



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**MODIFIKASI NILAI AKAR PADA MODEL DINAMO KINEMATIKA  
PEKERIS-ACCAD-SKHOLLER**

**TESIS**

**NOLA MARINA**

**0906495394**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
DEPOK  
DESEMBER 2010**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**MODIFIKASI NILAI AKAR PADA MODEL DINAMO KINEMATIKA  
PEKERIS-ACCAD-SKHOLLER**

**TESIS**

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

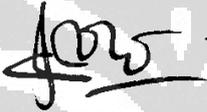
**NOLA MARINA**

**0906495394**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
DEPOK  
DESEMBER 2010**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Nola Marina  
NPM : 0906495394  
Tanda Tangan :   
Tanggal : 29 Desember 2010

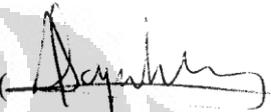
## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh

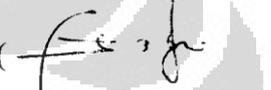
Nama : Nola Marina  
NPM : 0906495394  
Judul Tesis : Modifikasi Nilai Akar Pada Model Dinamo  
Kinematika Pekeris-Accad-Skholler

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

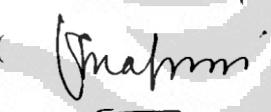
### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Al Haji Akbar Bachtiar, M.Sc (  )

Pembimbing : Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech (  )

Penguji : Dr.rer.nat Hendri Murfi, M.Kom (  )

Penguji : Prof. Dr.Djati Kerami (  )

Penguji : Bevina D Handari, PhD (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 29 Desember 2010

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah rabbil ‘alamiin. Puji syukur hanya kepada ALLAH SWT, Yang Maha Pengasih, sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam kerinduan kepada sebaik-baik teladan Rasulullah SAW.

Selesainya tesis ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan, dan do’a yang tulus dari banyak pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Al Haji Akbar Bachtiar, M.Sc dan Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku dosen pembimbing tesis penulis yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan pengarahan, diskusi dan bimbingan serta persetujuan sehingga tesis ini dapat selesai dengan baik. Terimakasih juga untuk dosen-dosen penguji dan seluruh dosen beserta karyawan departemen Matematika atas segala ilmu dan bantuan yang penulis peroleh selama menjadi mahasiswa magister matematika UI.

Terkhusus untuk suami tercinta, Muhammad Ridwan, yang siap sedia memberikan bantuan dan dukungan maksimalnya sehingga penulis bisa melewati masa-masa tesis dengan baik. Penuh takzim untuk kedua orangtua dan mertua penulis atas dukungan dan do’a tiada henti yang kalian berikan. Juga kepada keluarga besar penulis yang selalu memotivasi penulis.

Terakhir, terimakasih untuk saudari “melingkar” dan teman seperjuangan magister matematika 2009 yang telah memberi warna indah pada perjalanan hidup penulis di kampus UI ini.

Semoga tesis ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat.

Depok, 29 Desember 2010

Nola Marina

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nola Marina

NPM : 0906495394

Program Studi : Magister Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Modifikasi Nilai Akar Pada Model Dinamo Kinematika Pekeris-Accad-Skholler.

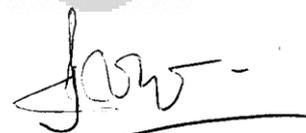
Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal: 29 Desember 2010

Yang menyatakan



(NOLA MARINA)

## ABSTRAK

Nama : Nola Marina  
Program studi : Matematika  
Judul : Modifikasi Nilai Akar pada Model Dinamo Kinematika Pekeris-  
Accad- Shkoller

Telah diketahui bahwa bumi memiliki medan magnet yang dihasilkan oleh proses *self-excited dynamo*. Model dinamo kinematika dapat menggambarkan bagaimana suatu *self-excited dynamo* dibangkitkan dari interaksi antara aliran fluida dengan medan magnet. Namun, terdapat satu teorema anti dinamo yang mengatakan bahwa aliran yang planar tidak dapat menghasilkan medan magnet, yang dikenal dengan Teorema Aliran Planar (TAP) yang diberikan oleh Zel'dovich (1957).

Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2006) telah membuktikan bahwa bukti untuk TAP tidak berlaku untuk ruang konduktor dengan volume hingga. Mereka berhasil menemukan satu model numerik yang mengindikasikan kemungkinan adanya suatu model dinamo kinematika yang memiliki aliran planar. Namun, hasil pengujian numeriknya hanya memiliki konvergensi sekitar 10 %.

Penelitian ini adalah kelanjutan dari penelitian Bachtiar (2009) yang mencoba menemukan model dinamo kinematika baru yang dapat diplanarkan, untuk mendukung hasil BIJ. Salah satunya adalah model quasiPAS yang diperoleh dengan cara memodifikasi nilai akar yang digunakan pada model dinamo kinematika Pekeris, Accad, Shkoller (PAS). Penulis melakukan pengujian numerik terhadap model quasiPAS dengan menggunakan 36 model yang berbeda.

Kata kunci : dinamo kinematika, dinamo aliran planar, *self-excited dynamo*.

## ABSTRACT

Name : Nola Marina

Study Program: Mathematics

Title : Modifying of Root in Pekeris-Accad-Skholler Kinematic  
Dynamo Model.

Modifying the Root in the Kinematic Dynamo Model Pekeris, Accad, Shkoller.

It is known that the Earth has magnetic field that is generated by self-excited dynamo process. Kinematic dynamo model describes how a self-excited dynamo generated from the interaction between the conducting fluids and magnetic field. However, there is an anti-dynamo theorem which says that a planar flow can not maintain magnetic field, known as Planar Velocity Theorem (PVT) that was given by Zel'dovich (1957).

Bachtiar, Ivers and James (BIJ, 2006) has shown that Zel'dovich's proof for PVT does not apply when the conducting fluids occupies a finite volume. They found a numerical model which indicate that there is a kinematic dynamo model with planar flow. However, their numerical results have only about 10% of convergency level.

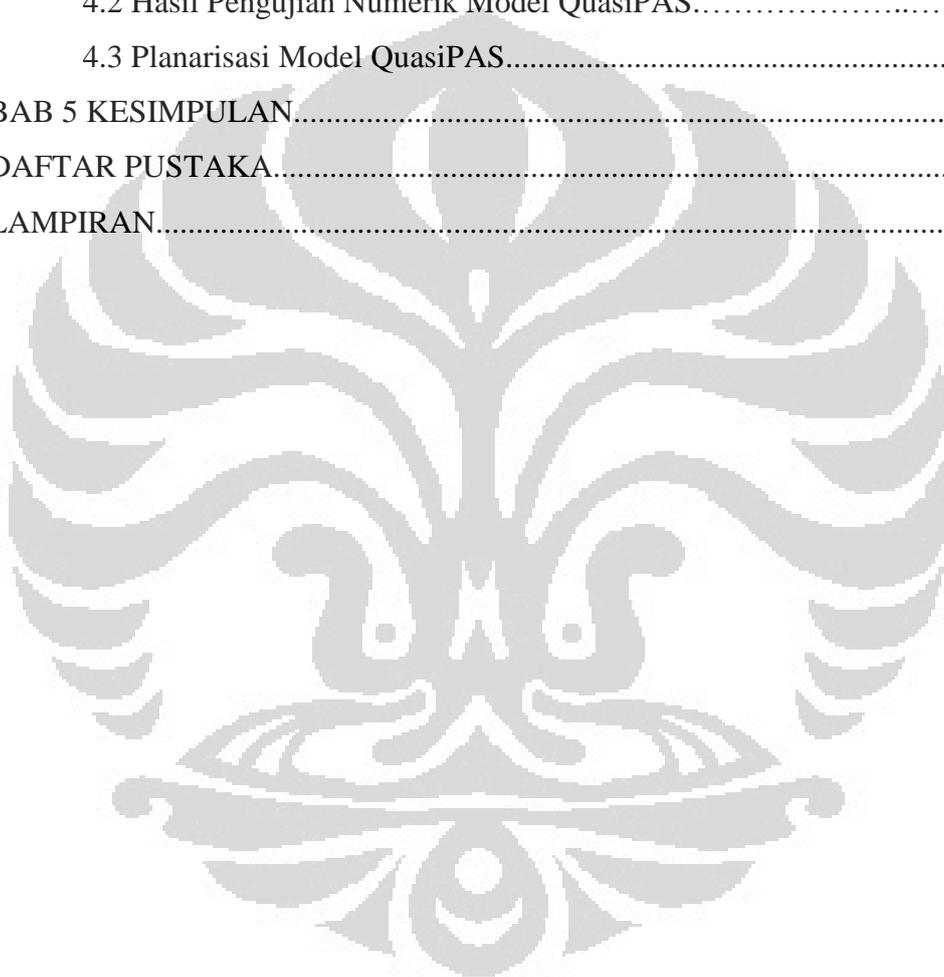
This thesis is continuation of Bachtiar's research (2009) who tried to obtain a new kinematic dynamo models that can be planarized, to support the result of BIJ . One is quasiPAS models which obtained by modifying the root used in the kinematic dynamo model Pekeris, Accad, Shkoller (PAS). The author performed a numerical test of quasiPAS model with 36 different models.

Keywords: kinematic dynamo, planar velocity dynamo, self-excited dynamo.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH .....	vi
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Permasalahan.....	2
1.3 Tujuan.....	3
1.4 Batasan Masalah.....	3
1.5 Metode Penyelesaian masalah.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB 2 LANDASAN TEORI.....	5
2.1 Inti Bumi.....	5
2.2 Medan Magnet Bumi .....	6
2.3 Teori Dinamo.....	7
2.4 <i>Magnetohydrodynamic</i> .....	9
2.5 Teori Dinamo Kinematika.....	10
2.5.1 Bentuk Spektral dari Persamaan Induksi Magnet .....	13
2.5.2 Metode Numerik.....	15
2.5.3 Aturan Pemilihan untuk Pembentukan Rantai Magnet.....	18
2.5.4 Kondisi Diferensiabilitas.....	20
BAB 3 DINAMO ALIRAN PLANAR.....	21
3.1 Sejarah Teorema Anti Dinamo.....	21

3.2 Teorema Aliran Planar. ....	22
3.3 Hasil Penelitian BIJ.....	23
3.4 Model Dinamo Aliran Planar.....	24
3.5 Model Pekeris-Accad-Skholler.....	29
3.6 Planarisasi Model PAS.....	30
<b>BAB 4 MODIFIKASI MODEL PAS.....</b>	<b>32</b>
4.1 Model QuasiPAS.....	32
4.2 Hasil Pengujian Numerik Model QuasiPAS.....	33
4.3 Planarisasi Model QuasiPAS.....	45
<b>BAB 5 KESIMPULAN.....</b>	<b>48</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>49</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>50</b>



## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Kombinasi $\Lambda_i \Gamma_k$ dengan $i = 1, 2, \dots, 6$ dengan $k = 1, 2, \dots, 6$ .....	33
Tabel 4.2	$\lambda_{max}$ untuk model quasiPAS yang berhasil untuk semua kombinasi $\Lambda_i \Gamma_k$ yang diuji, dengan rantai magnet M12.....	35
Tabel 4.3	Contoh model quasiPAS yang menghasilkan $\lambda_{max}$ positif namun tidak konvergen, dengan rantai magnet M12.....	35
Tabel 4.4	Contoh model quasiPAS yang tidak menghasilkan $\lambda_{max}$ positif, dengan rantai magnet M12.....	36
Tabel 4.5	Nilai mutlak maksimum untuk bagian $s_2^2 = K \Lambda_{ij_2}(\Lambda_i r)$ dan $t_2^2 = K \Lambda_{ij_2}(\Gamma_k r)$ dari model quasiPAS.....	37

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1.	Grafik $s_2^2 = K\Lambda_{ij_2}(\Lambda_i r)$ untuk $i = 1,2,3$ .....	38
Gambar 4.2.	Grafik $s_2^2 = K\Lambda_{ij_2}(\Lambda_i r)$ untuk $i = 4,5,6$ .....	41
Gambar 4.3.	Grafik $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$ untuk $\Lambda_1\Gamma_1, \Lambda_2\Gamma_1$ , dan $\Lambda_3\Gamma_2$ .....	42
Gambar 4.4.	Grafik $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$ untuk $\Lambda_2\Gamma_4, \Lambda_3\Gamma_4$ , dan $\Lambda_5\Gamma_5$ .....	43
Gambar 4.5.	Grafik $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$ untuk $\Lambda_1\Gamma_4, \Lambda_1\Gamma_5$ , dan $\Lambda_1\Gamma_6$ .....	44



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Medan magnet bumi sudah diyakini dengan pasti keberadaannya oleh banyak orang. Namun, hampir semua peneliti di bidang medan magnet bumi meyakini bahwa tidak mungkin ada sebuah magnet besar yang permanen dalam inti bumi. Mereka meyakini bahwa inti bumi memiliki medan magnet yang dihasilkan oleh suatu aksi dinamo oleh dirinya sendiri atau lebih dikenal dengan proses *self-excited dynamo* yang diperkenalkan oleh Larmor (1919). Proses ini dapat menggambarkan bagaimana medan magnet dibangkitkan oleh aliran fluida yang bergerak secara konstan pada bagian inti luar bumi. Aliran fluida yang berfungsi sebagai konduktor ini berinteraksi dengan medan magnet awal yang ada di dalam bumi mengakibatkan terjadinya proses dinamo yang terus menerus, sehingga menjamin keberadaan medan magnet bumi.

Model yang dapat membangkitkan *self-excited dynamo* disebut model *self-excited dynamo*. Hingga saat ini, model *self-excited dynamo* yang dianggap paling baik untuk menggambarkan bagaimana medan magnet bumi dihasilkan adalah *magnetohydrodynamics* (MHD) karena model ini memiliki karakteristik yang sama dengan inti bumi. Dalam model MHD, terdapat persamaan-persamaan yang harus diselesaikan secara simultan, yaitu persamaan induksi magnet, persamaan *navier-stokes*, persamaan konservasi massa, persamaan *poisson*, persamaan panas, dan persamaan keadaan. Untuk menyelesaikannya dibutuhkan analisis matematika tingkat tinggi dan perhitungan yang kompleks.

Salah satu bagian dari model MHD yang hanya menyelesaikan persamaan induksi magnet dengan model aliran yang ditentukan, disebut masalah dinamo kinematika. Suatu model dapat dikatakan model dinamo kinematika jika penyelesaian masalah dinamo kinematika yang diberikan oleh model tersebut dapat menghasilkan medan magnet yang berkembang.

Berbagai penelitian telah dilakukan untuk membangun model yang dapat membangkitkan *self-excited dynamo*. Namun, terdapat juga penelitian yang

menemukan kondisi-kondisi dimana *self-excited dynamo* tidak dapat dibangkitkan, yang dikenal dengan Teorema Anti Dinamo. Salah satunya adalah Teorema Aliran Planar (TAP) yang diperkenalkan oleh Zel'dovich (1957). Dalam teorema ini dikatakan bahwa, jika aliran bersifat planar atau sejajar dengan suatu bidang, maka aliran tersebut tidak dapat menghasilkan medan magnet.

Namun, Zel'dovich hanya membuktikan bahwa TAP berlaku untuk konduktor dengan volume tak hingga. Sampai saat ini, belum ada penelitian yang berhasil membuktikan secara analitik bahwa TAP juga berlaku untuk konduktor dengan volume hingga.

Dalam penelitian Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2006), mereka berhasil menemukan bahwa tidak mungkin melakukan pembuktian analitik terhadap TAP untuk konduktor dengan volume hingga. Untuk itu, BIJ melakukan penelitian secara numerik dan menemukan satu model dinamo aliran planar (model yang memiliki aliran planar, tetapi dapat menghasilkan medan magnet yang berkembang atau model dinamo kinematika). Penemuan model ini menjadi bukti bahwa TAP tidak berlaku untuk konduktor dengan volume hingga, sehingga dinamo aliran planar terbukti keberadaannya. Namun, hasil pengujiannya hanya memiliki konvergensi sekitar 10 %. Untuk itu, penelitian mereka kemudian dilanjutkan oleh Bachtiar dan James (BAJ, 2010), dengan melakukan pengujian terhadap model yang sama. BAJ menemukan hasil pengujian yang memiliki tingkat konvergensi 5 %, lebih baik dari hasil BIJ.

Untuk memperkuat penemuannya tentang keberadaan dinamo aliran planar, BIJ juga mencoba melakukan pengujian terhadap model dinamo kinematika yang diberikan oleh Pekeris, Accad, Shkoller (PAS, 1973), yang dikenal dengan model PAS. Model PAS memiliki aliran yang tidak planar, namun diharapkan dapat membentuk model dinamo aliran planar dengan cara melakukan planarisasi terhadap model PAS. Ternyata BIJ menemukan bahwa model PAS tidak dapat diplanarkan. Kemudian penelitian mereka dilanjutkan oleh Bachtiar (2009) yang mencoba melakukan modifikasi terhadap model PAS untuk mendapatkan model dinamo kinematika baru yang mungkin untuk dijadikan planar, dengan harapan ditemukannya model dinamo aliran planar yang baru.

Modifikasi terhadap model PAS dilakukan berdasarkan penyebab model PAS tersebut tidak dapat diplanarkan. Model PAS dapat dinyatakan dalam bentuk dua bagian, yaitu poloidal dan toroidal. Kedua bagian ini mengandung fungsi  $j_2(\Lambda_i r)$ , dengan  $j_2$  adalah fungsi *spherical bessel* orde dua dan  $\Lambda_i$  adalah nilai akar dari  $j_2$ . Model PAS tidak bisa diplanarkan pada bagian toroidal saja, sehingga dengan alasan ini Bachtiar melakukan modifikasi dengan cara mengganti bentuk fungsi yang digunakan pada bagian toroidal model PAS menjadi  $j_2(\Gamma_k r)$ , dengan  $\Gamma_k$  adalah nilai akar dari  $j_3$  (fungsi *spherical bessel* orde tiga), sehingga didapatkan model baru yang dapat diplanarkan. Model ini dinamakan model quasiPAS.

Penulis melanjutkan penelitian Bachtiar untuk mendukung bahwa model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru, dengan membuat subrutin untuk model quasiPAS dalam pemograman fortran 95 dan melakukan pengujian terhadap 36 model, termasuk 9 model yang sudah pernah diuji oleh Bachtiar.

## 1.2 Permasalahan

Apakah model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika baru yang dapat diplanarkan?

## 1.3 Tujuan

Menunjukkan bahwa model quasiPAS adalah model dinamo kinematika baru yang dapat diplanarkan.

## 1.4 Batasan Masalah

Batasan dalam penelitian ini adalah:

1. Penelitian ini sampai melakukan pengujian numerik terhadap model quasiPAS dan mendapatkan model planar dari model quasiPAS. Pengujian terhadap model planarnya tidak termasuk dalam penelitian ini.

2. Pengujian numerik terhadap model quasiPAS dilakukan dengan menggunakan 6 akar positif pertama dari fungsi *spherical bessel*  $j_2$  dan  $j_3$  dalam model alirannya.

### 1.5 Metode Penyelesaian Masalah

Pengujian dalam penelitian ini menggunakan metode numerik yang diimplementasi dalam bahasa pemrograman FORTRAN 95, melanjutkan program yang dimodifikasi oleh Bachtiar dengan membuat subrutin untuk model quasiPAS.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Pada BAB 2, penulis menjelaskan dasar teori dari penelitian yang dilakukan, yaitu inti bumi, medan magnet bumi, *magnetohydrodynamics*, teori dinamo kinematika, persamaan induksi, dan metode numerik yang digunakan dalam pengujian. BAB 3 membahas tentang sejarah teori anti dinamo, Teorema Aliran Planar, model dinamo aliran planar, model PAS dan planarisasinya. Pada BAB 4 terdapat penjelasan bagaimana memodifikasi model PAS agar dapat diplanarkan, kemudian dilakukan pengujian numerik untuk model quasiPAS dan planarisasi model quasiPAS. Kesimpulan dan saran dari hasil penelitian ini diberikan pada BAB 5.

## **BAB 2**

### **LANDASAN TEORI**

#### 2.1 Inti Bumi

Apa yang sebenarnya terjadi dalam inti bumi hingga saat ini masih tidak diketahui. Berdasarkan Carrigan dan Gubbins (1979), inti bumi memiliki panas dan tekanan yang sangat tinggi sehingga tidak mungkin ada yang dapat pergi ke dalam inti bumi secara langsung. Hanya sedikit yang dapat diketahui tentang inti bumi. Perkembangan teknologi seismologi baru mampu membuat detektor gelombang seismik atau gempa bumi untuk memprediksi isi bumi dan apa yang terjadi di dalamnya.

Data seismologi mengindikasikan bahwa inti bumi terdiri dari bola logam yang sangat besar seukuran planet mars. Struktur dalam bumi dibagi berdasarkan gelombang gempa bumi yang menunjukkan perbedaan fisik masing-masing. Berdasarkan data gelombang gempa bumi, bumi terdiri dari tiga lapisan utama yang mempunyai komposisi yang berbeda-beda, yaitu inti, selubung, dan kerak. Inti bumi mempunyai volume seperenam dari volume bumi dan mempunyai massa sepertiga dari massa bumi. Dari perkiraan kepadatan dan hipotesis tentang asal sistem matahari, diperkirakan bahwa hampir semua bagian inti bumi terdiri dari besi dan nikel dengan sedikit bahan ringan yang lain, seperti tembaga, belerang, dan oksigen. Inti bumi terbagi menjadi dua, yaitu inti dalam bumi dan inti luar bumi, di mana inti luar bumi membungkus inti dalam bumi (Carrigan dan Gubbins, 1979).

