Pada akhir Bab 3, pembahasan ditutup dengan penaksiran parameter model Brennan-Schwartz yang tidak diketahui nilainya. Dalam penaksiran parameter tersebut akan dibahas mengenai konsep perubahan *measure* dalam menaksir parameter-parameter tersebut. Perubahan *measure* ini diperlukan dalam penaksiran parameter mengingat bahwa data observasi yang digunakan pada saat menaksir parameter-parameter tersebut di bawah asumsi *actual probability measure*  $P$ . Hal ini berbeda pada saat penentuan tingkat bunga di bawah asumsi *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ . Pada Tesis ini, metode yang digunakan untuk menaksir parameter tersebut adalah metode *Maximum Likelihood* dengan data

observasi yang telah diperoleh. Akan tetapi, hasilnya sulit untuk ditentukan secara analitik sehingga penaksiran parameter dilanjutkan melalui optimisasi numerik dengan menggunakan algoritma Nelder-Mead. Skema analisis dari Tesis ini dapat dilihat pada Lampiran 2.

### 3.1 Model Brennan-Schwartz

Model Brennan-Schwartz merupakan salah satu model tingkat bunga yang dinyatakan dalam bentuk Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) sebagai berikut (Brennan, 1980; Courtadon, 1982; Bayazit, 2004):

$$dr_t = \gamma(\alpha - r_t)dt + \beta r_t d\tilde{W}_t, \quad (3.1.1)$$

dengan  $\tilde{W}_t$  merupakan suatu *Brownian motion* pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  (Shreve, 2004) di mana

- $r_t$  : tingkat bunga pada waktu  $t$ ,
- $\alpha$  : *reversion level* dari tingkat bunga,
- $\gamma$  : kecepatan pengoreksian,
- $\beta^2 r_t^2$  : *infinitesimal variance* dari proses.

Parameter-parameter model Brennan-Schwartz pada persamaan (3.1.1) adalah  $\gamma, \alpha, \beta > 0$ . Model Brennan-Schwartz terdiri dari dua jenis koefisien, yakni koefisien *drift* dan difusi. Koefisien *drift* berupa  $\gamma(\alpha - r_t)$ , sedangkan koefisien difusi berupa  $\beta r_t$ . Terlihat bahwa koefisien *drift* bergantung pada nilai  $r_t$ , artinya jika  $r_t$  kurang dari  $\alpha$ , maka koefisien *drift* menjadi positif, begitupun sebaliknya. Oleh sebab itu, tingkat bunga bergerak menuju ke suatu *reversion level* ( $\alpha$ ) yang bergantung pada kecepatan pengoreksiannya ( $\gamma$ ). Selain itu, koefisien difusi  $\beta r_t$  menggambarkan standar deviasi perubahan tingkat bunga (Brennan, 1980).



Seperti halnya persamaan diferensial deterministik, sebelum menentukan solusi model Brennan-Schwartz terlebih dahulu perlu diperiksa apakah model tersebut memiliki solusi unik atau tidak, yakni dengan membuktikan bahwa model Brennan-Schwartz memenuhi Teorema 2.3.1 sebagai berikut:

1.  $|\gamma(\alpha - r'_i) - \gamma(\alpha - r''_i)| + |\beta r'_i - \beta r''_i| \leq C|r'_i - r''_i|$  untuk suatu konstanta  $C$ .

Bukti:

$$\begin{aligned} |\gamma(\alpha - r'_i) - \gamma(\alpha - r''_i)| + |\beta r'_i - \beta r''_i| &= |-\gamma r'_i + \gamma r''_i| + |\beta(r'_i - r''_i)| \\ &= |-\gamma(r'_i - r''_i)| + \beta|r'_i - r''_i| \\ &= \gamma|r'_i - r''_i| + \beta|r'_i - r''_i| \\ &= (\gamma + \beta)|r'_i - r''_i|, \end{aligned}$$

dengan mengambil  $C \geq (\gamma + \beta)$  maka diperoleh

$$|\gamma(\alpha - r'_i) - \gamma(\alpha - r''_i)| + |\beta r'_i - \beta r''_i| \leq C|r'_i - r''_i|.$$

2.  $|\gamma(\alpha - r_i)| + |\beta r_i| \leq D(1 + |r_i|)$  untuk suatu konstanta  $D$ .

Bukti:

$$\begin{aligned} |\gamma(\alpha - r_i)| + |\beta r_i| &= |\gamma\alpha - \gamma r_i| + \beta|r_i| \\ &\leq |\gamma\alpha| + |\gamma r_i| + \beta|r_i| \\ &= \gamma\alpha + \gamma|r_i| + \beta|r_i| \\ &= \gamma\alpha + (\gamma + \beta)|r_i| \\ &\leq \gamma\alpha + C|r_i|, \end{aligned}$$

dengan mengambil  $D = \max\{\gamma\alpha, C\}$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} |\gamma(\alpha - r_i)| + |\beta r_i| &\leq D + D|r_i| \\ &= D(1 + |r_i|). \end{aligned}$$

$$3. E\left(|r_0|^2\right) < \infty.$$

Bukti:

Oleh karena  $r_0$  merupakan suatu tingkat bunga pada saat 0, maka jelas bahwa

$$E\left(|r_0|^2\right) < \infty.$$

Setelah ditunjukkan bahwa model Brennan-Schwartz memiliki solusi yang unik, selanjutnya akan ditentukan solusi eksplisit dari model Brennan-Schwartz. Berdasarkan persamaan (3.1.1), diketahui bahwa model Brennan-Schwartz memiliki bentuk PDS non-homogen (Kloeden, 1992). Pembahasan lebih mendalam mengenai tahapan memperoleh solusi eksplisit PDS non-homogen dapat dilihat pada Bayazit (2004) atau Mikosch (1998). Pertama-tama definisikan suatu PDS homogen sebagai berikut:

$$dX_t = -\gamma X_t dt + \beta X_t d\tilde{W}_t.$$

Dengan menggunakan formula Ito-Doebelin pada Teorema 2.2.2.5 diperoleh

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t f_u(u, X_u) du + \int_0^t f_x(u, X_u) dX_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X_u) d[X_u, X_u] \\ &= \int_0^t f_u(u, X_u) du - \int_0^t \gamma X_u f_x(u, X_u) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 X_u^2 f_{xx}(u, X_u) du \\ &\quad + \int_0^t \beta X_u f_x(u, X_u) d\tilde{W}_u. \end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan, misalkan  $f(t, x) = \ln x$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \ln X_t - \ln X_0 &= \int_0^t 0 du - \int_0^t \gamma X_u \frac{1}{X_u} du + \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 X_u^2 \left(-\frac{1}{X_u^2}\right) du \\ &\quad + \int_0^t \beta X_u \frac{1}{X_u} d\tilde{W}_u \\ &= -\int_0^t \gamma du - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 du + \int_0^t \beta d\tilde{W}_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln X_t - \ln X_0 &= -\gamma t - \frac{1}{2} \beta^2 t + \beta \left( \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} (\tilde{W}_{t_{j+1}} - \tilde{W}_{t_j}) \right); \quad t_j = j \delta_t, \quad \delta_t = \frac{t}{N}, \\
&= -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} (\tilde{W}_{t_{j+1}} - \tilde{W}_{t_j}) \right) \\
&= -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta (\tilde{W}_{t_N} - \tilde{W}_{t_0}) \\
&= -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta (\tilde{W}_t - \tilde{W}_0) \\
&= -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t, \\
\ln \frac{X_t}{X_0} &= -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t, \\
\frac{X_t}{X_0} &= \exp \left\{ -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\}, \\
X_t &= X_0 \exp \left\{ -\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\}. \tag{3.1.2}
\end{aligned}$$

Sekarang, definisikan

$$Y_t = f(t, \tilde{W}_t) = \exp \left\{ \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t - \beta \tilde{W}_t \right\}, \tag{3.1.3}$$

di mana  $f(t, x) = \exp \left\{ \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t - \beta x \right\}$ . Berdasarkan formula Ito-Doebelin pada Teorema 2.2.2.5 dengan

$$Y_0 = f(0, \tilde{W}_0) = \exp \left\{ \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) 0 - \beta \tilde{W}_0 \right\} = \exp(\beta \cdot 0) = 1, \tag{3.1.4}$$

maka persamaan (3.1.3) menjadi

$$\begin{aligned}
f(t, \tilde{W}_t) - f(0, \tilde{W}_0) &= \int_0^t f_u(u, \tilde{W}_u) du + \int_0^t f_x(u, \tilde{W}_u) d\tilde{W}_u + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, \tilde{W}_u) d[\tilde{W}_u, \tilde{W}_u], \\
Y_t - Y_0 &= \int_0^t f_u(u, \tilde{W}_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, \tilde{W}_u) du + \int_0^t f_x(u, \tilde{W}_u) d\tilde{W}_u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_t - 1 &= \int_0^t \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) Y_u du + \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 Y_u du - \int_0^t \beta Y_u d\tilde{W}_u \\
&= \int_0^t (\gamma + \beta^2) Y_u du - \int_0^t \beta Y_u d\tilde{W}_u, \\
dY_t &= (\gamma + \beta^2) Y_t dt - \beta Y_t d\tilde{W}_t.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Selanjutnya, misalkan

$$r_t = (Y_t)^{-1} Z_t, \tag{3.1.6}$$

dengan  $Z_t = f(t, r_t)$ , untuk suatu fungsi mulus  $f(t, x)$  (Mikosch, 1998; Yolcu, 2005). Persamaan (3.1.6) dapat ditulis pula sebagai  $Z_t = Y_t r_t$ . Dengan *Ito product rule* pada Akibat 2.2.2.6, dan berdasarkan (3.1.1) dan (3.1.5) diperoleh

$$\begin{aligned}
dZ_t &= d(Y_t r_t) \\
&= Y_t dr_t + r_t dY_t + dY_t dr_t \\
&= Y_t (\gamma(\alpha - r_t) dt + \beta r_t d\tilde{W}_t) + r_t ((\gamma + \beta^2) Y_t dt - \beta Y_t d\tilde{W}_t) \\
&\quad + ((\gamma + \beta^2) Y_t dt - \beta Y_t d\tilde{W}_t) (\gamma(\alpha - r_t) dt + \beta r_t d\tilde{W}_t) \\
&= \gamma \alpha Y_t dt - \gamma Y_t r_t dt + \beta Y_t r_t d\tilde{W}_t + \gamma Y_t r_t dt + \beta^2 Y_t r_t dt - \beta Y_t r_t d\tilde{W}_t - \beta^2 Y_t r_t dt \\
&= \gamma \alpha Y_t dt,
\end{aligned}$$

atau dalam notasi integral dapat ditulis sebagai berikut:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \gamma \alpha Y_u du, \tag{3.1.7}$$

dengan  $Z_0$  merupakan suatu nilai awal dari  $Z_t$ . Telah diketahui pada persamaan (3.1.4) bahwa  $Y_0 = 1$  sehingga  $Z_0 = Y_0 \cdot r_0 = 1 \cdot r_0 = r_0$ . Dengan demikian, berdasarkan (3.1.6) solusi analitik model Brennan-Schwartz pada persamaan (3.1.1) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_t &= (Y_t)^{-1} \left( r_0 + \int_0^t \gamma \alpha Y_u du \right) \\
&= \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} \cdot \left( r_0 + \int_0^t \gamma \alpha \cdot \exp \left\{ \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) u - \beta \tilde{W}_u \right\} du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_t &= r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} + \gamma \alpha \int_0^t \exp \left\{ \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (u-t) - \beta (\tilde{W}_u - \tilde{W}_t) \right\} du \\
&= r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} + \gamma \alpha \int_0^t \exp \left\{ \begin{array}{l} - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t-u) \\ + \beta (\tilde{W}_t - \tilde{W}_u) \end{array} \right\} du, \quad (3.1.8)
\end{aligned}$$

di mana  $r_t$  berdistribusi lognormal dan berdasarkan Definisi 2.1.1.12 diperoleh ekspektasi bersyarat  $r_t$  diberikan filtrasi  $\mathfrak{F}_0$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}(r_t | \mathfrak{F}_0) &= E^{\mathbb{P}} \left( r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \alpha \int_0^t \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t-u) + \beta (\tilde{W}_t - \tilde{W}_u) \right\} du \mid \mathfrak{F}_0 \right) \\
&= E^{\mathbb{P}} \left( r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} \mid \mathfrak{F}_0 \right) \\
&\quad + E^{\mathbb{P}} \left( \gamma \alpha \int_0^t \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t-u) + \beta (\tilde{W}_t - \tilde{W}_u) \right\} du \mid \mathfrak{F}_0 \right) \\
&= r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \cdot E^{\mathbb{P}} \left( \exp(\beta \tilde{W}_t) \mid \mathfrak{F}_0 \right) \\
&\quad + \gamma \alpha \cdot \int_0^t \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t-u) \right\} \cdot E^{\mathbb{P}} \left( \exp \left\{ \beta (\tilde{W}_t - \tilde{W}_u) \right\} \mid \mathfrak{F}_0 \right) du \\
&= r_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \cdot \exp \left( \frac{1}{2} \beta^2 t \right) \\
&\quad + \gamma \alpha \cdot \int_0^t \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t-u) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 (t-u) \right\} du \\
&= r_0 \cdot e^{-\gamma t} + \gamma \alpha \cdot \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} du.
\end{aligned}$$

$$\text{Misal: } m = -\gamma(t-u) \rightarrow dm = \gamma du \rightarrow du = \frac{dm}{\gamma},$$

$$u = 0 \rightarrow m = -\gamma t,$$

$$u = t \rightarrow m = 0.$$

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}(r_t | \mathfrak{F}_0) &= r_0 \cdot e^{-\gamma t} + \gamma \alpha \cdot \int_{-\gamma t}^0 e^m \frac{dm}{\gamma} \\
&= r_0 \cdot e^{-\gamma t} + \alpha \left[ e^m \right]_{-\gamma t}^0 \\
&= r_0 \cdot e^{-\gamma t} + \alpha (1 - e^{-\gamma t}).
\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa model Brennan-Schwartz memiliki solusi analitik pada persamaan (3.1.8). Seperti halnya dalam persamaan diferensial deterministik, PDS juga memiliki kriteria stabilitas untuk masing-masing modelnya, termasuk model Brennan-Schwartz. Oleh sebab itu, pada Subbab 3.2 akan dibahas mengenai stabilitas model Brennan-Schwartz.

