UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI DATA PANEL DINAMIS MENGGUNAKAN METODE BLUNDELL DAN BOND

SKRIPSI

SYAHRUL SYAWAL
0706261966

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI DATA PANEL DINAMIS MENGGUNAKAN METODE BLUNDELL DAN BOND

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

SYAHRUL SYAWAL
0706261966

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Syahrul Syawal
NPM	: 0706261966
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 27 Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Syahrul Syawal
NPM	: 0706261966
Program Studi	: Sarjana Matematika
Judul Skripsi	: Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Dinamis Menggunakan Metode Blundell dan Bond

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

Pembimbing	: Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Penguji	: Dra. Ida Fithriani, M.Si	( )
Penguji	: Dr. Dian Lestari DEA	( )
Penguji	: Dra. Rianti Setiadi, M.Si	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 27 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

(1) Dra. Siti Nurrohmah, M.Si selaku pembimbing yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

(2) Dra. Ida Fithriani, M.Si selaku pembimbing akademik penulis selama menjalani masa kuliah.

(3) Dr. Dian Lestari, Fevi Novkaniza, M.Si, Mila Novita, M.Si, Dra. Rustina, Dra. Rianti Setiadi, M.Si, Dra. Saskya Mary, M.Si yang telah hadir dan memberikan saran serta masukan bagi penulis pada SIG 1 dan SIG 2.

(4) Dr. Yudi Satria, MT. Selaku ketua departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.

(5) Seluruh staf pengajar di Matematika UI atas ilmu pengetahuan yang telah kalian berikan.

(6) Seluruh karyawan di departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan.

(7) Orang tua yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan bagi penulis.

(8) Agustinawati dan Achmad Suwandi selaku kakak kandung yang juga telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis terutama selama penyusunan skripsi ini.

(9) Ferdy, Riski, Farah, Lois, Winda dan Toto yang telah berjuang bersama selama penyusunan skripsi ini.

(10) Widita dan Widi yang selalu memberikan semangat penulis selama menjalani kuliah dan penyusunan skripsi ini.

(11) Nora selaku teman curahan hati penulis yang juga teman seperjuangan dalam menjalani kuliah. Terima kasih atas semangat dan dukungannya.

(12) Putu, Adi, Yosandha, Gamar, Wiwi, Bowo, Zulfalah, Arif, Stefi, Paramita, Misda, Afni, Hikmah, Siska, Sisca. Terima kasih atas semua dukungan dan semangatnya.

(13) Seluruh teman-teman angkatan 2007 yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.

(14) Kepada semua teman-teman di Matematika UI angkatan 2006 (terutama ka Farah, ka Arisqiatul, ka Lidya, Ka Yuri dan ka Yunita Panca) yang berbaik hati meminjamkan buku kuliahnya, angkatan 2008 (terutama Luthfah, Hindun, Uchi, Laili, Nita) terima kasih atas semangat dan dukungannya dan untuk angkatan 2009 (Rizky Reza Fauzi) terima kasih sebesar-besarnya atas bimbingan dan tentor skripsi saya. Saya doakan mudah-mudahan ilmunya bertambah terus, amin.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Syahrul Syawal
NPM	: 0706261966
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Dinamis Menggunakan Metode Blundell dan Bond

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 27 Desember 2011
Yang menyatakan

(Syahrul Syawal)

ABSTRAK

Nama : Syahrul Syawal
Program Studi : Matematika
Judul : Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Dinamis Menggunakan Metode Blundell dan Bond

Model regresi data panel dinamis merupakan model regresi data panel yang melibatkan *lag* dari variabel dependen sebagai variabel eksplanatori yang berkorelasi dengan *error*. *Lag* dari variabel dependen tersebut dinamakan variabel endogen eksplanatori. Adanya variabel endogen eksplanatori menyebabkan estimasi parameter menggunakan metode OLS menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten. Oleh karena itu dibutuhkan metode lain untuk menaksir parameter, salah satunya adalah metode yang dikembangkan oleh Arellano dan Bond. Arellano dan Bond mengembangkan metode penaksiran parameter melalui proses *first differencing* dan metode instrumental variabel sehingga taksiran yang dihasilkan oleh metode ini memiliki sifat tak bias, konsisten dan efisien. Metode Arellano dan Bond tersebut kemudian dikembangkan oleh Blundell dan Bond dengan cara mengkombinasikan momen kondisi dan matriks instrumen antara model *first difference* dan model *level* untuk menghasilkan taksiran yang sama-sama tak bias dan konsisten tetapi lebih efisien yang dinamakan *GMM-System Estimator*.

Kata Kunci : *GMM-System Estimator*, metode Blundell dan Bond, metode instrumental variabel, model regresi data panel dinamis, variabel endogen eksplanatori.
xiii+134 halaman : 4 gambar ; 5 tabel
Daftar Pustaka : 17 (1992-2010)

ABSTRACT

Name : Syahrul Syawal
Study Program : Mathematics
Title : Parameter Estimation of Regression Model of Dynamic Panel Data Using Blundell and Bond Method

Regression model of dynamic panel data is a regression model of panel data involving lag of dependent variable as explanatory variables which are correlated with the error. Lag of dependent variable is called endogenous explanatory variables. The presence of this lag cause the estimates of the parameters produce the estimator that are biased and inconsistent using OLS method. Therefore, other methods are needed to estimate the parameters, one of is the method developed by Arellano and Bond. Arellano and Bond developed a method of parameter estimation through a process of first-differencing and instrumental variable method so that the estimator are unbiased, consistent and efficient. This method is then developed by Blundell and Bond with combine the moment conditions and matrix of instruments between first-difference model and level model to produce the estimator that are both unbiased and consistent but more efficient thus it called GMM-System estimator.

Keywords : Blundell and Bond method, endogen explanatory variable, GMM-System Estimator, instrumental variable method, regression model of dynamic panel data.
xiii+134 pages : 4 pictures ; 5 tables
Bibliography : 17 (1992-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekonometrika adalah suatu ilmu yang menerapkan teori ekonomi, matematika ekonomi dan statistika ekonomi, untuk memberikan dukungan empiris dari model yang dibangun oleh teori ekonomi dan untuk memberikan hasil dalam angka *(numerical result)* (Gujarati: 2003). Di dalam ekonometrika, terdapat tiga jenis data, yakni data runtun waktu (*time series data*), data silang (*cross section data*), dan data panel (*pooled data*).

Data runtun waktu (*time series data*) merupakan data yang terdiri dari satu individu tetapi meliputi beberapa periode waktu misalnya harian, bulanan, mingguan, tahunan, dan lain-lain. Contohnya data produksi minyak sawit dari tahun 2000 hingga 2009, data kurs Rupiah terhadap dollar Amerika Serikat dari tahun 2000 hingga 2006, dan lain-lain. Dengan demikian maka akan sangat mudah untuk mengenali jenis data ini. Data runtun waktu (*time series data*) juga sangat berguna bagi pengambil keputusan untuk memperkirakan kejadian di masa yang akan datang. Karena diyakini pola perubahan data runtun waktu beberapa periode masa lampau akan kembali terulang pada masa kini. Data runtun waktu (*time series data*) juga biasanya bergantung kepada *lag* atau selisih. Sebagai contoh pada beberapa kasus misalnya produksi komoditas kopi dunia pada tahun sebelumnya akan mempengaruhi harga kopi dunia pada tahun berikutnya. Dengan demikian maka akan diperlukan *data lag* produksi kopi, bukan data aktual harga kopi. Tabel berikut ini akan memperjelas konsep *lag* yang mempengaruhi data runtun waktu (*time series data*).

Tabel 1. Produksi dan *lag* produksi kopi dunia tahun 2000 – 2005

Tahun	Produksi Kopi Dunia (Ton)	Lag Produksi Kopi
2000	7.562.713	-
2001	7.407.986	-154.727
2002	7.876.893	468.907

2003	7.179.592	-697.301
2004	7.582.293	402.701
2005	7.276.333	-305.960

Sumber: FAO (2009)

Data lag tersebut kemudian dapat digunakan untuk melihat pengaruh *lag* produksi terhadap harga kopi dunia.

Data silang (*cross section data*) merupakan data yang terdiri dari sejumlah individu yang dikumpulkan pada suatu waktu tertentu. Contohnya data penjualan pada tiga restoran yang diambil pada bulan Januari 2009. Ilustrasinya seperti pada tabel di bawah ini.

Tabel 2. Data penjualan pada tiga restoran A, B, dan C pada bulan Januari 2009

Restoran	Penjualan
A	19.587.200
B	23.584.000
C	17.211.000

Sumber: FAO (2009)

Data panel merupakan kumpulan observasi pada sejumlah individu yang dikumpulkan menurut urutan waktu dalam rentang waktu tertentu. Data panel adalah data yang menggabungkan data runtun waktu (*time series data*) dan data silang (*cross section data*). Karena itu data panel akan memiliki beberapa objek dan beberapa periode waktu. Contoh data panel dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 3. *Data panel* ekspor dan impor kopi Indonesia dan Malaysia pada periode tahun 2005 – 2007

Negara	Periode	Ekspor (ton)	Impor (ton)
Indonesia	2005	443.366	1.654
Indonesia	2006	411.721	5.092
Indonesia	2007	320.600	47.937
Malaysia	2005	666	23.826
Malaysia	2006	1.490	35.368
Malaysia	2007	984	42.165

Sumber: FAO (2009)

Data ini lebih informatif menjelaskan keberagaman suatu data sehingga menjadi sorotan hangat pada saat sekarang ini.

Salah satu model sederhana yang dapat dibuat adalah model regresi data panel. Berdasarkan komponen *error*, model regresi data panel terdiri atas model regresi komponen *error* satu arah dan model regresi komponen *error* dua arah. Pada model regresi komponen *error* satu arah, *error* terdiri dari dua komponen, yaitu komponen *error* yang tidak terobservasi dari suatu individu tanpa dipengaruhi faktor waktu dan komponen *error* yang benar-benar tidak diketahui dari tiap individu dan waktu. Sedangkan pada model regresi komponen *error* dua arah, *error* memiliki komponen *error* tambahan yaitu komponen *error* yang tidak terobservasi dari suatu waktu tanpa dipengaruhi faktor individu. Berdasarkan asumsi, model regresi data panel terdiri atas model efek tetap dan model efek acak. Perbedaannya terletak pada pemilihan individu dan waktu yang ditentukan. Pada model efek tetap, individu dan waktu ditentukan secara tetap sehingga efek hanya sebatas pada individu dan waktu yang dipilih. Sedangkan pada model efek acak, individu dan waktu ditetapkan secara acak sehingga efek dari individu dan waktu diasumsikan merupakan variabel acak.

Pemodelan data panel banyak digunakan dalam penyelesaian masalah perekonomian. Selain pemodelan regresi data panel dapat juga dibentuk model yang lebih rumit tetapi lebih sesuai dengan permasalahan ekonomi yang ada. Salah satu contohnya adalah model data panel dinamis yaitu pemodelan data panel yang memperhatikan *lag* dari variabel dependen. Hal ini dikarenakan pada dasarnya hubungan variabel-variabel ekonomi merupakan suatu kedinamisan, yakni variabel tidak hanya dipengaruhi variabel-variabel pada waktu yang sama tetapi juga dipengaruhi variabel pada waktu sebelumnya. Oleh sebab itu model regresi data panel dinamis lebih sesuai dalam menggambarkan keadaan yang sebenarnya dalam analisis perekonomian.

Penaksiran parameter model data panel dinamis dapat dilakukan dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS), tetapi nilai taksiran yang didapatkan dengan metode OLS ini akan bersifat bias dan tidak konsisten diakibatkan oleh *lag* dari variabel dependen berkorelasi dengan *error*. Untuk mengatasi permasalahan ini, menurut Anderson dan Hsiao (1982) dapat digunakan metode estimasi *Instrumental Variabel (IV)*, yakni dengan menginstrumenkan variabel yang berkorelasi dengan *error*. Tetapi metode ini hanya menghasilkan taksiran parameter yang konsisten, namun tidak efisien.

Metode Anderson dan Hsiao ini kemudian dikembangkan oleh Arellano dan Bond *(Arellano and Bond GMM Estimator)* dan menghasilkan taksiran yang tak bias, konsisten, serta efisien. Walaupun GMM estimator yang diusulkan oleh Arellano dan Bond (1991) dinilai sudah efisien, tetapi Blundell dan Bond (1998) mengajukan estimator yang mereka klaim masih lebih efisien dibandingkan estimator yang diusulkan oleh Arellano dan Bond (1991). Alasannya karena Arellano dan Bond hanya menggunakan momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang terkandung pada model *first difference* saja.

Tugas akhir ini membahas mengenai taksiran yang dikembangkan oleh Blundell dan Bond yang menggunakan *Generalized Method of Moments System* (*Blundell and Bond GMM-System Estimator*) dalam menaksir parameter pada model regresi data panel dinamis. Blundell dan Bond menyarankan penggunaan tambahan informasi *level* yaitu momen kondisi dan matriks variabel instrumen *level* di samping *first difference* dengan cara mengkombinasikan momen kondisi dan matriks variabel instrumen antar keduanya (*first difference* dan *level*) yang akan menghasilkan *GMM-System Estimator*.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Bagaimana cara mencari taksiran parameter pada model regresi data panel dinamis dengan metode Blundell dan Bond.

Ruang lingkup pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi pada:

1. Model regresi data panel yang akan dibahas adalah model regresi data panel dengan komponen *error* satu arah (*one way error component model*).
2. Model regresi data panel yang akan dibahas adalah model regresi data panel dengan efek acak.

3. Model regresi data panel yang akan dibahas adalah model regresi data panel simpel dinamis yakni model regresi data panel yang hanya melibatkan satu variabel eksplanatori yakni *lag* dari variabel dependen, dimana *lagnya* terbatas pada satu *lag*.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Jenis penelitian yang dilakukan adalah studi literatur. Metode yang digunakan adalah metode Blundell dan Bond *(Blundell and Bond GMM-System Estimator).*

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian skripsi ini adalah mencari taksiran parameter pada model regresi data panel dinamis menggunakan metode Blundell dan Bond serta membandingkan keefisienan taksiran yang didapatkan oleh Blundel dan Bond dengan taksiran yang didapatkan oleh Arellano dan Bond (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*).

BAB 2
LANDASAN TEORI

Sebelum menaksir parameter model regresi data panel dinamis pada bab 3, akan dibahas terlebih dahulu mengenai dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini. Hal ini mengenai bentuk dan sifat matriks, variabel tetap dan variabel random, (ekspektasi, variansi dan matriks variansi-kovariansi), penaksir tak bias, penaksir konsisten, *weak law of large number* (WLLN), distribusi limit (*limiting distribution*), data panel, pemodelan data panel, model dinamis, taksiran parameter pada model regresi linier, metode instrumental variabel dan (*method of moment*, momen kondisi dan *generalized method of moment* (GMM).

2.1 Bentuk dan Sifat Matriks

2.1.1 Notasi, Definisi dan *Transpose* Matriks

Matriks adalah susunan angka berbentuk *rectangular* (segiempat panjang). Angka pada matriks disebut entri dari matriks. Matriks terdiri dari baris dan kolom, yang akan menentukan ukuran matriks tersebut. Matriks yang terdiri dari m-baris dan n-kolom disebut matriks berukuran $m \times n$. Matriks yang berukuran $1 \times m$ disebut dengan vektor baris, sedangkan matriks yang berukuran $m \times 1$ disebut dengan vektor kolom.