Kedalaman inti luar bumi sekitar 2891 km dan kedalaman inti dalam bumi sekitar 5049 km. Semakin ke dalam mendekati pusat bumi, suhu bumi semakin tinggi. Suhu dari batas selubung hingga inti bumi berkisar antara  $4000 \pm 1000^{\circ}\text{C}$ . Inti luar bumi memiliki kekentalan lebih rendah sehingga sifatnya lebih cair dan mudah bergerak dibandingkan dengan inti dalam bumi yang berupa materi padat. Inti luar bumi mempunyai komposisi logam besi dan nikel yang diperkirakan berupa fluida yang kental dan panas berpijar (Merrill, McElhinny, McFadden, 1998).

Fluida dalam inti luar bumi diapit oleh dua materi padat, yaitu selubung dan inti dalam bumi. Dalam kondisi normal, fluida ini menghantarkan panas dan listrik dengan lebih baik daripada tembaga dan kemungkinan fluida tersebut memiliki kekentalan yang sama dengan air (Carrigan dan Gubbins, 1979).

Berdasarkan pendekatan teori dan laborator, terjadinya gerakan fluida dalam inti luar bumi mungkin diakibatkan oleh rotasi bumi dan energi grafitasi yang dilepaskan oleh perpindahan material berat ke tengah inti bumi dan perpindahan material ringan ke bagian inti luar bumi. Hal ini menyebabkan terjadinya arus perputaran fluida pada bagian inti luar bumi. Diperkirakan bahwa fluida dalam inti luar bumi bergerak dengan kecepatan sekitar satu milimeter per detik atau 100 yard per hari (Carrigan dan Gubbins, 1979).

## 2.2 Medan Magnet Bumi

Secara umum dipercaya bahwa medan magnet bumi telah ada sekitar 2,7 miliar tahun yang lalu. Dalam bukunya *De Magnete* pada tahun 1600, William Gilbert melakukan percobaan dengan menggunakan bola yang terbuat dari magnet dan mengamati perilaku medan magnet di permukaannya. Gilbert menyimpulkan bahwa bumi itu sendiri merupakan magnet besar dan meyakini bahwa ada sebuah magnet permanen di dalam bumi.

Adanya medan magnet bumi telah diketahui bertahun-tahun sebelum adanya buku *De Magnete*. Penelitian tentang medan magnet bumi telah dimulai oleh filsuf Yunani, Thales, pada abad ke-6 sebelum masehi. Kemudian diikuti oleh literatur Cina antara abad ke-3 dan ke-6 sebelum masehi. Bangsa Cina ternyata sudah menggunakan kompas yang memanfaatkan arah medan magnet bumi sejak awal abad ke-12 masehi (Bachtiar, 2009).

Paleomagnetisme adalah suatu studi tentang asal medan magnet bumi yang berdasarkan pada penelitian terhadap arah magnet dari batu yang terbentuk oleh lava. Pada penelitiannya, Bachtiar (2009) menyebutkan bahwa studi paleomagnetisme diperkenalkan oleh David (1904), kemudian diikuti oleh Brunches (1906). Mereka menemukan bahwa arah magnet dalam aliran lava berbeda dengan arah medan magnet yang diketahui. Hasil penemuan mereka

dikuatkan oleh Matuyama pada tahun 1929 yang menemukan lebih dari 100 aliran lava dan menemukan fenomena yang sama. Namun, pada tahun 1955 Néel mengusulkan teori *self-reversal* pada batu untuk menguatkan keraguan tentang adanya sifat *reversal* pada medan magnet bumi. Sebaliknya, pada tahun 1962, Wilson melakukan penelitian terhadap arah medan magnet yang dihasilkan dari pembakaran dua arah pada bebatuan. Dia menyimpulkan bahwa hasil penelitiannya akan bisa dijelaskan hanya jika medan magnet bumi memiliki sifat *reversal*.

Dengan perkembangan penelitian medan magnet bumi ini, para peneliti meyakini bahwa tidak mungkin ada magnet besar yang permanen di dalam bumi karena material magnet mana pun tidak akan dapat mempertahankan kemagnetannya dengan kondisi inti bumi yang memiliki panas dan tekanan yang sangat tinggi. Sir Joseph Larmor (1919) adalah yang pertama kali memperkenalkan bahwa adanya medan magnet yang dimiliki oleh objek astronomi yang besar, seperti matahari, kemungkinan karena dibangkitkan oleh suatu aksi dinamo oleh dirinya sendiri atau lebih dikenal dengan proses *self-excited dynamo* (Bachtiar, 2009). Dan telah diyakini secara umum bahwa interaksi antara arus perputaran fluida di dalam inti luar bumi dengan medan magnet awal di dalam bumi dapat membangkitkan arus listrik dan akhirnya menghasilkan proses *self-excited dynamo*.

### 2.3 Teori Dinamo

Dinamo adalah suatu sistem yang mengubah energi gerak menjadi energi elektromagnetik. Dinamo menggunakan gerak dari konduktor listrik yang melewati medan magnet untuk menghasilkan arus listrik. Arus listrik yang dihasilkan akan menyebabkan medan magnet yang ada menjadi lebih besar. Proses ini berlangsung terus selama ada suplai energi.

*Self-excited dynamo* adalah suatu sistem yang bersumber dari dalam objek, yang dibutuhkan untuk membangkitkan dinamo dari medan magnet awal yang kecil dan kemudian menghasilkan dinamo secara terus menerus.

Untuk dapat membangkitkan dan menghasilkan medan magnet terus menerus, *self-excited dynamo* memiliki syarat:

1. memiliki medan magnet awal yang kecil,
2. adanya pergerakan konduktor listrik,
3. adanya interaksi antara medan magnet dan konduktor listrik,
4. suplai energi yang kontinu untuk menjalankan konduktor listrik dengan cukup cepat sehingga memungkinkan terjadinya *self-excited dynamo*.

(Tauxe, 2010).

Kebanyakan medan magnet alam dihasilkan oleh proses *self-excited dynamo*, termasuk medan magnet bumi. Contoh lainnya adalah medan magnet galaksi dan medan magnet matahari. Selain itu, terdapat juga proses *self-excited dynamo* non-alam, di antaranya adalah *disk dynamo*, *stretch twist fold dynamo*, dan lain-lain. Semua model dinamo ini dapat membangkitkan medan magnet, tetapi kurang akurat untuk menggambarkan dinamo dalam inti bumi.

Berikut ini dijelaskan tentang proses *self-excited dynamo* dalam inti bumi. Secara teoritis telah diketahui bahwa pada inti luar bumi terdapat fluida yang bergerak, tersusun dari dua materi yang dikenal sebagai konduktor yang sangat baik, yaitu besi dan nikel. Fluida ini berfungsi sebagai konduktor dalam proses *self-excited dynamo* bumi. Pada awalnya terdapat pula sumber medan magnet yang sangat kecil di dalam inti bumi. Medan magnet awal ini berinteraksi dengan pergerakan fluida dalam inti luar bumi sehingga menghasilkan arus listrik. Kemudian, arus listrik ini meningkatkan medan magnet yang sudah ada menjadi semakin kuat. Adanya rotasi dan gaya gravitasi bumi menyebabkan inti bumi memiliki suplai energi yang cukup untuk menggerakkan fluida dalam inti luar bumi. Dengan demikian, interaksi antara pergerakan fluida dan medan magnet akan terjadi terus menerus sehingga menjamin bahwa medan magnet bumi tetap ada.

Medan magnet bumi dapat mempengaruhi arah aliran fluida sehingga mengurangi efek dinamo. Sebagaimana telah dijelaskan pada Subbab 2.2, medan magnet bumi diyakini memiliki sifat *reversal*, yaitu suatu sifat yang dapat menyebabkan medan magnet bumi berbalik arah. Dengan sifat ini, terjadi pertukaran kutub (arah masuk dan arah keluar medan magnet) yang menyebabkan

medan magnet bumi berbalik arah. Penelitian geomagnetik belum berhasil menemukan apa yang menyebabkan kutub medan magnet bumi berubah pada beberapa waktu dalam sejarah. Peneliti paleomagnetik memperkirakan bahwa sebelum pertukaran dua kutub, medan magnet berkurang selama 10.000 tahun. Kemudian kedua kutub bertukar yang mengakibatkan medan magnet berkembang kembali. Namun, belum ada yang bisa menjelaskan mengapa kedua kutub tersebut dapat bertukar (Carrigan dan Gubbins, 1979).

#### 2.4 Magnetohydrodynamics

Pada Subbab 2.3 telah dijelaskan bahwa karakteristik dari *self-excited dynamo* medan magnet bumi adalah memiliki konduktor yang berupa fluida dan memiliki medan magnet yang bersifat *reversal*. Berdasarkan karakteristik ini, model yang dianggap paling baik untuk menggambarkan *self-excited dynamo* dalam inti bumi adalah model *magnetohydrodynamics* (MHD) karena konduktor pada model MHD adalah fluida dan model MHD juga memiliki sifat *reversal*. Model MHD pertama kali dibahas oleh Elsasser(1946) dan Bullard (1949) (Merrill, McElhinny, McFadden, 1998).

Model MHD dapat menggambarkan bagaimana interaksi antara aliran fluida dan medan magnet. Tentu saja tidak ada satu pun yang menyatakan bahwa model MHD benar-benar ada dalam inti bumi. MHD hanya dapat memodelkan kemungkinan gambaran fisis yang terjadi di dalam inti bumi tersebut karena interaksi antara medan magnet dan konduktor besi dan nikel di bagian inti luar bumi diyakini memberikan hasil bahwa inti bumi dapat menghasilkan *self-excited dynamo*.

Model MHD terdiri dari beberapa persamaan yang harus diselesaikan secara simultan, yaitu persamaan induksi magnet, persamaan *navier-stokes*, persamaan konservasi massa, persamaan *poisson*, persamaan panas, dan persamaan keadaan. Selain itu, terdapat asumsi bahwa tidak ada perubahan kepadatan arus listrik (Merrill, McElhinny, McFadden, 1998).

Sangat sulit ditemukan solusi MHD karena dibutuhkan analisis matematika tingkat tinggi dan perhitungan yang kompleks untuk menyelesaikan

persamaan-persamaannya. Namun, sebuah pengujian numerik telah berhasil dilakukan oleh Glatzmaier dan Roberts (1995) untuk menunjukkan bahwa model MHD yang mereka temukan dapat menghasilkan sifat *reversal* (Bachtiar, 2009).

Pengujian numerik untuk menyelesaikan model yang memenuhi semua persamaan dalam model MHD mungkin saja dilakukan, namun pengujian ini akan membutuhkan komputasi yang sangat mahal dan waktu yang lama. Selain karena membutuhkan memori yang sangat besar, masih banyak parameter dalam inti bumi yang sulit diperoleh untuk digunakan pada pengujian numerik.

Terdapat kemungkinan untuk membuat model yang dapat membangkitkan *self-excited dynamo* tanpa harus menyelesaikan semua persamaan dalam model MHD. Dengan menyelesaikan model dinamo kinematika saja, sudah cukup untuk membangkitkan *self-excited dynamo* dan menjadi langkah awal untuk menyelesaikan model MHD. Model dinamo kinematika adalah salah satu bagian dari model MHD yang hanya menyelesaikan persamaan induksi magnet dengan model aliran tertentu yang diberikan. Walaupun sudah disederhanakan dengan hanya membahas satu bagian dari model MHD, model dinamo kinematika yang merupakan fokus dalam penelitian ini masih membutuhkan komputasi yang kompleks.

## 2.5 Teori Dinamo Kinematika

Dalam penelitian (Bachtiar, 2009) didefinisikan model dinamo kinematika dengan menggunakan persamaan *pre-Maxwell* berikut:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = J / \epsilon. \quad (2.4)$$

dengan  $\mathbf{B}$  adalah medan induksi magnet atau disebut juga induksi magnet/ medan magnet,  $\mathbf{E}$  adalah medan listrik,  $\mathbf{j}$  adalah kepadatan arus listrik,  $\mu$  adalah permeabilitas,  $J$  adalah kepadatan beban, dan  $\epsilon$  adalah konstanta dielektrik. Lambang  $\nabla \times$  adalah operator curl dan  $\nabla \cdot$  adalah operator divergensi.

Kemudian, diperlukan hukum Ohm untuk menggerakkan konduktor:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.5)$$

dengan  $\sigma$  adalah daya konduksi listrik dan  $\mathbf{v}$  adalah kecepatan aliran konduktor.

Jika  $\mathbf{j}$  pada persamaan (2.5) disubstitusi ke persamaan (2.1), diperoleh:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Diketahui identitas berikut:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.7)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2), (2.3) dan (2.6), maka identitas (2.7) dapat diturunkan menjadi :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}.$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

$$\nabla \times (\mu\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

$$\mu\sigma(\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

$$\mu\sigma(\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

sehingga diperoleh:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

dengan  $\eta = 1/\mu\sigma$  adalah daya difusi magnetik.

Persamaan (2.8) disebut dengan persamaan induksi magnet. Dari persamaan (2.8) dapat dilihat bahwa pertumbuhan medan magnet  $\mathbf{B}$  bergantung pada interaksi antara medan magnet dengan kecepatan aliran konduktor yang diberikan. Persamaan induksi magnet dengan model aliran yang ditentukan disebut dengan model dinamo kinematika.

Terdapat beberapa asumsi yang digunakan pada model dinamo kinematika dalam penelitian ini. Konduktor fluida menempati ruang dengan volume hingga  $V$  berbentuk bola dan jari-jari bola  $L = 1$ . Alirannya bersifat *incompressible* (volume tidak berubah terhadap perubahan tekanan) dan tidak bergantung pada waktu, yaitu:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.9)$$

Pada lingkungan di luar bola yang terisolasi dari medan magnet, yaitu  $\hat{V}$ , berlaku:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -\partial \hat{\mathbf{B}} / \partial t. \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.13)$$

dengan  $\hat{\mathbf{B}}$  dan  $\hat{\mathbf{E}}$  adalah medan magnet dan medan listrik pada  $\hat{V}$ .

Tidak adanya sumber arus pada  $\hat{V}$ , mengakibatkan:

$$|\hat{\mathbf{B}}| = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \text{ saat } r \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

dengan  $|\hat{\mathbf{B}}|$  adalah besarnya medan magnet pada  $\hat{V}$  dan  $r$  adalah jari-jari. Artinya, pada luar bola, semakin besar  $r$  maka besarnya medan magnet akan semakin kecil dan menghilang.

Asumsi selanjutnya adalah, pada bagian batas/ permukaan bola,  $\mathbf{v}$  harus memenuhi kondisi batas kaku, yaitu tidak ada  $\mathbf{v}$  yang keluar dari batas bola. Untuk memenuhi kondisi ini,  $\mathbf{v}$  haruslah tegak lurus terhadap unit normal  $\mathbf{n}$ , dengan notasi :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ saat } r = 1. \quad (2.15)$$

Kadang juga  $\mathbf{v}$  memenuhi kondisi tanpa slip, yaitu  $\mathbf{v}$  berhenti pada batas bola/ tidak berbelok atau tergelincir, dengan notasi :

$$\mathbf{v} = 0, \text{ saat } r = 1. \quad (2.16)$$

Bentuk *non dimensionalized* (bentuk umum yang tidak bergantung pada dimensi tertentu) dari persamaan induksi magnet adalah:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = R \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

dengan  $R = UL/\eta$  adalah bilangan magnetik Reynolds,  $U$  adalah karakteristik kecepatan,  $L$  adalah jari-jari bola, dan  $t$  adalah ukuran waktu dalam unit difusi ( $L^2/\eta$ ). Dapat dilihat bahwa bilangan Reynolds berbanding lurus dengan kecepatan aliran dan dapat digunakan untuk membedakan jenis aliran.

### 2.5.1 Bentuk Spektral dari Persamaan Induksi Magnet

Berdasarkan Bullard dan Gellman (1954), bentuk spektral dari persamaan induksi magnet diperoleh dari bentuk poloidal-toroidal dan bentuk harmonik bola dari  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$ .

Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2009) memperluas  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$  ke dalam bentuk poloidal ( $\mathbf{S}$ ) dan toroidal ( $\mathbf{T}$ ) menggunakan medan skalar  $S, T, s$  dan  $t$  secara berurutan:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} + \mathbf{T} = \nabla \times \nabla \times (S\mathbf{r}) + \nabla \times (T\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t} = \nabla \times \nabla \times (s\mathbf{r}) + \nabla \times (t\mathbf{r}). \quad (2.19)$$

Kemudian skalar  $S, T$  diperluas ke dalam bentuk harmonik bola, dengan orde  $m = -n, \dots, n$  dan derajat  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$S = \sum_{n,m} S_n^m(r, t) Y_n^m(\theta, \phi). \quad (2.20)$$

$$T = \sum_{n,m} T_n^m(r, t) Y_n^m(\theta, \phi). \quad (2.21)$$

$$s = \sum_{n,m} s_n^m(r, t) Y_n^m(\theta, \phi). \quad (2.22)$$

$$t = \sum_{n,m} t_n^m(r, t) Y_n^m(\theta, \phi). \quad (2.23)$$

dengan  $S_n^m, T_n^m, s_n^m, t_n^m$  secara berurutan disebut koefisien harmonik/ koefisien dari  $S, T, s$  dan  $t$ .  $Y_n^m$  adalah fungsi harmonik bola:

$$Y_n^m = (-1)^m \left[ \frac{2n+1}{2-\delta_m^0} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} = (-1)^m \overline{Y_n^{-m}}. \quad (2.24)$$

dengan  $\overline{Y_n^{-m}}$  merupakan konjugat dari  $Y_n^{-m}$ .

Sedangkan  $P_n^m$  adalah fungsi *Legendre* dengan normalisasi *Schmidt* :

$$P_n^m(\mu) = \left[ \frac{(2-\delta_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \left[ \frac{d}{d\mu} \right]^{n+m} (\mu^2 - 1)^n. \quad (2.25)$$

dengan  $\delta_m^0$  adalah delta kronecker ( $\delta_i^j = 1$ , jika  $i = j$  dan  $\delta_i^j = 0$ , jika  $i \neq j$ ).

Karena  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$  riil, maka persamaan (2.24) mengakibatkan :

$$\begin{aligned} S_n^{-m} &= (-1)^m \overline{S_n^m} \quad \text{dan} \quad T_n^{-m} = (-1)^m \overline{T_n^m}. \\ s_n^{-m} &= (-1)^m \overline{s_n^m} \quad \text{dan} \quad t_n^{-m} = (-1)^m \overline{t_n^m}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Notasi  $n_1, n_2, n_3$  digunakan untuk menggantikan notasi yang digunakan oleh Bullard dan Gellman ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Kemudian untuk penyederhanaan, orde  $m$  dihilangkan sebisa mungkin.

Bentuk spektral dari persamaan induksi magnet (2.17) adalah:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_{n_3}\right) S_{n_3} &= R \sum_{n_1 n_2} [(t_{n_1} S_{n_2} S_{n_3}) + (s_{n_1} T_{n_2} S_{n_3}) + (s_{n_1} S_{n_2} S_{n_3})]. \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_{n_3}\right) T_{n_3} &= R \sum_{n_1 n_2} [(t_{n_1} T_{n_2} T_{n_3}) + (t_{n_1} S_{n_2} T_{n_3}) + (s_{n_1} T_{n_2} T_{n_3})]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

dengan

$$D_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}. \quad (2.28)$$

Bagian ruas kanan dari bentuk spektral persamaan induksi magnet (2.27) mengandung interaksi-interaksi antara bagian toroidal atau poloidal dari  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$ . Berdasarkan penelitian Bachtiar (2009), interaksi –interaksi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (s_{n_1} S_{n_2} S_{n_3}) &= \{n_1(n_1+1)[n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1) - n_3(n_3+1)] \\ &\quad \frac{S_{n_1}}{r} S'_{n_2} + (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + 1)[n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) \\ &\quad - n_3(n_3+1)] \frac{S_{n_1} S_{n_2}}{r} + n_2(n_2+1)[n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1) \\ &\quad + n_3(n_3+1)] \frac{S_{n_2}}{r} S'_{n_1}\} \frac{(-)^{m^3} A}{8\pi n_3(n_3+1)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} (t_{n_1} S_{n_2} T_{n_3}) &= \{n_3(n_3+1)[n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) - n_3(n_3+1)] \\ &\quad \frac{t_{n_1}}{r} \left(\frac{S_{n_2}}{r} + S'_{n_2}\right) + n_2(n_2+1)[n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1) \\ &\quad + n_3(n_3+1)] \left(t'_{n_1} \frac{S_{n_2}}{r} + \frac{t_{n_1}}{r} S'_{n_2}\right)\} \frac{(-)^{m^3} A}{8\pi n_3(n_3+1)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} (s_{n_1} T_{n_2} T_{n_3}) &= \{n_3(n_3+1)[n_3(n_3+1) - n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1)] \\ &\quad \frac{T_{n_2}}{r} \left(\frac{S_{n_1}}{r} + S'_{n_1}\right) + (n_1(n_1+1)[n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1) \\ &\quad - n_3(n_3+1)] \left(T'_{n_2} \frac{S_{n_1}}{r} + \frac{T_{n_2}}{r} S'_{n_1}\right)\} \frac{(-)^{m^3} A}{8\pi n_3(n_3+1)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$(t_{n_1} S_{n_2} S_{n_3}) = \frac{n_2(n_2+1)}{4\pi r n_3(n_3+1)} (-)^{m^3} E t_{n_1} S_{n_2}. \quad (2.32)$$

$$(s_{n_1} T_{n_2} S_{n_3}) = \frac{n_1(n_1+1)}{4\pi r n_3(n_3+1)} (-)^{m^3} E s_{n_1} T_{n_2}. \quad (2.33)$$

$$(t_{n_1} T_{n_2} T_{n_3}) = \frac{(-)^{m^3} E t_{n_1} T_{n_2}}{4\pi r}. \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
(s_{n_1}S_{n_2}T_{n_3}) = & \{[n_1(n_1 + 1) + n_2(n_2 + 1) + n_3(n_3 + 1)] \frac{S_{n_1} S_{n_2}}{r} \frac{S_{n_2}}{r^2} \\
& - n_1(n_1 + 1) \frac{S_{n_1}}{r} S_{n_2}'' - [n_1(n_1 + 1) + n_2(n_2 + 1) \\
& - n_3(n_3 + 1)] (S_{n_2}' \frac{S_{n_1}}{r^2} + \frac{S_{n_1}'}{r} S_{n_2}' + \frac{S_{n_2}}{r^2} S_{n_1}') \\
& - n_2(n_2 + 1) S_{n_1}'' \frac{S_{n_2}}{r} \} \frac{(-)^{m_3} E}{8\pi n_3(n_3 + 1)}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

dengan  $S' = dS/dr$  dan  $S'' = d^2S/dr^2$ .