### 3.2 Stabilitas Model Brennan-Schwartz

Pada Subbab 3.1 telah diperoleh solusi eksplisit model Brennan-Schwartz. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.1.8), pada Bab 4 dapat dilihat perilaku model Brennan-Schwartz melalui visualisasi persamaan (3.1.8) untuk jangka waktu tertentu. Akan tetapi, visualisasi tersebut bergantung pada parameter yang tidak diketahui nilainya. Oleh sebab itu, perlu dilakukan penaksiran terhadap masing-masing parameter. Walaupun demikian, terdapat kemungkinan bahwa taksiran parameter yang diperoleh menyimpang dari yang sebenarnya. Taksiran parameter yang menyimpang dapat mengakibatkan solusi yang menyimpang pula. Oleh sebab itu, masalah stabilitas model cukup menarik untuk dibahas karena dapat menggambarkan ketahanan suatu model terhadap gangguan sehingga modelnya dapat digunakan dalam peramalan untuk jangka waktu tertentu. Kriteria stabilitas model stokastik yang akan dibahas adalah kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*.

Berikut ini diberikan masalah nilai awal stokastik model Brennan-Schwartz:

$$\begin{cases} dr_t = \gamma(\alpha - r_t)dt + \beta r_t d\tilde{W}_t & \text{untuk } 0 \leq t \leq T, \\ r_0 = k. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Walaupun untuk  $r_t \equiv 0$  koefisien difusi dari model tersebut bernilai  $\beta r_t = 0$ , tetapi koefisien *drift* dari model tersebut, yaitu  $\gamma(\alpha - r_t)$  belum tentu

sama dengan nol sehingga  $r_t \equiv 0$  bukanlah *steady solution* dari masalah nilai awal stokastik tersebut (*non-zero solution*) (Allen, 2007). Untuk menangani masalah ini perlu diselesaikan melalui cara yang ekuivalen dengan yang diterapkan pada model persamaan diferensial deterministik (Anggono, 2004; Thygesen, 1997). Pembahasan lebih mendalam mengenai stabilitas untuk masalah nilai awal stokastik yang memiliki *steady solution* berupa *non-zero solution* dapat dilihat pada Thygesen (1997).

Misalkan  $K_t \neq 0$  merupakan solusi masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.1).  $K_t$  disebut solusi nominal di mana stabilitas solusi  $K_t$  tersebut akan ditentukan. Selanjutnya, ubah sedikit nilai awal sehingga diperoleh sebarang solusi lain  $\xi_t$  yang disebut sebagai solusi terganggu (*perturbed solution*). Jika kecil kemungkinan terjadi perbedaan antara solusi terganggu dengan solusi nominal, maka  $r_t \equiv K_t$  yang merupakan solusi nominal untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.1) stabil. Selanjutnya, definisikan gangguan (*perturbation*) berikut ini:

$$\bar{r}_t = \xi_t - K_t.$$

Jika dimisalkan bentuk umum dari suatu PDS berikut ini:

$$dr_t = f(t, r_t)dt + g(t, r_t)d\tilde{W}_t,$$

dengan  $f(t, 0) \neq 0$  dan  $g(t, 0) \neq 0$ , maka bentuk diferensial dari gangguan (*perturbation*) tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d\bar{r}_t &= d\xi_t - dK_t \\ &= \{f(t, \xi_t)dt + g(t, \xi_t)d\tilde{W}_t\} - \{f(t, K_t)dt + g(t, K_t)d\tilde{W}_t\} \\ &= \{f(t, \xi_t) - f(t, K_t)\}dt + \{g(t, \xi_t) - g(t, K_t)\}d\tilde{W}_t \\ &= \{f(t, \bar{r}_t + K_t) - f(t, K_t)\}dt + \{g(t, \bar{r}_t + K_t) - g(t, K_t)\}d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Jika  $\bar{r}_t \equiv 0$  maka koefisien *drift* dan difusinya menjadi bernilai nol. Dengan kata lain,  $\bar{r}_t \equiv 0$  merupakan *steady solution* dari masalah nilai awal stokastik pada

gangguan (*perturbation*) tersebut (*zero solution*). Dengan menerapkan langkah-langkah di atas pada model Brennan-Schwartz, diperoleh sebuah PDS berikut ini:

$$\begin{aligned}
 d\bar{r}_t &= d\xi_t - dK_t \\
 &= \left\{ \gamma(\alpha - \xi_t)dt + \beta\xi_t d\tilde{W}_t \right\} - \left\{ \gamma(\alpha - K_t)dt + \beta K_t d\tilde{W}_t \right\} \\
 &= -\gamma\xi_t dt + \gamma K_t dt + \beta\xi_t d\tilde{W}_t - \beta K_t d\tilde{W}_t \\
 &= -\gamma(\xi_t - K_t)dt + \beta(\xi_t - K_t)d\tilde{W}_t \\
 &= -\gamma\bar{r}_t dt + \beta\bar{r}_t d\tilde{W}_t.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $\bar{r}_t \equiv 0$  merupakan *steady solution* untuk masalah nilai awal stokastik berikut ini:

$$\begin{cases} d\bar{r}_t = -\gamma\bar{r}_t dt + \beta\bar{r}_t d\tilde{W}_t, & \text{untuk } 0 \leq t \leq T, \\ \bar{r}_0 = c, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Jika  $\bar{r}_t \equiv 0$  yang merupakan *steady solution* untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.2) stabil, maka  $r_t \equiv K_t$  yang merupakan solusi nominal untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.1) juga stabil (Thygesen, 1997). Sekarang, akan ditunjukkan stabilitas stokastik asimtotik dari  $\bar{r}_t$ . Pertama-tama solusi analitik dari model pada persamaan (3.2.2) dapat ditentukan dengan cara yang ekuivalen dengan solusi analitik yang diperoleh pada persamaan (3.1.2) sehingga solusi analitik untuk model pada persamaan (3.2.2) adalah sebagai berikut:

$$\bar{r}_t = \bar{r}_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} = c \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\}. \quad (3.2.3)$$

Berdasarkan Definisi 2.3.2, selanjutnya nilai absolut dari persamaan (3.2.3) adalah sebagai berikut:



$$\begin{aligned}
|\bar{r}_t| &= \left| c \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta \tilde{W}_t \right\} \right| \\
&= \left| c \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right) \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \right| \\
&= |c| \cdot |\exp(-\gamma t)| \cdot \left| \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right) \right| \cdot |\exp(\beta \tilde{W}_t)| \\
&= |c| \cdot \sqrt{\exp(-\gamma t) \cdot \exp(-\gamma t)} \cdot \sqrt{\exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right)} \\
&\quad \cdot \sqrt{\exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t)} \\
&= |c| \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \cdot 2\gamma t \right) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right) \cdot \exp \left( \frac{1}{2} \cdot 2\beta \tilde{W}_t \right) \\
&= |c| \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 t \right) \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \\
&= |c| \cdot \exp \left\{ \left( -\gamma - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \\
&= |c| \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \\
&= |c| \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\},
\end{aligned}$$

dengan bentuk limit

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{r}_t| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ |c| \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \right] \\
&= |c| \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \right].
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Berdasarkan persamaan (3.2.4) dan Definisi 2.3.2,  $\bar{r}_t \equiv 0$  akan stabil

secara stokastik asimtotik ketika  $\left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) > 0$  sehingga

$$\lim_{\tilde{r}_0 \rightarrow 0} P \left( \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{r}_t| \rightarrow 0 \right) = \lim_{c \rightarrow 0} P \left( |c| \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp \left\{ - \left( \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right\} \right] \rightarrow 0 \right) = 1.$$

Dengan demikian, kriteria stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz adalah

$$\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 > 0. \quad (3.2.5)$$

Berikut ini akan ditunjukkan pula bahwa *steady solution*  $\bar{r}_t \equiv 0$  juga stabil secara *mean-square*. Berdasarkan persamaan (3.2.3) diperoleh nilai absolut kuadrat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |\bar{r}_t|^2 &= \left| c \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 t\right) \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \right|^2 \\ &= |c|^2 \cdot |\exp(-\gamma t)|^2 \cdot \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 t\right) \right|^2 \cdot |\exp(\beta \tilde{W}_t)|^2 \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 t\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 t\right) \\ &\quad \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \cdot \exp(\beta \tilde{W}_t) \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot \exp(2\beta \tilde{W}_t), \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} E^{\bar{P}} \left( |\bar{r}_t|^2 \right) &= E \left[ |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot \exp(2\beta \tilde{W}_t) \right] \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot E \left[ \exp(2\beta \tilde{W}_t) \right]. \end{aligned}$$

Oleh karena  $\exp(2\beta \tilde{W}_t)$  berdistribusi lognormal, maka berdasarkan Definisi 2.1.1.12 persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} E^{\bar{P}} \left( |\bar{r}_t|^2 \right) &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}(2\beta)^2 t\right) \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 4\beta^2 t\right) \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t) \cdot \exp(2\beta^2 t) \\ &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(-\beta^2 t + 2\beta^2 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^{\bar{P}}\left(|\bar{r}_t|^2\right) &= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t) \cdot \exp(\beta^2 t) \\
&= |c|^2 \cdot \exp(-2\gamma t + \beta^2 t) \\
&= |c|^2 \cdot \exp\left\{(-2\gamma + \beta^2)t\right\},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} E^{\bar{P}}\left(|\bar{r}_t|^2\right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ |c|^2 \cdot \exp\left\{(-2\gamma + \beta^2)t\right\} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ |c|^2 \cdot \exp\left\{-(2\gamma - \beta^2)t\right\} \right] \\
&= |c|^2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp\left\{-(2\gamma - \beta^2)t\right\} \right]. \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.2.6) dan Definisi 2.3.3,  $\bar{r}_t \equiv 0$  akan stabil secara *mean-square* ketika  $2\gamma - \beta^2 > 0$ , sehingga persamaan (3.2.6) menjadi

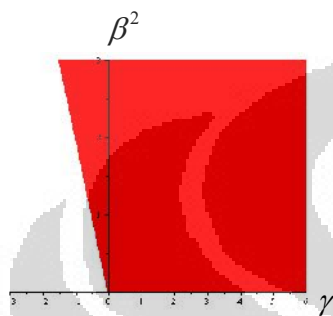
$$\lim_{t \rightarrow \infty} E^{\bar{P}}\left(|\bar{r}_t|^2\right) = |c|^2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp\left\{-(2\gamma - \beta^2)t\right\} \right] = |c|^2 \cdot 0 = 0.$$

Dengan demikian, kriteria stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz adalah

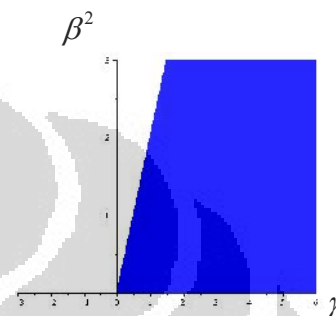
$$2\gamma - \beta^2 > 0. \tag{3.2.7}$$

Oleh karena  $\bar{r}_t \equiv 0$  yang merupakan *steady solution* untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.2) stabil baik secara stokastik asimtotik maupun stabil secara *mean-square*, maka  $r_t \equiv K_t$  yang merupakan solusi nominal untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.1) juga stabil baik secara stokastik asimtotik maupun stabil secara *mean-square* (Thygesen, 1997). Akibatnya, kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*  $\bar{r}_t \equiv 0$  secara berturut-turut pada persamaan (3.2.5) dan (3.2.7) untuk masalah nilai awal stokastik pada persamaan (3.2.2) sama dengan kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*  $r_t \equiv K_t$  untuk model pada persamaan (3.2.1) (Anggono, 2004; Thygesen, 1997).