Pada tugas akhir ini, matriks dan vektor akan dinotasikan dengan dengan huruf tebal, sedangkan elemen dari matriks dinotasikan dengan huruf tipis. Sebelum menjabarkan beberapa definisi dari bentuk-bentuk matriks, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai *transpose* dari matriks.

Transpose dari suatu matriks **A** didapat dengan cara menukarkan baris dengan kolom dari matriks **A** tersebut ataupun sebaliknya. Notasi dari *transpose* matriks **A** adalah $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ atau **A'**. Sehingga, jika matriks **A** berukuran $m \times n$, yang entri-entrinya dinotasikan dengan a_{ij}, maka **A'** adalah matriks yang berukuran $n \times m$, dan entri ke (i,j) dari **A'** adalah a_{ji}. Jika **A** adalah matriks berukuran $m \times p$ dan **B** adalah matriks berukuran $p \times n$, maka elemen ke (i,j) dari (**AB**)**'** adalah

$$((\boldsymbol{AB})')_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ji} = (\boldsymbol{A})_{j.}(\boldsymbol{B})_{.i} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = (\boldsymbol{B}')_{i.}(\boldsymbol{A}')_{.j} = (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}')_{ij}$$

Sehingga didapat bahwa $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

Teorema 2.1

Misalkan r dan s adalah sebarang skalar. Jika **A** dan **B** adalah matriks-matriks yang didefinisikan sedemikian sehingga operasi-operasi berikut berlaku, maka :

1. (r **A**)' = r **A'**
2. (**A**')' = **A**
3. (r **A** + s **B**)' = (r **A**)' + (s **B**)' = r **A'** + s **B'**
4. **(AB)' = B'A'**

Untuk vektor, *transpose* dari vektor kolom adalah vektor baris, begitu pula sebaliknya.

Berikut akan dijabarkan mengenai beberapa definisi dari bentuk-bentuk matriks :

Definisi 2.1

Matriks **A** berukuran $m \times m$ dikatakan matriks simetris jika **A=A'**

Definisi 2.2

Matriks **M** berukuran $m \times m$ dikatakan matriks idempoten jika $\mathbf{M}^2$=**M**

Teorema 2.2

Jika **A** adalah matriks idempoten maka (**I** – **A**) juga merupakan matriks idempoten, dimana **I** adalah matriks identitas yang berukuran sama dengan **A**.

Bukti :

Misalkan **A** adalah matriks idempoten, sesuai definisi 2.2 berlaku $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$, sehingga

$[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^2 = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]\,[\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{A} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]$

(Terbukti)

Definisi 2.3

Rank dari suatu matriks **A** didefinisikan sebagai berikut :

Rank (**A**) = banyaknya baris yang *linearly independent* pada **A** = banyaknya kolom yang *linearly independent* pada **A**.

Definisi 2.4

Misalkan **A** merupakan matriks berukuran $m \times m$. **A** disebut matriks semidefinit positif jika **A** matriks simetris dan $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ untuk setiap **x,** vektor berukuran $m \times 1$.

Untuk menyatakan **A** matriks semidefinit positif, digunakan notasi $\boldsymbol{A} \succcurlyeq \mathbf{0}$. Misalkan **A** dan **B** matriks yang berukuran sama. $\boldsymbol{A} \succcurlyeq \boldsymbol{B}$ jika $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \succcurlyeq \mathbf{0}$ atau dapat dikatakan **A**-**B** merupakan matriks semidefinit positif. Contoh dari matriks semidefinit positif adalah matriks identitas **I**.

2.1.2 Invers Matriks

Definisi 2.5

Suatu matriks **B** berukuran $m \times m$ dikatakan invers dari matriks **A** yang juga berukuran $m \times m$ jika **AB** = **BA** = **I** terpenuhi. Jika matriks **B** ada, maka matriks **B** dapat dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$ (invers dari **A**). Matriks **A** dikatakan *nonsingular* apabila matriks $\mathbf{A}^{-1}$ ada.

Teorema 2.3

Jika **A** adalah matriks berukuran $m \times n$, maka pernyataan berikut equivalen :

i. **A** mempunyai vektor-vektor kolom yang *independent*

ii. **A**'**A** *invertible*

2.1.3 Turunan Matriks

Definisi 2.6

Misalkan *f* adalah fungsi bernilai riil dari suatu vektor **x** berukuran $n \times 1$ yang dapat didiferensialkan terhadap **x**, maka turunan parsial pertama dari *f* terhadap **x** ada dan dituliskan sebagai berikut

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)'$$

Contoh 1 :

Misalkan $\boldsymbol{a}' = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n]$ adalah vektor baris berukuran $1 \times n$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

adalah vektor kolom berukuran $n \times 1$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

sehingga

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}$$

Contoh 2 :

Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ merupakan matriks simetris berukuran $n \times n$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ merupakan vektor kolom berukuran $n \times 1$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n \quad a_{12}x_1 + \cdots + a_{n2}x_n \quad \dots \quad a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n)x_1 + (a_{12}x_1 + \cdots + a_{n2}x_n)x_2 + \cdots$$
$$+(a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n$$
$$= (a_{11}{x_1}^2 + \cdots + a_{n1}x_nx_1) + (a_{12}x_2x_1 + \cdots + a_{n2}x_2x_n) + \cdots$$
$$+(a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{nn}{x_n}^2)$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x'Ax})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x'Ax})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x'Ax})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (2a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) + (a_{12}x_2) + \cdots + (a_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1) + (a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) + \cdots + (a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{n1}x_1) + (a_{n2}x_2) + \cdots + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

Karena **A** adalah matriks simetris, maka $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \dots n$; $j = 1, \dots, n$ sehingga bentuk diatas menjadi

$$= \begin{bmatrix} (2a_{11}x_1 + 2a_{21}x_2 + \cdots + 2a_{n1}x_n) \\ (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + 2a_{n2}x_n) \\ \vdots \\ (2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) \\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) \\ \vdots \\ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

Definisi 2.7

Misalkan f adalah suatu fungsi bernilai riil dari suatu matriks **X** yang berukuran $m \times m$ yang dapat didiferensialkan terhadap **X**. Maka turunan dari f terhadap **X** ada dan merupakan suatu matriks berukuran $m \times m$ yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1m}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mm}} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Misalkan **X** adalah suatu matriks berukuran $m \times m$, maka $f(X)$ menotasikan fungsi bernilai riil dari suatu matriks **X**. Contoh dari $f(\boldsymbol{X})$ adalah $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a}'\mathbf{X}\boldsymbol{a}$ dimana $\boldsymbol{a}$ adalah vektor konstanta berukuran $m \times 1$. Maka turunan dari $f(\boldsymbol{X})$ terhadap **X** adalah

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{11}} & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{1m}} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{21}} & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})}{\partial x_{mm}} \end{bmatrix}$$

2.1.4 Matriks Blok Bujursangkar

Misalkan **M** adalah matriks blok yaitu matriks yang dapat dipartisi menjadi submatriks-submatriks atau blok-blok. **M** dikatakan matriks blok bujursangkar jika **M** adalah matriks bujursangkar dan blok-blok diagonal utamanya merupakan suatu matriks bujursangkar.

Contoh 1 :

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Matriks M_1 merupakan matriks blok bujursangkar karena matriks M_1 adalah matriks bujursangkar berukuran (5x5) dan blok-blok diagonal utamanya merupakan suatu matriks bujursangkar.

Contoh 2 :

$$M_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Meskipun matriks M_2 adalah matriks bujursangkar berukuran (5x5), tetapi blok-blok diagonal utama dari matriks M_2 bukan merupakan suatu matriks bujursangkar sehingga matriks M_2 bukan merupakan matriks blok bujursangkar.

2.1.5 Invers dari Suatu Matriks Blok Bujursangkar

Misalkan **M** adalah matriks bujursangkar nonsingular berukuran $m \times m$. Matriks **M** dipartisi menjadi submatriks-submatriks atau blok-blok sebagai berikut

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

dimana **A** adalah matriks nonsingular berukuran $m_1 x m_1$, **D** adalah matriks nonsingular berukuran $m_2 x m_2$, dan $m_1 + m_2 = m$, maka

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}} \\ -(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}} \end{bmatrix}$$

2.1.6 Karakterisasi dari Matriks Simetris Definit Positif

Proposition 2.1

Untuk sembarang matriks simetris **M** yang berbentuk $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$, dimana **A** matriks *invertible* berukuran $(p \times p)$, **B** matriks berukuran $(p \times q)$, $\mathbf{B}^T$ matriks berukuran $(q \times p)$ dan **C** matriks berukuran $(q \times q)$ atau $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^T\ dan\ \boldsymbol{C})$ sama-sama merupakan suatu matriks bujursangkar berukuran $(p \times p)$, maka sifat berikut terpenuhi :

(1) $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$ dan $(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}) \succ \mathbf{0}$

(2) Jika $\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$, maka $\mathbf{M} \succcurlyeq \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}) \succcurlyeq \mathbf{0}$

2.2 Variabel Tetap dan Variabel Random

- Variabel Tetap

Pada model regresi linier sederhana, diketahui bahwa variabel *regressor* x memiliki hubungan linier dengan variabel respon y. Model regresi linier sederhana diberikan sebagai berikut

$$y = \alpha + \beta x + u$$

dimana, α dan β adalah parameter-parameter yang tidak diketahui dan akan ditaksir, u adalah komponen *error* random, y adalah variabel respon yang merupakan variabel random dan x adalah variabel *regressor* yang dikontrol atau dibuat tetap oleh peneliti sehingga *error* dari x sangatlah kecil dan dapat diabaikan (*x is measured with negligible error*).

Tujuan dilakukannya regresi adalah untuk memodelkan hubungan antara x dan y, dimana x biasanya ditetapkan terlebih dahulu oleh peneliti. x disebut juga sebagai variabel tetap yaitu variabel yang dikendalikan atau dibuat tetap oleh peneliti sehingga pengaruhnya terhadap variabel respon tidak dipengaruhi oleh faktor luar yang tidak diteliti.

Contoh :

Misalkan akan dilihat pengaruh pendapatan perminggu (x) terhadap pengeluaran konsumsi perminggu (y) dari suatu keluarga. Misalkan, diberikan lima jenis pendapatan perminggu, yaitu x_1=80$, x_2=90$, x_3=100$, x_4=110$ dan x_5=120$. Sebagai contoh, ada 5 keluarga yang pengeluaran konsumsi perminggunya berbeda-beda berdasarkan pendapatan sebesar x_1=80$ yaitu keluarga pertama sebesar 55$, keluarga kedua sebesar 60$, keluarga ketiga sebesar 65$, keluarga keempat sebesar 70$ dan keluarga kelima sebesar 75$.. Begitu juga halnya untuk x_2=90$, ada 6 keluarga yang pengeluaran konsumsi perminggunya berbeda-beda. Untuk x_3=100$, ada 5 keluarga yang pengeluaran konsumsi perminggunya berbeda-beda. Untuk x_4=110$, ada 7 keluarga yang pengeluaran konsumsi perminggunya berbeda-beda dan terakhir untuk x_5=120$, ada 6 keluarga yang pengeluaran konsumsi perminggunya berbeda-beda.

Untuk lebih memperjelas, perhatikan tabel berikut :

x	80$	90$	100$	110$	120$
Pengeluaran konsumsi perminggu (y) dari suatu keluarga	55$	65$	79$	80$	102$
	60$	70$	84$	93$	107$
	65$	74$	90$	95$	110$
	70$	80$	94$	103$	116$
	75$	85$	98$	108$	118$
	-	88$	-	113$	125$
	-	-	-	115$	-

Dari tabel diatas dapat disimpulkan bahwa untuk variabel *regressor* x_i (i=1,2,3,4,5) yang menyatakan pendapatan perminggu bernilai tetap (*nonstochastic*) dengan variabel respon y_i yang menyatakan pengeluaran konsumsi perminggu dari suatu keluarga bisa berbeda-beda. Nilai ekspektasi dari x_1 adalah $E(x_1)=x_1$. Begitu juga halnya dengan variabel *regressor* lainnya yaitu $E(x_2)=x_2$, $E(x_3)=x_3$, $E(x_4)=x_4$ dan $E(x_5)=x_5$.

- Variabel Random

Definisi 2.8

Misalkan sebuah percobaan random mempunyai ruang sampel $\mathcal{C}$. Sebuah fungsi X yang memetakan masing-masing elemen $c \in \mathcal{C}$ ke satu dan hanya satu bilangan real X(c) = x, disebut variabel random. Ruang nilai X adalah himpunan bilangan real $\mathcal{A} = \{x \in R \,;\, x = X(c), c \in \mathcal{C}\}$.

Misalkan X_i adalah suatu variabel random yang memetakan masing-masing elemen $c \in \mathcal{C}$ ke satu dan hanya satu bilangan real $X_i(c) = x_i$, i=1, 2,…,n. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ adalah suatu vektor random berukuran n yang mempunyai ruang nilai $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_1 = X_1(c), \ldots, x_n = X_n(c), c \in \mathcal{C}\}$, dinotasikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

2.3 Ekspektasi, Variansi dan Matriks Variansi-Kovariansi

- Ekspektasi dari Suatu Variabel Random

Definisi 2.9

Misalkan X adalah suatu variabel random. Jika X adalah variabel random kontinu dengan pdf f(x) dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$$

Maka ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Jika X adalah variabel random diskret dengan pdf f(x) dan

$$\sum_{x} |x| f(x) < \infty$$

Maka ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

Sifat-sifat :

(1) $E(K) = K$, dimana K adalah suatu konstanta

(2) $E(K_1X + K_2Y) = E(K_1X) + E(K_2Y) = K_1E(X) + K_2E(Y)$

dimana K_1 dan K_2 adalah suatu konstanta dan X dan Y adalah suatu variabel random

- Ekspektasi dari Suatu Vektor Random / Matriks Variabel Random

Misalkan $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ adalah vektor random berdimensi n. Ekspektasi **X** didefinisikan sebagai $E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))'$. Misalkan **W** adalah matriks variabel random berukuran $m \times n$ atau

$$\boldsymbol{W} = [W_{ij}] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \dots & W_{m\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}$$

dimana W_{ij} adalah variabel random dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$. Ekspektasi dari matriks variabel random **W** didefinisikan sebagai berikut

$$E(\boldsymbol{W}) = [E(W_{ij})] = \begin{bmatrix} E(W_{11}) & E(W_{12}) & \dots & E(W_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(W_{m1}) & E(W_{m2}) & \dots & E(W_{mn}) \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat :

Misalkan $\mathbf{W_1}$ dan $\mathbf{W_2}$ adalah matriks variabel random berukuran $m \times n$ dan misalkan $\mathbf{A_1}$ dan $\mathbf{A_2}$ adalah matriks konstanta berukuran $k \times m$, dan misalkan **B** adalah matriks konstanta berukuran $n \times 1$. Maka,

(1) $E(\boldsymbol{A_1 W_1} + \boldsymbol{A_2 W_2}) = \boldsymbol{A_1}\, E(\boldsymbol{W_1}) + \boldsymbol{A_2}\, E(\boldsymbol{W_2})$

(2) $E(\boldsymbol{A_1 W_1 B}) = \boldsymbol{A_1} E(\boldsymbol{W_1})\boldsymbol{B}$

- Variansi dari Suatu Variabel Random

Definisi 2.10

Misalkan X adalah suatu variabel random dengan *mean* berhingga μ sedemikian sehingga $E[(X-\mu)^2]$ berhingga. Maka variansi dari X didefinisikan sebagai

$$E[(X-\mu)^2]$$

$E[(X-\mu)^2]$ biasanya dinyatakan dengan σ_X^2 atau $Var(X)$.