Interaksi  $(s_{n_1}S_{n_2}S_{n_3})$ ,  $(s_{n_1}T_{n_2}T_{n_3})$  dan  $(t_{n_1}S_{n_2}T_{n_3})$  pada persamaan (2.29) - (2.31), mengandung integral Adams (A), dengan bentuk:

$$A = \int_{4\pi} Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} Y_{n_3}^{-m_3} \sin \theta d\theta d\phi. \tag{2.36}$$

Sedangkan interaksi  $(s_{n_1}T_{n_2}S_{n_3})$ ,  $(s_{n_1}S_{n_2}T_{n_3})$ ,  $(t_{n_1}S_{n_2}S_{n_3})$ ,  $(t_{n_1}T_{n_2}T_{n_3})$  pada persamaan (2.32) - (2.35), mengandung integral Elsasser (E), dengan bentuk:

$$E = \int_{4\pi} \left( \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \theta} \right) Y_{n_3}^{-m_3} d\theta d\phi. \tag{2.37}$$

Untuk menyelesaikan persamaan induksi magnet (2.17),  $\mathbf{B}$  haruslah memenuhi kondisi diferensiabilitas terhadap  $x, y, z$  pada  $r = 0$ , lebih jelasnya diberikan pada Subbab 2.5.4, dengan bentuk spektral:

$$T_n = S_n = 0 \text{ pada } r = 0. \tag{2.38}$$

dan memenuhi kondisi batas yang menggambarkan tidak adanya arus pada  $\hat{V}$  dan hilangnya medan magnet  $\mathbf{B}$  jika  $r \rightarrow \infty$ , dengan bentuk spektral:

$$T_n = \frac{\partial S_n}{\partial r} + (1 + n)S_n = 0 \text{ pada } r = 1. \tag{2.39}$$

Kemudian  $\mathbf{v}$  memenuhi kondisi batas kaku (2.15) dengan bentuk spektral:

$$s_n = 0 \text{ pada } r = 1. \tag{2.40}$$

dan kadang memenuhi kondisi tanpa slip (2.16), dengan bentuk spektral:

$$t_n = \frac{\partial S_n}{\partial r} = 0 \text{ pada } r = 1. \tag{2.41}$$

## 2.5.2 Metode Numerik

Suatu model dikatakan dapat menghasilkan *self-excited dynamo* jika dapat ditemukan solusi persamaan induksi magnet dengan medan magnet  $\mathbf{B}$  yang

berkembang. Untuk menyelesaikan persamaan induksi magnet,  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$  diperluas ke dalam bentuk poloidal-toroidal yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Persamaan induksi magnet dalam bentuk poloidal-toroidal tidak mungkin diselesaikan karena sistem persamaannya tak berhingga. Kecuali jika dibatasi hingga derajat  $n = N$  saja. Kemudian, interval  $0 \leq r \leq 1$  dibagi menjadi  $J$  sub interval yang sama, dengan arah radial. Untuk selanjutnya, parameter  $J$  dan  $N$  disebut dengan level pemotongan  $[J, N]$ .

Pengujian numerik untuk pencarian solusi persamaan induksi magnet dapat dilakukan dengan menggunakan level pemotongan  $[J, N]$  yang berbeda-beda. Jika dengan melakukan peningkatan level pemotongan  $[J, N]$  hasilnya tidak menuju ke satu titik, hal ini menunjukkan bahwa solusi tidak konvergen, sehingga solusi tidak akan berarti.

Untuk memudahkan penyelesaian secara numerik, persamaan induksi magnet diubah ke bentuk yang lebih sederhana. Dengan asumsi  $\mathbf{v}$  tidak bergantung terhadap waktu dan  $\mathbf{B}$  bergantung terhadap waktu, solusi persamaan induksi magnet dapat ditemukan dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \mathbf{B}_{\lambda}(\mathbf{r}, \theta, \phi) e^{\lambda t}. \quad (2.42)$$

dengan asumsi masalah ini adalah *non-degeneracy* atau dapat diselesaikan dalam berhingga perulangan.

Bentuk spektral persamaan induksi (2.27) mengandung persamaan diferensial orde dua dan  $s_n''$ ,  $t_n'$  adalah turunan dengan orde tertinggi dari  $s$ ,  $t$  dalam bagian  $S$  dan  $T$ . Untuk itu, digunakan skema turunan tengah orde satu dan orde dua sebagai berikut:

$$f_j' = \frac{(f_{j+1} - f_{j-1}))}{2h} + O(h^2). \quad (2.43)$$

$$f_j'' = \frac{(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}))}{h^2} + O(h^2). \quad (2.44)$$

dalam arah radial, dengan  $h = 1/J$ . Untuk menggunakan metode ini,  $f_j$  haruslah kontinu minimal sampai turunan ketiga, dengan notasi  $f_j \in C^3(r)$ . Sehingga, jika  $s_n''$  dan  $t_n' \in C^1(r)$ , maka haruslah  $S$  dan  $T \in C^3(r)$ .  $C^{(p)}(r)$  artinya kontinu sampai turunan ke-  $p$  terhadap  $r$ .

Dengan menggunakan skema turunan tengah (2.43), (2.44), dan  $\mathbf{B}$  pada persamaan (2.42), maka untuk setiap bilangan Reynold  $R$  persamaan induksi magnet dapat dinyatakan ke dalam bentuk masalah nilai eigen yang sederhana:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}. \quad (2.45)$$

dengan  $\mathbf{A}$  berupa matriks pita dan nilai eigen  $\lambda$  adalah angka pertumbuhan medan magnet (Bachtiar, 2009).

Dengan mensubstitusi  $\mathbf{B}$  pada persamaan (2.42) yang mengandung  $e^{\lambda t}$  ke persamaan induksi magnet (2.17), dapat dilihat bahwa pertumbuhan  $\mathbf{B}$  akan meningkat jika nilai eigen  $\lambda$  bernilai positif. Sehingga keberhasilan suatu model dalam membangkitkan medan magnet ditandai dengan ditemukannya nilai eigen  $\lambda$  yang bagian riilnya positif.

Untuk masing-masing bilangan magnetik Reynolds  $R$ , terdapat bagian riil dari nilai eigen maksimum,  $\lambda_{max}$ , yang merepresentasikan pertumbuhan paling cepat dari  $\mathbf{B}$ .

Pada awalnya, para peneliti memiliki keterbatasan kapasitas komputer sehingga kesulitan dalam meningkatkan level pemotongan  $[J, N]$ . Padahal, dibutuhkan pemilihan level pemotongan  $[J, N]$  yang cukup besar untuk menunjukkan kekonvergenannya. Saat ini perkembangan komputer semakin baik sehingga memori dan kecepatan semakin besar dapat mendukung penelitian untuk menggunakan  $[J, N]$  yang cukup besar.

Ada paling tidak 3 metode untuk dapat menggunakan level pemotongan  $[J, N]$  yang optimal dalam menemukan solusi persamaan induksi magnet.

Pertama, dengan cara membangun matriks pita, kita hanya menggunakan memori untuk menyimpan elemen pita saja. Cara ini dapat menghemat memori cukup besar sehingga peningkatan level pemotongan  $[J, N]$  dapat dilakukan. Iterasi invers adalah metode yang digunakan untuk mempertahankan bentuk pita pada matriks. Metode ini hanya menemukan satu nilai eigen pada satu waktu, yaitu nilai eigen yang terdekat dengan nilai eigen awal. Dengan demikian, agar solusi yang didapat adalah  $\lambda_{max}$ , maka perlu untuk memilih nilai eigen awal yang cukup besar.

Kedua, dengan memilih bentuk  $\mathbf{v}$  yang tepat, sedemikian sehingga bentuk harmonik  $\mathbf{B}$  dapat dipecah menjadi 2 atau lebih himpunan bebas. Setiap

himpunan bebas ini dapat diuji secara terpisah. Hal ini dibahas lebih detail pada Subbab 2.5.3.

Ketiga, dengan memecah matriks menjadi sub pita, dan memprosesnya satu persatu. Cara ini dapat membagi ukuran matriks menjadi bagian-bagian yang lebih kecil sehingga dapat disesuaikan dengan kapasitas komputer yang digunakan untuk pengujian.

Jika memungkinkan, kita juga bisa mengkombinasikan 2 atau lebih dari ketiga metode di atas untuk mendapatkan level pemotongan  $[J, N]$  yang optimal.

### 2.5.3 Aturan Pemilihan untuk Pembentukan Rantai Magnet

Telah dibahas pada Subbab 2.5.1 bahwa interaksi-interaksi pada ruaskan bentuk spektral persamaan induksi magnet (2.27) dapat mengandung integral Adam ( $A$ ) atau integral Elsasser ( $E$ ). Terdapat aturan/ kondisi pada interaksi yang menyebabkan integral  $A$  atau  $E$  ini bernilai nol, sehingga interaksi tersebut juga bernilai nol. Berdasarkan ini, Bullard dan Gellman mendefinisikan aturan pemilihan AP1 dan AP2 dan BIJ menambahkan AP3 sebagai berikut:

Aturan Pemilihan 1 (AP1):

Interaksi  $(s_{n_1}S_{n_2}S_{n_3})$ ,  $(s_{n_1}T_{n_2}T_{n_3})$  dan  $(t_{n_1}S_{n_2}T_{n_3})$  bergantung pada integral  $A$ , sehingga bernilai nol jika tidak memenuhi  $n_1 + n_2 + n_3$  genap dan  $|n_1 - n_2| \leq n_3 \leq n_1 + n_2$ .

Aturan Pemilihan 2 (AP2):

Interaksi  $(s_{n_1}T_{n_2}S_{n_3})$ ,  $(s_{n_1}S_{n_2}T_{n_3})$ ,  $(t_{n_1}S_{n_2}S_{n_3})$ , dan  $(t_{n_1}T_{n_2}T_{n_3})$  bergantung pada integral  $E$ , sehingga bernilai nol jika tidak memenuhi  $n_1 + n_2 + n_3$  ganjil dan  $|n_1 - n_2| < n_3 < n_1 + n_2$ .

Aturan Pemilihan 3 (AP3):

Interaksi  $(s_{n_1}S_{n_2}S_{n_3})$ , ...,  $(t_{n_1}T_{n_2}T_{n_3})$  semua bernilai nol jika ordenya tidak memenuhi  $m_3 = m_1 + m_2$ .

Penggunaan aturan pemilihan ini sangat berguna untuk mengurangi perhitungan yang besar saat menyelesaikan persamaan induksi magnet. Dari aturan pemilihan ini dapat didefinisikan rantai magnet (rangkaian koefisien poloidal dan toroidal) untuk suatu medan magnet  $\mathbf{B}$  sedemikian sehingga interaksi yang bernilai nol dapat dipisahkan berdasarkan AP1, AP2 atau AP3. Penggunaan

rantai magnet yang berbeda dalam perluasan medan magnet  $\mathbf{B}$  akan menghasilkan model dinamo kinematika yang berbeda pula.

Berikut diberikan contoh pembentukan rantai magnet jika menggunakan AP1 dan AP2. Misalkan derajat koefisien harmonik  $s_{n1}$  genap dan derajat koefisien harmonik  $t_{n1}$  ganjil. Maka, suatu interaksi akan bernilai nol jika dalam interaksi tersebut terdapat:

1.  $S$  berderajat ganjil dan  $S$  berderajat genap.
2.  $T$  berderajat ganjil dan  $T$  berderajat genap, atau
3.  $S$  dan  $T$  dengan derajat  $n$  sama-sama ganjil atau genap .

Dengan memisahkan bagian toroidal atau poloidal yang akan bernilai nol jika berinteraksi, maka  $\mathbf{B}$  dapat dibagi menjadi dua rantai *dipole* (D) dan *quadrupole* (Q), sebagai berikut:

$$D: S_1^0, S_1^1, T_2^0, T_2^1, T_2^2, S_3^0, S_3^1, S_3^2, S_3^3, T_4^0, T_4^1, T_4^2, T_4^3, T_4^4, \dots$$

$$Q: T_1^0, T_1^1, S_2^0, S_2^1, S_2^2, T_3^0, T_3^1, T_3^2, T_3^3, S_4^0, S_4^1, S_4^2, S_4^3, S_4^4, \dots$$

Rantai ini disebut dengan pemisahan- DQ.

Sebagai penjelasan pemisahan- DQ, perhatikan bahwa  $S_2^0$  tidak dimasukkan ke rantai  $D$  karena interaksi antara  $s_{n1}$  dan  $S_2^0$  dengan setiap koefisien pada rantai  $D$ , pasti akan bernilai nol. Begitu juga dengan interaksi antara  $t_{n1}$  dan  $S_2^0$  dengan setiap koefisien pada rantai  $D$  juga bernilai nol.

Selain itu, BIJ juga membagi  $\mathbf{B}$  menggunakan AP3. Jika orde dari koefisien  $\mathbf{v}$  memenuhi:

$$m_1 = 0 \text{ mod } k.$$

untuk suatu bilangan bulat  $k$ , maka  $\mathbf{B}$  dapat dibagi menjadi rantai yang saling lepas dan masing-masing rantai dapat diuji secara terpisah. Pada tiap rantai, orde harmoniknya memenuhi:

$$m = l \text{ mod } k \text{ atau } m = (k - l) \text{ mod } k, l=0,1,2,\dots,k.$$

Rantai ini dilambangkan dengan  $Mlk$  dan disebut pemisahan  $-m$ .

Berikut adalah contoh pemisahan  $-m$  untuk  $k = 2$ , yang berarti orde dari koefisien  $\mathbf{v}$  memenuhi:  $m_1 = 0 \text{ mod } 2$ .

Maka akan diperoleh 2 rantai berbeda, yaitu  $M02$  yang terdiri dari koefisien harmonik dengan orde  $m = 0 \text{ mod } 2$  dan  $M12$  yang terdiri dari koefisien harmonik dengan orde  $m = 1 \text{ mod } 2$ , dengan bentuk sebagai berikut:

$$M02: S_1^0, T_1^0, S_2^0, T_2^0, S_2^2, T_2^2, S_3^0, T_3^0, S_3^2, T_3^2, S_4^0, T_4^0, S_4^2, T_4^2, S_4^4, T_4^4, \dots$$

$$M12: S_1^1, T_1^1, S_2^1, T_2^1, S_3^1, T_3^1, S_3^3, T_3^3, S_4^1, T_4^1, S_4^3, T_4^3, S_5^1, T_5^1, S_5^3, T_5^3, S_5^5, T_5^5, \dots$$

Perhatikan bahwa  $S_3^3$  tidak terdapat pada rantai M02, karena interaksinya dengan setiap koefisien pada rantai M02 akan bernilai nol (berdasarkan AP3).

Kombinasi pemisahan- DQ dan pemisahan -  $m$  juga dapat dilakukan untuk mendapatkan matriks yang lebih kecil. Dengan notasi  $DMlk$  dan  $QMLk$ .

Contoh: untuk  $k = 2$ , diperoleh:

$$DM02: S_1^0, T_2^0, T_2^2, S_3^0, S_3^2, T_4^0, T_4^2, T_4^4, S_5^0, S_5^2, S_5^4, T_6^0, T_6^2, T_6^4, T_6^6, \dots$$

$$DM12: S_1^1, T_2^1, S_3^1, S_3^3, T_4^1, T_4^3, S_5^1, S_5^3, S_5^5, T_6^1, T_6^3, T_6^5, \dots$$

#### 2.5.4 Kondisi Diferensiabilitas

Agar persamaan induksi magnet dapat diselesaikan,  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{v}$  harus memenuhi kondisi diferensiabilitas.

Dalam penelitian (Bachtiar, 2009) disebutkan, berdasarkan Friedman (1964), jika  $\mathbf{v} \in C^{(p)}(x, y, z)$  maka  $\mathbf{B} \in C^{(p+1)}(x, y, z)$ . Agar dapat memenuhi persamaan induksi magnet dalam bentuk spektral (2.27), kondisi minimal yang harus dipenuhi adalah  $\mathbf{B} \in C^2(x, y, z)$ , sehingga ini benar jika  $\mathbf{v} \in C^1(x, y, z)$ . Untuk tujuan lebih jauh, mungkin saja dibutuhkan orde turunan yang lebih tinggi, Contohnya dalam ekstrapolasi Richardson. Berdasarkan Hobson (1931), diketahui bahwa  $r^n Y_n$  adalah multinomial homogen derajat  $n$  dalam  $x, y, z$  dan dapat diturunkan sampai tak hingga kali. Hal ini mengakibatkan, jika  $\mathbf{v}$  dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$s_n^m = r^n (a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots). \quad (2.46)$$

$$t_n^m = r^n (a_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4 + b_6 r^6 + \dots). \quad (2.47)$$

, maka  $\mathbf{v}$  juga dapat diturunkan sampai tak hingga kali terhadap  $x, y, z$ , dan hal ini mensyaratkan  $\mathbf{B}$  haruslah dapat diturunkan sampai tingkat yang lebih tinggi lagi, yaitu tak hingga kali juga.

Jika  $\mathbf{v}$  tidak memenuhi persamaan (2.46) dan (2.47), maka pada  $r = 0$  akan ada masalah yang muncul karena ada kemungkinan turunan dari  $\mathbf{v}$  dengan orde yang lebih tinggi menghasilkan banyak nilai atau tak berhingga nilai. Sehingga mengakibatkan hasilnya tidak konvergen ataupun menimbulkan masalah numerik lainnya.

## BAB 3

### DINAMO ALIRAN PLANAR

#### 3.1. Sejarah Teori Anti Dinamo

Telah banyak penelitian yang membuktikan bahwa *self-excited dynamo* ada, seperti yang dilakukan oleh Backus (1958), Childress dan G.O. Roberts (1970). Namun, beberapa peneliti tetap tertarik untuk menemukan kondisi-kondisi yang menyebabkan *self-excited dynamo* tidak bisa dibangkitkan. Kondisi ini membentuk dasar dari teorema-teorema anti dinamo. Teorema anti dinamo pertama ditemukan oleh Cowling (1934). Teorema Cowling adalah teorema anti dinamo yang paling awal dan paling penting yang menemukan jenis medan magnet yang tidak dapat dihasilkan oleh proses dinamo (Bachtiar, 2009).

Dalam penelitian Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2009) dijelaskan bahwa terdapat beberapa teorema anti dinamo, diantaranya adalah:

1. Teorema Cowling

“Medan magnet yang *axisymmetric* tidak dapat dihasilkan oleh aliran yang *incompressible*”.

2. Teorema Aliran Toroidal (TAT)

Medan magnet tidak dapat dibangkitkan oleh model aliran toroidal penuh, dengan  $\mathbf{v} = \nabla \times (t \mathbf{r})$  untuk suatu skalar  $t$ . TAT dapat diperluas menjadi Teorema Aliran Non Radial (TANR) yang menyatakan bahwa medan magnet tidak dapat dibangkitkan oleh aliran dengan  $\mathbf{v}_r = 0$  tetapi  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$ .

3. Teorema Aliran Radial (TAR)

Medan magnet tidak dapat dibangkitkan oleh aliran yang simetri secara melingkar,  $\mathbf{v} = v_r(r, t)\mathbf{e}_r$ .

Perluasan dari TAT dan TAR adalah Teorema Aliran Simetri (TAS) yang menyatakan bahwa medan magnet tidak dapat dibangkitkan oleh aliran dengan bentuk  $\mathbf{v} = v_r(r, t)\mathbf{e}_r + \mathbf{v}_T$  dan  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{e}_r = 0$ .

4. Teorema Medan Magnet Toroidal (TMMT)

Medan magnet yang hanya mengandung bagian toroidal tidak dapat membangkitkan medan magnet.

$$\mathbf{B} = \nabla \times (T \mathbf{r})$$

### 5. Teorema Aliran Planar (TAP)

“Jika aliran bersifat planar atau sejajar dengan suatu bidang, maka aliran tersebut tidak dapat menghasilkan medan magnet “.

Teorema anti dinamo yang berkaitan dengan penelitian ini adalah Teorema Aliran Planar yang akan lebih dijelaskan pada Subbab 3.2.

### 3.2. Teorema Aliran Planar (TAP)

TAP diperkenalkan oleh Zel'dovich (1957) :

“Jika aliran bersifat planar atau sejajar dengan suatu bidang, maka aliran tersebut tidak dapat menghasilkan medan magnet “.

Sebagai contoh, untuk aliran  $\mathbf{v}$  yang sejajar dengan bidang  $xy$ , berlaku TAP sebagai berikut:

Jika  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ , maka  $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$ .

$|\mathbf{B}| \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$  berarti *self-excited dynamo* tidak dapat dibangkitkan karena besarnya medan magnet semakin lama semakin berkurang dan suatu saat akan berhenti.