Berdasarkan persamaan (3.2.5), kriteria stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz dapat ditulis  $\beta^2 > -2\gamma$ . Sedangkan, berdasarkan persamaan (3.2.7) kriteria stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz dapat ditulis  $\beta^2 < 2\gamma$ . Kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz di atas dapat divisualisasikan sebagai daerah stabilitas model stokastik sebagai berikut:



**Gambar 3.2.1** Daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz terkait parameter  $\gamma$  dan  $\beta$



**Gambar 3.2.2** Daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz terkait parameter  $\gamma$  dan  $\beta$

Berdasarkan asumsi  $\gamma, \alpha, \beta > 0$  pada model Brennan-Schwartz dan berdasarkan Gambar 3.2.1 maka model Brennan-Schwartz akan stabil secara stokastik asimtotik jika  $\gamma, \alpha, \beta > 0$ . Selain itu, terlihat pula dari Gambar 3.2.2 bahwa daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz termasuk di dalam daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz, atau dengan kata lain solusi model Brennan-Schwartz yang stabil secara *mean-square* juga akan stabil secara stokastik asimtotik tetapi tidak berlaku sebaliknya (Higham, 2001).

Dengan demikian, kriteria stabilitas model Brennan-Schwartz dapat dijadikan panduan dalam melakukan penaksiran parameter pada model Brennan-Schwartz. Taksiran parameter yang termasuk ke dalam kriteria stabilitas tersebut dapat diartikan bahwa model Brennan-Schwartz menjadi tahan terhadap gangguan sehingga solusi yang diperoleh tidak terlalu menyimpang dari solusi sebenarnya dan model tersebut dapat digunakan dalam peramalan tingkat bunga untuk jangka waktu tertentu. Selanjutnya, pada Subbab 3.3 akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada model Brennan-Schwartz.

### 3.3 Penaksiran Parameter Model Brennan-Schwartz

Berdasarkan Subbab 3.1 dan Subbab 3.2 telah diperoleh solusi analitik dan kriteria stabilitas stokastik asimtotik serta kriteria stabilitas *mean-square* dari model Brennan-Schwartz. Dengan menggunakan sebarang parameter yang termasuk dalam masing-masing kriteria stabilitas model akan diperoleh model yang stabil baik secara stokastik asimtotik maupun secara *mean-square* (Higham, 2001). Akan tetapi, hal tersebut belum dapat mendeskripsikan masalah yang sedang dihadapi terkait dengan data riil. Penggunaan sebarang parameter yang termasuk dalam kriteria stabilitas model belum tentu mencerminkan nilai parameter terkait dengan data riil yang digunakan. Pada subbab ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter model Brennan-Schwartz menggunakan data riil (observasi). Dengan memisalkan  $t_k = \frac{k}{N}T$  untuk  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  maka data observasi tersebut dapat ditulis sebagai  $r_{t_0}, r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_N}$  dengan  $r_t$  adalah suatu proses stokastik di mana  $0 \leq t \leq T$ . Data observasi yang berasal dari dunia nyata memiliki karakteristik statistik yang mencirikan distribusi proses  $r_t$  pada *actual probability measure*  $P$ . Oleh sebab itu, model yang dihasilkan memenuhi asumsi *actual probability measure*  $P$  (Brigo, 2006). Sedangkan, solusi analitik yang diperoleh pada Subbab 3.1 diperoleh berdasarkan model dengan asumsi *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ . Dengan demikian, diperlukan penerapan konsep perubahan *measure* pada model ketika menaksir parameter model Brennan-Schwartz tersebut.

Sebelumnya, tinjau model Brennan-Schwartz pada persamaan (3.1.1). Berdasarkan Teorema 2.5.4, dengan mengambil  $\theta_t = -\lambda$ , maka

$$W_t = \tilde{W}_t + \int_0^t \theta_u du,$$

$$(W_t - W_0) = (\tilde{W}_t - \tilde{W}_0) - \int_0^t \lambda du,$$

atau dalam notasi diferensial dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}dW_t &= d\tilde{W}_t - \lambda dt, \\d\tilde{W}_t &= dW_t + \lambda dt,\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}dr_t &= \gamma(\alpha - r_t)dt + \beta r_t d\tilde{W}_t \\&= \gamma(\alpha - r_t)dt + \beta r_t (dW_t + \lambda dt) \\&= \gamma\alpha dt - \gamma r_t dt + \beta r_t dW_t + \lambda\beta r_t dt \\&= \gamma\alpha dt - \gamma r_t dt + \lambda\beta r_t dt + \beta r_t dW_t \\&= \gamma\alpha dt - (\gamma - \lambda\beta)r_t dt + \beta r_t dW_t \\&= (\gamma\alpha - (\gamma - \lambda\beta)r_t)dt + \beta r_t dW_t.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

dengan  $W_t$  suatu *Brownian motion* pada *actual probability measure*  $P$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dalam persamaan (3.3.1) merepresentasikan model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  dalam persamaan (3.1.1).

Selanjutnya, model Brennan-Schwartz pada persamaan (3.3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$dr_t = \gamma^*(\alpha^* - r_t)dt + \beta^* r_t dW_t,\tag{3.3.2}$$

di mana  $W_t$  merupakan suatu *Brownian motion* pada *actual probability measure*  $P$ . Dengan demikian, berdasarkan koefisien *drift* dan koefisien difusi pada persamaan (3.3.1) dan (3.3.2) dapat diperoleh persamaan-persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \gamma - \lambda\beta, & \gamma^* \alpha^* &= \gamma\alpha, \\ \gamma &= \gamma^* + \lambda\beta, & \alpha &= \frac{\gamma^* \alpha^*}{\gamma}, & \beta &= \beta^*.\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3.3) di atas, taksiran parameter-parameter model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  (3.1.1) dapat diperoleh melalui penaksiran parameter-parameter model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$ . Akan tetapi, pada persamaan (3.3.3) parameter  $\gamma$  dan  $\alpha$  bergantung pada suatu parameter  $\lambda$  yang dikenal dengan istilah *market price of risk* (Shreve, 2004; Brigo, 2006). Sebenarnya, penaksiran

parameter model Brennan-Schwartz menggunakan data observasi pada *actual probability measure*  $P$  dapat dilakukan dengan mengkombinasikan dua pendekatan, yakni metode *Maximum Likelihood* untuk menaksir parameter  $\gamma^*$ ,  $\alpha^*$ , dan  $\beta^*$ , serta teknik kalibrasi untuk menaksir parameter  $\lambda$  (Brigo, 2006; Csajkova, 2007; Zeytun, 2007). Akan tetapi, dalam Tesis ini penaksiran parameter  $\lambda$  dilakukan dengan *trial and error* sedemikian sehingga taksiran parameter  $\hat{\gamma}$  yang diperoleh berada di daerah stabilitas model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ .

Pertama-tama, akan ditaksir parameter  $\gamma^*$ ,  $\alpha^*$ , dan  $\beta^*$  menggunakan metode *Maximum Likelihood* untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dalam persamaan (3.3.2). Berdasarkan Subbab 2.4.1, metode *Maximum Likelihood* memerlukan pdf suatu peubah acak dan pada model Brennan-Schwartz yang diperlukan adalah pdf suatu proses stokastik yang disebut sebagai pdf transisi (Bhattacharya, 1992). Untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dalam persamaan (3.3.2), pdf transisi dari  $(t_k, r_{t_k})$  yang dimulai dari  $(t_{k-1}, r_{t_{k-1}})$  adalah  $f(t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)$  dengan pdf keadaan (*state*) awalnya adalah  $f_0(r_{t_0} | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)$  sehingga *joint pdf* atau fungsi *likelihood*-nya adalah sebagai berikut (Allen, 2007):

$$L(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*; t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; k=1, 2, \dots, N) = f_0(r_{t_0} | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*) \prod_{k=1}^N f(t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; \gamma^*, \alpha^*, \beta^*).$$

Selanjutnya, akan ditentukan taksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dengan meminimumkan fungsi berikut ini:

$$\begin{aligned} D(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*; t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; k=1, 2, \dots, N) &= -\ln L(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*; t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; k=1, 2, \dots, N) \\ &= -\ln(f_0(r_{t_0} | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \ln(f(t_k, r_{t_k} | t_{k-1}, r_{t_{k-1}}; \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)). \end{aligned}$$

Hingga saat ini, prosedur dari metode *Maximum Likelihood* telah berjalan sebagaimana seharusnya. Akan tetapi, pdf transisi suatu proses stokastik ternyata tidak mudah ditentukan (Allen, 2007). Hal ini berlaku pula untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$ . Oleh sebab itu, pada Tesis ini pdf transisi untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dalam persamaan (3.3.2) akan diaproksimasi melalui aproksimasi Euler. Seperti pada Allen (2007), dengan memisalkan  $r_{t_{k-1}} = r_{k-1}$  pada  $t = t_{k-1}$ , diperoleh

$$r_k \approx r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t + \beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \eta_k,$$

dengan  $\Delta t = T/N$  dan  $\eta_k \sim N(0,1)$  pada *actual probability measure*  $P$  sehingga berdasarkan teorema 2.1.1.13 diperoleh

$$\begin{aligned} E^P(r_k | r_{k-1}) &\approx E^P(r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t + \beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \eta_k | r_{k-1}) \\ &= E^P(r_{k-1} | r_{k-1}) + E^P(\gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t | r_{k-1}) \\ &\quad + E^P(\beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \eta_k | r_{k-1}) \\ &= r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t + \beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \cdot E^P(\eta_k | r_{k-1}) \\ &= r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t + \beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \cdot 0 \\ &= r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Var^P(r_k | r_{k-1}) &\approx Var^P(r_{k-1} + \gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t + \beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \eta_k | r_{k-1}) \\ &= Var^P(r_{k-1} | r_{k-1}) + Var^P(\gamma^* (\alpha^* - r_{k-1}) \Delta t | r_{k-1}) \\ &\quad + Var^P(\beta^* r_{k-1} \sqrt{\Delta t} \eta_k | r_{k-1}) \\ &= 0 + 0 + (\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t \cdot Var^P(\eta_k | r_{k-1}) \\ &= (\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t \cdot 1 \\ &= (\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Dengan demikian, aproksimasi pdf transisi untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  merupakan pdf transisi normal sebagai berikut:



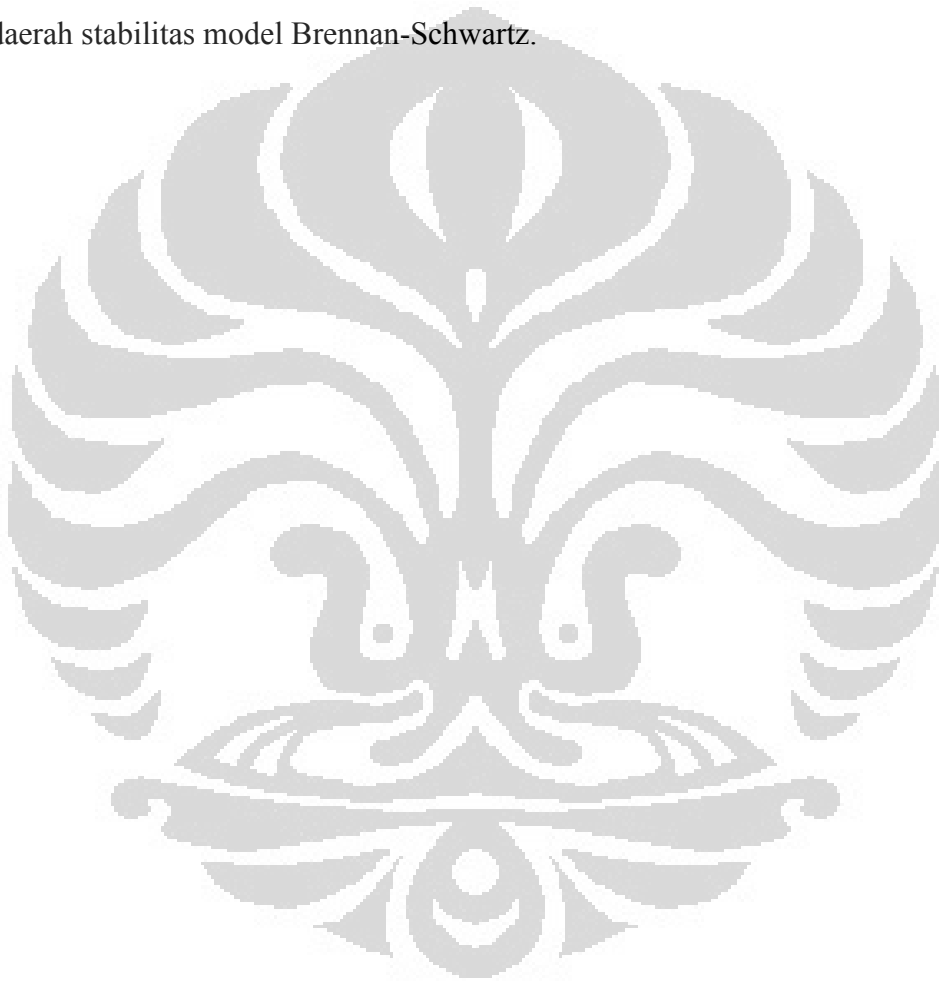
$$f(t_k, r_k | t_{k-1}, r_{k-1}; \gamma^*, \alpha^*, \beta^*) \approx \frac{1}{\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t}\right).$$

Seperti telah dijelaskan sebelumnya pada Subbab 2.4.1, maka prosedur dari metode *Maximum Likelihood* dilanjutkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*; t_k, r_k | t_{k-1}, r_{k-1}; k=1, 2, \dots, N) &= \\ &= -\ln(f_0(r_0 | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[ \ln\left(\frac{1}{\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t}\right)\right) \right] \\ &= -\ln(f_0(r_0 | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[ \ln\left(\frac{1}{\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}}\right) + \ln\left(\exp\left(-\frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t}\right)\right) \right] \\ &= -\ln(f_0(r_0 | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[ \ln\left(\frac{1}{\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}}\right) - \frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t} \right] \\ &= -\ln(f_0(r_0 | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left[ \frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t} - \ln\left(\frac{1}{\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}}\right) \right] \\ &= -\ln(f_0(r_0 | \gamma^*, \alpha^*, \beta^*)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left[ \frac{(r_k - \{r_{k-1} + \gamma^*(\alpha^* - r_{k-1})\Delta t\})^2}{2(\beta^*)^2 r_{k-1}^2 \Delta t} + \ln(\beta^* r_{k-1} \sqrt{2\pi\Delta t}) \right]. \end{aligned}$$

Untuk meminimumkan fungsi  $D(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*; t_k, r_k | t_{k-1}, r_{k-1}; k=1, 2, \dots, N)$  sedemikian sehingga diperoleh taksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dapat digunakan optimisasi numerik, salah satunya dengan algoritma Nelder-Mead, seperti telah dijelaskan pada Subbab 2.4.2.