Sifat-sifat :

(1) $Var(aX) = a^2 Var(X)$, dimana a adalah suatu konstanta dan X adalah suatu variabel random

(2) $Var(aX + bY) = Var(aX) + Var(bY) + 2ab\, cov(X, Y)$

$$= a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, cov(X, Y)$$

dimana a dan b adalah suatu konstanta dan X dan Y adalah suatu variabel random

Definisi 2.11

Misalkan X adalah suatu variabel random dengan *mean* berhingga μ_1 dan Y adalah suatu variabel random dengan *mean* berhingga μ_2. Maka kovariansi dari X dan Y didefinisikan sebagai

$$cov(X, Y) = E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] = E(XY) - \mu_1 \mu_2$$

- Matriks Variansi-Kovariansi :

Misalkan $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ adalah vektor random berdimensi n, sedemikian sehingga $\sigma_i^2 = Var(X_i) < \infty$. *Mean* dari **X** adalah $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X})$ dan matriks variansi-kovariansi didefinisikan sebagai berikut

$$cov\ (\boldsymbol{X}) = E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = [\sigma_{ij}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

dimana σ_{ii} menyatakan $\sigma_i^2 = Var(X_i)$ yang merupakan entri dari diagonal ke-i sedangkan σ_{ij} yang merupakan entri-entri diluar diagonal utama dinyatakan dengan $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$.

Sifat-sifat :

Misalkan $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ adalah vektor random berdimensi n, sedemikian sehingga $\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = Var(X_i) < \infty$. Misalkan **A** adalah matriks konstanta berukuran $m \times n$, maka

(1) $cov(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{XX}') - \boldsymbol{\mu\mu}'$

(2) $cov(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{A}\, cov(\boldsymbol{X})\, \boldsymbol{A}'$

2.4 Penaksir Tak Bias

Definisi 2.12

Misalkan X adalah suatu variabel random dengan pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari distribusi X dan misalkan $\hat{\theta}$ menyatakan suatu statistik. Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut penaksir tak bias untuk parameter θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta$. Jika $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ maka $\hat{\theta}$ adalah penaksir yang bias untuk θ.

2.5 Penaksir Konsisten

Definisi 2.13

Misalkan X adalah suatu variabel random dengan pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari distribusi X dan misalkan $\hat{\theta}_n$ menyatakan suatu statistik. Suatu statistik $\hat{\theta}_n$ disebut penaksir konsisten untuk parameter θ jika $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ atau $plim\, \hat{\theta}_n = \theta$.

Definisi 2.14

Misalkan $\{X_n\}$ adalah sebuah barisan dari variabel random dan misalkan X adalah suatu variabel random yang terdefinisi di suatu ruang sampel. X_n dikatakan konvergen dalam probabilitas ke X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

atau secara equivalen

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

yang dinotasikan dengan $X_n \xrightarrow{p} X$ atau $plim\, X_n = X$.

2.6 *Weak Law of Large Number* (WLLN)

Sebelum menjelaskan tentang teorema *weak law of large number* (WLLN), terlebih dahulu akan dijelaskan tentang teorema pertidaksamaan chebyshev.

Teorema 2.4

Teorema Pertidaksamaan Chebyshev

Misalkan X suatu variabel random yang memiliki suatu distribusi probabilitas dengan variansi berhingga σ^2 dan mean μ. Maka, untuk setiap k > 0

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

atau secara equivalen

$$\Pr(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema 2.5

Teorema *Weak Law of Large Number* (WLLN) :

Misalkan $\{X_n\}$ adalah suatu barisan dari variabel random iid dengan *mean* μ dan variansi $\sigma^2 < \infty$. Misalkan $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$, maka

$$\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

atau dinotasikan $plim\, \bar{X}_n = \mu$ atau $plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_i)$

Bukti :

Karena $E(\bar{X}_n) = \mu_{\bar{X}_n} = \mu$ dan $Var(\bar{X}_n) = \sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma^2}{n}$, maka menurut teorema pertidaksamaan Chebyshev, $\forall\, k > 0$,

$$\Pr\left(\left|\bar{X}_n - \mu_{\bar{X}_n}\right| < k\sigma_{\bar{X}_n}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

atau

$$\Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Maka,

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = \Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Misalkan $k = \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$, maka dengan menggunakan teorema pertidaksamaan Chebyshev, diperoleh

$$\Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

atau

$$\Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| < k\sigma_{\bar{X}_n}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

sehingga dapat dikatakan $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

Lalu, limitkan kedua ruas untuk $n \to \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1$$

karena nilai probabilitas tidak mungkin lebih besar dari 1, maka

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Berdasarkan definisi konvergen dalam probabilitas dapat dikatakan bahwa

$$\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu \quad untuk\ n \to \infty \quad dimana\ \mu = E(X_i)$$

atau dapat ditulis $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} E(X_i)$ atau plim$\bar{X}_n = \mu$.

- Teorema WLLN ini tidak hanya berlaku untuk $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$, tetapi dapat juga diperluas ke dalam bentuk $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, dimana f adalah fungsi yang kontinu yang bukan fungsi dari n. Maka $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p} E\big(f(X_i)\big)$.

  Contoh :

  $$f(X_i) = X_i^k$$

  Maka,

  $$plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = E\big(X_i^k\big)$$

  Jadi, $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ adalah penaksir yang konsisten untuk X_i^k.

Teorema 2.6

Misalkan $\{\boldsymbol{X}_n\}$ adalah sebuah barisan vektor berdimensi p dan misalkan **X** adalah suatu vektor random yang terdefinisi di ruang sampel yang sama, maka

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{X}\ \ jika\ dan\ hanya\ jika\ \ X_{nj} \xrightarrow{p} X_j\ \ ;\ \forall\, j = 1,2,\dots,p$$

Weak Law of Large Number (WLLN) untuk vektor :

Misalkan $\{\boldsymbol{X}_n\}$ adalah sebuah barisan vektor random iid dengan $E(\boldsymbol{X}_1) = E(\boldsymbol{X}_2) = \cdots = E(\boldsymbol{X}_n) = \boldsymbol{\mu}$ dan matriks variansi-kovariansi adalah $\boldsymbol{\Sigma}$. Notasikan $\bar{\boldsymbol{X}}_n = N^{-1}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ dengan $\bar{\boldsymbol{X}}_n = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)'$. Berdasarkan teorema *Weak Law of Large Number* (WLLN), $\bar{X}_j \xrightarrow{p} \mu_j\ ;\ \forall\, j = 1,\dots,p$. Maka berdasarkan teorema 2.6, $\bar{\boldsymbol{X}}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}$. Atau dapat dituliskan

$$jika\ \ \bar{X}_j \xrightarrow{p} \mu_j\ ;\ \forall\, j = 1,\dots,p\ \ maka\ \ \bar{\boldsymbol{X}}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}$$

Teorema 2.7

Jika X_n dan Y_n adalah variabel-variabel random dengan $plim\ X_n = C$ dan $plim\ Y_n = D$, maka

- ✓ $plim\ (X_n + Y_n) = C + D$
- ✓ $plim\ (X_n Y_n) = CD$
- ✓ $plim\ \left(\frac{X_n}{Y_n}\right) = \frac{C}{D}, D \neq 0$

Jika $\boldsymbol{W}_n$ adalah matriks yang elemen-elemennya berisi variabel-variabel random dan jika $plim\ \boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{\Omega}$, maka $plim\ \boldsymbol{W}_n^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$.

Jika $\boldsymbol{X}_n$ dan $\boldsymbol{Y}_n$ adalah matriks-matriks variabel random dengan $plim\ \boldsymbol{X}_n = \mathbf{A}$ dan $plim\ \boldsymbol{Y}_n = \mathbf{B}$**,** maka $plim\ \boldsymbol{X}_n\boldsymbol{Y}_n = \mathbf{AB}$**.**

2.7 Distribusi Limit (*Limiting Distribution*)

- Konvergen dalam Distribusi

Definisi 2.15

Misalkan fungsi distribusi $F_n(y)$ dari suatu variabel random Y_n bergantung pada n, n=1,2,3,…. Jika $F(y)$ adalah suatu fungsi distribusi dan jika $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ dimana $F(y)$ kontinu, maka barisan dari variabel-variabel random Y_1, Y_2,… konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random dengan fungsi distribusi $F(y)$, atau dapat dinotasikan dengan

$$Y_n \xrightarrow{D} Y$$

Teorema 2.8

Teorema Limit Pusat (*Central Limit Theorem*) :

Misalkan X_1, X_2,…, X_n adalah observasi-observasi dari suatu sampel random dari suatu distribusi yang mempunyai *mean* μ dan variansi positif σ^2. Maka variabel random $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ memiliki suatu distribusi limit normal dengan *mean* 0 dan variansi 1, atau dapat dinotasikan dengan

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Distribusi limit sering juga disebut sebagai distribusi asimtotik. Berdasarkan teorema CLT diatas,

$$jika\ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)\ \ maka\ secara\ asimtotik\ \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Teorema limit pusat (CLT) diatas dapat juga diperluas penggunaannya untuk vektor variabel random.

Teorema 2.9

Misalkan $\{\boldsymbol{X}_n\}$ adalah sebuah barisan vektor random berukuran p yang iid dengan *mean* μ dan matriks variansi-kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$ yang definit positif. Misalkan

$$\boldsymbol{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$$

Maka $\boldsymbol{Y}_n$ konvergen dalam distribusi ke distribusi $N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, atau dinotasikan dengan

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Berdasarkan teorema diatas, dapat dikatakan bahwa

$$jika\ \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})\ maka\ secara\ asimtotik\ \bar{\boldsymbol{X}}_n \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{n}\right)$$

Matriks variansi-kovariansi dari bentuk $\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$ disebut sebagai *asymptotic covariance matrix* dan dinyatakan dengan $Avar\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Sedangkan Matriks variansi-kovariansi dari $\bar{\boldsymbol{X}}_n$ disebut sebagai *asymptotic covariance matrix* dan dinyatakan dengan $Avar(\bar{\boldsymbol{X}}_n) = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{n}$.

2.8 Data Panel

2.8.1 Definisi dan Contoh Data Panel

Menurut *Dony Dahana Wirawan, Doktor bidang Riset Pemasaran dari Tohoku University*, Data Panel adalah catatan nilai variabel-variabel yang diambil dalam jangka waktu tertentu dari suatu kelompok target sampel (panel) yang telah ditentukan. Variabel-variabel tersebut bisa berupa keadaan atau aksi yang dilakukan oleh panel yang dapat berubah seiring dengan waktu. Data panel merupakan gabungan dari data silang *(cross-sectional data)* dan data runtun waktu *(time series data)*. Data silang *(cross sectional data)* merupakan data yang terdiri dari sejumlah individu yang dikumpulkan pada suatu waktu tertentu. Sedangkan data runtun waktu *(time series data)* merupakan data yang terdiri dari satu individu tetapi meliputi beberapa periode waktu tertentu seperti harian, mingguan, bulanan, tahunan, dan lain-lain. Contoh data panel, misalnya data yang memuat catatan tahunan pendapatan dan konsumsi suatu produk dari suatu komunitas tertentu.

Dalam analisis perekonomian, data panel sangat banyak ditemui. Sebagai contoh seperti data perbandingan antara tiga perusahaan garmen yang memiliki variabel yang sama misalnya jumlah karyawan, jumlah pemesanan, jumlah produksi, unit produksi, *market share*, dan lain-lain. Semua variabel tersebut dikumpulkan setiap tahun selama 10 tahun. Kelompok data panel tersebut akan memiliki pengamatan sebanyak 30 buah pengamatan karena 3 perusahaan garmen menggunakan data selama 10 tahun.

2.8.2 Keunggulan Data Panel

Hsiao (1986), mencatat bahwa penggunaan data panel dalam penelitian ekonomi memiliki beberapa keunggulan utama dibandingkan data jenis *cross section* maupun *time series*, yaitu :

Pertama, data panel dapat memberikan jumlah pengamatan yang besar bagi peneliti.

Kedua, data panel dapat memberikan informasi yang lebih banyak yang tidak dapat diberikan hanya oleh data *cross section* atau *time series* saja.

2.8.3 Kelemahan Data Panel

Di samping keunggulan-keunggulan di atas, data panel memiliki kelemahan dari segi biaya, tenaga dan waktu yaitu dibutuhkan dana dan tenaga kerja yang besar serta waktu yang lama dalam proses pengumpulan data panel (Baltagi, 2001:7-9).

2.9 Pemodelan Data Panel

2.9.1 Model Regresi Data Panel

Data panel merupakan gabungan dari data silang *(cross sectional data)* dan data runtun waktu *(time series data)*, maka model regresi data panel dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y_{i,t} = \alpha + \beta x_{i,t} + u_{i,t}$$
$$i = 1, 2, \ldots, N \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

dimana :

N = Banyaknya observasi

T = Banyaknya periode waktu

N x T = Banyaknya data panel

$y_{i,t}$ = Variabel respon untuk individu ke-i pada waktu ke-t

$x_{i,t}$ = Variabel prediktor untuk individu ke-i pada waktu ke-t

α = *Intercept* model regresi data panel

β = Parameter model regresi data panel

$u_{i,t}$ = Komponen *error* model

Berdasarkan Komponen *error* $u_{i,t}$, model regresi data panel terbagi atas :

1. Model regresi komponen *error* satu arah

$$y_{i,t} = \alpha + \beta x_{i,t} + u_{i,t}$$

$$\text{dimana } u_{i,t} = \mu_i + v_{i,t}$$

2. Model regresi komponen *error* dua arah

$$y_{i,t} = \alpha + \beta x_{i,t} + u_{i,t}$$

$$\text{dimana } u_{i,t} = \mu_i + \lambda_t + v_{i,t}$$

dimana :

μ_i = Pengaruh yang tidak terobservasi dari individu ke-i tanpa dipengaruhi faktor waktu, misal : keunggulan dari masing-masing individu.

λ_t = Pengaruh yang tidak terobservasi dari waktu ke-t tanpa dipengaruhi faktor individu, misal : pada suatu waktu tertentu ada peristiwa yang tidak terdata yang mengakibatkan hasil observasi menjadi tidak lazim dari waktu sebelumnya.

$v_{i,t}$ = *error* yang benar-benar tidak diketahui *(remainder disturbance)* dari individu ke-i pada waktu ke-t.