Lortz (1968), Moffat (1978), Zel'dovich dan Ruzmaikin (1980) telah memberikan bukti untuk TAP, namun dalam pembuktian mereka diasumsikan bahwa ruang konduktornya memiliki volume tak hingga (Bachtiar, 2009).

BIJ juga mencoba memberikan bukti untuk TAP, sebagai berikut:

Asumsikan aliran *incompressible* mengisi ruang konduktor yang memiliki volume tak hingga berbentuk bola, memenuhi persamaan :

$$\mathbf{v} = \nabla f \times \mathbf{e}_z.$$

dengan  $f$  adalah fungsi *stream* dari kecepatan.

Lakukan hasil kali titik terhadap persamaan (2.8) dengan  $\mathbf{e}_z$ , untuk memperoleh komponen-  $z$  dari persamaan induksi, yaitu:

$$\partial B_z / \partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla B_z + \eta \nabla^2 B_z. \quad (3.1)$$

Lakukan perkalian terhadap persamaan (3.1) dengan  $B_z$ , kemudian integralkan pada volume  $V_r$  dengan radius  $r$  dan batas  $\Sigma$ . Setelah itu, terapkan teorema divergensi untuk mendapatkan:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_r} \frac{1}{2} B_z^2 dV = - \int_{\Sigma} \frac{1}{2} B_z^2 \mathbf{v} \cdot d\Sigma + \eta \int_{\Sigma} B_z \nabla B_z \cdot d\Sigma - \eta \int_{V_r} (\nabla B_z)^2 dV. \quad (3.2)$$

dengan  $d\Sigma = \mathbf{e}_r d\Sigma = \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  adalah turunan permukaan yang menuju keluar.

Dengan  $\mathbf{v}$  yang diberikan,  $B_z \rightarrow 0$  saat  $r \rightarrow \infty$ . Kita misalkan  $r \rightarrow \infty$  untuk memperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} \frac{1}{2} B_z^2 dV &= \eta \int_{V_\infty} (\nabla B_z)^2 dV \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) mengindikasikan bahwa  $B_z$  menurun terhadap kenaikan waktu atau  $B_z \equiv 0$ . Harus ditunjukkan juga bahwa  $B_x$  dan  $B_y$  menurun terhadap kenaikan waktu ( $B_x \equiv 0$  dan  $B_y \equiv 0$ ). Bukti untuk ini selengkapnya dapat dilihat pada penelitian Bachtiar (2009).

Dengan demikian terbukti bahwa, aliran yang bersifat planar tidak dapat menghasilkan medan magnet. Jadi, pembuktian TAP berhasil untuk ruang konduktor dengan volume tak hingga.

Namun, belum ada penelitian yang berhasil membuktikan bahwa TAP juga berlaku untuk ruang konduktor dengan volume hingga. Untuk itu, BIJ melakukan penelitian tentang hal tersebut yang dijelaskan pada Subbab 3.3 berikut.

### 3.3 Hasil Penelitian BIJ

Dalam penelitiannya pada tahun 2006, BIJ berhasil menemukan bahwa tidak mungkin melakukan pembuktian analitik terhadap TAP untuk konduktor dengan volume hingga. Untuk itu, BIJ melakukan penelitian secara numerik dan

menemukan satu model dinamo aliran planar (model yang memiliki aliran planar, tetapi dapat menghasilkan medan magnet yang berkembang atau model dinamo kinematika). Penemuan model ini menjadi bukti bahwa TAP tidak berlaku untuk konduktor dengan volume hingga, sehingga dinamo aliran planar terbukti keberadaannya

BIJ meneliti 32 model dan menemukan 1 model, yaitu model p1Y22DM12 yang mengindikasikan bahwa terdapat model dinamo kinematika yang memiliki aliran planar atau disebut juga dengan model dinamo aliran planar. Pengujian numerik terhadap model planar ini berhasil membangkitkan medan magnet dengan tingkat konvergensi 10 %. Selanjutnya Bachtiar dan James (2010) melanjutkan penelitian terhadap model p1Y22DM12 dengan menambahkan metode sub pita dalam pengujian numerik dan menemukan hasil yang lebih baik dari hasil BIJ, yaitu dengan tingkat konvergensi 5 %.

Kemudian Bachtiar (2009) mencoba melanjutkan penelitian BIJ untuk mendukung keberadaan model dinamo aliran planar. Bachtiar menggunakan model dinamo kinematika yang ditemukan oleh Pekeris, Accad, dan Skholler, yang dikenal dengan model dinamo kinematika PAS.

Sebelum menjelaskan model dinamo kinematika PAS, perlu dibahas terlebih dahulu tentang apa yang dimaksud dengan model dinamo aliran planar (Subbab 3.4) dan bagaimana menjadikan suatu model aliran yang tidak planar menjadi aliran planar (Subbab 3.5). Pembahasan pada kedua subbab ini mengacu pada penelitian Bachtiar (2009).

### 3.4 Model Dinamo Aliran Planar

Aliran planar adalah aliran yang tanpa salah satu komponen kartesian. Misalkan suatu aliran tanpa komponen-  $z$  dan  $f$  adalah fungsi *stream* untuk kecepatan yang *incompressible*, maka :

$$\mathbf{v} = \nabla f \times \mathbf{e}_z. \quad (3.4)$$

adalah aliran planar yang sejajar dengan bidang  $xy$ .

Model dinamo aliran planar adalah model dinamo kinematika yang memiliki aliran planar.

Berdasarkan penelitian Bachtiar, model aliran planar diperoleh dengan cara berikut. Sebelumnya, kecepatan  $\mathbf{v}$  diekspansikan ke dalam bentuk toroidal dan poloidal, sehingga model aliran planar dapat dinyatakan dalam bentuk poloidal-toroidal.

Pertama, definisikan notasi berikut:

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\{g\} + \mathbf{T}\{g\}. \quad (3.5)$$

$$\mathbf{T}\{g\} = \nabla \times (g\mathbf{r}).$$

$$\mathbf{S}\{g\} = \nabla \times \nabla \times (g\mathbf{r}).$$

Sehingga diperoleh :

$$\nabla \times \mathbf{T}\{g\} = \mathbf{S}\{g\}. \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{S}\{g\} = \mathbf{T}\{-\nabla^2 g\}. \quad (3.7)$$

Kemudian perluas  $f$  pada (3.4) ke dalam bentuk harmonik:

$$f = \sum_{n,m} f_n^m Y_n^m.$$

Dengan menggunakan identitas vektor dan melakukan perkalian titik terhadap persamaan (2.19) dan  $\mathbf{r}$ , diperoleh:

$$L^2 s_n^m Y_n^m = f_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi}. \quad (3.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} L^2 Y_n^m &= - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_n^m \\ &= n(n+1) Y_n^m. \end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, orde  $m$  dihilangkan, sehingga dari persamaan (3.8) diperoleh koefisien poloidal  $s_n^m$ :

$$s_n = \frac{im}{n(n+1)} f_n. \quad (3.9)$$

Untuk mendapatkan koefisien toroidal  $t_n^m$  dari aliran, digunakan curl dari persamaan (3.5):

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{S}\{t\} + \mathbf{T}\{-\nabla^2 s\}. \quad (3.10)$$

Lakukan perkalian titik terhadap persamaan (3.10) dan  $\mathbf{r}$ , kemudian gunakan persamaan (3.4) untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned}
 L^2 t &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\nabla f \times \mathbf{e}_z) \\
 &= \nabla \cdot ((\nabla f \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{r}) \\
 &= \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla f) \mathbf{e}_z - \nabla \cdot (z \nabla f) \\
 &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left( r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
 &\quad - \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - r \cos \theta \nabla^2 f \\
 &= r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - r \cos \theta \nabla^2 f \\
 &= -2 \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} L^2 f + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( f - r \frac{\partial f}{\partial r} \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Berdasarkan Chapman dan Bartels (1962), diketahui relasi rekurensi berikut:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta Y_n &= \alpha_{n+1} Y_{n+1} + \alpha_n Y_{n-1}. \\
 \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} &= n \alpha_{n+1} Y_{n+1} - (n+1) \alpha_n Y_{n-1}.
 \end{aligned}$$

dengan  $\alpha_n := \sqrt{(n^2 - m^2)/(4n^2 - 1)}$ .

Dengan menggunakan relasi ini dihasilkan:

$$n(n+1)t_n = -(n+1)\alpha_n d_{1-n} f_{n-1} + n\alpha_{n+1} d_{n+2} f_{n+1}. \tag{3.12}$$

dengan

$$d_n := \frac{d}{dr} + \frac{n}{r}. \tag{3.13}$$

Persamaan (3.12) dapat dijabarkan sebagai berikut :

Untuk  $n = 1 \rightarrow 2t_1 = -2\alpha_1 d_0 f_0 + \alpha_2 d_3 f_2$ .

$$t_1 = \frac{-2\alpha_1 d_0 f_0}{2} + \frac{\alpha_2 d_3 f_2}{2}.$$

Untuk  $n = 2 \rightarrow 6t_2 = -3\alpha_2 d_{-1} f_1 + 2\alpha_3 d_4 f_3$ .

$$t_2 = \frac{-\alpha_2 d_{-1} f_1}{2} + \frac{\alpha_3 d_4 f_3}{3}.$$

Untuk  $n = 3 \rightarrow 12t_3 = -4\alpha_3 d_{-2}f_2 + 3\alpha_4 d_5 f_4$ .

$$t_3 = \frac{-\alpha_3 d_{-2}f_2}{3} + \frac{\alpha_4 d_5 f_4}{4}.$$

Untuk  $n = 4 \rightarrow 20t_4 = -5\alpha_4 d_{-3}f_3 + 4\alpha_5 d_6 f_5$ .

$$t_4 = \frac{-\alpha_4 d_{-3}f_3}{4} + \frac{\alpha_5 d_6 f_5}{5}.$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa masing-masing fungsi  $f$  dengan 1 derajat harmonik terdapat dalam 2 persamaan koefisien toroidal. Misalnya perhatikan  $f_2$ , dapat dilihat dari persamaan di atas bahwa  $f_2$  terdapat pada koefisien  $t_1$  dan  $t_2$ . Sehingga jika menggunakan  $f_2$ , dibutuhkan dua koefisien toroidal, yaitu :

$$t_1 = \frac{\alpha_2 d_3 f_2}{2}.$$

$$t_3 = \frac{-\alpha_3 d_{-2}f_2}{3}.$$

Contoh lain, jika yang digunakan adalah  $f_3$ , maka dibutuhkan  $t_2$  dan  $t_4$  :

$$t_2 = \frac{\alpha_3 d_4 f_3}{3}.$$

$$t_4 = \frac{-\alpha_4 d_{-3}f_3}{4}.$$

Dari pola di atas didapatkan bahwa untuk masing-masing  $f_n^m$ , terdapat dua koefisien toroidal:

$$t_{n-1} = \frac{\alpha_n}{n} d_{n+1} f_n. \quad (3.14)$$

$$t_{n+1} = -\frac{\alpha_{n+1}}{n+1} d_{-n} f_n. \quad (3.15)$$

Terdapat dua cara membangun aliran planar :

1. Membuat aliran planar dengan cara mendefinisikan  $f_n$ , kemudian mencari koefisien poloidal-toroidal yang bersesuaian menggunakan persamaan (3.9), (3.14), dan (3.15).
2. Mengubah aliran  $\mathbf{v}$  yang belum planar menjadi planar dengan cara menambahkan koefisien poloidal-toroidal yang berkaitan, menggunakan persamaan (3.9), (3.14), dan (3.15). Proses ini disebut dengan proses planarisasi.

Untuk cara yang kedua, berikut ini diberikan langkah lebih detail untuk memplanarkan bagian poloidal dan toroidal.

a. Proses planarisasi untuk bagian poloidal,  $s_n^m$ :

Dari  $s_n^m$  yang diberikan, dengan  $m \neq 0$ , dapat diperoleh  $f_n$  dari persamaan (3.9):

$$f_n = \frac{n(n+1)s_n}{im}.$$

Kemudian  $t_{n-1}$  dan  $t_{n+1}$  dapat diperoleh dari persamaan (3.14) dan (3.15).

$f_n$  tidak dapat ditemukan jika diberikan  $s_n^0$ , karena akan terjadi pembagian dengan 0 ketika disubstitusi ke persamaan (3.9).

Kombinasi  $s_n^m + t_{n-1}^m + t_{n+1}^m$  adalah planar. Maka,  $s_n^m$  telah berhasil diplanarkan.

b. Proses planarisasi untuk bagian toroidal,  $t_n^m$ :

1). Menemukan  $f_{n+1}$  dari  $t_n$  menggunakan persamaan (3.14). Kemudian membangun  $s_{n+1}$  dan  $t_{n+2}$  menggunakan persamaan (3.9) dan (3.15). Sehingga diperoleh kombinasi  $t_n^m + t_{n+2}^m + s_{n+1}^m$ , yang planar.

2). Menemukan  $f_{n-1}$  dari  $t_n$  menggunakan persamaan (3.15). Kemudian membangun  $s_{n-1}$  dan  $t_{n-2}$  menggunakan persamaan (3.9) dan (3.14). Sehingga diperoleh kombinasi  $t_n^m + t_{n-2}^m + s_{n-1}^m$ , yang planar.

Untuk  $t_n$  yang diberikan,  $f_n$  yang ditemukan dari persamaan (3.14) dan (3.15) haruslah memenuhi kondisi batas kaku (2.40) pada  $r = 1$ , yaitu:

$$f_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha_{n+1}} r^{-n-2} \int_1^r r^{n+2} t_n dr. \quad (3.16a)$$

$$f_{n-1} = \frac{-n}{\alpha_n} r^{n-1} \int_1^r r^{-n+1} t_n dr. \quad (3.16b)$$

Agar memenuhi kondisi batas pada  $r = 1$ ,  $t_n$  pada cara (1) harus memenuhi kondisi konsistensi:

$$\int_0^1 r^{n+2} t_n dr = 0. \quad (3.17)$$

sehingga  $t_n$  dapat diplanarkan. Artinya, jika  $\int_0^1 r^{n+2} t_n dr \neq 0$ , maka persamaan (3.16a) menjadi :

$$f_{n+1} = -\frac{n+1}{\alpha_{n+1}} 0^{-n-2} \int_0^1 r^{n+2} t_n dr.$$

sehingga terjadi pembagian dengan 0 yang mengakibatkan  $f_{n+1}$  tidak terdefinisi. Jika  $f_{n+1}$  tidak bisa ditemukan, kondisi diferensiabilitas (2.46) dan (2.47) tidak akan terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa  $t_n$  tidak dapat diplanarkan.

Kondisi lain yang menyebabkan suatu model aliran tidak dapat diplanarkan adalah jika  $n = |m|$ . Karena akan menghasilkan  $\alpha_n = 0$  yang menyebabkan pembagian dengan 0 pada persamaan (3.17), sehingga kondisi konsistensi tidak terpenuhi.

### 3.5 Model Pekeris-Accad-Skholler (PAS)

Model PAS diperkenalkan oleh Pekeris, Accad, dan Skholler pada tahun 1973 dan didukung oleh Dudle dan James (1989). Model PAS merupakan salah satu model dinamo kinematika yang memiliki aliran yang tidak planar. Model aliran PAS didefinisikan dalam bentuk poloidal dan toroidal, sebagai berikut:

$$\mathbf{v} = 2\Re(s_2^2 + t_2^2). \quad (3.18)$$

Dengan

$$s_2^2 = K\Lambda j_2(\Lambda r),$$

$$t_2^2 = \Lambda s_2^2(r) = K\Lambda^2 j_2(\Lambda r). \quad (3.19)$$

$K = \sqrt{6/5}$ ,  $\Lambda$  adalah akar positif dari fungsi *spherical bessel* orde kedua:

$$j_2(r) = \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \sin r - \frac{3}{r^2} \cos r. \quad (3.20)$$

Model PAS ini memenuhi kondisi batas (2.40), kondisi diferensiabilitas (2.46) dan (2.47), tapi tidak memenuhi kondisi tanpa slip (2.41) (Bachtiar, 2009).

Berikut akan ditunjukkan bahwa bagian  $s_2^2$  dan  $t_2^2$  dari model aliran, memenuhi kondisi diferensiabilitas:

Persamaan (3.20) diekspansikan ke dalam bentuk deret:

$$\begin{aligned} j_2(r) &= \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \sin r - \frac{3}{r^2} \cos r \\ &= \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \left(r - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} - \dots\right) - \frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \dots\right) \\ &= \frac{8r^2}{5!} - \frac{45r^4}{7!} + \frac{48r^6}{9!} - \dots \end{aligned}$$

(3.21)

Substitusikan persamaan (3.21) ke dalam  $s_2^2$ , menjadi:

$$\begin{aligned} s_2^2 &= K\Lambda j_2(\Lambda r) \\ &= K\Lambda \left( \frac{8\Lambda^2 r^2}{5!} - \frac{45\Lambda^4 r^4}{7!} + \frac{48\Lambda^6 r^6}{9!} - \dots \right) \\ &= r^2 \left( \frac{8K\Lambda^3}{5!} - \frac{45\Lambda^5 r^2}{7!} + \frac{48\Lambda^7 r^4}{9!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Sehingga bagian  $s_2^2$  memenuhi kondisi diferensiabilitas pada persamaan (2.46), dengan

$$a_0 = \frac{8K\Lambda^3}{5!}, a_1 = -\frac{45\Lambda^5}{7!}, a_2 = \frac{48\Lambda^7}{9!}, \dots$$

Substitusikan persamaan (3.21) ke dalam  $t_2^2$ , menjadi:

$$\begin{aligned} t_2^2 &= K\Lambda^2 j_2(\Lambda r) \\ &= K\Lambda^2 \left( \frac{8\Lambda^2 r^2}{5!} - \frac{45\Lambda^4 r^4}{7!} + \frac{48\Lambda^6 r^6}{9!} - \dots \right) \\ &= r^2 \left( \frac{8K\Lambda^4}{5!} - \frac{45\Lambda^6 r^2}{7!} + \frac{48\Lambda^8 r^4}{9!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Sehingga bagian  $t_2^2$  juga memenuhi kondisi diferensiabilitas pada persamaan (2.47), dengan

$$b_0 = \frac{8K\Lambda^4}{5!}, b_1 = -\frac{45\Lambda^6}{7!}, b_2 = \frac{48\Lambda^8}{9!}, \dots$$

BIJ juga melakukan pengujian terhadap model PAS, dengan menggunakan  $\Lambda = 12,3229$  dan rantai magnet M02. Mereka memperoleh  $\lambda_{max}$  yang positif dan konvergen dengan bilangan Reynold yang relatif kecil, yaitu  $R = 0,37$ . Dengan alasan ini BIJ memilih model PAS dengan harapan ada kemungkinan model PAS dapat diplanarkan. Sehingga hasil planarisasinya dapat menjadi bukti keberadaan model dinamo aliran planar.

### 3.6 Planarisasi Model PAS

BIJ mencoba memplanarkan model PAS dengan harapan model ini dapat menjadi model dinamo matematika yang memiliki aliran planar. Untuk

memplanarkan bagian poloidal  $s_2^2$ , BIJ menggunakan persamaan (3.9) untuk mendapatkan:

$$f_2^2 = -3i K \Lambda j_2(\Lambda r). \quad (3.22)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.15) dan (3.13) diperoleh:

$$\begin{aligned} t_3^2 &= -\frac{\alpha_3}{3} d_{-2} f_2^2 \\ &= -\frac{\alpha_3}{3} d_{-2} (-3i K \Lambda j_2(\Lambda r)). \\ t_3^2 &= -\frac{\alpha_3}{3} 3i K \Lambda (\Lambda j_3(\Lambda r)). \end{aligned}$$

Namun terdapat masalah ketika memplanarkan  $t_2^2$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^4 t_2^2 dr &= \int_0^1 r^4 K \Lambda^2 j_2(\Lambda r) dr \\ &= K \Lambda r^4 j_3(\Lambda r) \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Karena  $\Lambda$  bukan merupakan akar dari fungsi  $j_3$ , maka:

$$\int_0^1 r^4 t_2^2 dr = K \Lambda r^4 j_3(\Lambda r) \Big|_0^1 \neq 0.$$

Sehingga  $t_2^2$  tidak memenuhi kondisi konsistensi (3.17), yang berarti  $t_2^2$  tidak dapat diplanarkan.

Jadi, model PAS tidak dapat diplanarkan, namun hanya dapat dijadikan planar sebagian, yaitu:

$$\mathbf{v} = 2\Re(s_2^2 + t_2^2 + t_3^2).$$

BIJ melakukan pengujian numerik terhadap model PAS versi planar sebagian dengan menggunakan  $\Lambda = 12,3229$  dan rantai magnet M02. Pengujiannya menunjukkan pertumbuhan medan magnet yang lebih baik daripada model PAS, bahkan mendapatkan hasil yang konvergen dengan bilangan Reynold yang lebih kecil, yaitu  $R = 0,26$  (Bachtiar, 2009).

Karena model PAS tidak dapat diplanarkan, dilakukan modifikasi terhadap model PAS, dengan harapan model hasil modifikasi tersebut dapat menjadi model kinematika yang baru yang dapat diplanarkan. Modifikasi model PAS ini dibahas pada Bab 4.

## BAB 4 MODIFIKASI MODEL PAS

### 4.1 Model QuasiPAS

Pada Subbab 3.6 dapat dilihat bahwa model PAS tidak dapat diplanarkan pada bagian toroidal, karena  $t_2^2$  tidak memenuhi kondisi konsistensi. Untuk itu, modifikasi terhadap model PAS dilakukan pada bagian toroidalnya sedemikian sehingga  $t_2^2$  memenuhi kondisi konsistensi dan dapat diplanarkan.