Dengan demikian, taksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood* telah berhasil ditentukan. Jadi, taksiran parameter  $\hat{\gamma}^*$ ,  $\hat{\alpha}^*$ , dan  $\hat{\beta}^*$  yang diperoleh untuk model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$ , dapat digunakan dalam menaksir parameter-parameter  $\gamma, \alpha$ , dan  $\beta$  untuk model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  dengan terlebih dahulu menemukan nilai  $\lambda$  sedemikian sehingga taksiran parameter  $\hat{\gamma}$  berada pada daerah stabilitas model Brennan-Schwartz.



## BAB 4

### IMPLEMENTASI

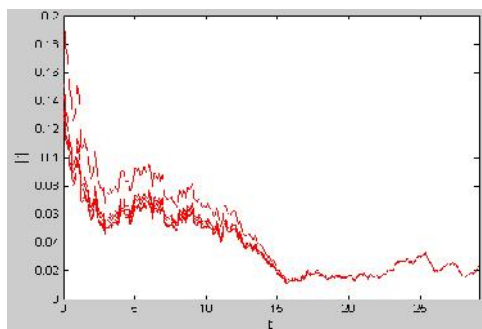
Berikut ini akan diimplementasikan analisis stabilitas dan penaksiran parameter pada model stokastik untuk tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari tahun 1982 hingga Februari 2011 yang datanya diunduh dari [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk) (data dapat dilihat pada Lampiran 3). Pergerakan tingkat bunga tersebut akan dimodelkan ke dalam salah satu model tingkat bunga, yakni model Brennan-Schwartz sebagai berikut:

$$dr_t = \gamma(\alpha - r_t)dt + \beta r_t d\tilde{W}_t$$

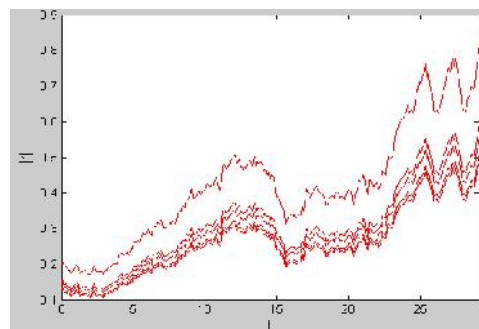
dengan  $\gamma, \alpha, \beta > 0$  dan  $\tilde{W}_t$  merupakan suatu *Brownian motion* pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  di mana

- $r_t$  : tingkat bunga pada waktu  $t$ ,
- $\alpha$  : *reversion level* dari tingkat bunga,
- $\gamma$  : kecepatan pengoreksian,
- $\beta^2 r_t^2$  : variansi *infinitesimal* dari proses.

Sebelum dibahas hasil penaksiran parameter model Brennan-Schwartz, terlebih dahulu akan divisualisasikan kestabilan stokastik asimtotik dan kestabilan *mean-square* model Brennan-Schwartz dengan menggunakan perangkat lunak Matlab. Untuk tujuan perbandingan visualisasi terkait stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz akan dipilih parameter  $\gamma \leq 0$ , walaupun model Brennan-Schwartz memiliki asumsi  $\gamma > 0$ . Berdasarkan pembahasan pada Subbab 3.2, berikut ini diberikan perbandingan visualisasi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda untuk masing-masing parameter yang terletak di dalam dan di luar daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz (*source code* program dapat dilihat pada Lampiran 4):



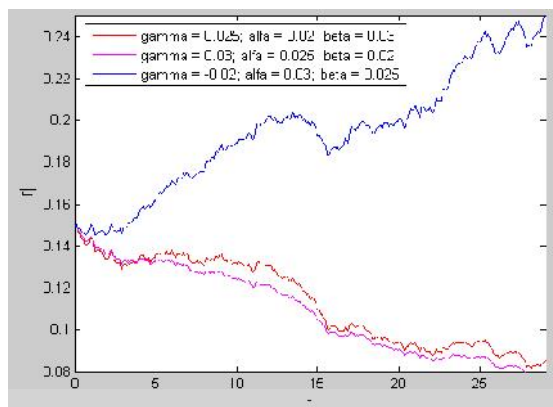
**Gambar 4.1** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana  $\gamma = 0,2$ ;  $\alpha = 0,02$ ; dan  $\beta = 0,2$



**Gambar 4.2** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana  $\gamma = -0,05$ ;  $\alpha = 0,02$ ; dan  $\beta = 0,1$

Gambar 4.1 merupakan visualisasi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak di dalam daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz. Sedangkan, Gambar 4.2 merupakan visualisasi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak di luar daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz. Berdasarkan Gambar 4.1 terlihat bahwa model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak dalam kriteria stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz menghasilkan simulasi-simulasi lintasan solusi model yang semakin lama akan saling berdekatan menuju suatu nilai tertentu. Hal ini sesuai dengan definisi dari stabilitas stokastik asimtotik yang telah diberikan pada Subbab 2.3. Sebaliknya, jika parameter-parameter yang digunakan terletak di luar daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz maka lintasan-lintasan solusi model tidak menuju ke suatu nilai tertentu, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.2.

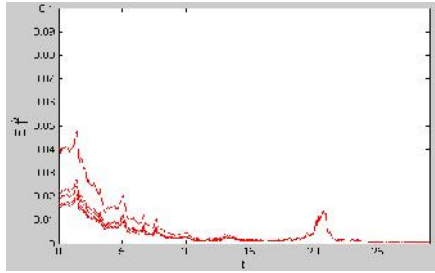
Selain diujicobakan dengan nilai awal yang berbeda-beda, visualisasi stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz akan diujicobakan pula untuk nilai parameter yang berbeda-beda, seperti ditunjukkan berikut ini (*source code* program dapat dilihat pada Lampiran 5):



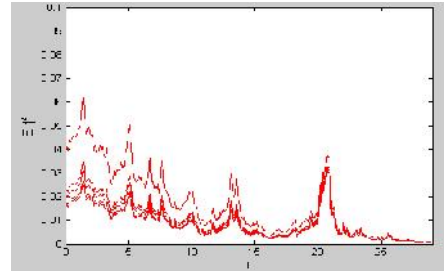
**Gambar 4.3** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter berbeda untuk uji kestabilan stokastik asimtotik di mana  $r_0 = 14,94\%$

Terlihat pada Gambar 4.3 bahwa lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter  $\gamma = 0,025; \alpha = 0,02; \beta = 0,03$  dan  $\gamma = 0,03; \alpha = 0,025; \beta = 0,02$  yang terletak dalam kriteria stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz semakin lama akan saling berdekatan menuju suatu nilai tertentu. Sedangkan, lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter  $\gamma = -0,02; \alpha = 0,03; \beta = 0,025$  yang terletak di luar daerah stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz tidak saling berdekatan dengan solusi lainnya.

Selanjutnya, pada Gambar 4.4, 4.5, 4.6, dan 4.7 akan ditinjau kestabilan *mean-square* model Brennan-Schwartz. Berdasarkan definisi stabilitas *mean-square* yang telah diberikan pada Subbab 2.3, setiap lintasan solusi model Brennan-Schwartz pada keempat gambar tersebut merupakan visualisasi lintasan yang diperoleh berdasarkan rata-rata dari hasil simulasi yang dilakukan. Pada Tesis ini setiap lintasan merupakan visualisasi dari rata-rata 100 simulasi yang dilakukan. Berikut ini diberikan perbandingan visualisasi model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda untuk masing-masing parameter yang terletak di dalam dan di luar daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz (*source code* dapat dilihat pada Lampiran 6):

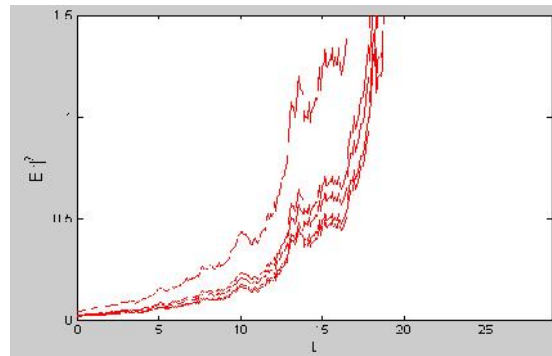


**Gambar 4.4** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan *mean-square* di mana  $\gamma = 0,2$ ;  $\alpha = 0,02$ ; dan  $\beta = 0,5$



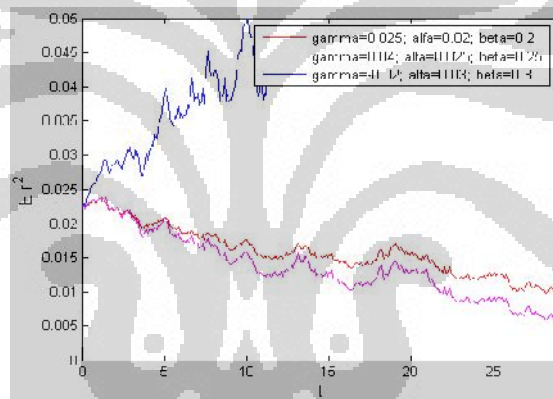
**Gambar 4.5** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan *mean-square* di mana  $\gamma = 0,1$ ;  $\alpha = 0,02$ ; dan  $\beta = 0,5$

Gambar 4.4 merupakan visualisasi lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak di dalam daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz. Sedangkan, Gambar 4.5 merupakan visualisasi lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak di luar daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz. Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat bahwa model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter yang terletak dalam kriteria stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz semakin lama nilai ekspektasi dari mutlak solusi kuadratnya akan menuju nol sesuai dengan definisi stabilitas *mean-square* pada Subbab 2.3. Seharusnya, jika parameter-parameter yang digunakan terletak di luar daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz maka solusi modelnya tidak menuju nol, tetapi hal tersebut kurang terlihat pada Gambar 4.5 karena nilai parameter yang diambil dekat dengan daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz. Oleh sebab itu, untuk tujuan perbandingan berikut ini akan divisualisasikan kembali stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz dengan parameter  $\gamma$  yang terletak agak jauh dari daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz, yaitu  $\gamma \leq 0$ , walaupun model Brennan-Schwartz memiliki asumsi  $\gamma > 0$ :



**Gambar 4.6** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai awal berbeda untuk uji kestabilan *mean-square* di mana  $\gamma = -0,1$ ;  $\alpha = 0,02$ ; dan  $\beta = 0,3$

Seperti halnya stabilitas stokastik asimtotik, berikut ini akan divisualisasikan pula stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz untuk nilai parameter yang berbeda-beda (*source code* program dapat dilihat pada Lampiran 7):



**Gambar 4.7** Lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz (100 simulasi) dengan nilai parameter berbeda untuk uji kestabilan *mean-square* di mana  $r_0 = 14,94\%$

Terlihat pada Gambar 4.7 bahwa lintasan-lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter  $\gamma = 0,025$ ;  $\alpha = 0,02$ ;  $\beta = 0,2$  dan  $\gamma = 0,04$ ;  $\alpha = 0,025$ ;  $\beta = 0,25$  yang terletak dalam kriteria stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz semakin lama akan saling berdekatan menuju nol. Sedangkan, lintasan solusi model Brennan-Schwartz dengan parameter-parameter  $\gamma = 0,02$ ;  $\alpha = 0,03$ ;  $\beta = 0,3$  yang terletak di luar daerah stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz tidak menuju nol.