Berdasarkan asumsi pengaruh atau *effects* yang digunakan pada model regresi data panel, model regresi data panel dibagi menjadi 2 :

1. *Fixed effects model*

Pada *fixed effects model* untuk data panel , pemilihan individu dan waktu ditentukan secara *fixed* oleh peneliti, sehingga *effects* hanya sebatas pada individu dan waktu yang ditentukan tersebut. Khusus untuk data panel dengan komponen *error* satu arah, pemilihan individu ditentukan secara *fixed* oleh peneliti, sehingga *effects* hanya sebatas pada individu yang ditentukan tersebut. Dengan demikian, *effects* dari individu diasumsikan sebagai *fixed* parameter. Karena itu pada *fixed effects model* untuk data panel dengan komponen *error* satu arah, perbedaan karakteristik individu diakomodasikan pada *intercept* sehingga *intercept*nya berubah antar individu. Maka *fixed effects model* untuk data panel dengan komponen *error* satu arah adalah sebagai berikut :

$$y_{i,t} = \alpha + \beta x_{i,t} + u_{i,t}$$
$$\text{dimana } u_{i,t} = \mu_i + v_{i,t}$$
$$v_{i,t} \sim NIID(0, \sigma_v^2)$$

2. *Random effects model*

Pada *random effects model* untuk data panel, pemilihan individu dan waktu diakukan secara acak, sehingga *effects* dari indvidu dan waktu diasumsikan merupakan variabel acak. Khusus untuk data panel dengan komponen *error* satu arah, pemilihan individu diakukan secara acak, sehingga *effects* dari indvidu diasumsikan merupakan variabel acak. Karena itu pada *random effects model* untuk data panel dengan komponen *error* satu arah, perbedaan karakteristik individu diakomodasikan pada *error* dari model. Maka *random effects model* untuk data panel dengan komponen *error* satu arah adalah sebagai berikut :

$$y_{i,t} = \alpha + \beta x_{i,t} + u_{i,t}$$
$$\text{dimana } u_{i,t} = \mu_i + v_{i,t}$$
$$\mu_i \sim NIID\left(0, \sigma_\mu^2\right);\ v_{i,t} \sim NIID(0, \sigma_v^2)$$

2.10 Model Dinamis

Selain pemodelan regresi data panel sebagai model dasar, dapat pula dibangun sebuah model data panel yang lebih rumit namun lebih sesuai dengan permasalahan ekonomi yang ada. Data panel dapat diaplikasikan ke dalam model dinamis, hal ini disebabkan karena pada dasarnya hubungan variabel-variabel ekonomi merupakan suatu kedinamisan, yakni suatu variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel-variabel pada waktu yang sama, melainkan juga ditentukan oleh variabel pada waktu sebelumnya.

Model dinamis merupakan salah satu alat analisis yang dapat digunakan untuk mengevaluasi dampak jangka pendek dan jangka panjang dari suatu kebijakan ekonomi atau aktivitas bisnis. Sebagai contoh : pemerintah menetapkan kebijakan menaikkan harga pupuk, akan dilihat apakah kebijakan tersebut memberi pengaruh terhadap penawaran beras. Dalam sektor pertanian dampak dari suatu kebijakan yang ditetapkan pemerintah saat ini sering baru terlihat beberapa bulan bahkan beberapa tahun kemudian (dampak jangka panjang). Hal ini dapat disebabkan karena aktivitas pertanian mempunyai selang waktu (*time lag*) dari mulai pengambilan keputusan produksi sampai realisasi produksi. Oleh sebab itu model dinamis sangat cocok diaplikasikan dalam menganalisis pengaruh kebijakan ini. Ciri dari model dinamis adalah adanya *lag* dari variabel dependen, hal ini disebabkan karena *factor habits formation* (kebiasaan). Oleh sebab itu model data panel dinamis lebih tepat menggambarkan keadaan sebenarnya dalam analisis perekonomian. Selanjutnya mengenai model dinamis untuk data panel beserta penaksiran parameter akan dibahas pada bab 3.

2.11 Taksiran Parameter pada Model Regresi Linier

2.11.1 Taksiran Parameter Saat Variabel Eksplanatori Tidak Berkorelasi dengan *Error*

Perhatikan model regresi linier sampel berikut

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \ ; \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

dengan

y_i = Variabel respon untuk observasi ke-i pada model regresi linier

α = *Intercept* pada model regresi linier

β = Parameter pada model regresi linier

x_i = Variabel *regressor* untuk observasi ke-i pada model regresi linier

u_i = *Error* untuk observasi ke-i pada model regresi linier

Untuk menaksir parameter β, salah satu metode penaksiran yang dapat digunakan adalah metode *Ordinary Least Square* (OLS). Metode penaksiran ini menggunakan prinsip meminimumkan jumlah penyimpangan kuadrat antara nilai prediksi dari variabel respon dengan nilai sebenarnya. Metode ini pertama kali dikembangkan oleh Carl Friedrich Gauss. Dalam pendekatannya, Gauss membuat asumsi-asumsi sebagai berikut :

1) Model regresi linier merupakan model regresi yang linier di dalam parameter.

2) x_i merupakan variabel *regressor* yang bernilai tetap (*nonstochastic*) pada *sampling* yang diulang-ulang.

3) Nilai *mean* atau nilai ekspektasi dari *random disturbance* u_i diberikan x_i sama dengan 0, Secara teknis dapat dinotasikan sebagai berikut

$$E[u_i|x_i] = 0$$

4) Variansi dari *random disturbance* u_i diberikan x_i adalah sama untuk semua observasi atau dengan kata lain variansi dari u_i diberikan x_i adalah identik. Secara teknis dapat dinotasikan sebagai berikut

$$Var(u_i|x_i) = E\{[u_i - E(u_i|x_i)]^2|x_i\} = \sigma^2$$

dimana notasi *Var* diatas menyatakan notasi untuk variansi.

5) Tidak terjadi autokorelasi antar *disturbance*. Misalkan diberikan dua nilai sebarang yaitu x_i dan x_j ($i \neq j$), maka korelasi antar u_i dan u_j ($i \neq j$) sama dengan 0. Secara teknis dapat dinotasikan sebagai berikut

$$cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = E\{[u_i - E(u_i|x_i)][u_j - E(u_j|x_j)]\}$$

$$= E(u_i, u_j) = 0, \;\; i \neq j$$

dimana i dan j adalah dua observasi yang berbeda dan notasi *cov* diatas menyatakan notasi untuk kovariansi. Asumsi ini menegaskan bahwa *error* di satu observasi tidak berkorelasi dengan *error* di observasi lainnya.

6) Kovariansi antara x_i dan u_i sama dengan 0 atau $E(x_i u_i) = 0$. Secara teknis dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
cov(x_i, u_i) &= E\left[\left(x_i - E(x_i)\right)\left(u_i - E(u_i)\right)\right] \\
&= E\left[\left(x_i - E(x_i)\right)(u_i)\right] && \text{karena } E(u_i) = 0 \\
&= E[x_i u_i - E(x_i) u_i] \\
&= E(x_i u_i) - E[E(x_i) u_i] \\
&= E(x_i u_i) - E(x_i) E(u_i) && \text{karena } E(x_i) \textit{ nonstochastic} \\
&= E(x_i u_i) && \text{karena } E(u_i) = 0 \\
&= 0 && \text{berdasarkan asumsi}
\end{aligned}
$$

7) $(u_i | x_i) \sim N(0, \sigma^2)$

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas, pada asumsi ke-6 menunjukkan bahwa variabel *regressor* (variabel eksplanatori) tidak berkorelasi dengan *error*, atau dengan kata lain variabel eksplanatori bersifat eksogen. Taksiran parameter yang dihasilkan oleh metode OLS ini adalah taksiran yang tak bias dan konsisten.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa taksiran OLS untuk β dimana variabel *regressor* (variabel eksplanatori) tidak berkorelasi dengan *error* menghasilkan taksiran yang tak bias.

$$
\hat{\beta}_{OLS} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \quad dimana\ c_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (\alpha + \beta x_i + u_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha + \sum_{i=1}^{n} c_i \beta x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i + \beta \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad dimana \sum_{i=1}^{n} c_i = 0, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1
\end{aligned}
$$

keterangan :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{n\bar{x}-n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_i\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = 1$$

Ekspektasikan $\hat{\beta}_{OLS}$ di kedua ruas : $E(\hat{\beta}_{OLS}) = \beta + E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i)$

Karena x_i tidak berkorelasi dengan u_i yang mengimplikasikan $E(x_i u_i) = 0$, maka $E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i) = 0$, sehingga $E\big(\hat{\beta}_{OLS}\big) = \beta$. Jadi $\hat{\beta}_{OLS}$ adalah taksiran yang tak bias untuk β.

Lalu, akan ditunjukkan bahwa taksiran OLS untuk β dimana variabel *regressor* (variabel eksplanatori) tidak berkorelasi dengan *error* menghasilkan taksiran yang konsisten.

Bukti :

$$\hat{\beta}_{OLS} = \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \bar{x}n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} - \frac{\bar{x}n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Berdasarkan teorema WLLN :

$$plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = E(x_i u_i)$$

Karena x_i tidak berkorelasi dengan u_i yang mengimplikasikan $E(x_i u_i) = 0$ maka $plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = E(x_i u_i) = 0$.

$$plim\, \bar{x} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i = \bar{x}.plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i = \bar{x}.E(u_i) = 0$$

dan

$$plim\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = E\left[(x_i - \bar{x})^2\right] = \sigma_{X_i}^2$$

Sehingga

$$plim\, \hat{\beta}_{OLS} = \beta + \frac{0}{\sigma_{X_i}^2} - \frac{0}{\sigma_{X_i}^2} = \beta$$

Maka, $\hat{\beta}_{OLS}$ adalah taksiran yang konsisten untuk β.

2.11.2 Taksiran Parameter Saat Variabel Eksplanatori Berkorelasi dengan *Error*

Dalam aplikasinya, terdapat model linier yang memiliki variabel eksplanatori endogen, yakni variabel eksplanatori berkorelasi dengan *error*. Contohnya dalam model dinamis dimana *lag* dari variabel dependen berkorelasi dengan *error*.

Perhatikan model regresi linier sampel berikut

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \;\; ; \;\; i = 1, 2, \dots, n$$

Karena x_i berkorelasi dengan u_i maka $cov(x_i, u_i) \neq 0$ sehingga estimasi OLS untuk β akan menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten.

Berikut akan ditunjukkan bahwa taksiran OLS untuk β pada saat terdapat korelasi antara variabel eksplanatori dengan *error* menghasilkan taksiran yang bias. Dari penjabaran sebelumnya diperoleh

$$\hat{\beta}_{OLS} = \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \qquad dimana\ c_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ekspektasikan $\hat{\beta}_{OLS}$ di kedua ruas : $E(\hat{\beta}_{OLS}) = \beta + E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i)$

Karena x_i berkorelasi dengan u_i yang mengimplikasikan $E(x_i u_i) \neq 0$, maka $E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i) \neq 0$, sehingga $E(\hat{\beta}_{OLS}) \neq \beta$. Jadi $\hat{\beta}_{OLS}$ adalah taksiran yang bias untuk β.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa taksiran OLS adalah taksiran yang tidak konsisten untuk β jika variabel eksplanatori berkorelasi dengan *error*.

Bukti:

$$\hat{\beta}_{OLS} = \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\, u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \bar{x}n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} - \frac{\bar{x}n^{-1}\sum_{i=1}^{n} u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Berdasarkan teorema WLLN :

$$plim\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = E(x_i u_i)$$

Karena x_i berkorelasi dengan u_i yang mengimplikasikan $E(x_i u_i) \neq 0$ maka $plim\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = E(x_i u_i) \neq 0$. Misalkan $E(x_i u_i) = C$, dimana C adalah nilai dari $E(x_i u_i)$ yang tidak sama dengan 0. Maka $plim\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = E(x_i u_i) = C$

$$plim\, \bar{x}n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i = \bar{x}.plim\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i = \bar{x}.E(u_i) = 0$$

dan

$$plim\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = E\left[(x_i - \overline{x})^2\right] = \sigma_{X_i}^2 = \sigma^2$$

Sehingga

$$plim\, \hat{\beta}_{OLS} = \beta + \frac{C}{\sigma_{X_i}^2} - \frac{0}{\sigma_{X_i}^2} = \beta + \frac{C}{\sigma^2} \neq \beta$$

Maka, $\hat{\beta}_{OLS}$ bukan taksiran yang konsisten untuk β.

Karena taksiran OLS pada saat variabel eksplanatori berkorelasi dengan *error* adalah taksiran yang bias dan tidak konsisten, maka diperlukan metode lain untuk penaksiran parameter , salah satunya adalah metode instrumental variabel.

2.12 Metode Instrumental Variabel

Metode instrumental variabel merupakan metode yang bertujuan menghilangkan efek variabel eksplanatori endogen dalam model sehingga taksiran parameter yang didapat bersifat tak bias dan konsisten.

Pandang model linier berikut :

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_{K-1} x_{K-1} + \beta_K x_K + u \qquad (2.12.1)$$

$$E(u) = 0,\ Cov\left(x_j, u\right) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, K-1 \qquad (2.12.2)$$

dimana x_k berkorelasi dengan u atau dengan kata lain variabel eksplanatori $x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}$ adalah variabel ekspalanatori eksogen, x_k adalah variabel eksplanatori endogen dan $x_1 = 1$.

Pada model ini variabel x_k berkorelasi dengan *error* sehingga $Cov(x_k, u) \neq 0$. Jika hal ini terjadi, maka estimasi OLS untuk β pada (2.12.1) akan menghasilkan taksiran yang bias dan juga tidak konsisten.

Untuk menggunakan metode instrumental variabel dibutuhkan suatu variabel yang disebut sebagai variabel instrumen. Variabel instrumen (misal z_1) harus memenuhi dua syarat berikut :

1. z_1 tidak berkorelasi dengan *error* u.

$$Cov(z_1, u) = 0 \tag{2.12.3}$$

   z_1 tidak berkorelasi dengan u menunjukkan bahwa z_1 bersama dengan $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$ merupakan variabel eksplanatori eksogen.

2. z_1 berkorelasi dengan x_k.

   Untuk menjelaskan hal ini, dibutuhkan definisi proyeksi linear x_k pada semua variabel eksogen $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}, z_1$ sebagai berikut :

$$x_k = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots + \delta_{K-1} x_{K-1} + \theta_1 z_1 + r_K \tag{2.12.4}$$

   Hal ini menggambarkan hubungan antara z_1 dengan variabel eksplanatori endogen, x_K. Menurut definisi *error* pada proyeksi linier, $E(r_K) = 0$, dan r_K tidak berkorelasi dengan $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$ dan z_1.

   Syarat yang harus dipenuhi pada model (2.12.4) adalah :

$$\theta_1 \neq 0 \tag{2.12.5}$$

   Kondisi ini sering diartikan sebagai "*z_1 berkorelasi secara parsial dengan x_K*", dimana $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$ dianggap konstan. Jika x_K merupakan satu-satunya variabel eksplanatori pada (2.12.1) maka proyeksi linear pada (2.12.4) menjadi $x_K = \theta_1 z_1 + r_K$, dimana $\theta_1 = \frac{cov(z_1, x_K)}{var(z_1)}$.

   Kondisi (2.12.5) sama saja menyatakan bahwa $cov(z_1, x_K) \neq 0$. Jika z_1 memenuhi kedua syarat (2.12.3) dan (2.12.5), maka z_1 merupakan variabel instrumental untuk x_K.

Berdasarkan penjelasan diatas, karena $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$ tidak berkorelasi dengan u, maka sebenarnya $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$ juga berperan sebagai variabel instrumen untuk masing-masing variabel itu sendiri. Dengan kata lain variabel instrumental terdiri atas seluruh variabel eksogen eksplanatori dan instrumen untuk variabel endogen eksplanatori.