Modifikasi yang dilakukan adalah dengan cara mengganti fungsi  $j_2(\Lambda_i r)$  yang digunakan pada bagian toroidal model PAS menjadi  $j_2(\Gamma_k r)$ , dengan  $\Lambda_i$  adalah nilai akar  $j_2$  (fungsi *spherical bessel* orde dua) dan  $\Gamma_k$  adalah nilai akar  $j_3$  (fungsi *spherical bessel* orde tiga). Berikut adalah hasil modifikasi model PAS dengan cara yang disebutkan di atas:

Definisikan model aliran:

$$\mathbf{v} = 2\Re(s_2^2 + t_2^2).$$

Dengan

$$s_2^2 = K\Lambda_i j_2(\Lambda_i r). \quad (4.1)$$

$$t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r). \quad (4.2)$$

$$j_3(r) = \left(\frac{105}{r^5} - \frac{45}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \sin r - \left(\frac{15}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \cos r. \quad (4.3)$$

$K = \sqrt{6/5}$ ,  $\Lambda_i$  adalah akar positif ke  $i$  dari  $j_2$ ,  $\Gamma_k$  adalah akar positif ke  $k$  dari  $j_3$ , dengan rantai magnet:

$$M02: S_1^0, T_1^0, S_2^0, T_2^0, S_2^2, T_2^2, S_3^0, T_3^0, S_3^2, T_3^2, S_4^0, T_4^0, S_4^2, T_4^2, S_4^4, T_4^4, \dots \text{ atau}$$

$$M12: S_1^1, T_1^1, S_2^1, T_2^1, S_3^1, T_3^1, S_3^3, T_3^3, S_4^1, T_4^1, S_4^3, T_4^3, S_5^1, T_5^1, S_5^3, T_5^3, S_5^5, T_5^5, \dots$$

Model aliran dengan salah satu rantai magnet di atas, untuk selanjutnya dinamakan model quasiPAS (Bachtiar, 2009).

Dapat dibuktikan bahwa model quasiPAS merupakan model yang dapat diplanarkan dengan cara menunjukkan bahwa  $t_2^2$  memenuhi kondisi konsistensi (3.11). Dengan menggunakan formula turunan untuk fungsi *spherical bessel*, diperoleh identitas berikut:

$$\int r^{n+2} j_n(\Lambda r) dr = \frac{1}{\Lambda} r^n j_{n+1}(\Lambda r) + c. \quad (4.4)$$

$t_2^2$  pada model quasiPAS terbukti memenuhi kondisi konsistensi (3.11), yaitu:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^4 t_2^2 dr &= \int_0^1 r^4 K \Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r) dr \\ &= K \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} r^4 j_3(\Gamma_k r) \Big|_0^1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Karena bagian poloidal model quasiPAS sama dengan bagian poloidal model PAS dan telah terbukti dapat diplanarkan, dan bagian toroidal model quasiPAS juga dapat diplanarkan, maka dapat disimpulkan bahwa model quasiPAS dapat diplanarkan.

Untuk pengujian apakah model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru, digunakan 6 akar positif pertama dari  $j_2$  dan  $j_3$ , yaitu:

$$\Lambda = 5,7634 ; 9,0950 ; 12,3229 ; 18,6890 ; 21,8538 ; 25,0128.$$

$$\Gamma = 6,9879 ; 10,4171 ; 13,6980 ; 16,9236 ; 20,1218 ; 23,3042.$$

Aliran dari model quasiPAS ini memenuhi kondisi batas (2.40), kondisi diferensiabilitas (2.46) dan (2.47), tapi tidak memenuhi kondisi tanpa slip (2.41).

#### 4.2 Hasil Pengujian Numerik Model QuasiPAS

Pengujian numerik terhadap model quasiPAS pada penelitian ini menggunakan program Fortran 95. Program utama dibuat oleh M.L Dudley, kemudian dimodifikasi oleh R.W James dan dilanjutkan oleh Bachtiar. Pada penelitian ini, penulis melanjutkan program tersebut dengan membuat sebuah subrutin untuk keperluan pengujian model quasiPAS.

Pengujian dilakukan terhadap semua kombinasi  $\Lambda_i \Gamma_k$  yang mungkin, dengan  $i = 1, 2, \dots, 6$  dan  $k = 1, 2, \dots, 6$ . Sehingga, terdapat 36 kombinasi  $\Lambda_i \Gamma_k$  yang akan digunakan, yaitu:

Tabel 4.1 Kombinasi  $\Lambda_i \Gamma_k$  dengan  $i = 1, 2, \dots, 6$  dengan  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

$\Lambda_1 \Gamma_1$	$\Lambda_2 \Gamma_2$	$\Lambda_3 \Gamma_1$	$\Lambda_4 \Gamma_1$	$\Lambda_5 \Gamma_1$	$\Lambda_6 \Gamma_1$
$\Lambda_1 \Gamma_2$	$\Lambda_2 \Gamma_2$	$\Lambda_3 \Gamma_2$	$\Lambda_4 \Gamma_2$	$\Lambda_5 \Gamma_2$	$\Lambda_6 \Gamma_2$

$\Lambda_1\Gamma_3$	$\Lambda_2\Gamma_3$	$\Lambda_3\Gamma_3$	$\Lambda_4\Gamma_3$	$\Lambda_5\Gamma_3$	$\Lambda_6\Gamma_3$
$\Lambda_1\Gamma_4$	$\Lambda_2\Gamma_4$	$\Lambda_3\Gamma_4$	$\Lambda_4\Gamma_4$	$\Lambda_5\Gamma_4$	$\Lambda_6\Gamma_4$
$\Lambda_1\Gamma_5$	$\Lambda_2\Gamma_5$	$\Lambda_3\Gamma_5$	$\Lambda_4\Gamma_5$	$\Lambda_5\Gamma_5$	$\Lambda_6\Gamma_5$
$\Lambda_1\Gamma_6$	$\Lambda_2\Gamma_6$	$\Lambda_3\Gamma_6$	$\Lambda_4\Gamma_6$	$\Lambda_5\Gamma_6$	$\Lambda_6\Gamma_6$

Telah dijelaskan bahwa suatu model dinamo kinematika ditentukan oleh model aliran dan rantai magnet yang digunakan. Masing-masing  $\Lambda_i\Gamma_k$  menghasilkan model aliran yang berbeda-beda, dapat dilihat pada persamaan 4.1 dan 4.2. Akibatnya model quasiPAS yang terbentuk berbeda pula. Sehingga dari 36 kombinasi  $\Lambda_i\Gamma_k$  yang digunakan akan terbentuk 36 model quasiPAS yang berbeda. Dari 36 model tersebut, 9 model diantaranya yang menggunakan  $\Lambda_i\Gamma_k$  dengan  $i = 1,2,3$  dan  $k = 1,2,3$  telah diuji dalam penelitian Bachtiar. Pada pengujian numerik ini 9 model tersebut tetap digunakan sebagai validasi subrutin program untuk model quasiPAS.

Nilai parameter yang digunakan dalam pengujian numerik didasarkan pada pengujian yang telah dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Pengujian numerik yang dilakukan oleh PAS (1973) memperoleh hasil yang konvergen dengan bilangan Reynolds  $R$  sekitar 0,37, sehingga pada pengujian ini bilangan Reynolds yang digunakan adalah di sekitar angka tersebut dan lebih diperbesar dalam range  $0 \leq R \leq 2,5$ . Untuk melihat kekonvergenan hasil pengujian, digunakan parameter level pemotongan yang berbeda-beda, sesuai dengan yang digunakan dalam pengujian yang dilakukan Bachtiar (2009). Karena keterbatasan kapasitas komputer, level pemotongan  $[J,N]$  yang digunakan dalam pengujian ini dibatasi untuk  $J = 100, 200$  dan  $N \leq 21$ .

Suatu model dikatakan berhasil menghasilkan medan magnet jika mendapatkan  $\lambda_{max}$  yang positif dan hasilnya konvergen terhadap perubahan parameter  $[J,N]$ . Dari 36 model yang diuji, ditemukan 8 model quasiPAS yang berhasil menghasilkan medan magnet. Sesuai dengan hasil yang sebelumnya ditemukan oleh Bachtiar (2009), pada Tabel 4.2 di bawah ini diberikan hasil dari 8 model quasiPAS yang berhasil menemukan nilai  $\lambda_{max}$  positif dan dengan nilai  $N$  dan  $J$  yang diubah-ubah menunjukkan hasil yang konvergen.

Tabel 4.2.  $\lambda_{max}$  untuk model quasiPAS yang berhasil untuk semua kombinasi  $\Lambda_i \Gamma_k$  yang diuji, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_i \Gamma_k$	R	$N$	$J = 100$	$J = 200$
$\Lambda_1 \Gamma_1$	1,65	15	0,76036	0,76630
		16	0,76537	0,76980
		17	0,75881	0,76416
$\Lambda_1 \Gamma_2$	2,1	15	1,25025	1,26974
		16	1,22220	1,24373
		17	1,24935	1,26768
$\Lambda_2 \Gamma_1$	0,28	11	0,54933	0,55587
		12	0,54929	0,55519
		13	0,55101	0,55678
$\Lambda_2 \Gamma_2$	0,4	11	1,98293	2,00606
		12	1,97964	2,00425
		13	1,98667	2,01277
$\Lambda_2 \Gamma_3$	1,05	18	0,86007	0,86007
		19	0,86007	0,86007
		20	0,86007	0,85912
$\Lambda_3 \Gamma_1$	0,25	13	0,51576	0,52869
		15	0,51348	0,52672
		16	0,51373	0,51408
$\Lambda_3 \Gamma_2$	0,2	13	0,48311	0,49485
		15	0,48297	0,49474
		16	0,48294	0,49613
$\Lambda_3 \Gamma_3$	0,23	11	0,36820	0,39843
		12	0,36715	0,39849
		13	0,36571	0,39776

Pada Tabel 4.3 diberikan contoh model quasiPAS yang menghasilkan  $\lambda_{max}$  positif, namun hasilnya tidak konvergen terhadap beberapa perubahan parameter  $[J, N]$ . Sehingga, dari hasil pengujian tidak dapat disimpulkan bahwa model di bawah ini dapat menjadi model dinamo kinematika.

Tabel 4.3. Contoh model quasiPAS yang menghasilkan  $\lambda_{max}$  positif namun tidak konvergen, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_i \Gamma_k$	R	$N$	$J = 100$	$J = 200$
$\Lambda_2 \Gamma_4$	1,1	11	0,52882	0,57662
		12	0,45267	0,49740
		13	1,82563	1,84668
$\Lambda_3 \Gamma_4$	0,56	11	0,42319	0,68953
		12	0,60397	0,86856
		15	0,23272	0,49494

$\Lambda_5\Gamma_5$	0,85	11	0,04521	12,13464
		12	14,87401	15,43850
		13	8,55566	9,50283

Sebagai contoh, perhatikan hasil pengujian untuk  $\Lambda_2\Gamma_4$ . Dari Tabel 4.3 dapat dilihat bahwa untuk  $N = 11$  dengan  $N = 13$  hasilnya tidak konvergen. Begitu juga dengan model  $\Lambda_5\Gamma_5$ , hasil untuk  $J = 100$  dan  $J = 200$  juga konvergen.

Untuk model-model yang belum konvergen tersebut masih terdapat kemungkinan untuk memperoleh hasil yang konvergen dengan cara menaikkan parameter  $[J, N]$  menjadi lebih besar. Namun, untuk menjalankannya dibutuhkan kapasitas komputer yang lebih besar dan waktu yang lebih lama.

Pada Tabel 4.4 berikut diberikan contoh model quasiPAS yang tidak dapat menghasilkan  $\lambda_{max}$  yang positif untuk interval  $0 \leq R \leq 2,5$ , walaupun beberapa model menunjukkan hasil yang konvergen terhadap perubahan parameter  $[J, N]$ . Namun karena  $\lambda_{max}$  yang ditemukan bernilai negatif, pengujian ini tetap memberikan hasil bahwa model pada Tabel 4.4 tidak dapat menghasilkan medan magnet.

Tabel 4.4. Contoh model quasiPAS yang tidak menghasilkan  $\lambda_{max}$  positif, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_j\Gamma_k$	$R$	$N$	$J = 100$	$J = 200$
$\Lambda_1\Gamma_4$	1,5	11	-10,64307	-10,65824
		12	-10,556101	-10,56645
		13	-10,39021	-10,40017
$\Lambda_1\Gamma_5$	0,5	11	-11,40131	-11,40080
		12	-11,29391	-11,40040
		13	-11,29415	-11,40063
$\Lambda_1\Gamma_6$	0,5	11	-11,47599	-11,47196
		12	-11,47605	-11,47556
		13	-11,47606	-11,47606

Pada pengujian yang telah dilakukan, terdapat model yang berhasil dan tidak berhasil membangkitkan medan magnet. Untuk itu, penulis menganalisis kemungkinan penyebabnya dengan melihat pola nilai maksimum dan grafik dari model quasiPAS yang diuji.

Berikut adalah tabel nilai maksimum  $s_2^2$  dan  $t_2^2$  model quasiPAS untuk semua kombinasi  $\Lambda_i\Gamma_k$  yang diuji:

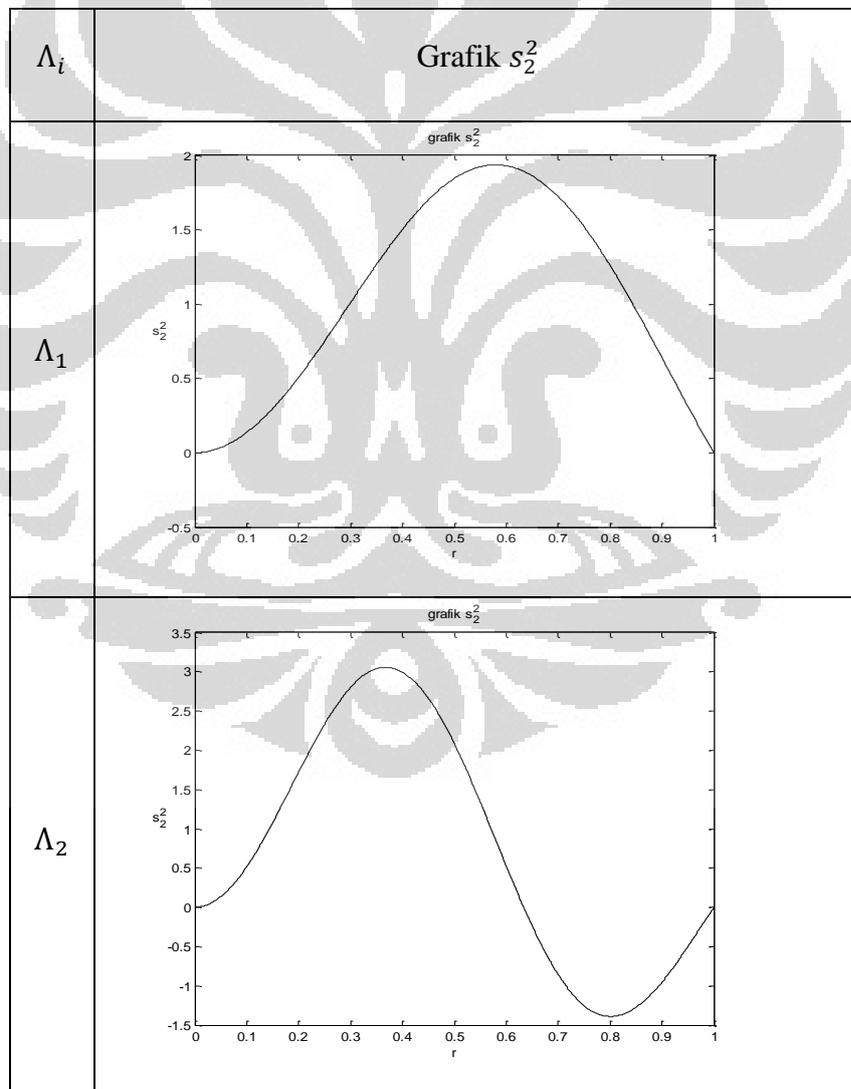
Tabel 4.5. Nilai mutlak maksimum untuk bagian  $s_2^2 = K\Lambda_{ij_2}(\Lambda_i r)$  dan  $t_2^2 = K\Lambda_{ij_2}^2(\Gamma_k r)$  dari model quasiPAS.

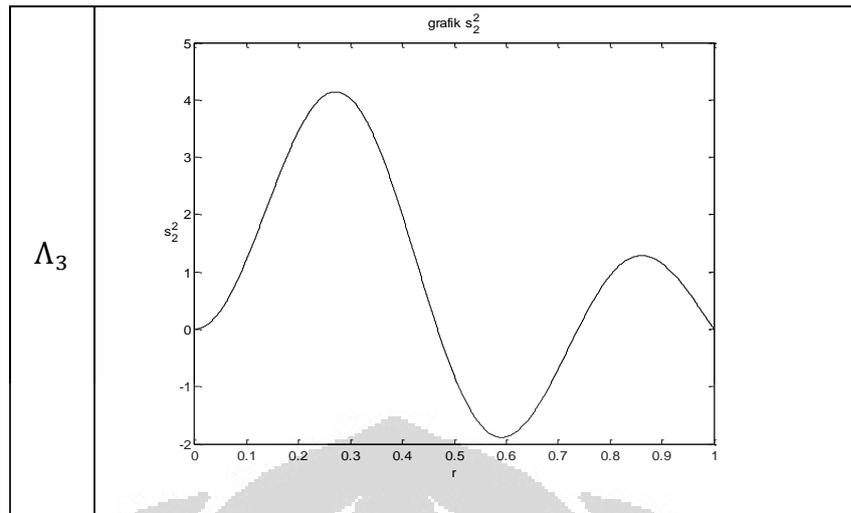
$\Lambda_i\Gamma_k$	Max $s_2^2$	Max $t_2^2$
$\Lambda_1\Gamma_1$	1,9369465	11,1635
$\Lambda_1\Gamma_2$	1,9369465	11,1635
$\Lambda_1\Gamma_3$	1,9369465	11,1635
$\Lambda_1\Gamma_4$	1,9369465	11,1633
$\Lambda_1\Gamma_5$	1,9369465	11,1635
$\Lambda_1\Gamma_6$	1,9369465	11,1633
$\Lambda_2\Gamma_1$	3,0565932	27,7997
$\Lambda_2\Gamma_2$	3,0565932	27,7997
$\Lambda_2\Gamma_3$	3,0565932	27,7998
$\Lambda_2\Gamma_4$	3,0565932	27,7993
$\Lambda_2\Gamma_5$	3,0565932	27,7997
$\Lambda_2\Gamma_6$	3,0565932	27,7992
$\Lambda_3\Gamma_1$	4,141415	51,0344
$\Lambda_3\Gamma_2$	4,141415	51,0344
$\Lambda_3\Gamma_3$	4,141415	51,0344
$\Lambda_3\Gamma_4$	4,141415	51,0336
$\Lambda_3\Gamma_5$	4,141415	51,0344
$\Lambda_3\Gamma_6$	4,141415	51,0333
$\Lambda_4\Gamma_1$	6,280892	117,3837
$\Lambda_4\Gamma_2$	6,280892	117,3837
$\Lambda_4\Gamma_3$	6,280892	117,3838
$\Lambda_4\Gamma_4$	6,280892	117,3820
$\Lambda_4\Gamma_5$	6,280892	117,3837
$\Lambda_4\Gamma_6$	6,280892	117,3813
$\Lambda_5\Gamma_1$	7,3445096	160,5059
$\Lambda_5\Gamma_2$	7,3445096	160,5059
$\Lambda_5\Gamma_3$	7,3445096	160,5060
$\Lambda_5\Gamma_4$	7,3445096	160,5035
$\Lambda_5\Gamma_5$	7,3445096	160,5059
$\Lambda_5\Gamma_6$	7,3445096	160,5026
$\Lambda_6\Gamma_1$	8,406142	210,2610
$\Lambda_6\Gamma_2$	8,406142	210,2610
$\Lambda_6\Gamma_3$	8,406142	210,2612
$\Lambda_6\Gamma_4$	8,406142	210,2579
$\Lambda_6\Gamma_5$	8,406142	210,2610
$\Lambda_6\Gamma_6$	8,406142	210,2567

Dari Tabel 4.5, dapat dilihat bahwa model yang berhasil membangkitkan medan magnet memiliki nilai maksimum absolut yang relatif lebih kecil daripada model yang tidak berhasil. Kemungkinan untuk konvergen ke nilai yang kecil lebih mudah, karena untuk bisa konvergen ke nilai yang besar dibutuhkan nilai awal dan nilai parameter  $[J, N]$  yang cukup besar juga.