Selanjutnya, parameter  $\gamma, \alpha$ , dan  $\beta$  pada model Brennan-Schwartz tersebut akan ditaksir. Akan tetapi, seperti telah dijelaskan sebelumnya pada Subbab 3.3, penaksiran parameter  $\gamma, \alpha$ , dan  $\beta$  tidak dapat diperoleh secara langsung dengan metode-metode penaksiran parameter yang ada. Hal ini disebabkan oleh masalah perbedaan *measure* antara model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  dengan data observasi yang diperoleh pada *actual probability measure*  $P$ . Oleh sebab itu, pertama-tama akan dilakukan penaksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *actual probability measure*  $P$  dengan parameter-parameternya adalah  $\gamma^*, \alpha^*$ , dan  $\beta^*$ . Penaksiran parameter  $\gamma^*, \alpha^*$ , dan  $\beta^*$  akan dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood*. Seperti telah dijelaskan sebelumnya pada Subbab 3.3, optimisasi numerik yang akan digunakan adalah algoritma Nelder-Mead. Dengan menggunakan algoritma Nelder-Mead (*source code* dapat dilihat pada Lampiran 8), diperoleh hasil taksiran parameter berikut ini:

$$\hat{\gamma}^* = 0,07; \hat{\alpha}^* = 0,08; \text{ dan } \hat{\beta}^* = 0,13. \quad (4.1)$$

Berdasarkan persamaan (3.3.3), taksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$  dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \hat{\beta}^* = 0,13; \\ \hat{\gamma} &= \hat{\gamma}^* + \lambda \hat{\beta} = 0,07 + 0,13\lambda; \\ \hat{\alpha} &= \frac{\hat{\gamma}^* \hat{\alpha}^*}{\hat{\gamma}} = \frac{0,07 \cdot 0,08}{0,07 + 0,13\lambda} = \frac{0,0056}{0,07 + 0,13\lambda}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Selanjutnya, parameter  $\lambda$  akan diperoleh dengan *trial and error* sedemikian sehingga memenuhi masing-masing kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz pada persamaan (3.2.5) dan (3.2.7) atau Gambar 3.2.1 dan 3.2.2. Sebelumnya, akan diselesaikan secara matematis kriteria nilai parameter  $\lambda$  yang dapat diujicobakan sebagai berikut:



Kriteria nilai $\lambda$ yang memenuhi kriteria stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz	Kriteria nilai $\lambda$ yang memenuhi kriteria stabilitas <i>mean-square</i> model Brennan-Schwartz
$\hat{\beta}^2 > -2\hat{\gamma}$ $0,0169 > -2(0,07 + 0,13\lambda)$ $\lambda > -1,2069$	$\hat{\beta}^2 < 2\hat{\gamma}$ $0,0169 < 2(0,07 + 0,13\lambda)$ $\lambda > -0,9307.$

(4.3)

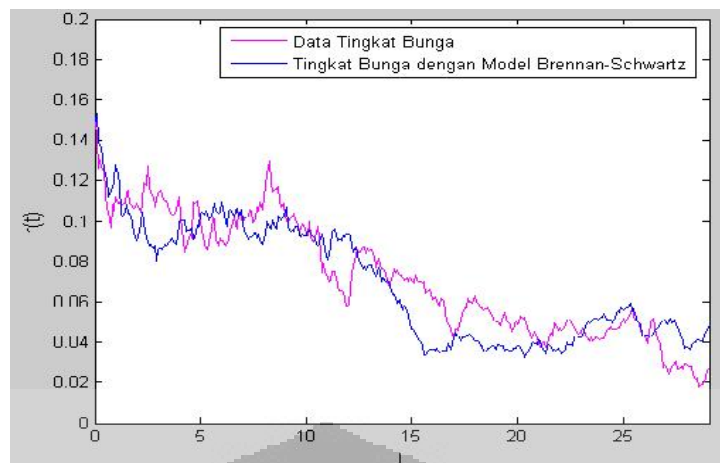
Berdasarkan persamaan (4.3), kriteria nilai parameter  $\lambda$  yang dapat diujicobakan agar stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz dapat tercapai secara bersamaan adalah  $\lambda > -0,9307$ . Dengan *trial and error* ditetapkan  $\lambda = \frac{1}{2}$  sehingga menghasilkan *norm error* model yang cukup kecil, yaitu 0,0368. *Norm error* adalah nilai maksimum dari absolut *error* akibat perbedaan nilai tingkat bunga yang diperoleh melalui model Brennan-Schwartz dengan nilai tingkat bunga sebenarnya. Berikut adalah taksiran parameter model Brennan-Schwartz pada *risk-neutral probability measure*  $\tilde{P}$ :

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^* = 0,13;$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^* + \lambda\hat{\beta} = 0,07 + 0,13 \cdot \frac{1}{2} = 0,135;$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}^* \hat{\alpha}^*}{\hat{\gamma}} = \frac{0,07 \cdot 0,08}{0,07 + 0,13\lambda} = \frac{0,0056}{0,135} = 0,04148.$$

Dengan menggunakan nilai taksiran parameter di atas, berikut ini divisualisasikan pergerakan tingkat bunga dengan model Brennan-Schwartz ( $\hat{r}_t$ ) dibandingkan data observasi ( $r_t$ ) (*source code* dapat dilihat pada Lampiran 9):



**Gambar 4.8** Pergerakan tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari 1982 hingga Februari 2011 dengan menggunakan model Brennan-Schwartz yang datanya diunduh dari [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk)

Terlihat bahwa hasil visualisasi pergerakan tingkat bunga dengan menggunakan model Brennan-Schwartz mendekati nilai tingkat bunga sebenarnya sehingga dapat dikatakan bahwa model Brennan-Schwartz cukup baik dalam menggambarkan pergerakan tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari 1982 hingga Februari 2011 dengan *norm error* sebesar 0,0368.

## BAB 5

### KESIMPULAN

Dari pembahasan Tesis ini dapat ditarik beberapa kesimpulan, yakni model Brennan-Schwartz memiliki kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* yang dapat menjadi panduan ketika melakukan pemilihan parameter model sedemikian sehingga model Brennan-Schwartz menjadi stabil. Selain itu, parameter model Brennan-Schwartz yang sesuai dengan kriteria stabilitas *mean-square* akan sesuai pula dengan kriteria stabilitas stokastik asimtotik tetapi tidak berlaku sebaliknya. Dalam Tesis ini, parameter model Brennan-Schwartz dapat ditaksir dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood* kemudian dilanjutkan dengan optimisasi numerik menggunakan algoritma Nelder-Mead. Dalam implementasi, taksiran parameter model Brennan-Schwartz yang diperoleh sesuai dengan kriteria stabilitas model. Hasil implementasi menunjukkan bahwa solusi model Brennan-Schwartz cukup baik dalam menggambarkan pergerakan tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond*.

## DAFTAR PUSTAKA

- Allen, E. (2007). *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*. Netherland: Springer.
- Anggono, S. (2004). *Kajian Stabilitas pada Masalah dan Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial Stokastik*. Depok: Departemen Matematika, Universitas Indonesia.
- Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- Bayazit, D. (2004). *Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model*. Turkey: Department of Financial Mathematics, Middle East Technical University.
- Bhattacharya, R. N. dan Waymire, E. C. (1992). *Stochastic Processes with Applications*. Canada: John Wiley & Sons.
- Boes, D. C., Graybill, F. A., dan Mood, A. M. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. New York: McGraw-Hill.
- Brennan, M. J. dan Schwartz, E. S. (1980). Analyzing Convertible Bonds. *J. Finan. Quant. Anal.*, 15, 4, 907-929.
- Brigo, D. dan Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Model - Theory and Practice: With Smile, Inflation, and Credit*. New York: Springer.
- Casella, G., McCulloch, C. E., dan Searle, S. R. (1992). *Variance Components*. New York: John Wiley & Sons.
- Courtadon, G. (1982). The Pricing of Options on Default-Free Bonds. *J. Finan. Quant. Anal.*, 17, 1, 75-100.

- Csajkova, A. U. (2007). *Calibration of Term Structure Models*. Bratislava: Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Comenius University Bratislava.
- Dokuchaev, N. (2007). *Mathematical Finance Core Theory, Problems, and Statistical Algorithms*. New York: Routledge.
- Higham, D. J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, 43, 3, 525-546.
- Karlin, S. dan Taylor, H. M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling (Third Edition)*. California: Academic Press.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Kloeden, P. E. dan Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Kreyszig, E. (1999). *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. Singapore: World Scientific.
- Oksendal, B. (1998). *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. New York: Springer.
- Pennacchi, G. (2008). *Theory of Asset Pricing*. New York: Pearson.
- Rouah, F. D. dan Vainberg, G. (2007). *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. New York: Springer.
- Thygesen, U. H. (1997). A Survey of Lyapunov Techniques for Stochastic Differential Equations. *IMM Technical Report* nr. 18. <http://www.imm.dtu.dk>.

Yolcu, Y. (2005). *One-Factor Interest Rate Models: Analytic Solutions and Approximations*. Turkey: Department of Financial Mathematics, Middle East Technical University.

Zeytun, S. dan Gupta, A. (2007). A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate. *ITWM Technical Report*.  
<http://www.itwm.fraunhofer.de>

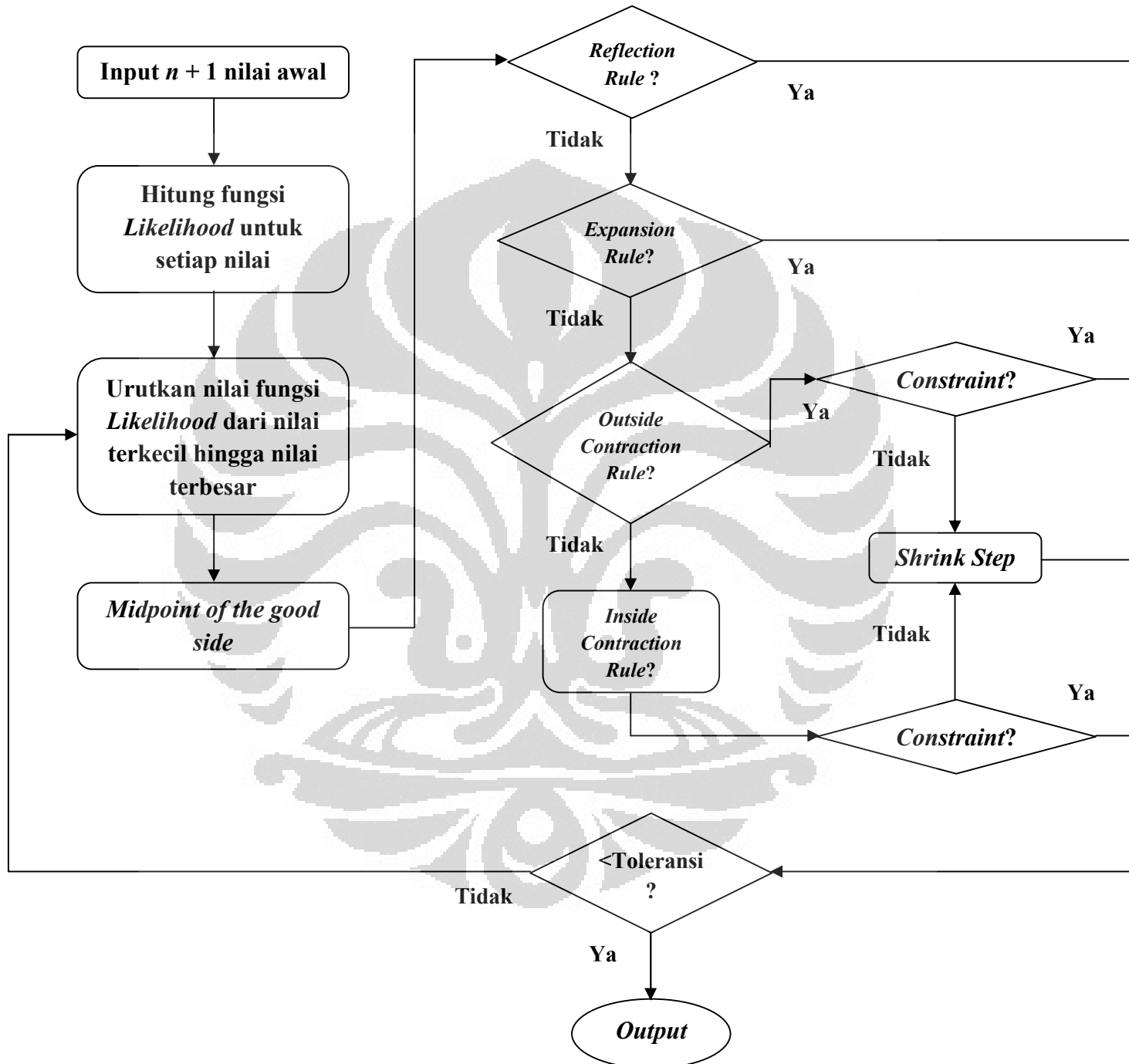
Bank of England, "Yields".