2.12.1 *System Instrumental Variable (SIV) Estimator*

System Instrumental Variable (SIV) adalah sistem yang melibatkan variabel instrumen dalam model dengan asumsi-asumsi tertentu. *System Instrumental Variable (SIV)* digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model pada persamaan (2.12.1). Terdapat 2 kasus untuk mengestimasi parameter dalam model pada persamaan (2.12.1) yaitu sebagai berikut

- **Kasus 1** : variabel endogen x_K pada persamaan (2.12.1) di instrumen hanya oleh satu variabel instrumen yaitu z_1.

Pada kasus ini, pertama-tama model pada persamaan (2.12.1) dapat dituliskan dalam bentuk vektor matriks sebagai berikut :

$$y = \boldsymbol{x\beta} + u \tag{2.12.6}$$

dimana $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \dots, x_K)$, dan $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_K)'$. Untuk menjelaskan asumsi-asumsi yang digunakan di dalam *SIV*, pada kasus ini misalkan **z** adalah suatu vektor variabel instrumental yang dinyatakan dengan $\boldsymbol{z} = (x_1, x_2 \dots, x_{K-1}, z_1)$ yang telah memenuhi kondisi (2.12.3) dan (2.12.5), dimana z_1 merupakan satu-satunya variabel instrumen untuk variabel endogen x_k.

Asumsi-asumsi dalam *SIV* yang dibutuhkan untuk mengestimasi **β** adalah :

1. ASUMSI *SIV* I :

$$E(\boldsymbol{z}'u) = \boldsymbol{0} \tag{2.12.7}$$

Asumsi ini diperoleh dari kondisi (2.12.2) dan (2.12.3)

2. ASUMSI *SIV* II :

$$Rank \;\; E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = K \tag{2.12.8}$$

Untuk memperoleh parameter $\boldsymbol{\beta}$ pada persamaan (2.12.6), akan dilakukan langkah-langkah berikut :

(1) Kalikan model pada persamaan (2.12.6) dengan **z'**, maka

$$\boldsymbol{z}'y = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{z}'u \tag{2.12.9}$$

(2) Dengan mengekspektasikan bentuk pada persamaan (2.12.9) dan mengggunakan asumsi *SIV* 1, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{z}'y) &= E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}) + E(\boldsymbol{z}'u) \\ &= E(\boldsymbol{z}'x)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.12.10}$$

dimana $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})$ berukuran K x K dan $E(\boldsymbol{z}'y)$ berukuran K x 1.

Persamaan (2.12.10) akan memiliki solusi yang unik jika $[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})]^{-1}$ ada, atau ($[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})]$ merupakan matriks nonsingular). Solusinya adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{\beta} = [E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'y) \tag{2.12.11}$$

Persamaan (2.12.10) akan memiliki solusi yang unik jika dan hanya jika rank $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = K$. Hal ini akan terpenuhi jika persamaan pada (2.12.5) terpenuhi yaitu ($\theta_1 \neq 0$). Berikut akan ditunjukkan rank $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = K$ jika dan hanya jika $\theta_1 \neq 0$.

Bukti :

Asumsikan seluruh variabel eksogen saling bebas linier, sehingga $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$ merupakan matriks nonsingular dan rank $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = K$.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{K-1}, x_K)$

$\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, \dots, x_{K-1}, z_1)$

Definisikan :

$\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}, x_K{}^*)$ yang merupakan proyeksi linier dari masing-masing elemen dari $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{z}$ yang bisa dituliskan sebagai berikut

$x_1 = x_1 + r_1$

$x_2 = x_2 + r_2$

$\vdots$

$x_{k-1} = x_{k-1} + r_{k-1}$

$x_k = x_K{}^* + r_K$

dimana $x_K{}^* = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots + \delta_{K-1} x_{K-1} + \theta_1 z_1$

sehingga, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{r}$, dengan $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{K-1}, r_K)$.

Kalikan bentuk $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{r}$ dengan $\boldsymbol{z}'$ di kedua ruas maka diperoleh $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}$. Kemudian ekspektasikan bentuk $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}$ sehingga diperoleh $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*) + E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{r})$. Karena $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ maka bentuknya akan menjadi $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*)$

Misalkan

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & \delta_2 \\ . & . & . & . & . & . & : \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & \delta_{K-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \theta_1 \end{bmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{z\Pi}$, dan $\boldsymbol{\Pi}$ adalah matriks berukuran K x K,

Sehingga $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z\Pi}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})\boldsymbol{\Pi}$. Karena $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$ merupakan matriks nonsingular, maka rank $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = K$ akan terpenuhi jika dan hanya jika $\theta_1 \neq 0$.

Untuk menaksir parameter $\boldsymbol{\beta}$ pada persamaan (2.12.6), diambil sampel acak $\{(x_i, y_i, z_i) : i=1, 2,\ldots, N\}$ sehingga taksiran parameter untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$

Bukti :

Berdasarkan Teorema *Weak Law of Large Number* (WLLN), $\{\boldsymbol{z}'u\}$ adalah sebuah barisan vektor random iid yang memiliki mean $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$. Misalkan $\overline{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i$, maka

$$\overline{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$$

Jadi, $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ adalah penaksir yang konsisten untuk $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$. Jelas bahwa $E\left(\overline{\boldsymbol{z}'u}\right) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$ sehingga $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ adalah penaksir yang tak bias untuk $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$. Kesimpulannya, $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ adalah penaksir yang baik untuk $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = E(\boldsymbol{z}'u)$.

Sehingga, dengan mengambil sampel random $\{(x_i, y_i, z_i) : i=1, 2,\ldots, N\}$ dan menggunakan asumsi SIV 1, diperoleh bahwa

$$E(\boldsymbol{z}'u) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i = \boldsymbol{0}$$

Karena $u_i = y_i - \boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, maka bentuk diatas menjadi

$$E(\boldsymbol{z}'u) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\left(y_i - \boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$

(2.12.12)

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa taksiran parameter yang diperoleh diatas bersifat tak bias dan konsisten untuk $N \to \infty$.

Bukti :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'} y_i\right)$$

$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i)\right)$$

$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}\right) + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}u_i\right)$$

$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)\boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}u_i\right)$$

$$= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}u_i\right)$$

Maka,

$$p\lim_{N\to\infty} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}u_i\right)$$

Berdasarkan (WLLN) *Weak Law of Large Number* pada subbab 2.6,

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}} = E(\boldsymbol{z}_i^{'}\boldsymbol{x}_i) \equiv \boldsymbol{\Gamma}$$

dan

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{z}_i^{'}u_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = E(\boldsymbol{z}_i^{'}u_i) = \boldsymbol{0}$$

sehingga

$$p\lim_{N\to\infty} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} . p\lim_{n\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i\right)$$

$$= \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1}.\boldsymbol{0}$$

$$= \boldsymbol{\beta}$$

Untuk $N \to \infty$, $p\lim_{N\to\infty} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$

Jadi, terbukti bahwa $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang tak bias dan konsisten untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ untuk $N \to \infty$.

- **Kasus 2** : variabel endogen x_K pada persamaan (2.12.1) di instrumen oleh lebih dari satu variabel instrumen misal $z_1, z_2, \ldots, z_M$.

$\boldsymbol{\beta}$ pada persamaan (2.12.10) dapat dengan mudah diestimasi jika banyaknya kolom pada **z** sama dengan banyaknya kolom pada **x** sehingga $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})$ merupakan suatu matriks bujursangkar berukuran $K \times K$ dengan asumsi memiliki rank penuh K. Namun, suatu variabel eksplanatori endogen x_K dapat di instrumen oleh lebih dari satu variabel instrumen, misalkan $z_1, z_2, \ldots, z_M$. Karena $z_1, z_2, \ldots, z_M$ merupakan variabel instrumen untuk x_K sehingga $cov(z_h, u) = 0$, untuk $h = 1, 2, \ldots, M$.

$z_1, z_2, \ldots, z_M$ tidak berkorelasi dengan u menunjukkan bahwa $z_1, z_2, \ldots, z_M$ bersama dengan $x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}$ merupakan seluruh variabel eksogen di dalam model. Maka vektor variabel eksogennya adalah $\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}, z_1, z_2, \ldots, z_M)$ yang merupakan vektor berukuran $1 \times L$ dimana $L = K - 1 + M$.

Diasumsikan keseluruhan variabel eksogen saling bebas linier, sehingga $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$ merupakan matriks nonsingular dan $rank\left(E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})\right) = L$. Definisikan $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}, x_K{}^*)$ yang merupakan proyeksi linier dari masing-masing elemen dari $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{z}$ yang bisa dituliskan sebagai berikut

$x_1 = x_1 + r_1$

$x_2 = x_2 + r_2$

$\vdots$

$x_{k-1} = x_{k-1} + r_{k-1}$

$x_k = x_K{}^* + r_K$

dimana $x_K{}^* = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots + \delta_{K-1} x_{K-1} + \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \cdots + \theta_M z_M$, sehingga $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{r}$, dengan $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{K-1}, r_K)$.

Kalikan bentuk $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{r}$ dengan $\boldsymbol{z}'$ di kedua ruas maka diperoleh $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}$. Kemudian ekspektasikan bentuk $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}$ sehingga diperoleh $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*) + E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{r})$. Karena $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ maka bentuknya akan menjadi $E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*)$.

Misalkan $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{z\Pi}$, maka

$E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}^*) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z\Pi}) = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})\boldsymbol{\Pi}$

dari bentuk diatas maka diperoleh $\boldsymbol{\Pi} = [E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})$ dimana $\boldsymbol{\Pi}$ adalah matriks berukuran $L \times K$.

Lalu, *transpose*-kan bentuk $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{z\Pi}$ sehingga diperoleh

$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{z\Pi}$

$\boldsymbol{x}^{*'} = \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'$

Kemudian kalikan bentuk $\boldsymbol{x}^{*'} = \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'$ dengan u di kedua ruas sehingga didapat

$\boldsymbol{x}^{*'}u = \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'u$

Ekspektasikan kedua ruas maka

$E(\boldsymbol{x}^{*'}u) = E(\boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'u)$

$E(\boldsymbol{x}^{*'}u) = \boldsymbol{\Pi}'E(\boldsymbol{z}'u) = \boldsymbol{0}$

Kalikan model pada persamaan (2.12.6) yaitu $y = \boldsymbol{x\beta} + u$ dengan $\boldsymbol{x}^{*'}$ sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}^{*'}y = \boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{x}^{*'}u \tag{2.12.13}$$

Ekspektasikan kedua ruas, maka

$$E(\boldsymbol{x}^{*'}y) = E(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x\beta}) + E(\boldsymbol{x}^{*'}u)$$
$$= E(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{0} \qquad (2.12.14)$$

Persamaan (2.12.14) akan memiliki solusi yang unik jika $E(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x})$ merupakan matriks nonsingular.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x}) &= E(\boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{\Pi}'E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) \\ &= \left([E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})\right)'E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) \\ &= E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

dengan cara yang sama, akan dicari $E(\boldsymbol{x}^{*'}y)$,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{x}^{*'}y) &= E(\boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{z}'y) \\ &= \boldsymbol{\Pi}'E(\boldsymbol{z}'y) \\ &= \left([E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})\right)'E(\boldsymbol{z}'y) \\ &= E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'y) \end{aligned}$$

Maka persamaan (2.12.14) akan memiliki solusi

$$\boldsymbol{\beta} = [E(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x})]^{-1}E(\boldsymbol{x}^{*'}y)$$

atau dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\boldsymbol{\beta} = [E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})]^{-1}E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1}E(\boldsymbol{z}'y)$$

Untuk menaksir parameter $\boldsymbol{\beta}$ diatas, diambil sampel acak {(x_i, y_i, z_i) : i=1,2,…,N} sehingga taksiran parameter untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'y_i\right)\right]$$

Bukti :

Sama seperti pada kasus 1, berdasarkan Teorema *Weak Law of Large Number* (WLLN), $\{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\}$ adalah sebuah barisan vektor random iid yang memiliki mean $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}$; $\{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\}$ adalah sebuah barisan vektor random iid yang memiliki mean $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}$ dan $\{\boldsymbol{z}'u\}$ adalah sebuah barisan vektor random iid yang memiliki mean $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$.
Misalkan $\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i$; $\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i$ dan $\overline{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i$, maka

$$\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{x'\boldsymbol{z}}$$

dan

$$\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}$$

dan

$$\overline{\boldsymbol{z}'u} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$$

Jadi, $\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}$, $\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}$ dan $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ masing-masing adalah penaksir yang konsisten untuk $\boldsymbol{\mu}_{x'\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{\mu}_{z'\boldsymbol{z}}$ dan $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$. Jelas bahwa $E\left(\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}\right) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}$, $E\left(\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}\right) = \boldsymbol{\mu}_{z'\boldsymbol{z}}$ dan $E\left(\overline{\boldsymbol{z}'u}\right) = \boldsymbol{\mu}_{z'u}$ sehingga $\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}$, $\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}$ dan $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ masing-masing adalah penaksir yang tak bias untuk $\boldsymbol{\mu}_{x'\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{\mu}_{z'\boldsymbol{z}}$ dan $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$. Kesimpulannya, $\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}$ adalah penaksir yang baik untuk $\boldsymbol{\mu}_{x'\boldsymbol{z}} = E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})$; $\overline{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}$ adalah penaksir yang baik untuk $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}} = E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$ dan $\overline{\boldsymbol{z}'u}$ adalah penaksir yang baik untuk $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = E(\boldsymbol{z}'u)$.

Sehingga, dengan mengambil sampel random $\{(x_i, y_i, z_i) : i=1, 2,\ldots, N\}$ dan menggunakan asumsi SIV 1 yaitu $E(\boldsymbol{z}'u) = \boldsymbol{0}$, maka diperoleh bahwa

$$\mathbf{\Pi}' E(\boldsymbol{z}' u)$$

$$= E(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})[E(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})]^{-1} E(\boldsymbol{z}' u)$$

$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' u_i\right)$$

$$= \mathbf{0}$$

Karena $u_i = y_i - \boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, maka bentuk diatas menjadi

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'(y_i - \boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right) = \mathbf{0}$$

Jabarkan penurunannya, maka diperoleh

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$
$$-\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{0}$$

Maka,

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$
$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i' y_i\right)$$

Sehingga,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'y_i\right)\right]$$

(Terbukti)

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa taksiran parameter yang diperoleh diatas bersifat tak bias dan konsisten untuk $N \to \infty$.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'y_i\right)\right]$$
$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}+u_i)\right)\right]$$
$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}\right)\right] +$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i\right)\right]$$

$$= \boldsymbol{\beta} + \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i\right)\right]$$

Maka,

$$p\lim_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i\right)\right]\}$$

Berdasarkan (WLLN) *Weak Law of Large Number* pada subbab 2.6,

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}} = E(\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i) \equiv \boldsymbol{\Gamma}$$

dan

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{z}'u} = E(\boldsymbol{z}_i'u_i) = \boldsymbol{0}$$

sehingga

$$p\lim_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$

$$p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i\right)\right]$$

$$= \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$

$$p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right).\,p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}.\,p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'u_i\right)$$

$$= \boldsymbol{\beta} + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{z}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}'.\,p\lim_{N\to\infty}(N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i)^{-1}.\,\boldsymbol{0}$$

$$= \boldsymbol{\beta}$$

Untuk $N \to \infty,\ p\lim_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$

Jadi, terbukti bahwa $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang tak bias dan konsisten untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ untuk $N \to \infty$.