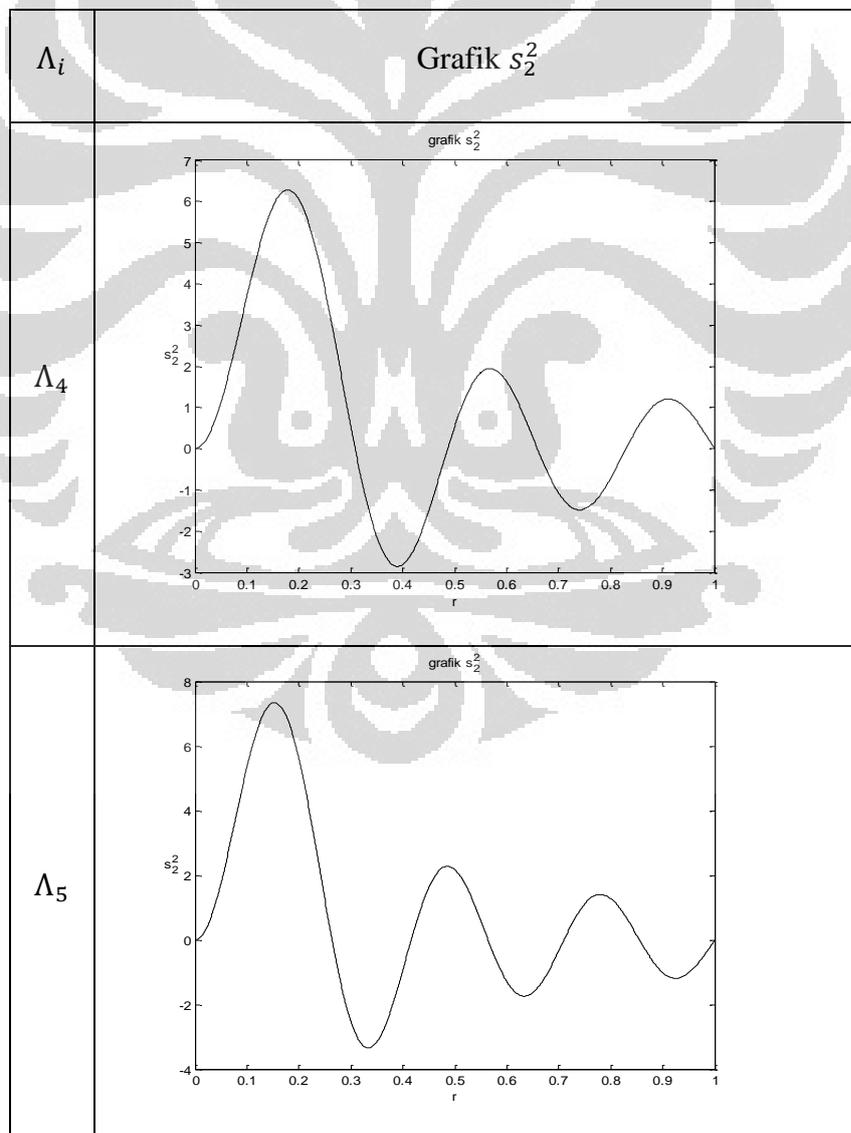
Dari Tabel 4.5 dapat dilihat juga bahwa terdapat model yang memiliki nilai maksimum absolut yang sama, namun model yang satu berhasil sedangkan model yang lain tidak berhasil. Untuk itu, penulis mencoba mencari penyebabnya dengan melihat pola grafik masing-masing model.

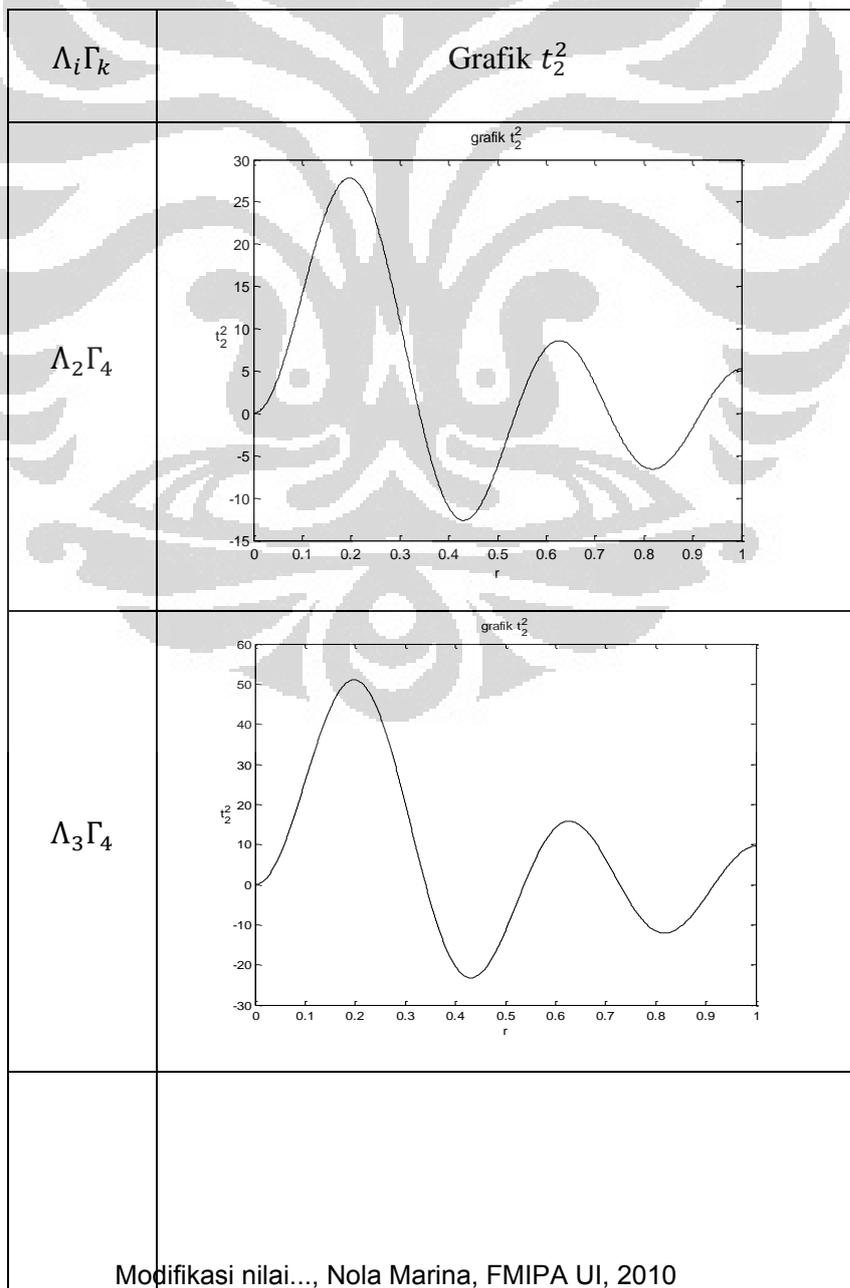
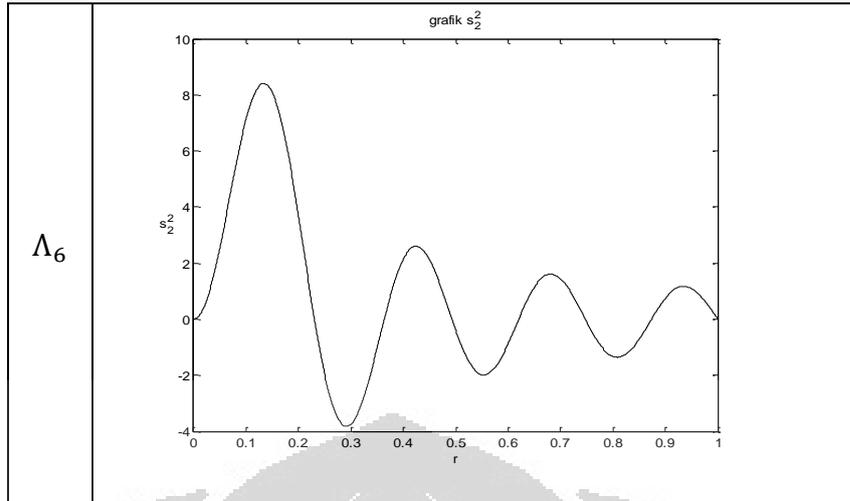
Berikut ini diberikan grafik  $s_2^2$  (Gambar 4.1 dan 4.2) dari model quasiPAS untuk semua kombinasi  $\Lambda_i \Gamma_k$  yang diuji :

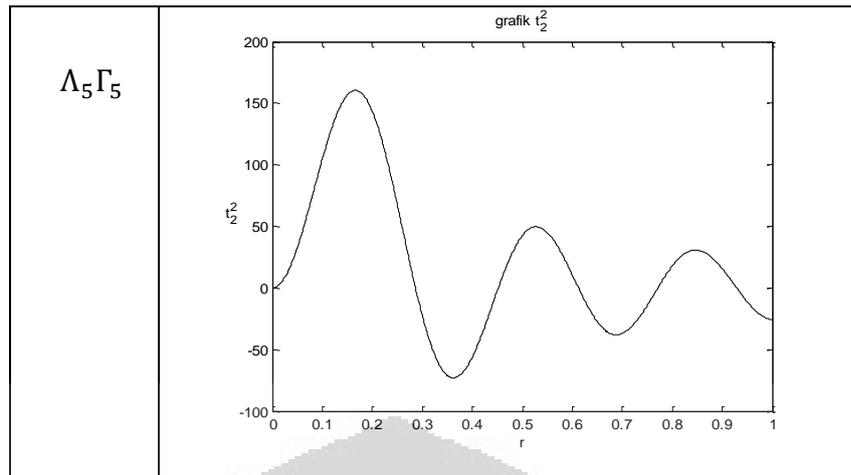




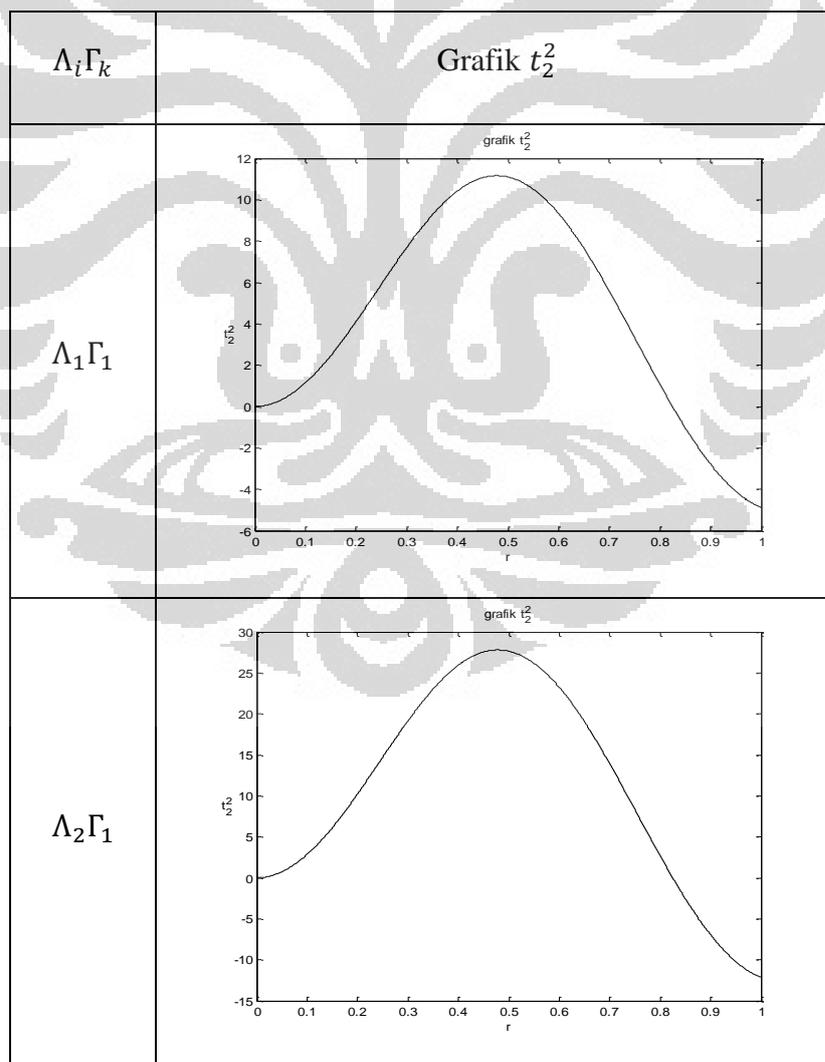
Gambar 4.1. Grafik  $s_2^2 = K\Lambda_{ij2}(\Lambda_i r)$ , untuk  $i = 1,2,3$ .

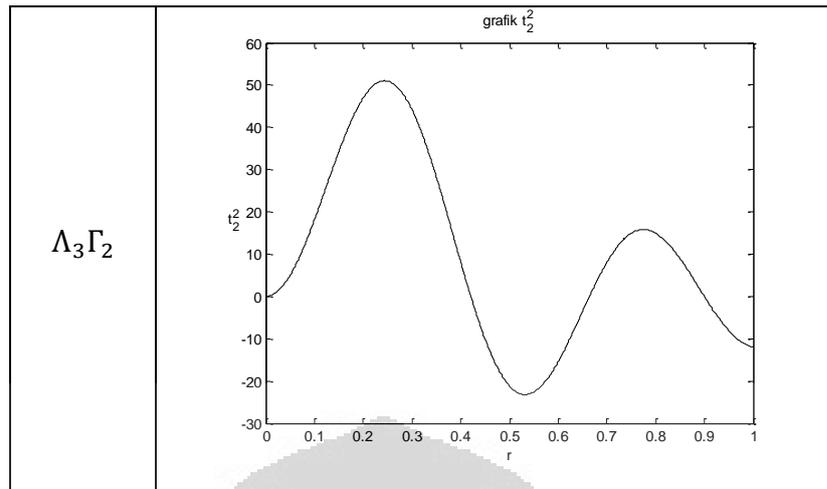






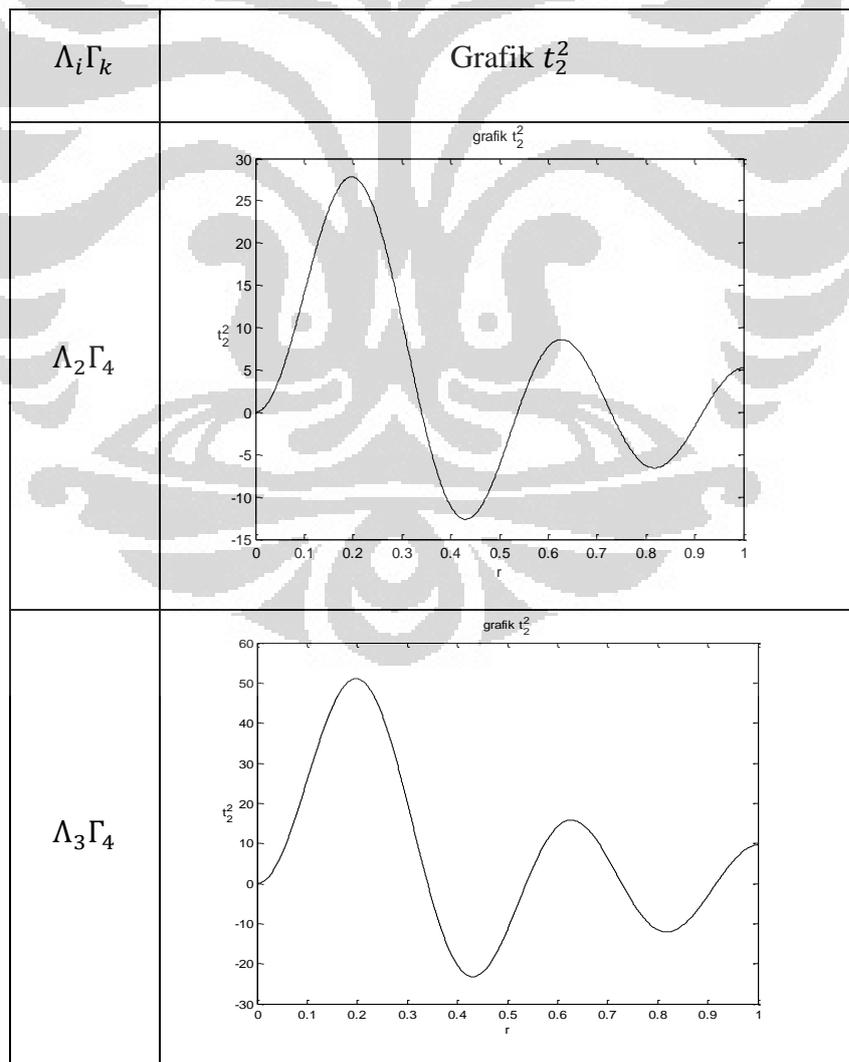
Gambar 4.2. Grafik  $s_2^2 = K\Lambda_{ij_2}(\Lambda_i r)$ , untuk  $i = 4,5,6$ .

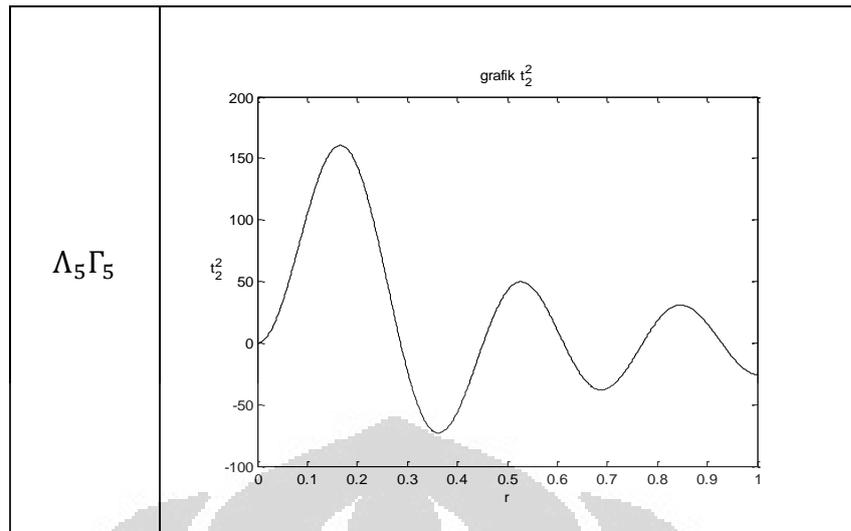




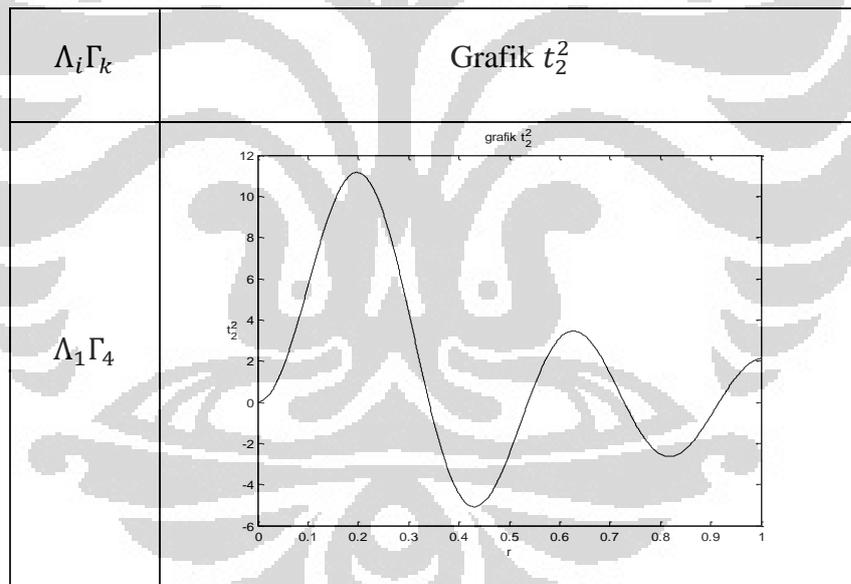
Gambar 4.3. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_1\Gamma_1, \Lambda_2\Gamma_1,$  dan  $\Lambda_3\Gamma_2$

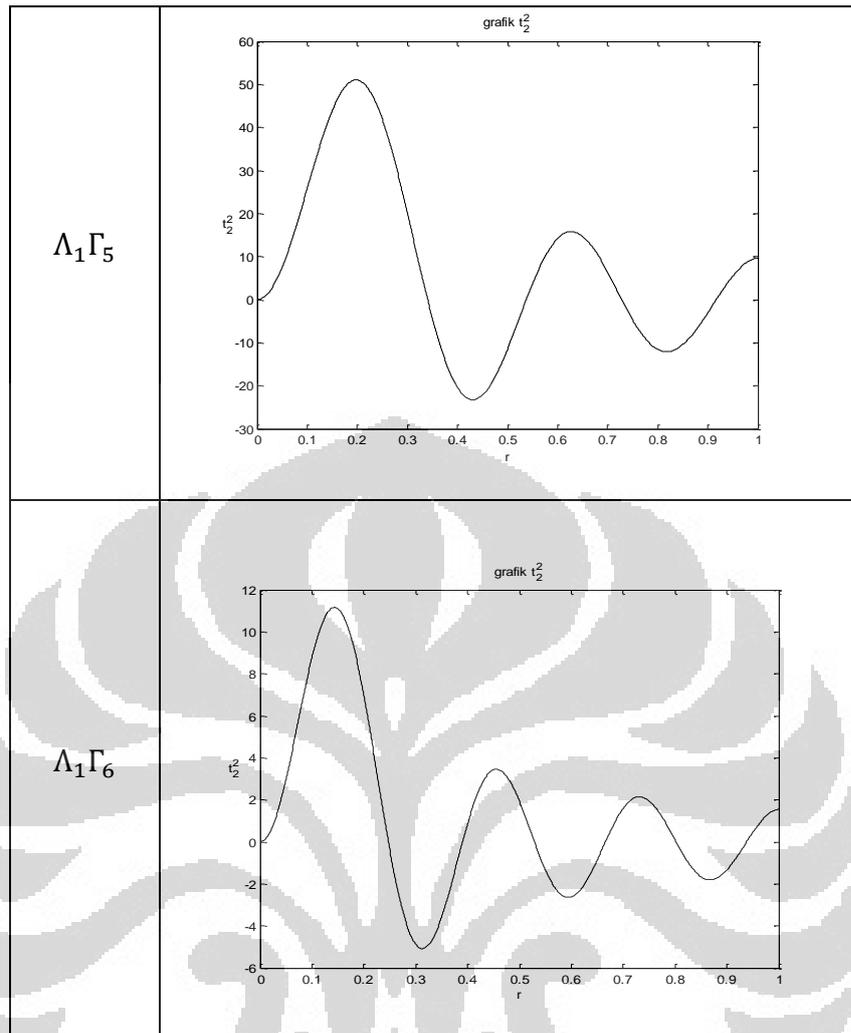
Berikut ini diberikan grafik  $t_2^2$  (Gambar 4.3 - 4.5) dari model quasiPAS untuk beberapa kombinasi  $\Lambda_i\Gamma_k$  yang diuji. :





Gambar 4.4. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_2\Gamma_4$ ,  $\Lambda_3\Gamma_4$ , dan  $\Lambda_5\Gamma_5$





Gambar 4.5. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_1\Gamma_4$ ,  $\Lambda_1\Gamma_5$ , dan  $\Lambda_1\Gamma_6$

Dari Gambar 4.1 – 4.2 dapat dilihat bahwa semakin besar nilai  $\Lambda_i$  maka bentuk grafik  $s_2^2$  semakin rumit, yaitu gradiennya semakin besar. Begitu juga dengan Gambar 4.3 - 4.5. Walaupun terdapat dua model dengan nilai maksimum absolut  $t_2^2$  yang sama, namun bentuk grafiknya berbeda.