<http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>

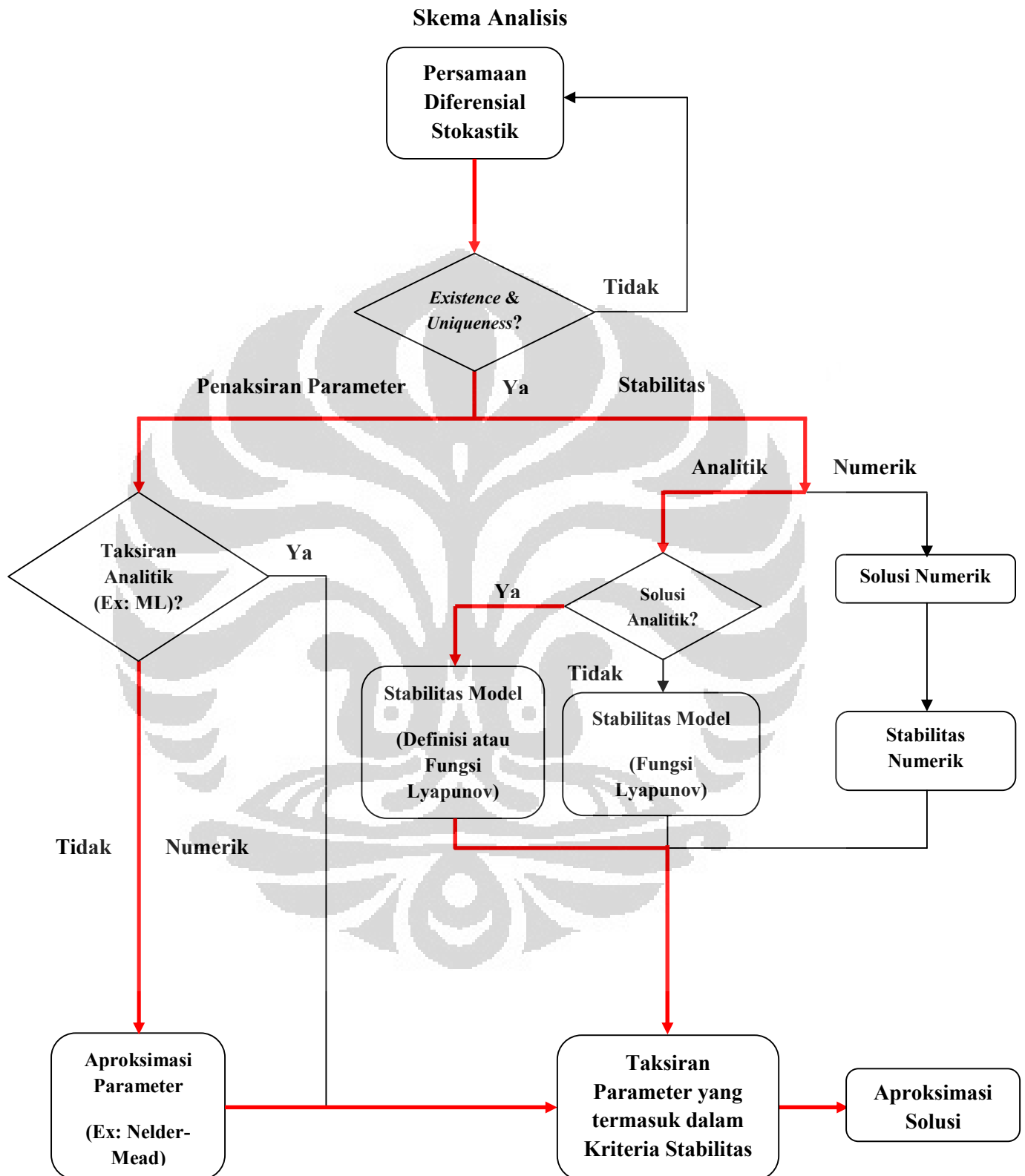
(8 Mar. 2011, pukul 21.47 WIB)



Flowchart Nelder-Mead untuk Metode Maximum Likelihood



## Lampiran 2





## Lampiran 3

Data tingkat bunga bulanan dari suatu *zero coupon bond* pada Bank of England  
periode Januari 1982 hingga Februari 2011.

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
1	31-Jan-82	14.94	36	31-Dec-84	11.06	71	30-Nov-87	8.82	106	31-Oct-90	11.02
2	28-Feb-82	14.13	37	31-Jan-85	11.36	72	31-Dec-87	9.14	107	30-Nov-90	10.65
3	31-Mar-82	12.63	38	28-Feb-85	11.48	73	31-Jan-88	9.03	108	31-Dec-90	10.85
4	30-Apr-82	13.04	39	31-Mar-85	11.29	74	29-Feb-88	9.04	109	31-Jan-91	10.24
5	31-May-82	12.66	40	30-Apr-85	11.08	75	31-Mar-88	8.8	110	28-Feb-91	10
6	30-Jun-82	12.5	41	31-May-85	11.03	76	30-Apr-88	8.96	111	31-Mar-91	10
7	31-Jul-82	11.47	42	30-Jun-85	11.01	77	31-May-88	9.02	112	30-Apr-91	10.13
8	31-Aug-82	10.55	43	31-Jul-85	10.55	78	30-Jun-88	9.56	113	31-May-91	10.21
9	30-Sep-82	10.47	44	31-Aug-85	10.39	79	31-Jul-88	9.67	114	30-Jun-91	10.39
10	31-Oct-82	9.68	45	30-Sep-85	10.31	80	31-Aug-88	10.15	115	31-Jul-91	10.09
11	30-Nov-82	10.79	46	31-Oct-85	10.34	81	30-Sep-88	9.85	116	31-Aug-91	9.85
12	31-Dec-82	10.52	47	30-Nov-85	10.5	82	31-Oct-88	9.64	117	30-Sep-91	9.53
13	31-Jan-83	11.22	48	31-Dec-85	10.84	83	30-Nov-88	10.41	118	31-Oct-91	9.61
14	28-Feb-83	10.87	49	31-Jan-86	11.19	84	31-Dec-88	10.24	119	30-Nov-91	9.84
15	31-Mar-83	10.9	50	28-Feb-86	10.19	85	31-Jan-89	9.82	120	31-Dec-91	9.82
16	30-Apr-83	10.76	51	31-Mar-86	9.01	86	28-Feb-89	10.12	121	31-Jan-92	9.46
17	31-May-83	10.78	52	30-Apr-86	8.43	87	31-Mar-89	10.16	122	29-Feb-92	9.29
18	30-Jun-83	10.82	53	31-May-86	8.69	88	30-Apr-89	10.27	123	31-Mar-92	9.96
19	31-Jul-83	11.45	54	30-Jun-86	8.98	89	31-May-89	10.55	124	30-Apr-92	9.21
20	31-Aug-83	11.52	55	31-Jul-86	9.31	90	30-Jun-89	10.51	125	31-May-92	8.96
21	30-Sep-83	10.87	56	31-Aug-86	9.14	91	31-Jul-89	9.93	126	30-Jun-92	9.13
22	31-Oct-83	10.73	57	30-Sep-86	10.94	92	31-Aug-89	10.09	127	31-Jul-92	9.39
23	30-Nov-83	10.64	58	31-Oct-86	10.84	93	30-Sep-89	10.68	128	31-Aug-92	9.75

24	31-Dec-83	10.68	59	30-Nov-86	11	94	31-Oct-89	10.52	129	30-Sep-92	8.57
25	31-Jan-84	10.83	60	31-Dec-86	10.46	95	30-Nov-89	10.88	130	31-Oct-92	7.48
26	29-Feb-84	10.59	61	31-Jan-87	10.02	96	31-Dec-89	10.57	131	30-Nov-92	7.84
27	31-Mar-84	10.41	62	28-Feb-87	9.5	97	31-Jan-90	11.2	132	31-Dec-92	7.54
28	30-Apr-84	10.84	63	31-Mar-87	8.93	98	28-Feb-90	11.73	133	31-Jan-93	7.2
29	31-May-84	11.89	64	30-Apr-87	8.65	99	31-Mar-90	12.39	134	28-Feb-93	6.96
30	30-Jun-84	11.76	65	31-May-87	8.59	100	30-Apr-90	12.93	135	31-Mar-93	7.06
31	31-Jul-84	12.74	66	30-Jun-87	8.98	101	31-May-90	11.84	136	30-Apr-93	7.52
32	31-Aug-84	11.62	67	31-Jul-87	9.57	102	30-Jun-90	11.44	137	31-May-93	7.5
33	30-Sep-84	11.41	68	31-Aug-87	10.21	103	31-Jul-90	11.5	138	30-Jun-93	7.15
34	31-Oct-84	11.19	69	30-Sep-87	10.01	104	31-Aug-90	11.57	139	31-Jul-93	6.85
35	30-Nov-84	10.67	70	31-Oct-87	9.11	105	30-Sep-90	11.7	140	31-Aug-93	6.54

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
141	30-Sep-93	6.59	176	31-Aug-96	7.23	211	31-Jul-99	5.73	246	30-Jun-02	5.01
142	31-Oct-93	6.4	177	30-Sep-96	7.07	212	31-Aug-99	5.71	247	31-Jul-02	4.72
143	30-Nov-93	6.25	178	31-Oct-96	7.19	213	30-Sep-99	6.15	248	31-Aug-02	4.5
144	31-Dec-93	5.78	179	30-Nov-96	6.99	214	31-Oct-99	6.02	249	30-Sep-02	4.18
145	31-Jan-94	5.87	180	31-Dec-96	7.21	215	30-Nov-99	5.96	250	31-Oct-02	4.33
146	28-Feb-94	6.55	181	31-Jan-97	7.03	216	31-Dec-99	6.04	251	30-Nov-02	4.51
147	31-Mar-94	7.37	182	28-Feb-97	6.91	217	31-Jan-00	6.29	252	31-Dec-02	4.16
148	30-Apr-94	7.74	183	31-Mar-97	7.33	218	29-Feb-00	6.01	253	31-Jan-03	4.01
149	31-May-94	8.34	184	30-Apr-97	7.13	219	31-Mar-00	5.86	254	28-Feb-03	3.8
150	30-Jun-94	8.55	185	31-May-97	7.01	220	30-Apr-00	5.7	255	31-Mar-03	3.96
151	31-Jul-94	8.45	186	30-Jun-97	6.99	221	31-May-00	5.7	256	30-Apr-03	4.01
152	31-Aug-94	8.44	187	31-Jul-97	6.93	222	30-Jun-00	5.59	257	31-May-03	3.77
153	30-Sep-94	8.75	188	31-Aug-97	6.98	223	31-Jul-00	5.64	258	30-Jun-03	3.84
154	31-Oct-94	8.69	189	30-Sep-97	6.41	224	31-Aug-00	5.68	259	31-Jul-03	4.23

155	30-Nov-94	8.4	190	31-Oct-97	6.55	225	30-Sep-00	5.53	260	31-Aug-03	4.46
156	31-Dec-94	8.64	191	30-Nov-97	6.65	226	31-Oct-00	5.47	261	30-Sep-03	4.34
157	31-Jan-95	8.51	192	31-Dec-97	6.4	227	30-Nov-00	5.15	262	31-Oct-03	4.93
158	28-Feb-95	8.55	193	31-Jan-98	6.13	228	31-Dec-00	5.08	263	30-Nov-03	4.91
159	31-Mar-95	8.38	194	28-Feb-98	6.21	229	31-Jan-01	4.98	264	31-Dec-03	4.61
160	30-Apr-95	8.3	195	31-Mar-98	6.04	230	28-Feb-01	4.98	265	31-Jan-04	4.73
161	31-May-95	7.67	196	30-Apr-98	5.91	231	31-Mar-01	4.84	266	29-Feb-04	4.6
162	30-Jun-95	8.17	197	31-May-98	5.82	232	30-Apr-01	5.13	267	31-Mar-04	4.62
163	31-Jul-95	7.83	198	30-Jun-98	6.16	233	31-May-01	5.28	268	30-Apr-04	4.85
164	31-Aug-95	7.63	199	31-Jul-98	6.05	234	30-Jun-01	5.44	269	31-May-04	5.12
165	30-Sep-95	7.64	200	31-Aug-98	5.53	235	31-Jul-01	5.17	270	30-Jun-04	5.04
166	31-Oct-95	7.43	201	30-Sep-98	5.04	236	31-Aug-01	4.97	271	31-Jul-04	5.1
167	30-Nov-95	6.97	202	31-Oct-98	4.97	237	30-Sep-01	4.87	272	31-Aug-04	4.86
168	31-Dec-95	6.84	203	30-Nov-98	4.72	238	31-Oct-01	4.51	273	30-Sep-04	4.74
169	31-Jan-96	6.88	204	31-Dec-98	4.37	239	30-Nov-01	4.65	274	31-Oct-04	4.63
170	29-Feb-96	7.35	205	31-Jan-99	4.2	240	31-Dec-01	5.08	275	30-Nov-04	4.47
171	31-Mar-96	7.61	206	28-Feb-99	4.65	241	31-Jan-02	4.9	276	31-Dec-04	4.43
172	30-Apr-96	7.47	207	31-Mar-99	4.58	242	28-Feb-02	4.94	277	31-Jan-05	4.48
173	31-May-96	7.6	208	30-Apr-99	4.81	243	31-Mar-02	5.3	278	28-Feb-05	4.68
174	30-Jun-96	7.32	209	31-May-99	5.07	244	30-Apr-02	5.15	279	31-Mar-05	4.61
175	31-Jul-96	7.31	210	30-Jun-99	5.4	245	31-May-02	5.22	280	30-Apr-05	4.44

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
281	31-May-05	4.21	301	31-Jan-07	5.15	321	30-Sep-08	4.21	341	31-May-10	2.41
282	30-Jun-05	4.04	302	28-Feb-07	4.97	322	31-Oct-08	3.97	342	30-Jun-10	2.21
283	31-Jul-05	4.22	303	31-Mar-07	5.13	323	30-Nov-08	3.37	343	31-Jul-10	2.228
284	31-Aug-05	4.06	304	30-Apr-07	5.19	324	31-Dec-08	2.71	344	31-Aug-10	1.758
285	30-Sep-05	4.19	305	31-May-07	5.45	325	31-Jan-09	2.88	345	30-Sep-10	1.813