2.13 *Method of Moment*, Momen Kondisi dan *Generalized Method of Moment (GMM)*

2.13.1 *Method of Moment*

Metode momen (*Method of Moment*) adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari penaksir yang konsisten dari suatu parameter. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random berukuran n dari suatu distribusi dengan pdf $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$, $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r) \in \Omega$, dimana $E(X^k) < \infty,\ k = 1,2,\ldots$. $E(X^k)$ dinamakan momen ke-k dari distribusi X. Definisikan $M_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$, M_k disebut momen ke-k dari sampel, dimana k=1,2,…

Ide dasar dari metode momen adalah menyamakan momen ke-k dari distribusi X dengan momen ke-k dari sampel, dimulai dari k=1 sampai diperoleh persamaan yang cukup untuk menghasilkan solusi yang unik untuk $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$.

Untuk mendapatkan penaksir bagi $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$, diperlukan *r* persamaan sebagai berikut :

$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,

$E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$,

dan seterusnya sampai

$E(X^r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n}$

sehingga dari *r* persamaan ini akan diperoleh solusi yang unik untuk $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$.

2.13.2 Momen Kondisi

Misalkan X adalah suatu variabel random yang mempunyai *mean* μ atau $E(X) = \mu$. *Mean* μ biasanya ditaksir melalui proses pengambilan sampel yang memenuhi momen kondisi $E(X - \mu) = 0$. Momen kondisi ini dinamakan momen kondisi populasi. Momen kondisi untuk sampel adalah $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}) = 0$. Penaksir untuk μ adalah $\hat{\mu}$ yang memenuhi momen kondisi sampel. Melalui metode ini dapat ditunjukkan bahwa penaksir untuk μ adalah $\hat{\mu} = \bar{X}$.

2.13.3 *Generalized Method of Moment* (GMM)

GMM (*Generalized Method of Moment*) merupakan pendekatan general dan modern pada sistem estimasi dengan variabel instrumental. GMM adalah perluasan dari metode momen, dimana di dalam metode momen, banyaknya variabel instrumen harus sama dengan banyaknya parameter yang akan ditaksir. Untuk kasus dimana banyaknya variabel instrumen lebih besar dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir, metode momen tidak dapat digunakan lagi. Oleh karena itu diperlukan metode GMM.

GMM merupakan metode penaksiran dengan prinsip melakukan pemilihan nilai taksiran parameter agar momen kondisi dari sampel selaras dengan momen kondisi dari populasi, yaitu sama dengan nol. Mengacu pada model di dalam persamaan (2.12.6), model tersebut dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$y_i = \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{\beta} + u_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Berkaitan dengan model diatas, momen kondisi merupakan suatu fungsi dari parameter model sedemikian sehingga ekspektasinya bernilai nol saat nilai parameternya benar.

Di bawah asumsi *SIV* 1 dan *SIV* 2, parameter model $\boldsymbol{\beta}$, vektor berukuran $K \times 1$ merupakan solusi unik untuk momen kondisi dari populasi,

$$E\big(g_i(\boldsymbol{\beta})\big) = E(\boldsymbol{Z}_i' u_i) = E\big(\boldsymbol{Z}_i'(y_i - \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{\beta})\big) = \boldsymbol{0}$$

yang berkorespondensi dengan momen kondisi dari sampel :

$$\bar{g}\big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\big) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i'(y_i - \boldsymbol{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

Ide dasar dari GMM adalah memilih estimator untuk **β** sehingga $\bar{g}\big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\big) = \boldsymbol{0}$ yaitu dengan cara menyamakan momen kondisi dari populasi dengan momen kondisi dari sampel. Berikut akan dijelaskan tentang penggunaan metode momen dan GMM :

Misalkan L adalah banyaknya variabel instrumen pada matriks variabel instrumen dan K adalah banyaknya parameter yang akan ditaksir.

- Jika L=K maka jumlah vektor instrumen pada $\boldsymbol{Z}_i$ sama dengan jumlah parameter pada **β**. Sehingga $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i$ merupakan matriks berukuran KxK dan jika $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i$ merupakan matriks nonsingular, pada kasus ini metode momen masih dapat digunakan untuk menghasilkan taksiran untuk parameter **β** dimana

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\,\boldsymbol{X}_i\right)^{-\mathbf{1}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\,y_i\right)$$

- Jika L>K, metode momen tidak dapat digunakan lagi karena banyaknya kolom pada matriks variabel instrumen lebih banyak dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir atau dengan kata lain, banyaknya persamaan momen lebih banyak daripada jumlah parameter yang akan ditaksir sehingga memilih $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ menjadi lebih sulit. Oleh Karena itu, digunakan *Generalized Method of Moment* yang merupakan perluasan dari metode momen. Pada kasus ini, didefinisikan matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang merupakan suatu matriks simetris definit positif berukuran LxL yang bukan fungsi dari $\boldsymbol{\beta}$. Ide dari GMM adalah meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel

$$||\bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})||_{\widehat{\boldsymbol{W}}}^2 = \bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{W}}\bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

Persamaan ini adalah fungsi objektif GMM yang merupakan fungsi kuadratik dari momen kondisi sampel. Untuk mempermudah penulisan, misalkan $||\bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})||_{\widehat{\boldsymbol{W}}}^2 = J(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ sehingga fungsi objektif GMM diatas dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$J(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{W}}\bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

Taksiran GMM untuk **β** merupakan suatu taksiran ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}$) yang meminimumkan $(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\frac{\partial J(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \mathbf{0}$$

Maka,

$$J(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{W}}\bar{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$= \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'(y_i - \boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]'\widehat{\boldsymbol{W}}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'(y_i - \boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$= \left[N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]'\widehat{\boldsymbol{W}}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$$

$$= \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\right]\widehat{\boldsymbol{W}}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$$

$$= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$
$$- \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i\right)$$
$$+ \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

Karena $(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i)\widehat{\boldsymbol{W}}(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan matriks berordo (1 x 1) maka *transpose*-nya yaitu $\left[(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i)\widehat{\boldsymbol{W}}(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]' =$ $(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i)\widehat{\boldsymbol{W}}(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i)$ juga merupakan matriks berordo (1 x 1) yang sama, maka $J(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ menjadi :

$$J(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}y_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i\right)$$
$$- 2\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'y_i\right)$$
$$+ \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

$$\frac{\partial J(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \widehat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}y_i\right)$$
$$+\,2\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$-2\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}y_i\right)$$
$$= -2\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}\boldsymbol{X}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i^{'}\boldsymbol{Z}_i\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_i^{'}y_i\right)\right]$$

BAB 3
PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI DATA PANEL DINAMIS MENGGUNAKAN METODE BLUNDELL DAN BOND

Bab ini akan membahas bagaimana mencari taksiran parameter pada model regresi data panel dinamis menggunakan metode Blundell dan Bond. Penaksiran dilakukan pada model regresi data panel dinamis simpel untuk komponen *error* satu arah dengan efek acak. Pertama-tama akan ditunjukkan terlebih dahulu taksiran parameter yang telah didapatkan oleh Arellano dan Bond (hanya menggunakan *first-difference GMM*). Walaupun telah didapatkan taksiran yang tak bias, konsisten serta efisien, namun Blundell dan Bond mengklaim bahwa taksiran parameter yang didapat oleh Arellano dan Bond masih kurang efisien. Hal ini dikarenakan momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang digunakan oleh Arellano dan Bond hanya mencakup proses *first difference* saja. Oleh karena itu, Blundell dan Bond menyarankan penggunaan tambahan momen kondisi dan matriks variabel instrumen *level* selain *first difference*. Dengan mengkombinasikan momen kondisi dan matriks variabel instrumen antar keduanya (*first difference* dan *level*) maka akan dihasilkan suatu taksiran yang sama-sama tak bias dan konsisten tetapi lebih efisien yang dikenal dengan nama *GMM-System Estimator*.

3.1 Model Data Panel Dinamis Simpel untuk Komponen *Error* Satu Arah dengan Efek Acak

Model data panel dinamis yang digunakan dibatasi pada model data panel dinamis simpel. Oleh sebab itu, *lag* dari variabel dependen merupakan satu-satunya variabel eksplanatori (variabel endogen eksplanatori) di dalam model.

Model data panel dinamis simpel untuk komponen *error* satu arah dengan efek acak adalah sebagai berikut :

$$y_{i,t} = \delta y_{i,t-1} + u_{i,t} \;\; ; \;\; i = 1,2,\ldots,N \;\; ; \;\; t = 3,\ldots,T \tag{3.1.1}$$

dimana :

$y_{i,t}$: variabel dependen untuk individu ke-i pada waktu ke-t

$y_{i,t-1}$: *lag* dari variabel dependen yang berperan sebagai variabel endogen eksplanatori untuk individu ke-i pada waktu ke-t

δ : parameter yang belum diketahui dan akan ditaksir

$u_{i,t}$: komponen *error* untuk individu ke-i pada waktu ke-t

dengan komponen *error* $u_{i,t}$ didefinisikan

$$u_{i,t} = \mu_i + v_{i,t}$$

yang merupakan komponen *error* satu arah, dimana

μ_i : pengaruh yang tidak terobservasi dari individu ke-i tanpa dipengaruhi faktor waktu

$v_{i,t}$: pengaruh yang benar-benar tidak diketahui (*remainder disturbance*) dari individu ke-i pada waktu ke-t

Karena model dibatasi untuk model dengan efek acak, maka perbedaan karakteristik individu diakomodasikan pada *error* dalam model (*random effects models*). Oleh karena itu diasumsikan komponen *error* $\mu_i \sim NIID(0, \sigma_\mu^2)$ dan komponen *error* $v_{i,t} \sim NIID(0, \sigma_v^2)$.

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. $E(\mu_i) = E(v_{i,t}) = 0$
2. $E(\mu_i \mu_j) = \begin{cases} \sigma_\mu^2 \ untuk\ i = j \\ 0\ untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$
3. $E(v_{i,t} v_{j,s}) = \begin{cases} \sigma_v^2\ untuk\ i = j\ dan\ t = s \\ 0\ untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$
4. μ_i dan $v_{i,t}$ saling bebas
5. Tidak ada korelasi serial pada $v_{i,t}$ (dalam $v_{i,t}$ tidak saling berkorelasi)

(3.1.2)

Kedinamisan di dalam model dikarakterisasikan oleh dua sumber yang kontinu terhadap waktu yaitu $y_{i,t}$ sebagai variabel dependen dan $y_{i,t-1}$ sebagai *lag* dari variabel dependen yang berperan sebagai variabel endogen eksplanatori. Masalah paling dasar dalam model ini adalah adanya korelasi variabel endogen eksplanatori dengan variabel *error* atau dengan kata lain $y_{i,t-1}$ berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$ meskipun diasumsikan *error* tidak saling berkorelasi (*unserialy corellated*). Hal ini menyebabkan estimator OLS menjadi bias dan tidak konsisten.

3.2 Metode Instrumental Variabel

Untuk mengatasi permasalahan korelasi antara *lag* variabel dependen dengan komponen *error*, maka dapat dilakukan *first-difference*, yang bertujuan menghilangkan efek individu μ_i pada model. Dengan melakukan *first-difference* pada model (3.1.1) diperoleh model berikut :

$$y_{i,t} - y_{i,t-1} = \delta\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right) + \left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right) \;;\quad i = 1, \dots, N\,; t = 3, \dots, T \qquad (3.2.1)$$

atau dapat dituliskan kembali

$$\Delta y_{i,t} = \delta \Delta y_{i,t-1} + \Delta v_{i,t} \quad ;\quad i = 1, \dots, N\,;\quad t = 3, \dots, T$$

dimana

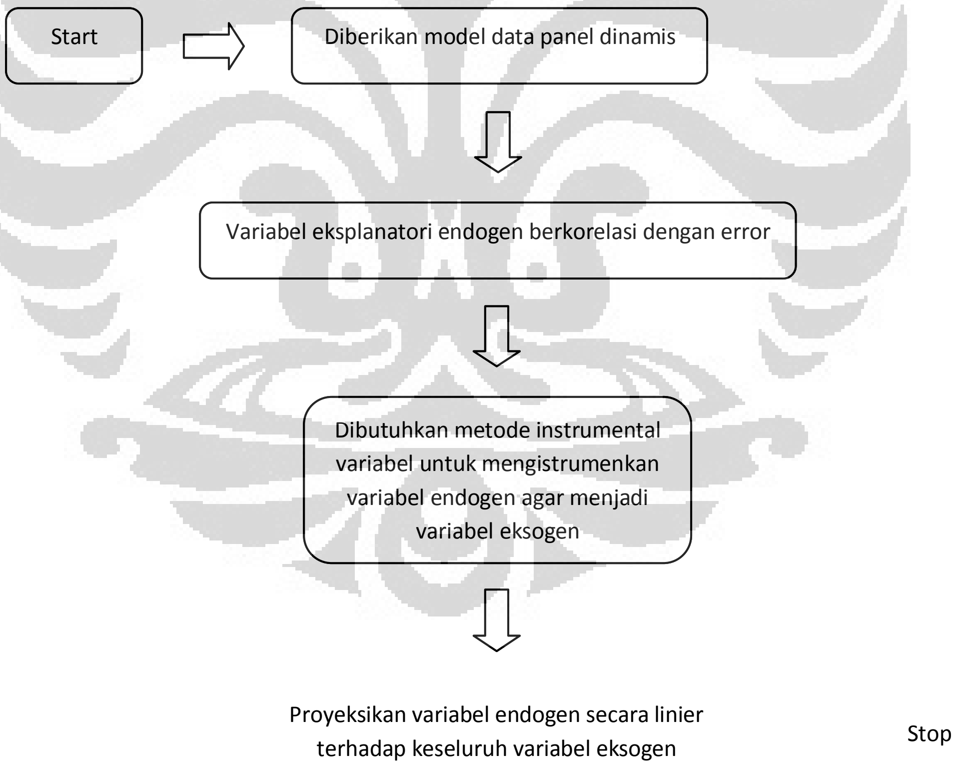
$$\Delta y_{i,t} = \left(y_{i,t} - y_{i,t-1}\right), \qquad \Delta y_{i,t-1} = \left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right), \qquad \Delta v_{i,t} = \left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right)$$

Model (3.2.1) diatas disebut sebagai model *first-difference*.

Walaupun efek individu μ_i pada model (3.2.1) telah hilang, namun masih terdapat suatu permasalahan lagi yaitu komponen *error* $\left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right)$ masih berkorelasi dengan variabel prediktor $\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right)$, sehingga estimator OLS juga akan menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten. Maka dari itu, sebelum mengestimasi model, disarankan untuk melakukan metode instrumental variabel terlebih dahulu.

Sebagai langkah awal, pilih suatu variabel instrumen yang memenuhi kedua syarat yang telah dijelaskan pada landasan teori di bab 2 yaitu pilih variabel yang berkorelasi dengan variabel $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $(v_{i,t} - v_{i,t-1})$. Untuk itu dipilih variabel $y_{i,t-2}$ sebagai variabel instrumen yang akan digunakan. Hal ini karena $y_{i,t-2}$ berkorelasi dengan variabel $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $(v_{i,t} - v_{i,t-1})$ (bukti ada dilampiran 1).