Contoh: grafik  $t_2^2$  untuk  $\Lambda_1\Gamma_1$  (model yang berhasil) dan  $\Lambda_1\Gamma_6$  (model yang tidak berhasil) memiliki nilai maksimum absolut yang sama, namun grafik  $\Lambda_1\Gamma_6$  memiliki gradien yang lebih besar daripada grafik  $\Lambda_1\Gamma_1$ .

Dari analisa di atas dapat disimpulkan bahwa ada kemungkinan keberhasilan suatu model dalam membangkitkan medan magnet dipengaruhi oleh besarnya gradien dari model tersebut. Model yang berhasil, cenderung memiliki

gradien yang relatif lebih kecil daripada model yang tidak berhasil. Model yang memiliki gradien besar memang cenderung tidak berhasil, namun ada kemungkinan untuk mendapatkan hasil yang konvergen dengan menggunakan metode dengan ketelitian yang lebih tinggi.

### 4.3 Planarisasi Model QuasiPAS

Telah diketahui bahwa model PAS perlu dimodifikasi untuk tujuan mendapatkan model dinamo kinematika yang planar. Pada Subbab 4.1 telah didapatkan hasil modifikasi model PAS agar bisa diplanarkan, yaitu model quasiPAS. Telah dibuktikan pula pada Subbab 4.2 bahwa model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika baru. Selanjutnya, pada subbab ini, akan ditunjukkan bahwa model quasiPAS dapat diplanarkan.

Berikut akan dijelaskan proses planarisasi untuk model quasiPAS, berdasarkan proses planarisasi yang telah dijelaskan pada Subbab 3.4.

Untuk memplanarkan bagian polodial dari model aliran,  $s_2^2$ , dibutuhkan koefisien toroidal  $t_3^2$ .

Sebelumnya, substitusi  $s_2^2$  ke dalam persamaan (3.9):

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \frac{2i}{6} f_2^2. \\ f_2^2 &= -3is_2^2. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$f_2^2 = -3iK\Lambda_j j_2(\Lambda_i r). \quad (4.6)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (3.15) :

$$t_3^2 = -\frac{\alpha_3}{3} d_{-2} f_2^2.$$

dan identitas berikut :

$$\frac{n}{r} j_n(\Lambda r) - \frac{d}{dr} j_n(\Lambda r) = \Lambda j_{n+1}(\Lambda r). \quad (4.7)$$

diperoleh:

$$t_3^2 = -\frac{\alpha_3}{3} d_{-2} (-3iK\Lambda_j j_2(\Lambda_i r))$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha_3}{3} \left( \frac{d}{dr} - \frac{2}{r} \right) (-3iK\Lambda_i j_2(\Lambda_i r)) \\
&= -\frac{\alpha_3}{3} 3iK\Lambda_i \left( \frac{2}{r} j_2(\Lambda_i r) - \frac{d}{dr} (j_2(\Lambda_i r)) \right) \\
&= -\frac{\alpha_3}{3} 3iK\Lambda_i (\Lambda_i j_3(\Lambda_i r)) \\
&= -\alpha_3 iK\Lambda_i^2 j_3(\Lambda_i r). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Untuk memplanarkan bagian toroidal dari model aliran,  $t_2^2$ , dibutuhkan koefisien poloidal  $s_3^2$  dan toroidal  $t_4^2$ . Untuk mendapatkan  $s_3^2$  dan  $t_4^2$  diperlukan  $f_3^2$ . Dengan menggunakan persamaan (3.16a) dan sifat identitas pada fungsi *spherical bessel* (4.4), diperoleh:

$$\begin{aligned}
f_3^2 &= \frac{3}{\alpha_3} r^{-4} \int_1^r r^4 K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r) dr \\
&= \frac{3}{\alpha_3} K \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} j_3(\Gamma_k r). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (3.9) diperoleh:

$$\begin{aligned}
s_3^2 &= -\frac{i}{6} f_3^2 \\
&= \frac{i}{2\alpha_3} \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} K j_3(\Gamma_k r). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.15) dan identitas (4.7), diperoleh:

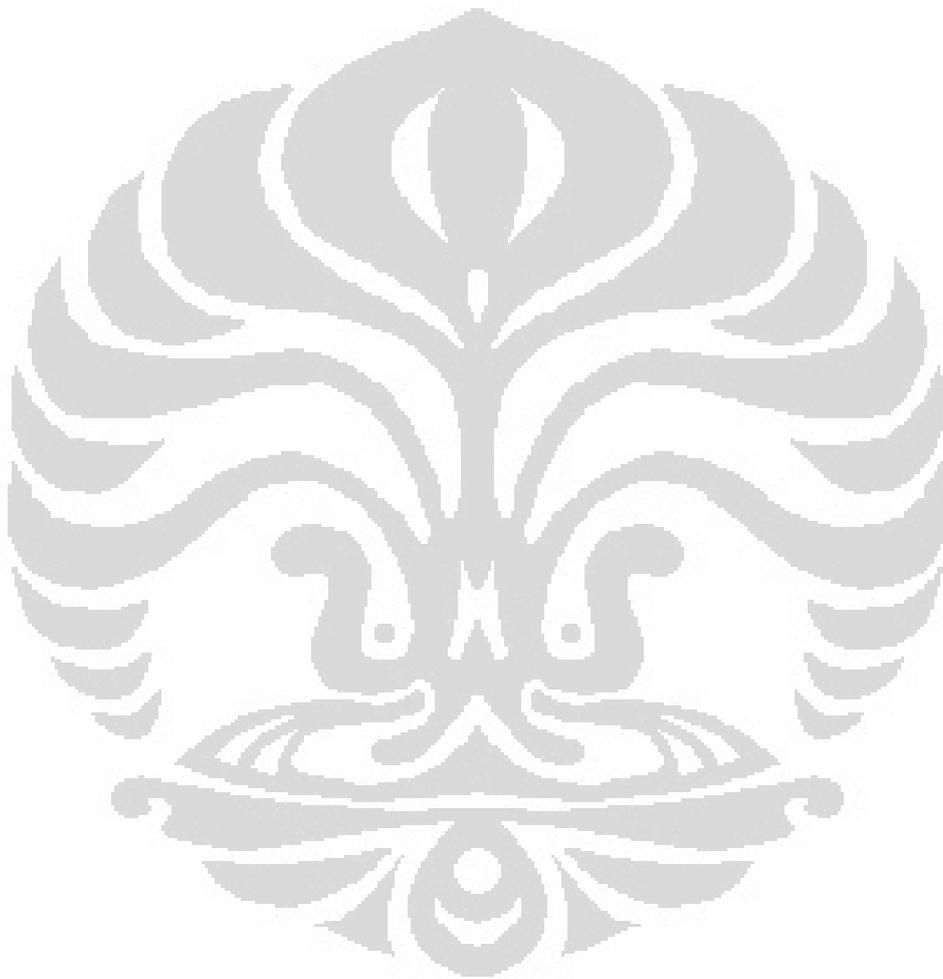
$$\begin{aligned}
t_4^2 &= -\frac{\alpha_4}{4} d_{-3} f_3^2 \\
&= -\frac{\alpha_4}{4} d_{-3} \left( \frac{3}{\alpha_3} K \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} j_3(\Gamma_k r) \right) \\
&= -\frac{\alpha_4}{4} \left( \frac{d}{dr} - \frac{3}{r} \right) \left( \frac{3}{\alpha_3} K \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} j_3(\Gamma_k r) \right) \\
&= -\frac{\alpha_4}{4} \frac{3}{\alpha_3} K \frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} \left( -\left( \frac{3}{r} j_3(\Gamma_k r) - \frac{d}{dr} (j_3(\Gamma_k r)) \right) \right) \\
&= -\frac{3\alpha_4 K \Lambda_i^2}{4\alpha_3 \Gamma_k} (-\Gamma_k j_4(\Gamma_k r)) \\
&= K \Lambda_i^2 \frac{\sqrt{3}}{2} j_4(\Gamma_k r). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh model quasiPAS planar sebagai berikut :

$$\mathbf{v} = 2\Re[(s_2^2 + \epsilon_s t_3^2) + (t_2^2 + \epsilon_t (s_3^2 + t_4^2))]. \tag{4.12}$$

Dengan  $\epsilon_s = \epsilon_t = 1$  dan rantai magnet M02, M12.

Model ini memenuhi kondisi batas (2.40), kondisi diferensiabilitas (2.46) dan (2.47), tapi tidak memenuhi kondisi tanpa slip (2.41).



## BAB 5 KESIMPULAN

Penulis telah melakukan pengujian terhadap model quasiPAS dengan menggunakan 36 model, termasuk 9 model yang telah diuji oleh Bachtiar (2009). Dari pengujian yang dilakukan diperoleh 8 model yang berhasil, sesuai dengan yang ditemukan oleh Bachtiar. Sedangkan model lainnya tidak berhasil membangkitkan medan magnet untuk interval  $0 \leq R \leq 2,5$ . Di antara model yang tidak berhasil tersebut terdapat beberapa model yang menghasilkan  $\lambda_{max}$  yang positif, namun tidak konvergen terhadap perubahan parameter  $[J, N]$ . Sedangkan model lainnya bahkan belum berhasil menemukan  $\lambda_{max}$  yang positif untuk interval  $0 \leq R \leq 2,5$ . Dengan hasil pengujian ini telah ditunjukkan bahwa model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru.

Masih diperlukan penelitian numerik untuk membuktikan apakah model quasiPAS yang telah diplanarkan dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru. Masalah ini disarankan untuk penelitian lanjutan dengan meningkatkan parameter dan metode yang digunakan dalam pengujian numerik, sehingga diperoleh hasil yang lebih baik dari penelitian sebelumnya oleh Bachtiar dan James (2010).

## DAFTAR PUSTAKA

- Bachtiar, A. A. (2009). *A study of planar velocity dynamos and related issues*. PhD thesis. Sydney: The University of Sydney.
- Bachtiar, A. A. & James, R. W. (2010). *Planar dynamo convergence test and application to a planar velocity dynamo*. Sydney: Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 104:5, 531–543.
- Bachtiar, A. A., Ivers D. J. & James, R. W. (2006). *Planar velocity dynamos in a sphere*. London: Proc.R.Soc.Lond. A462, 2439–2456.
- Bullard, E. C. & Gellman, H. (1954). *Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism*. London: Phil.Trans.R.Soc.Lond. A247, 213–278.
- Carrigan, R.C & D. Gubbins. (1979). *The source of the earth's magnetic field*. Scientific American.
- Chapman, S. & Bartels, J. (1962). *Geomagnetism* (vol. 2). Oxford: Oxford University Press.
- Davidson, P. A. (2001). *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dudley, M. L. & James, R. W. (1989). *Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows*. Proc.R.Soc.Lond. A425, 407–429.
- James, R.W. (1974). *The adam and elsasser dynamo integral*. London: Proc. R. Soc. Lond., A 331, 469–478.
- Merrill.T. R, McElhinny. M.W, McFadden. P.L. (1998). *The magnetic field of the earth*. California: Academic Press.
- Pekeris, C. L., Accad, Y. & Shkoller, B. (1973). *Kinematic dynamos and the earth's magnetic field*. Proc. R. Soc. Lond. A 275, 425–261.
- Tauxe, L. (2010). *Essentials of paleomagnetism*. California: University of California Press.
- Zel'dovitch, Ya. B. (1957). *The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent liquid*. JETP, 4, 460.
- Zel'dovitch, Ya. B. & Ruzmaikin, A. A. (1980). *The magnetic field in a conducting fluid in two-dimensional motion*. Soviet Phys. JETP, 51, 493–497

Lampiran 1: Tabel nilai  $\lambda_{max}$  untuk Model QuasiPAS yang Tidak Berhasil.

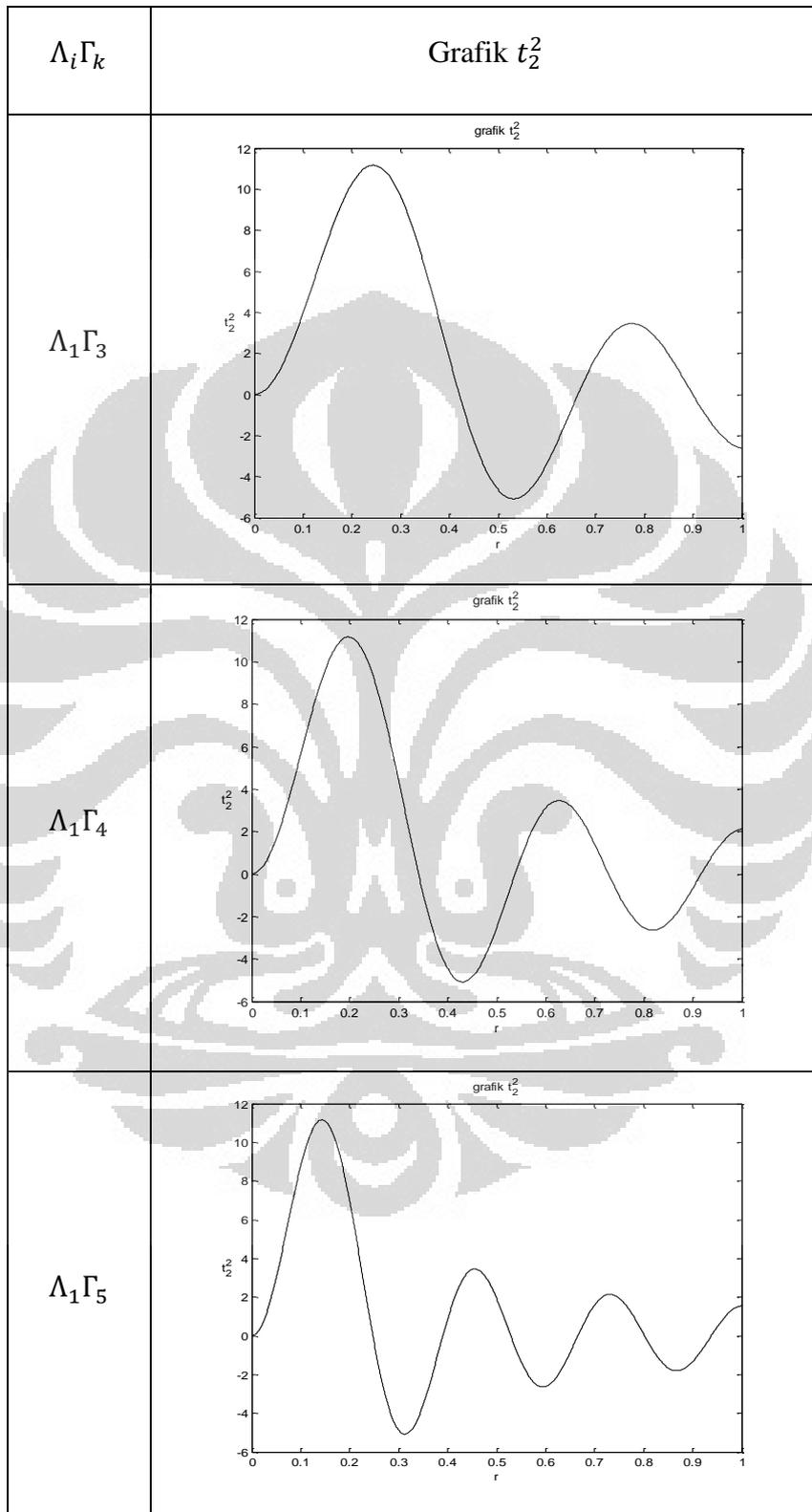
Tabel 1.  $\lambda_{max}$  untuk model quasiPAS yang tidak berhasil ( $\Lambda_i\Gamma_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  dengan  $k = 1, 2, \dots, 6$ , dengan rantai magnet M12 ).(a)

$\Lambda_i\Gamma_k$	R	N	J = 100	J = 200
$\Lambda_1\Gamma_3$	2,5	11	-3,56316	-3,60603
		12	-3,83894	-3,89417
		13	-1,25685	-1,31921
$\Lambda_1\Gamma_4$	1,5	11	-10,64307	-10,65824
		12	-10,55610	-10,56645
		13	-10,39021	-10,40017
$\Lambda_1\Gamma_5$	0,5	11	-11,40131	-11,40080
		12	-11,29391	-11,40040
		13	-11,29415	-11,40063
$\Lambda_1\Gamma_6$	0,5	11	-11,47599	-11,47196
		12	-11,47605	-11,47556
		13	-11,47606	-11,47606
$\Lambda_2\Gamma_4$	1,1	11	0,52882	0,57662
		12	0,45267	0,49740
		13	1,82563	1,84668
$\Lambda_2\Gamma_5$	0,5	11	-8,09787	-8,10192
		12	-8,09652	-8,09840
		13	-8,11806	-8,12009
$\Lambda_2\Gamma_6$	0,5	11	-9,44556	-9,44656
		12	-9,44341	-9,44390
		13	-9,43351	-9,43511
$\Lambda_3\Gamma_4$	0,56	11	0,42319	0,68953
		12	0,60397	0,86856
		15	0,23272	0,49494
$\Lambda_3\Gamma_5$	0,5	11	-9,23403	-9,15990
		12	-9,25043	-9,17752
		13	-9,53846	-9,46536
$\Lambda_3\Gamma_6$	0,5	11	-8,07070	-8,05119
		12	-8,06954	-8,04727
		13	-8,00945	-7,99119
$\Lambda_4\Gamma_1$	2,1	11	-4,97524	-4,58367
		12	-178,83860	14,37323
		13	14,99897	15,23769
$\Lambda_4\Gamma_2$	2,2	11	2,28889	6,97867
		12	42,30707	44,00741
		13	3,47465	2,78710
$\Lambda_4\Gamma_3$	1,5	11	-21,90894	-21,84984
		12	-1,63295	6,24646
		13	-2,02487	-0,68673
$\Lambda_4\Gamma_4$	0,98	11	0,15558	0,33245
		12	3,26002	3,44643
		13	-2,06077	-1,77283

Tabel 2.  $\lambda_{max}$  untuk model quasiPAS yang tidak berhasil ( $\Lambda_i\Gamma_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  dengan  $k = 1, 2, \dots, 6$ , dengan rantai magnet M12 ).(b)