286	31-Oct-05	4.29	306	30-Jun-07	5.63	326	28-Feb-09	2.62	346	31-Oct-10	1.878
287	30-Nov-05	4.21	307	31-Jul-07	5.35	327	31-Mar-09	2.45	347	30-Nov-10	2.031
288	31-Dec-05	4.1	308	31-Aug-07	5.12	328	30-Apr-09	2.59	348	31-Dec-10	2.314
289	31-Jan-06	4.17	309	30-Sep-07	4.98	329	31-May-09	2.72	349	31-Jan-11	2.586
290	28-Feb-06	4.21	310	31-Oct-07	4.94	330	30-Jun-09	2.97	350	28-Feb-11	2.651
291	31-Mar-06	4.39	311	30-Nov-07	4.57	331	31-Jul-09	3.08			
292	30-Apr-06	4.61	312	31-Dec-07	4.41	332	31-Aug-09	2.69			
293	31-May-06	4.63	313	31-Jan-08	4.3	333	30-Sep-09	2.68			
294	30-Jun-06	4.74	314	29-Feb-08	4.2	334	31-Oct-09	2.77			
295	31-Jul-06	4.66	315	31-Mar-08	3.95	335	30-Nov-09	2.66			
296	31-Aug-06	4.63	316	30-Apr-08	4.44	336	31-Dec-09	2.98			
297	30-Sep-06	4.64	317	31-May-08	4.94	337	31-Jan-10	2.94			
298	31-Oct-06	4.7	318	30-Jun-08	5.17	338	28-Feb-10	2.78			
299	30-Nov-06	4.69	319	31-Jul-08	4.77	339	31-Mar-10	2.79			
300	31-Dec-06	4.91	320	31-Aug-08	4.41	340	30-Apr-10	2.75			

## Lampiran 4

Stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda.

```

1  %Uji Kestabilan Stokastik Asimtotik Model Brennan-Schwartz
2
3  - randn('state',100)
4  - gamma = -0.05; alfa = 0.02; beta = 0.1;
5  - T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N;
6  - dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
7  - W = cumsum(dW);
8  - r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
9  - r=r'/100;
10 - r(5)=0.2;
11 - rtaksiran = zeros(5,N);

12 - for i = 1:1:5
13 -     f = exp(-(gamma+beta^2/2)*dt+beta*(W(1)));
14 -     rtaksiran(i,1) = abs(r(i)*exp(-(gamma+beta^2/2)*dt+beta*W(1))...
15 -         +gamma*alfa*(dt/2)*(f+1));
16 -     for n = 2:1:N
17 -         t = n*dt;
18 -         htemp = 0;
19 -         g = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t)+beta*W(n));
20 -         for k = 1:1:n-1
21 -             u = k*dt;
22 -             h = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t-u)+beta*(W(n)-W(k)));
23 -             htemp = htemp+h;
24 -         end
25 -         rtemp = (dt/2)*(g+1+2*htemp);
26 -         rtaksiran(i,n) = abs(r(i)*exp(-(gamma+beta^2/2)*t+beta*W(n))...
27 -             +gamma*alfa*rtemp);
28 -     end
29 -     plot([0:dt:T],[abs(r(i)),rtaksiran(i,:)],'r-'), hold on
30 -     xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
31 -     ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0.1,0.9])
32 - end
33 - hold off

```

## Lampiran 5

Stabilitas stokastik asimtotik model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter yang berbeda-beda.

```

Editor - C:\MATLAB701\work\ParSBS.m*
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
% Uji Kestabilan Stokastik Asimtotik Model Brennan-Schwartz
1
2
3 - randn('state',100)
4 - gamma = [0.025 0.03 -0.02]; alfa = [0.02 0.025 0.03];
5 - beta = [0.03 0.02 0.025];
6 - T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N;
7 - dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
8 - W = cumsum(dW);
9 - r=xlswread('data.xlsx','A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
10 - r=r'/100;

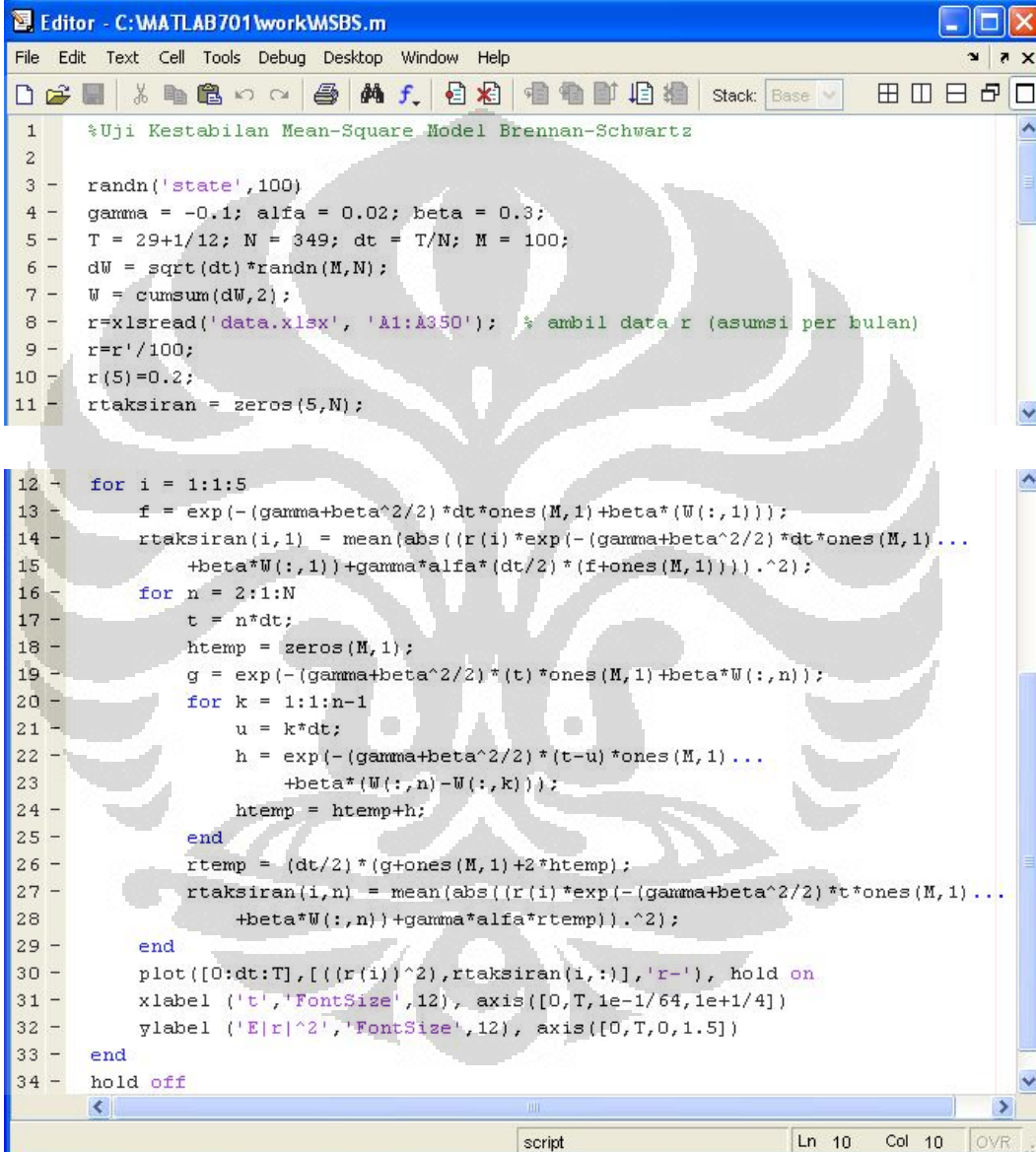
12 - rtaksiran = zeros(3,N);
13 - for i = 1:1:3
14 -     f = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*dt+beta(i)*W(1));
15 -     rtaksiran(i,1) = abs(r(1)*exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*dt+beta(i)*W(1))...
16 -         +gamma(i)*alfa(i)*(dt/2)*(f+1));
17 -     for n = 2:1:N
18 -         t = n*dt;
19 -         htemp = 0;
20 -         g = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*t+beta(i)*W(n));
21 -         for k = 1:1:n-1
22 -             u = k*dt;
23 -             h = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*(t-u)+beta(i)*(W(n)-W(k)));
24 -             htemp = htemp+h;
25 -         end
26 -         rtemp = (dt/2)*(g+1+2*htemp);
27 -         rtaksiran(i,n) = abs(r(1)*exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*t+beta(i)*W(n))...
28 -             +gamma(i)*alfa(i)*rtemp);
29 -     end
30 - end

30 - plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(1,:)],'r-'), hold on
31 - plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(2,:)],'m-'), hold on
32 - plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(3,:)],'b-'), hold on
33 - legend('gamma = 0.025; alfa = 0.02; beta = 0.03',...
34 -     'gamma = 0.03; alfa = 0.025; beta = 0.02',...
35 -     'gamma = -0.02; alfa = 0.03; beta = 0.025',2)
36 - xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
37 - ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0.08,0.25])
38 - hold off
script Ln 28 Col 8 OVR

```

## Lampiran 6

Stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz dengan nilai awal yang berbeda-beda.



```

1  %Uji Kestabilan Mean-Square Model Brennan-Schwartz
2
3  - randn('state',100)
4  - gamma = -0.1; alfa = 0.02; beta = 0.3;
5  - T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; M = 100;
6  - dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
7  - W = cumsum(dW,2);
8  - r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
9  - r=r'/100;
10 - r(5)=0.2;
11 - rtaksiran = zeros(5,N);

12 - for i = 1:1:5
13 -     f = exp(-(gamma+beta^2/2)*dt*ones(M,1)+beta*(W(:,1)));
14 -     rtaksiran(i,1) = mean(abs((r(i)*exp(-(gamma+beta^2/2)*dt*ones(M,1)...
15 -         +beta*W(:,1))+gamma*alfa*(dt/2)*(f+ones(M,1)))).^2);
16 -     for n = 2:1:N
17 -         t = n*dt;
18 -         htemp = zeros(M,1);
19 -         g = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t)*ones(M,1)+beta*W(:,n));
20 -         for k = 1:1:n-1
21 -             u = k*dt;
22 -             h = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t-u)*ones(M,1)...
23 -                 +beta*(W(:,n)-W(:,k)));
24 -             htemp = htemp+h;
25 -         end
26 -         rtemp = (dt/2)*(g+ones(M,1)+2*htemp);
27 -         rtaksiran(i,n) = mean(abs((r(i)*exp(-(gamma+beta^2/2)*t*ones(M,1)...
28 -             +beta*W(:,n))+gamma*alfa*rtemp)).^2);
29 -     end
30 -     plot([0:dt:T],[r(i)^2],rtaksiran(i,:), 'r-'), hold on
31 -     xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
32 -     ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,1.5])
33 - end
34 - hold off

```



## Lampiran 7

Stabilitas *mean-square* model Brennan-Schwartz dengan nilai parameter yang berbeda-beda.

```

Editor - C:\MATLAB701\work\ParMSBS.m*
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base

1 %Uji Kestabilan Mean-Square Model Brennan-Schwartz
2
3 - randn('state',100)
4 - gamma = [0.025 0.04 -0.02]; alfa = [0.02 0.025 0.03]; beta = [0.2 0.25 0.3];
5 - T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; M = 100;
6 - dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
7 - W = cumsum(dW,2);
8 - r=xlswread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
9 - r=r'/100;

11 - rtaksiran = zeros(3,N);
12 - for i = 1:1:3
13 -     f = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*dt*ones(M,1)+beta(i)*W(:,1));
14 -     rtaksiran(i,1) = mean(abs((r(1)*exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*dt*ones(M,1)...
15 -         +beta(i)*W(:,1)+gamma(i)*alfa(i)*(dt/2)*(f+ones(M,1))).^2);
16 -     for n = 2:1:N
17 -         t = n*dt;
18 -         htemp = zeros(M,1);
19 -         g = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*(t)*ones(M,1)+beta(i)*W(:,n));
20 -         for k = 1:1:n-1
21 -             u = k*dt;
22 -             h = exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*(t-u)*ones(M,1)...
23 -                 +beta(i)*(W(:,n)-W(:,k)));
24 -             htemp = htemp+h;
25 -         end
26 -         rtemp = (dt/2)*(g+ones(M,1)+2*htemp);
27 -         rtaksiran(i,n) = mean(abs((r(1)*exp(-(gamma(i)+beta(i)^2/2)*t*ones(M,1)...
28 -             +beta(i)*W(:,n)+gamma(i)*alfa(i)*rtemp).^2);
29 -     end
30 - end

31 - plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(1,:), 'r-'), hold on
32 - plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(2,:), 'm-'), hold on
33 - plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(3,:), 'b-'), hold on
34 - legend('gamma=0.025; alfa=0.02; beta=0.2',...
35 -     'gamma=0.04; alfa=0.025; beta=0.25',...
36 -     'gamma=-0.02; alfa=0.03; beta=0.3')
37 - xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
38 - ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,0.05])
39 - hold off

script Ln 27 Col 51 OVR