Untuk memperjelas konsep metode instrumental variabel ini akan ditunjukkan diagram alir sebagai berikut :



Gambar 3.1 Diagram alir metode instrumental variabel

3.2.1 Taksiran parameter dengan Menggunakan Prinsip GMM untuk model *First-difference* oleh Arellano dan Bond (Pembuktian Melalui Vektor Matriks)

Sebelumnya model (3.1.1) yaitu

$$y_{i,t} = \delta y_{i,t-1} + u_{i,t} \;\; ; \;\; i = 1,2,\dots,N \;\; ; \;\; t = 3,\dots,T$$

dengan $u_{i,t} = \mu_i + v_{i,t}$

dapat ditulis dalam bentuk vektor matriks yaitu sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y}_i = \delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \boldsymbol{I}_T \mu_i + \boldsymbol{v}_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,N \qquad (3.2.2)$$

dimana :

- $\boldsymbol{y}_i = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ dengan $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{1,3} \\ y_{1,4} \\ \vdots \\ y_{1,T} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{2,3} \\ y_{2,4} \\ \vdots \\ y_{2,T} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{y}_N = \begin{pmatrix} y_{N,3} \\ y_{N,4} \\ \vdots \\ y_{N,T} \end{pmatrix}$

dengan $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_N$ vektor berordo $(T-2) \times 1$.

- $\boldsymbol{y}_{i,-1} = \begin{pmatrix} y_{1,-1} \\ y_{2,-1} \\ \vdots \\ y_{N,-1} \end{pmatrix}$ dengan $\boldsymbol{y}_{1,-1} = \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{1,3} \\ \vdots \\ y_{1,T-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_{2,-1} = \begin{pmatrix} y_{2,2} \\ y_{2,3} \\ \vdots \\ y_{2,T-1} \end{pmatrix}, \dots,$

  $\boldsymbol{y}_{N,-1} = \begin{pmatrix} y_{N,2} \\ y_{N,3} \\ \vdots \\ y_{N,T-1} \end{pmatrix}$

dengan $\boldsymbol{y}_{1,-1}, \boldsymbol{y}_{2,-1}, \dots, \boldsymbol{y}_{N,-1}$ vektor berordo $(T-2) \times 1$.

- $\boldsymbol{I}_T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_T & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{i}_T & & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{i}_T & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{i}_T \end{pmatrix}$ dengan $\boldsymbol{i}_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor berordo $(T-2) \times 1$

- $\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}$ dengan $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,3} \\ v_{1,4} \\ \vdots \\ v_{1,T} \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2,3} \\ v_{2,4} \\ \vdots \\ v_{2,T} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{v}_N = \begin{pmatrix} v_{N,3} \\ v_{N,4} \\ \vdots \\ v_{N,T} \end{pmatrix}$

dengan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ vektor berordo $(T-2) \times 1$.

Untuk lebih jelasnya, bentuk matriks dari (3.2.2) adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} y_{1,3} \\ y_{1,4} \\ \vdots \\ y_{1,T} \\ y_{2,3} \\ y_{2,4} \\ \vdots \\ y_{2,T} \\ \vdots \\ y_{N,3} \\ y_{N,4} \\ \vdots \\ y_{N,T} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{1,3} \\ \vdots \\ y_{1,T-1} \\ y_{2,2} \\ y_{2,3} \\ \vdots \\ y_{2,T-1} \\ \vdots \\ y_{N,2} \\ y_{N,3} \\ \vdots \\ y_{N,T-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1,3} \\ v_{1,4} \\ \vdots \\ v_{1,T} \\ v_{2,3} \\ v_{2,4} \\ \vdots \\ v_{2,T} \\ \vdots \\ v_{N,3} \\ v_{N,4} \\ \vdots \\ v_{N,T} \end{pmatrix}$$

atau secara ringkas dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_N \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{1,-1} \\ \boldsymbol{y}_{2,-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{N,-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_T & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{i}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan *first-difference* untuk menghilangkan efek individu (μ_i) dan model pada (3.2.2) menjadi

$$\Delta \boldsymbol{y}_i = \delta \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \Delta \boldsymbol{v}_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.2.3}$$

dimana $\Delta \boldsymbol{y}_i, \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}, \Delta \boldsymbol{v}_i$ adalah vektor berordo $(T-2) \times 1$ dengan :

$$\Delta \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_{i,-1}, \quad \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} = \boldsymbol{y}_{i,-1} - \boldsymbol{y}_{i,-2}, \quad \Delta \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{i-1}$$

Namun, variabel-variabel dalam vektor $\Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}$ masih berkorelasi dengan variabel-variabel di dalam vektor $\Delta\boldsymbol{v}_i$. Oleh karena itu dilakukan metode instrumental variabel terlebih dahulu untuk menentukan matriks variabel instrumen yang akan digunakan nantinya. Untuk itu dipilih variabel instrumen yaitu $\boldsymbol{y}_{i,-2}$.

Pandang model awal (3.2.1). Untuk kasus t=3, maka

$$y_{i,3} - y_{i,2} = \delta\left(y_{i,2} - y_{i,1}\right) + \left(v_{i,3} - v_{i,2}\right)$$

$y_{i,1}$ merupakan variabel instrumen yang akan dipilih, karena $y_{i,1}$ berkorelasi dengan $(y_{i,2} - y_{i,1})$ tetapi tidak berkorelasi dengan komponen *error* $(v_{i,3} - v_{i,2})$.

Untuk kasus t=4, maka

$$y_{i,4} - y_{i,3} = \delta\left(y_{i,3} - y_{i,2}\right) + \left(v_{i,4} - v_{i,3}\right)$$

Pada kasus ini, $y_{i,1}$ sama halnya seperti $y_{i,2}$ merupakan variabel instrumen yang akan dipilih, karena berkorelasi dengan $(y_{i,3} - y_{i,2})$ tetapi tidak berkorelasi dengan komponen *error* $(v_{i,4} - v_{i,3})$. Sehingga untuk t = 4 terdapat penambahan suatu variabel instrumen yang akan dipilih.

Lanjutkan penambahan variabel instrumen untuk masing-masing periode, sedemikian sehingga untuk periode ke-T terdapat $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$ himpunan variabel instrumen. Hal ini menyebabkan total variabel instrumen yang terdapat di dalam matriks variabel instrumen ada sebanyak $\frac{(T-2)(T-1)}{2}$.

Bukti :

Variabel-variabel instrumen yang digunakan pada model *first difference* adalah $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$, maka

Untuk t=3, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1})$, ada sebanyak 1 variabel

Untuk t=4, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2})$, ada sebanyak 2 variabel

Untuk t=5, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3})$, ada sebanyak 3 variabel

Untuk t=6, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, y_{i,4})$, ada sebanyak 4 variabel

⋮

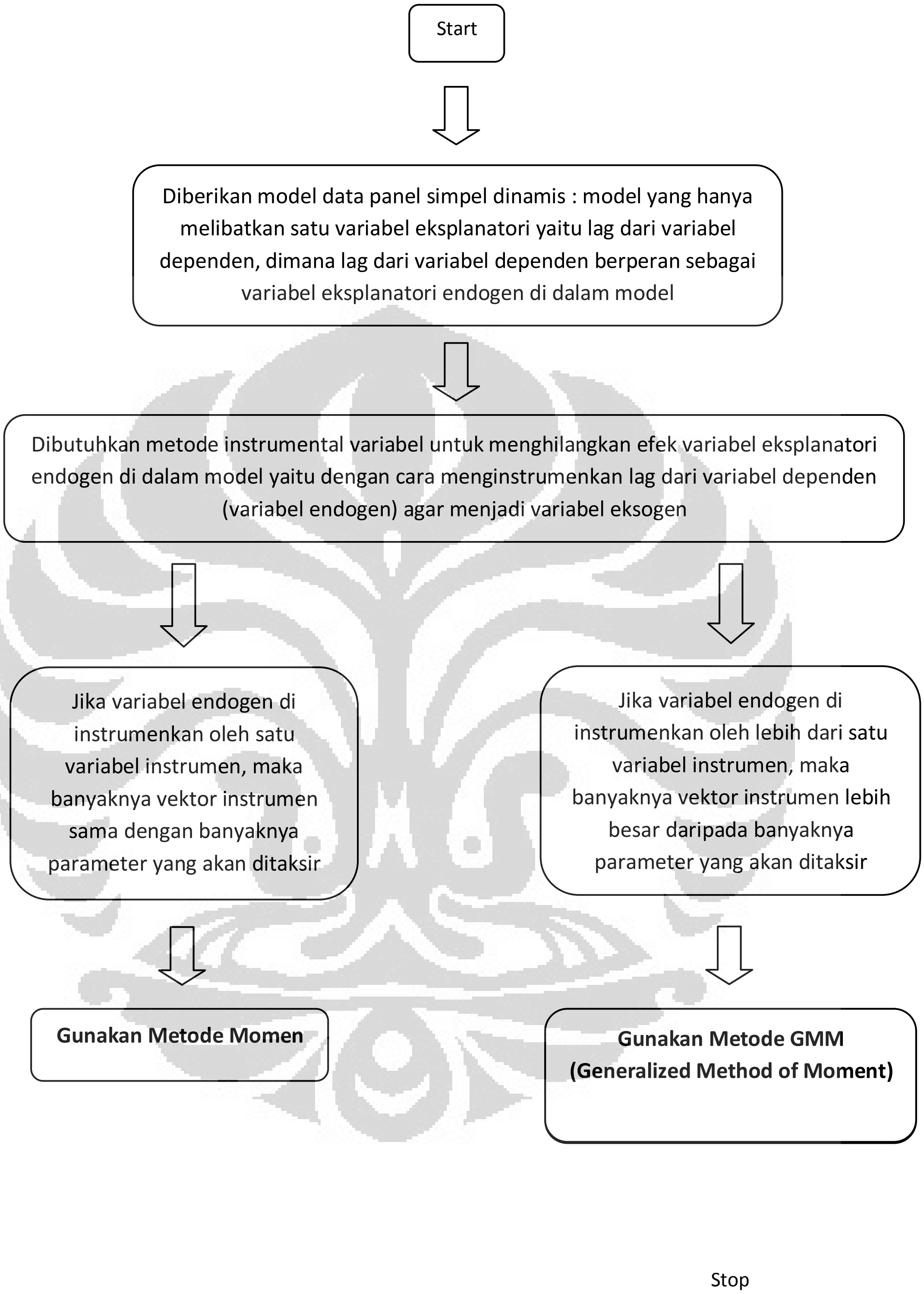
Untuk t=T, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$, ada sebanyak T-2 variabel

Sehingga total keseluruhan entri dalam matriks variabel instrumen ada sebanyak :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (T - 2) = \frac{1}{2}(T - 2)(T - 2 + 1) = \frac{1}{2}(T - 2)(T - 1)$$

(Terbukti)

Sebelum mendefinisikan matriks variabel instrumen yang akan digunakan untuk mencari taksiran parameter pada metode Arellano dan Bond dengan menggunakan prinsip GMM, terlebih dahulu akan ditunjukkan diagram alir untuk memperjelas konsep penggunaan metode *Generalized Method of Moment* (GMM).



Gambar 3.2 Diagram alir konsep penggunaan metode GMM

Karena terdapat $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$ himpunan variabel instrumen yang akan digunakan, maka didefinisikan matriks variabel instrumen untuk model *first difference* sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z}_{dif} = \begin{bmatrix} [y_{i,1}] & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & [y_{i,1}, y_{i,2}] & \boldsymbol{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & [y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2}] \end{bmatrix}$$

Jika entri-entri di dalam $\boldsymbol{Z}_{dif}$ diperluas, maka memiliki bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z}_{dif} = \begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,T-2} \end{bmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{Z}_{dif}$ berordo $(T-2) \times \left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$.

Karena $\boldsymbol{Z}_{dif}$ berisikan variabel yang telah memenuhi kedua syarat (di landasan teori bab 2) untuk dikatakan sebagai variabel instrumen, maka asumsi-asumsi yang dibutuhkan dalam penaksiran terpenuhi, yaitu :

1. $E\left(\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0} \ ; \ i = 1, \dots, N$ (3.2.4)
2. $rank\ E\left(\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}\right) = 1$ (3.2.5)

Maka, berdasarkan momen kondisi dan matriks variabel instrumen dari model *first difference* diatas, diperoleh taksiran untuk δ yaitu :

$$\hat{\delta}_{dif} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}' \boldsymbol{Z}_{dif}\right) \widehat{\boldsymbol{W}} \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}' \boldsymbol{Z}_{dif}\right) \widehat{\boldsymbol{W}} \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{y}_{i}\right)\right]$$

dimana :

- $\Delta \boldsymbol{y}_{i,-1}'$ berordo $1 \times (T-2)$,
- $\boldsymbol{Z}_{dif}$ berordo $(T-2) \times \left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$,
- $\widehat{\boldsymbol{W}}$ adalah taksiran yang tak bias dan konsisten dari matriks bobot $\boldsymbol{W}$ berordo $\left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$ dan
- $\Delta \boldsymbol{y}_i$ berordo $(T-2) \times 1$.

$\hat{\delta}$ diatas merupakan taksiran yang konsisten untuk δ pada sebarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$. Taksiran ini diperoleh dengan melakukan metode penaksiran dengan metode GMM (*One Step Consistent Arellano and Bond Estimator*)

(*Bernadeta Nismawati, 2010*)

Sedangkan taksiran yang efisien untuk δ (*Two Step Efficient Arellano and Bond Estimator*) diperoleh dengan memilih matriks bobot optimal $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} = \left[N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}' \, \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i' \boldsymbol{Z}_{dif}\right]^{-1}$ yaitu

$$\hat{\delta}_{dif} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}' \, \boldsymbol{Z}_{dif}\right)\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \, \Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}' \, \boldsymbol{Z}_{dif}\right)\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \, \Delta\boldsymbol{y}_{i}\right)\right]$$

(*Bernadeta Nismawati, 2010*)

Untuk lebih memperjelas apa yang telah dilakukan oleh Arellano dan Bond, perhatikan diagram alir berikut

Start

Metode Arellano dan Bond

Momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang digunakan hanya mencakup model *first difference* saja yaitu

$$E\left(\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0} \;;\; i = 1, \dots, N$$

dan

$$\boldsymbol{Z}_{dif} = \begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,T-2} \end{bmatrix}$$

Hitung $\hat{\delta}$ melalui proses GMM. Setelah itu buktikan bahwa $\hat{\delta}$ yang telah diperoleh adalah taksiran yang **Konsisten** untuk δ pada sebarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$

Pilih $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang optimal yang meminimumkan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$, lalu buktikan bahwa taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$ lebih kecil dibandingkan dengan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}$ sebarang.

Stop

Gambar 3.3 Diagram alir metode Arellano dan Bond

3.3 Penaksiran Parameter oleh Blundell dan Bond

Taksiran yang didapatkan oleh Arellano dan Bond sebenarnya sudah tak bias, konsisten dan efisien. Namun, Blundell dan Bond mengajukan suatu taksiran yang mereka klaim lebih efisien daripada taksiran yang didapatkan oleh Arellano dan Bond. Hal ini dikarenakan tidak hanya momen kondisi dan matriks variabel instrumen dari model *first difference* saja yang digunakan, tetapi Blundell dan Bond juga menambahkan suatu informasi *level* yaitu momen kondisi *level* dan matriks variabel instrumen *level* untuk mendapatkan taksiran yang lebih baik. Hal ini dilakukan dengan mengkombinasikan momen kondisi *first difference* dan momen kondisi *level* serta matriks variabel instrumen *first difference* dan matriks variabel instrumen *level*.