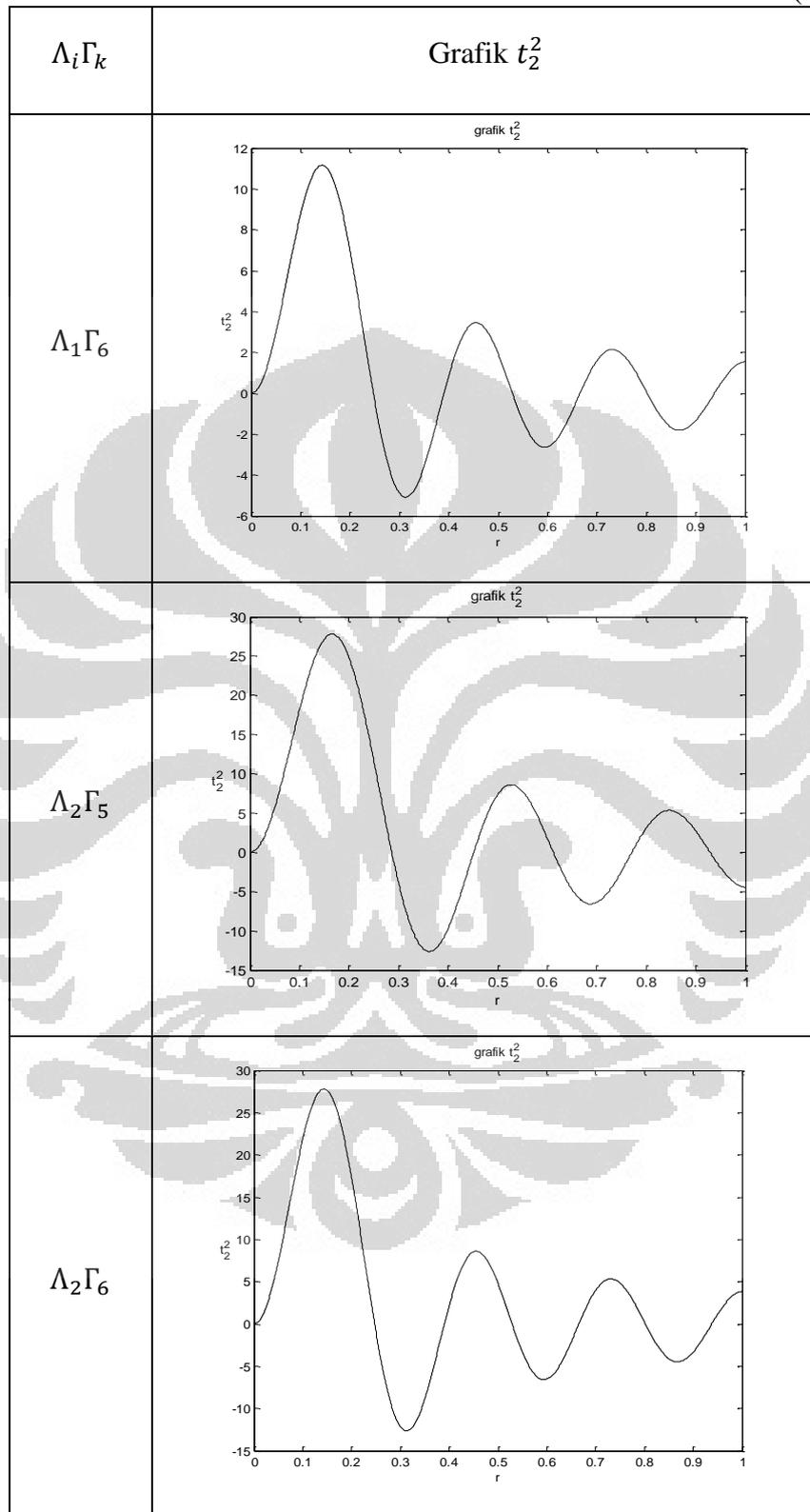
$\Lambda_i\Gamma_k$	R	N	J = 100	J = 200
$\Lambda_4\Gamma_5$	1,21	11	0,35090	0,71397
		12	4,68337	5,07113
		13	-7,16274	-7,0925
$\Lambda_4\Gamma_6$	1,22	11	0,31378	0,15761
		12	3,85322	3,59381
		13	5,92188	-6,54326
$\Lambda_5\Gamma_1$	1,5	11	-13,04839	-13,02591
		12	-4,61858	-4,55448
		13	41,11708	42,15664
$\Lambda_5\Gamma_2$	1,95	11	-18,60356	-15,36264
		12	-0,33010	0,17994
		13	7,17183	6,98841
$\Lambda_5\Gamma_3$	1,5	11	0,21613	
		12	17,55242	
$\Lambda_5\Gamma_4$	1,6	11	-4,68343	-3,31456
		12	30,97729	30,84413
		13	10,45939	10,73766
$\Lambda_5\Gamma_5$	0,85	11	0,04521	12,13464
		12	14,87401	15,43850
		13	8,55566	9,50283
$\Lambda_5\Gamma_6$	1,5	11	-29,09780	
		12	-20,73902	
$\Lambda_6\Gamma_1$	1,5	11	-44,03918	
		12	-12,06413	
$\Lambda_6\Gamma_2$	1,77	11	0,35204	0,12222
$\Lambda_6\Gamma_3$	1,5	11	-18,03499	-18,55684
		12	-13,91874	-13,48399
		13	11,23650	11,04965
$\Lambda_6\Gamma_4$	1,07	11	0,20353	0,13795
		12	1,57937	1,93806
		13	8,27548	8,62374
$\Lambda_6\Gamma_5$	0,46	11	0,58225	0,58374
		12	0,42046	0,42128
		13	-0,22493	-0,19416
$\Lambda_6\Gamma_6$	0,44	11	0,03069	0,12941
		12	-0,32863	-0,23916
		13	-0,24499	-0,15878

Lampiran 2: Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$  untuk Model QuasiPAS yang Tidak Berhasil.



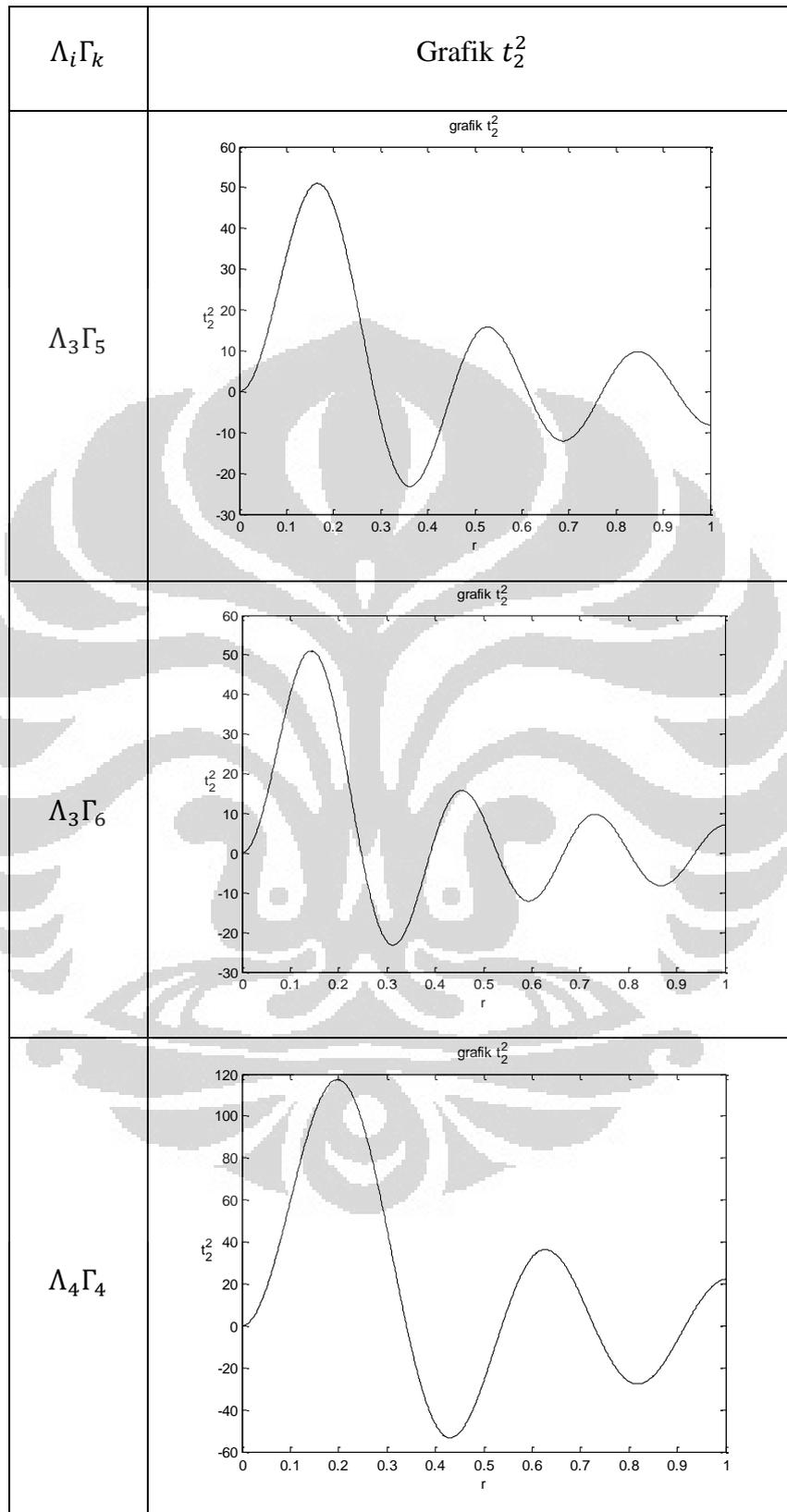
Gambar 1. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_1 \Gamma_1, \Lambda_2 \Gamma_1,$  dan  $\Lambda_3 \Gamma_2$ .

(Lanjutan)



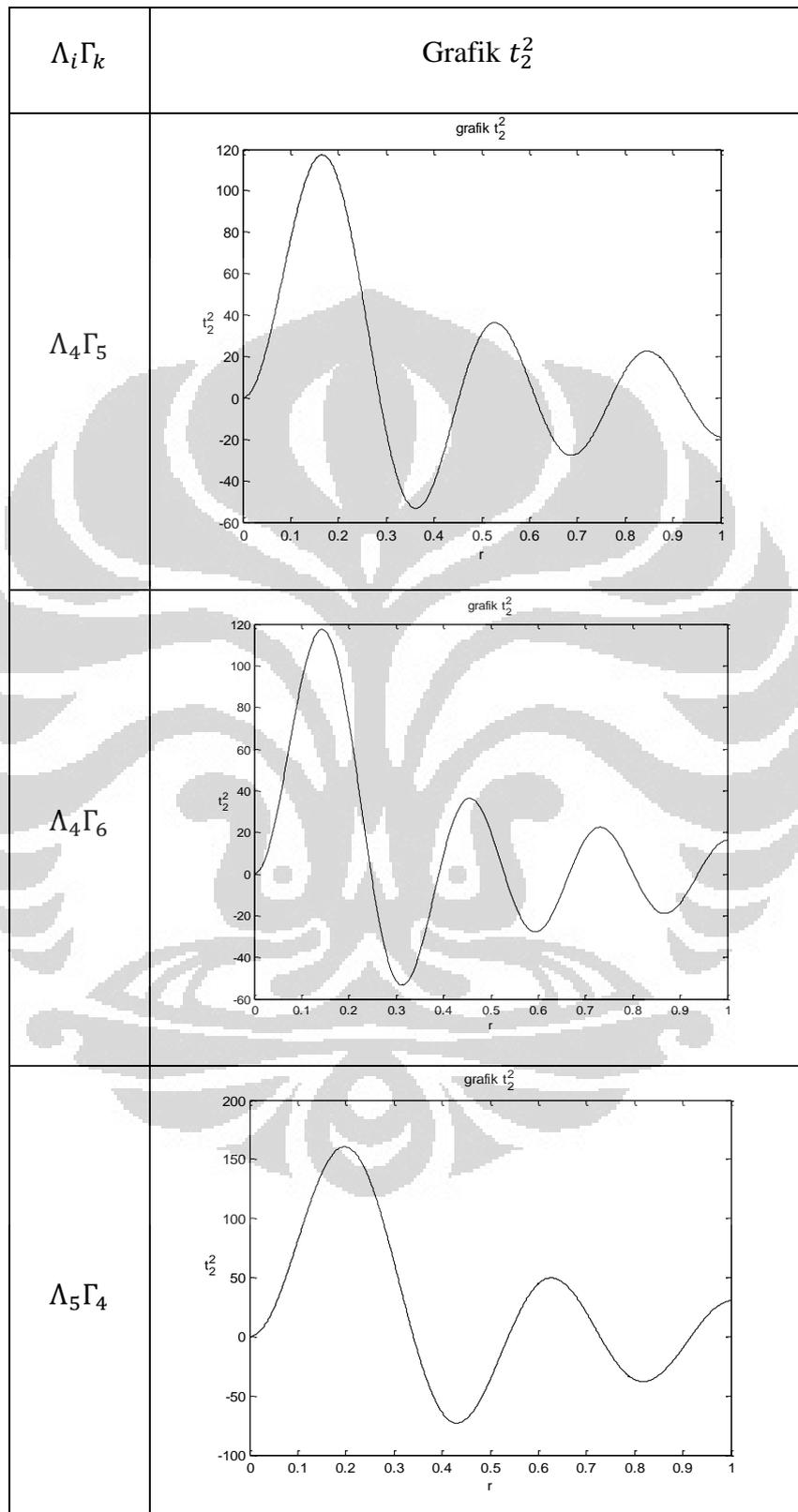
Gambar 2. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_{ij_2}^2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_1 \Gamma_6, \Lambda_2 \Gamma_5$ , dan  $\Lambda_2 \Gamma_6$

(Lanjutan)



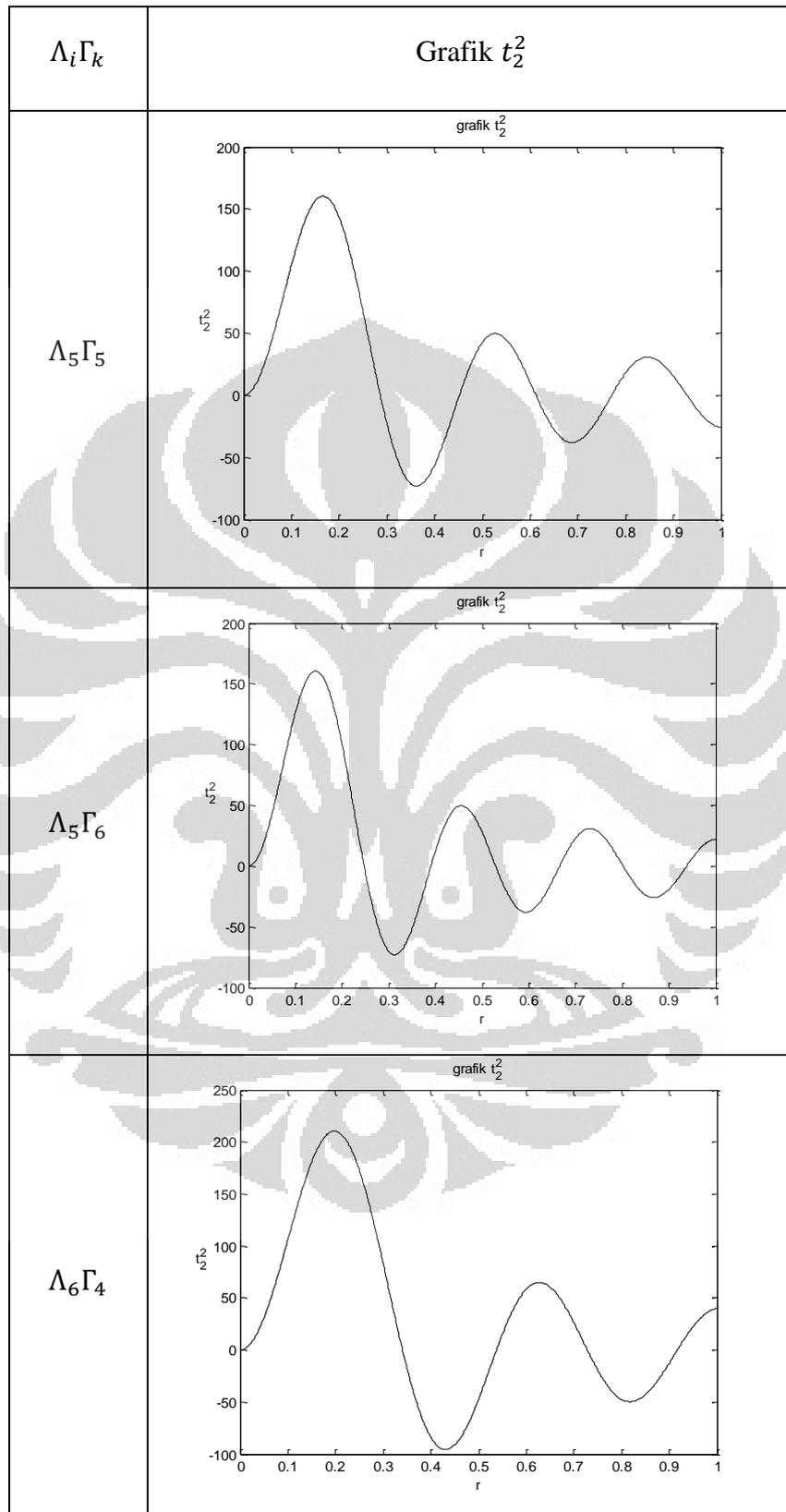
Gambar 3. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_{ij}^2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_3 \Gamma_5$ ,  $\Lambda_3 \Gamma_6$ , dan  $\Lambda_4 \Gamma_4$

(Lanjutan)



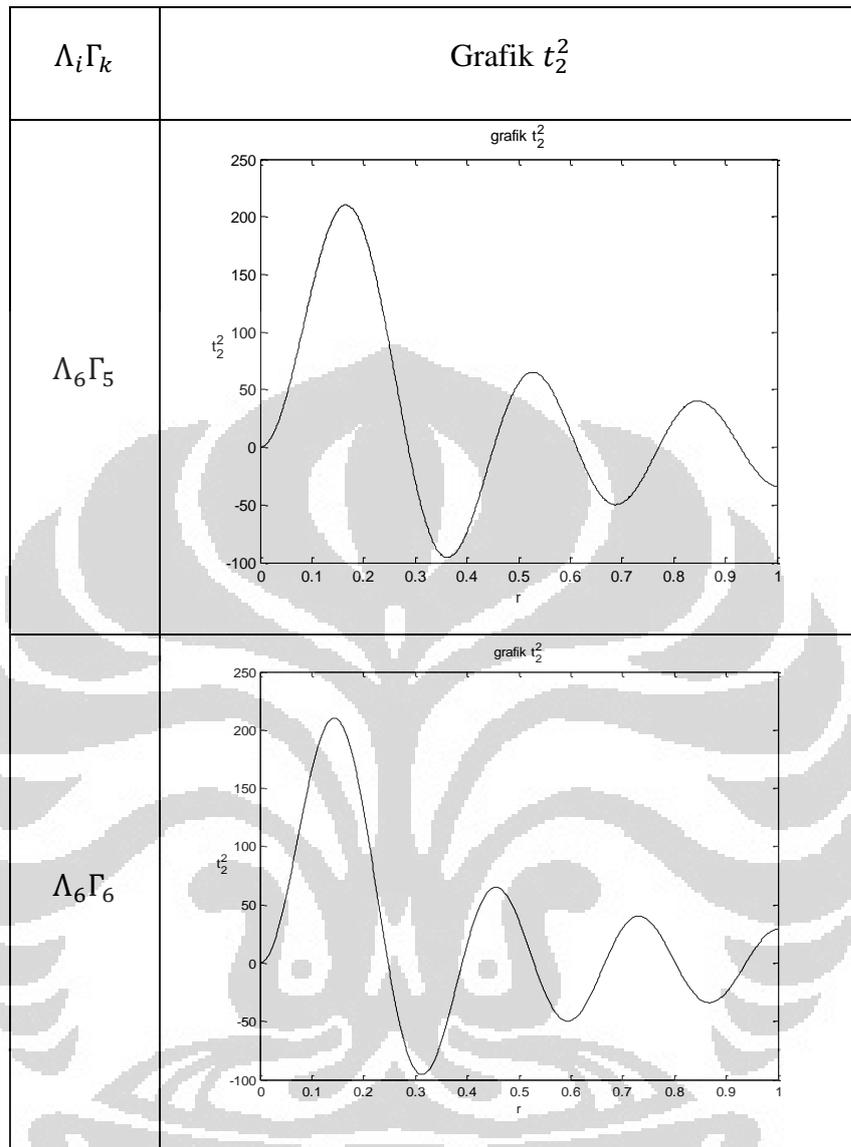
Gambar 4. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_{ij}^2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_4 \Gamma_5, \Lambda_4 \Gamma_6$ , dan  $\Lambda_5 \Gamma_4$

(Lanjutan)



Gambar 5. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_{ij}^2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_5 \Gamma_5$ ,  $\Lambda_5 \Gamma_6$ , dan  $\Lambda_6 \Gamma_4$

(Lanjutan)



Gambar 4.3. Grafik  $t_2^2 = K\Lambda_{ij}^2(\Gamma_k r)$  untuk  $\Lambda_6 \Gamma_5, \Lambda_6 \Gamma_6$

Lampiran 3: Subrutin Model QuasiPAS pada Fortran 95.

```

subroutine quasi_pas(vtype)
  include 'compress1.inc'

  complex const
  real ld,ld2,ld3, r,stld,stld2, alph
  save n,m,ld2,ld3,stld, stld2, alph,const
  integer n,m,p

!local definition for convenient

  r=rj
  ld2= 5.76345920562744d0
  ld3= 6.98793125152588d0

  p=1
  if(vtype.eq.'0') then
* total number of induction harmonics
    stld= sqrt(1.2d0)*ld2
    stld2=stld*ld2
    const=-3*cmplx(0d0,1d0)
    write(*,'(a)') '$Enter n, m, p for use in f=r^n(1-r^2)^p Ynm:'
    read *, n,m
    print*, n,m,p
    print*, 'quasi pas'

    ia=4
!for s_2^2
    iath(1)= 's'; ianh(1)=2; iamh(1)= 2
    iath(2)= 's'; ianh(2)=2; iamh(2)= -2
!for t_2^2
    iath(3)= 't'; ianh(3)=2; iamh(3)= 2
    iath(4)= 't'; ianh(4)=2; iamh(4)= -2

*--check 'em and get band-width data
    call vcharm_check
    elseif (vtype.eq.'s'.and.n1.eq.n.and.abs(m1).eq.m) then

        s1 = stld*fn(0,1)
        s2 = stld*fn(1,1)
        s3 = stld*fn(2,1)

    elseif (vtype.eq.'t'.and.n1.eq.n.and.abs(m1).eq.m) then

        t1=stld2*fn(0,2)
        t2=stld2*fn(1,2)

```

```

endif
contains

function fn(nd,rt)
!nd=0,1,2,3,..
!rt=1,2,..
integer nd,rt
real fn,x, ld,ld2,ld3
ld2= 5.76345920562744d0
ld3= 6.98793125152588d0

if(rt.eq.1) then
    x=r*ld2
    ld=ld2
elseif(rt.eq.2) then
    x=r*ld3
    ld=ld3
endif

select case(nd)
case(0)
    fn=((3d0/x**3)-(1d0/x))*sin(x)-(3d0/x**2)* cos(x)
case(1)
    fn=((9d0/x**3)-(1d0/x))*ld*cos(x)+((-9d0/x**4)+(4d0/x**2))*ld*sin(x)
case(2)
    fn=(( (-36d0/x**4)+ (5d0/x**2) )*(ld**2)*cos(x))+((36d0/x**5) + (-
    17d0/x**3) + (1d0/x))*(ld**2)*sin(x)
endselect
endfunction
end

```