```



## Lampiran 8

Algoritma Nelder-Mead dalam menaksir parameter model Brennan-Schwartz dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*.

```

Editor - C:\MATLAB701\work\hixhix.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base

1 % Fungsi yang diuji adalah
2 % fungsi -ln(likelihood) dari model Brennan-Schwartz
3
4 % Algoritma Nelder-Mead memerlukan n+1 nilai awal
5
6 n=3; % jumlah variabel
7 X=[0.1 0.04 0.1; 0.09 0.04 0.08; 0.08 0.02 0.05; 0.1 0.01 0.05]; % nilai awal
8 r=xlswread('data.xlsx','A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
9 r=r/100;
10 N=size(r,1)-1; % 350 data r (N=349, karena ada r0)
11 T=29+1/12; % periode Januari 1982 - Februari 2011
12 Dt=T/N; % definisi interval data
13 TOL=10^(-10); % toleransi error

15 % Menghitung nilai fungsi tiap solusi
16
17 for i=1:n+1
18 Bank(i,1)=courtdon(X(i,:),r,Dt,N);
19 Bank(i,2:4)=X(i,:);
20 end
21
22 % Mengurutkan solusi dari tiap 3-tuple dengan menggunakan fungsi urutan
23
24 Bank=urutan(Bank);
25
26 % Aplikasi 5 rules
27 z=0;
28 while norm(Bank(1,2:4)-Bank(4,2:4))>=TOL
29 z=z+1;
30 if z==1000
31 break;
32 end
33 Xb=sum(Bank([1:n],[2:4]))/n;
34 Xr=2*Xb-Bank(n+1,2:4);
35 Fr=courtdon(Xr,r,Dt,N);

```

(lanjutan)

```

37 % Reflection Rule
38 - if (Fr>=Bank(1,1)) && (Fr<Bank(n,1))
39 -     Bank(n+1,:)=[Fr Xr];
40 -     % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
41 -     Bank=urutan(Bank);
42 -     continue;
43 - end;
44
45 % Expansion Rule
46 - if Fr<Bank(1,1)
47 -     Xe=2*Xr-Xb;
48 -     Fe=courtadon(Xe,r,Dt,N);
49
50 -     if Fe<Fr
51 -         Bank(n+1,:)=[Fe Xe];
52 -         % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
53 -         Bank=urutan(Bank);
54 -         continue;
55 -     end
56 - end

58 % Outside Contraction Rule
59 - if (Fr>=Bank(n,1)) && (Fr<Bank(n+1,1))
60 -     Xo=(Xr+Xb)/2;
61 -     Fo=courtadon(Xo,r,Dt,N);
62
63 -     if Fo<=Fr
64 -         Bank(n+1,:)=[Fo Xo];
65 -         % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
66 -         Bank=urutan(Bank);
67 -         continue;
68 -     else
69 -         % Shrink Step
70 -         for i=2:1:n+1
71 -             Bank(i,[2:4])=Bank(1,[2:4])+(Bank(i,[2:4])-Bank(1,[2:4]))/2);
72 -             Bank(i,1)=courtadon(Bank(i,[2:4]),r,Dt,N);
73 -         end
74 -         % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
75 -         Bank=urutan(Bank);
76 -         continue;
77 -     end
78 - end

```

(lanjutan)

```

80     % Inside Contraction Rule
81     if Fr>=Bank(n+1,1)
82         Xi=(Xb+Bank(n+1,[2:4]))/2;
83         Fi=courtadon(Xi,r,Dt,N);
84
85         if Fi<Bank(n+1,1)
86             Bank(n+1,:)=[Fi Xi];
87             % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
88             Bank=urutan(Bank);
89             continue;
90         else
91             % Shrink Step
92             for i=2:1:n+1
93                 Bank(i,[2:4])=Bank(1,[2:4])+((Bank(i,[2:4])-Bank(1,[2:4]))/2);
94                 Bank(i,1)=courtadon(Bank(i,[2:4]),r,Dt,N);
95             end
96             % Proses mengurutkan urutan nilai fungsi
97             Bank=urutan(Bank);
98             continue;
99         end
100     end
101 end
102 Bank(:,2:4)
103 Bank(:,1)

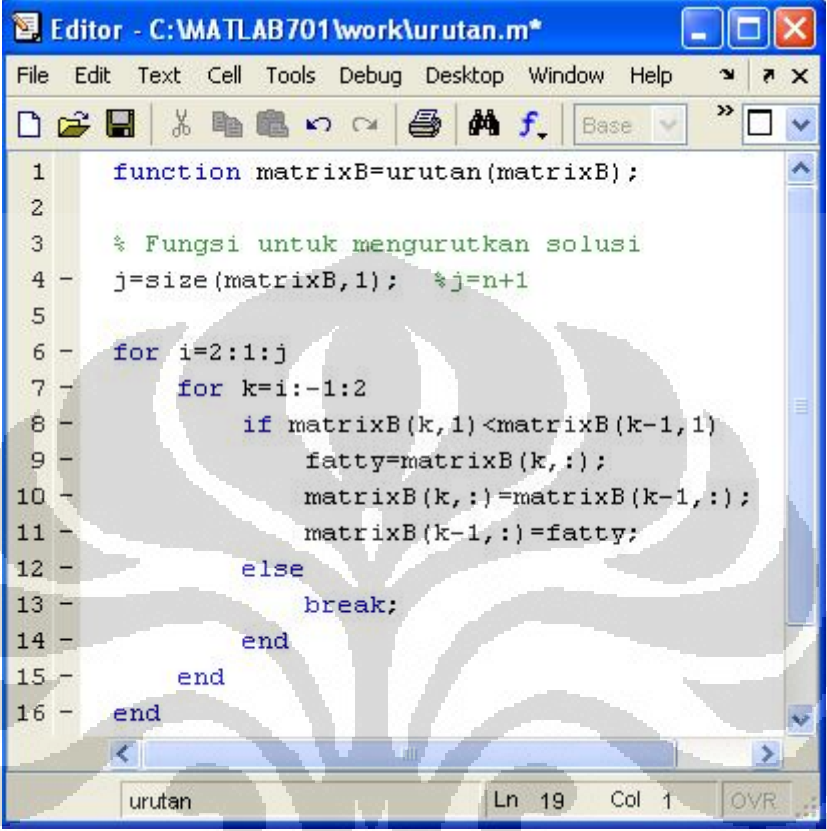
```

```

Editor - C:\MATLAB701\work\courtadon.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1 function [f] = courtadon(X, r, Dt, N)
2
3 % Asumsi: -ln(f0(r0|gamma, alfa, beta))=-1
4
5 f = 0;
6 for k=2:1:N+1
7     fatty = ((r(k)-(r(k-1)+X(1)*(X(2)-r(k-1))*Dt))/(2*((X(3))^2)*((r(k-1))^2)*Dt))...
8             +log(X(3)*r(k-1)*sqrt(2*pi*Dt));
9     f=f+fatty;
10 end
11 f=-1+f;

```

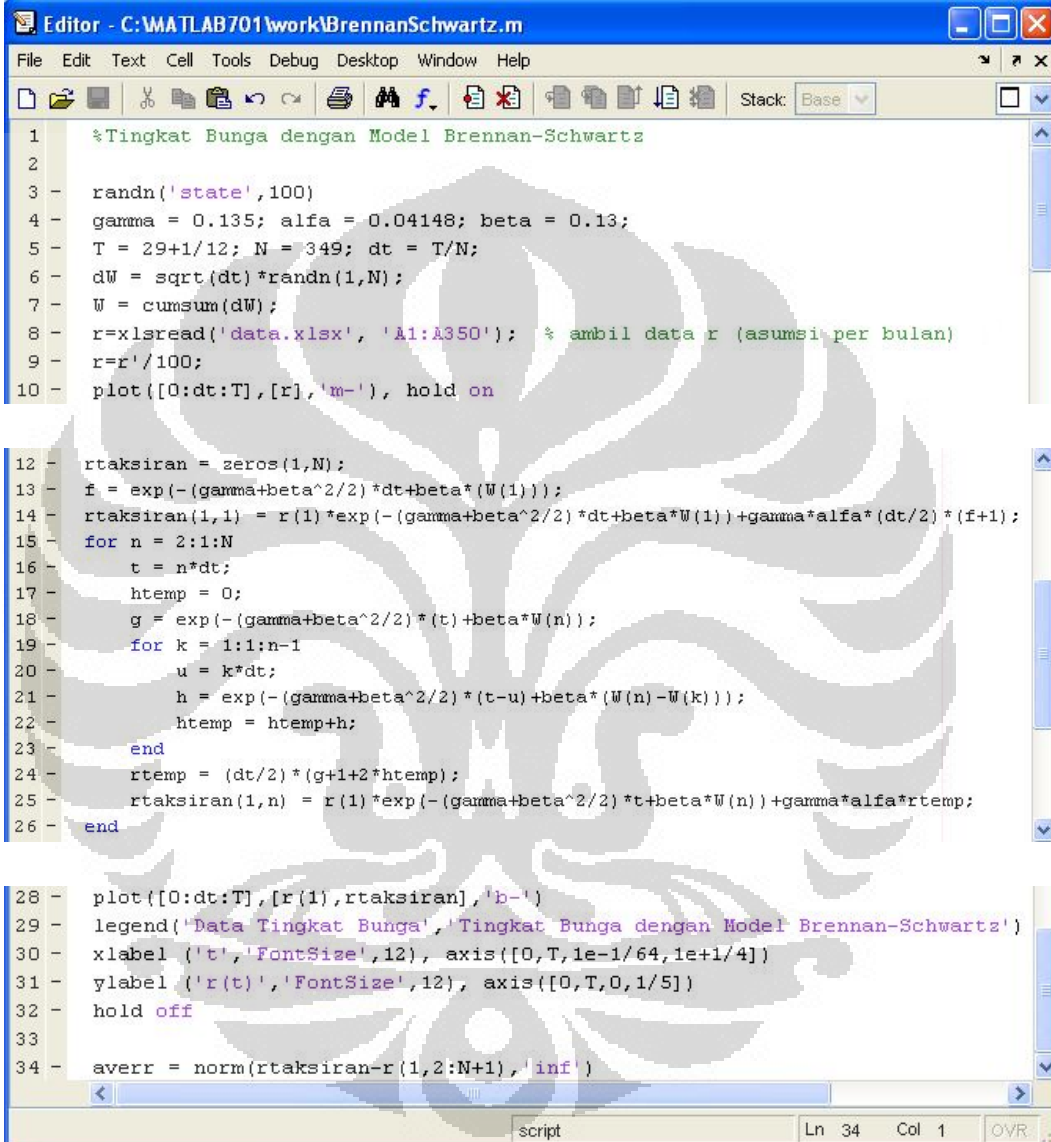
(lanjutan)



```
Editor - C:\MATLAB701\work\urutan.m*
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function matrixB=urutan(matrixB);
2
3 % Fungsi untuk mengurutkan solusi
4 j=size(matrixB,1); %j=n+1
5
6 for i=2:1:j
7     for k=i:-1:2
8         if matrixB(k,1)<matrixB(k-1,1)
9             fatty=matrixB(k,:);
10            matrixB(k,:)=matrixB(k-1,:);
11            matrixB(k-1,:)=fatty;
12        else
13            break;
14        end
15    end
16 end
urutan Ln 19 Col 1 OVR
```

## Lampiran 9

Pergerakan tingkat bunga dengan model Brennan-Schwartz.



```

1  %Tingkat Bunga dengan Model Brennan-Schwartz
2
3  - randn('state',100)
4  - gamma = 0.135; alfa = 0.04148; beta = 0.13;
5  - T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N;
6  - dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
7  - W = cumsum(dW);
8  - r=xlswread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per bulan)
9  - r=r'/100;
10 - plot([0:dt:T],[r], 'm-'), hold on
11
12 - rtaksiran = zeros(1,N);
13 - f = exp(-(gamma+beta^2/2)*dt+beta*(W(1)));
14 - rtaksiran(1,1) = r(1)*exp(-(gamma+beta^2/2)*dt+beta*W(1))+gamma*alfa*(dt/2)*(f+1);
15 - for n = 2:1:N
16 -     t = n*dt;
17 -     htemp = 0;
18 -     g = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t)+beta*W(n));
19 -     for k = 1:1:n-1
20 -         u = k*dt;
21 -         h = exp(-(gamma+beta^2/2)*(t-u)+beta*(W(n)-W(k)));
22 -         htemp = htemp+h;
23 -     end
24 -     rtemp = (dt/2)*(g+1+2*htemp);
25 -     rtaksiran(1,n) = r(1)*exp(-(gamma+beta^2/2)*t+beta*W(n))+gamma*alfa*rtemp;
26 - end
27
28 - plot([0:dt:T],[r(1),rtaksiran], 'b-')
29 - legend('Data Tingkat Bunga','Tingkat Bunga dengan Model Brennan-Schwartz')
30 - xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
31 - ylabel('r(t)','FontSize',12), axis([0,T,0,1/5])
32 - hold off
33
34 - averr = norm(rtaksiran-r(1,2:N+1), 'inf')

```