Pandang model (3.1.1) yang berperan sebagai model *level* berikut :

$$y_{i,t} = \delta y_{i,t-1} + u_{i,t} \ \ ; \ \ i = 1,2, \dots, N \ \ ; \ \ t = 3, \dots, T$$

Pada model *level* tersebut, $y_{i,t-1}$ berkorelasi dengan $u_{i,t}$ sehingga estimator OLS akan menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten.

Sebagai langkah awal, pilih suatu variabel instrumen yang memenuhi kedua syarat yang telah dijelaskan pada landasan teori di bab 2 yaitu pilih variabel yang berkorelasi dengan variabel $y_{i,t-1}$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$. Untuk itu dipilih variabel $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ sebagai variabel instrumen. Hal ini karena $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ berkorelasi dengan variabel $y_{i,t-1}$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$ (bukti ada dilampiran 2).

Pada model *level* diatas

Untuk kasus t=3, maka

$$y_{i,3} = \delta y_{i,2} + u_{i,3}$$

Karena $y_{i,2}$ berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,3}$, maka akan dicari variabel instrumen yang berkorelasi dengan $y_{i,2}$ tetapi tidak berkorelasi dengan $u_{i,3}$.

Variabel instrumen yang akan dipilih adalah $\Delta y_{i,2}$ atau $y_{i,2} - y_{i,1}$ karena $\Delta y_{i,2}$ berkorelasi dengan $y_{i,2}$ tetapi tidak berkorelasi dengan $u_{i,3}$.

Untuk kasus t=4, maka

$$y_{i,4} = \delta y_{i,3} + u_{i,4}$$

Pada kasus ini, $\Delta y_{i,2}$ sama halnya seperti $\Delta y_{i,3}$ merupakan variabel instrumen yang akan dipilih, karena berkorelasi dengan $y_{i,3}$ tetapi tidak berkorelasi dengan $u_{i,4}$. Sehingga untuk t = 4 terdapat penambahan suatu variabel instrumen yang akan dipilih.

Lanjutkan penambahan variabel instrumen untuk masing-masing periode, sedemikian sehingga untuk periode ke-T terdapat $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \dots, \Delta y_{i,T-1})$ himpunan variabel instrumen yang akan dipilih. Hal ini menyebabkan total variabel instrumen yang terdapat dalam matriks variabel instrumen ada sebanyak $\frac{(T-2)(T-1)}{2}$.

Bukti :

Variabel instrumen yang dapat digunakan pada model *level* adalah $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \dots, \Delta y_{i,t-1})$, maka

Untuk t=3, variabel instrumen yang mungkin : $(\Delta y_{i,2})$, ada sebanyak 1 variabel

Untuk t=4, variabel instrumen yang mungkin : $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3})$, ada sebanyak 2 variabel

Untuk t=5, variabel instrumen yang mungkin : $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \Delta y_{i,4})$, ada sebanyak 3 variabel

Untuk t=6, variabel instrumen yang mungkin : $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \Delta y_{i,4}, \Delta y_{i,5})$, ada sebanyak 4 variabel

$\vdots$

Untuk t=T, variabel instrumen yang mungkin : $(\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \dots, \Delta y_{i,T-1})$, ada sebanyak T-2 variabel

Sehingga total keseluruhan entri dalam matriks variabel instrumen ada sebanyak :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (T-2) = \frac{1}{2}(T-2)(T-2+1) = \frac{1}{2}(T-2)(T-1)$$

(Terbukti)

Definisikan matriks variabel instrumen untuk model *level* sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z}_{lev} = \begin{bmatrix} [\Delta y_{i,2}] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}] & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\Delta y_{i,2}, \Delta y_{i,3}, \ldots, \Delta y_{i,T-1}] \end{bmatrix}$$

Jika entri-entri di dalam $\boldsymbol{Z}_{lev}$ diperluas, maka memiliki bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z}_{lev} = \begin{bmatrix} \Delta y_{i,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta y_{i,2} & \Delta y_{i,3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta y_{i,2} & \cdots & \Delta y_{i,T-1} \end{bmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{Z}_{lev}$ berordo $(T-2) \times \left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$.

Sama halnya seperti $\boldsymbol{Z}_{dif}$, Karena $\boldsymbol{Z}_{lev}$ berisikan variabel yang telah memenuhi kedua syarat (di landasan teori bab 2) untuk dikatakan sebagai variabel instrumen, maka asumsi-asumsi yang dibutuhkan dalam penaksiran terpenuhi, yaitu :

1. $E(\boldsymbol{Z}_{lev}{}'\boldsymbol{u}_i) = \mathbf{0}$; $i = 1, \ldots, N$ (3.2.6)
2. $rank\ E(\boldsymbol{Z}_{lev}{}'\boldsymbol{y}_{i,-1}) = 1$ (3.2.7)

Selanjutnya akan dicari taksiran δ gabungan antara model *first difference* dan model *level* (taksiran sistem) dengan menggunakan prinsip GMM. Pertama-tama, akan dikombinasikan model keduanya (model *first difference* dan model *level*) sebagai berikut

Model *first difference* dalam bentuk *full matrix* :

$$\Delta \boldsymbol{y}_i = \delta \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \Delta \boldsymbol{v}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

dan Model *level* dalam bentuk *full matrix* :

$$\boldsymbol{y}_i = \delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \boldsymbol{u}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

Sehingga kombinasi modelnya adalah

$$\begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_i \\ \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \\ \boldsymbol{y}_{i,-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{u}_i \end{pmatrix} \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

Model ini disebut sebagai model *system*.

selanjutnya, kombinasikan momen kondisi dan matriks variabel instrumen *level* yang telah diperoleh diatas dengan momen kondisi dan matriks variabel instrumen *first difference*.

Maka berdasarkan kombinasi

$$E\left(\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0} \;\; ; \;\; i = 1, \dots, N \text{ dan } E(\boldsymbol{Z}_{lev}{}' \boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0} \;\; ; \;\; i = 1, \dots, N$$

diperoleh

$$E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \boldsymbol{q}_i\right) = \boldsymbol{0} \;\; ; \;\; i = 1, \dots, N \text{ dengan } \boldsymbol{q}_i = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{u}_i \end{pmatrix}$$

Lalu, definisikan matriks variabel instrumen untuk *system* (matriks variabel instrumen gabungan) yaitu sebagai berikut

$$\boldsymbol{Z}_{sys} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{dif} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{dif} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta y_{i,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i,3} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta y_{i,T-1} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}$ adalah *non-redundant subset* dari $\boldsymbol{Z}_{lev}$.

dimana $\boldsymbol{Z}_{sys}$ berordo $(2T-4) \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$.

Sama halnya seperti $\boldsymbol{Z}_{dif}$ dan $\boldsymbol{Z}_{lev}$, Karena $\boldsymbol{Z}_{sys}$ berisikan variabel yang telah memenuhi kedua syarat (di landasan teori bab 2) untuk dikatakan sebagai variabel instrumen, maka asumsi-asumsi yang dibutuhkan dalam penaksiran terpenuhi, yaitu :

1. $E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\right) = \mathbf{0}$; $i = 1, \dots, N$ dengan $\boldsymbol{q}_i = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{u}_i \end{pmatrix}$ (3.2.8)
2. $rank\ E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \\ \boldsymbol{y}_{i,-1} \end{pmatrix}\right) = 1$ (3.2.9)

Dilihat dari variabel-variabel instrumen yang digunakan didalam matriks variabel instrumen *system*, maka total variabel instrumen yang digunakan sebanyak $\frac{1}{2}(T+1)(T-2)$.

Bukti :

Variabel instrumen yang dapat digunakan pada model *first difference* adalah $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$, maka

Untuk t=3, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1})$, ada sebanyak 1 variabel

Untuk t=4, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2})$, ada sebanyak 2 variabel

Untuk t=5, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3})$, ada sebanyak 3 variabel

Untuk t=6, variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, y_{i,4})$, ada sebanyak 4 variabel

⋮

Untuk t=T dan variabel instrumen yang mungkin : $(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,T-2})$, ada sebanyak T-2 variabel

Sehingga total keseluruhan entri dalam matriks variabel instrument pada model *first differences* ada sebanyak

$$\frac{1}{2}(T-2)(T-1)$$

Lalu, dijumlahkan dengan variabel instrumen yang terdapat didalam model *level* yaitu berjumlah $(T-2)$ variabel, karena

Untuk t=3, variabel instrumen yang digunakan : $(\Delta y_{i,2})$, ada sebanyak 1 variabel

Untuk t=4, variabel instrumen yang digunakan : $(\Delta y_{i,3})$, ada sebanyak 1 variabel
Untuk t=5, variabel instrumen yang digunakan : $(\Delta y_{i,4})$, ada sebanyak 1 variabel
Untuk t=6, variabel instrumen yang digunakan : $(\Delta y_{i,5})$, ada sebanyak 1 variabel
⋮
Untuk t=T, variabel instrumen yang digunakan : $(\Delta y_{i,T-1})$, ada sebanyak 1 variabel
Sehingga total keseluruhan entri dalam matriks variabel instrument *level* ada sebanyak $(T-2)$

Maka total keseluruhan entri di dalam matriks variabel instrumen *system* adalah

$$\frac{1}{2}(T-2)(T-1)+(T-2)=\frac{1}{2}(T+1)(T-2)$$

(Terbukti)

3.3.1 *One Step Consistent Estimator*

One Step Consistent Estimator merupakan suatu metode penaksiran yang dilakukan oleh Blundell dan Bond dengan menggunakan metode *Generalized Method of Moment* (GMM) untuk mendapatkan taksiran yang konsisten. Dibawah asumsi (3.2.8) dan (3.2.9), vektor δ merupakan solusi unik untuk momen kondisi dari populasi,

$$E\big(g_i(\delta)\big)=E\big(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\big)=E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{v}_i\\ \boldsymbol{u}_i\end{pmatrix}\right)$$

karena $\Delta\boldsymbol{y}_i=\delta\Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}+\Delta\boldsymbol{v}_i$ dan $\boldsymbol{y}_i=\delta\boldsymbol{y}_{i,-1}+\boldsymbol{u}_i$, maka substitusikan $\Delta\boldsymbol{v}_i=\Delta\boldsymbol{y}_i-\delta\Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}$ dan $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{y}_i-\delta\boldsymbol{y}_{i,-1}$, sehingga bentuk diatas menjadi

$$=E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_i-\delta\Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}\\ \boldsymbol{y}_i-\delta\boldsymbol{y}_{i,-1}\end{pmatrix}\right)$$

$$=E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\left[\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_i\\ \boldsymbol{y}_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_{i,-1}\\ \boldsymbol{y}_{i,-1}\end{pmatrix}\delta\right]\right)$$

$$=E(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'(\boldsymbol{\varphi}_i-\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\delta))$$

$$=\boldsymbol{0}$$

dimana dimisalkan :

$$\begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_i \\ \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_i \text{ dan } \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \\ \boldsymbol{y}_{i,-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_{i,-1}$$

Momen kondisi dari sampel adalah

$$\bar{g}(\hat{\delta}) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{sys}{}' (\boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta})$$

Karena banyak kolom dari matriks variabel instrumen lebih banyak dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir (L > K), dimana dalam kasus ini $L = \frac{1}{2}(T+1)(T-2)$ dan $K = 1$ (lihat *flow chart* konsep penggunaan GMM), maka GMM akan meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel yang tidak lain merupakan fungsi objektif GMM yaitu sebagai berikut :

$$J(\hat{\delta}) = \bar{g}(\hat{\delta})' \widehat{\boldsymbol{W}} \bar{g}(\hat{\delta})$$

dimana diasumsikan bahwa $\widehat{\boldsymbol{W}}$ adalah taksiran yang tak bias dan konsisten dari matriks bobot $\boldsymbol{W}$ $\left(\frac{1}{2}(T+1)(T-2) \times \frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right)$.

$$\widehat{\boldsymbol{W}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{W} \text{ untuk } N \to \infty \text{ atau } p\lim_{N\to\infty} \widehat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W} \qquad \text{(asumsi 3.3.1)}$$

Taksiran GMM untuk δ merupakan suatu taksiran $(\hat{\delta})$ yang meminimumkan $J(\hat{\delta})$. Maka,

$$\frac{\partial J(\hat{\delta})}{\partial \hat{\delta}} = \boldsymbol{0}$$

$$J(\hat{\delta}) = \bar{g}(\hat{\delta})'\widehat{\boldsymbol{W}}\bar{g}(\hat{\delta})$$

$$= \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'(\boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta})\right]'\widehat{\boldsymbol{W}}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'(\boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta})\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]'\widehat{\boldsymbol{W}}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i'\boldsymbol{Z}_{sys}\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\right]\widehat{\boldsymbol{W}}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right]$$
$$- \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$
$$- \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right]$$
$$+ \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$

karena bagian ke-2 dari bentuk terakhir diatas yaitu

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$

merupakan matriks berordo (1×1) maka transposnya juga merupakan matriks berordo (1×1) yang sama, jadi

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]'$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right]$$

Maka bentuk akhir fungsi objektif GMM $J(\hat{\delta})$ diatas adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} J(\hat{\delta}) = &\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right] \\ &- 2\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right] \\ &+ \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right] \end{aligned}$$

kemudian akan dicari taksiran $(\hat{\delta})$ yang meminimumkan $J(\hat{\delta})$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\hat{\delta})}{\partial\hat{\delta}} = &-2\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right] \\ &+ 2\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right] = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

sehingga

$$-2\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_i\right)\right]$$

$$= -2\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\hat{\delta}\right)\right]$$

Maka didapatkan *one step consistent estimator* untuk sistem, yaitu

$$\hat{\delta} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i}\right)\right]$$

dimana :

- $\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'$ berordo $1 \times (2T-4)$,
- $\boldsymbol{Z}_{sys}$ berordo $(2T-4) \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$,
- $\widehat{\boldsymbol{W}}$ adalah taksiran yang tak bias dan konsisten untuk matriks bobot $\boldsymbol{W}$ yang berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$ dan
- $\boldsymbol{\varphi}_{i}$ berordo $(2T-4) \times 1$.

Taksiran diatas merupakan taksiran yang konsisten tidak tergantung bagaimana pemilihan matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}\left(\frac{1}{2}(T+1)(T-2) \times \frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right)$. Disini, akan ditunjukkan bahwa $\hat{\delta}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk sembarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$.

$$\hat{\delta} \xrightarrow{p} \delta \text{ untuk } N \to \infty \text{ atau } p\lim_{N\to\infty} \hat{\delta} = \delta$$

Bukti :

$$\hat{\delta} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i}\right)\right]$$

Karena telah dimisalkan sebelumnya bahwa

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_i \\ \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \Delta \boldsymbol{v}_i \\ \delta \boldsymbol{y}_{i,-1} + \boldsymbol{u}_i \end{pmatrix}$$

$$= \delta \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \\ \boldsymbol{y}_{i,-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{u}_i \end{pmatrix}$$

$$= \delta \boldsymbol{\varphi}_{i,-1} + \boldsymbol{q}_i$$

Maka, persamaan $\hat{\delta}$ tersebut menjadi :

$$\hat{\delta} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i}\right)\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'(\delta\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}+\boldsymbol{q}_i)\right)\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\delta\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right] +$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\right)\right]$$

Karena bagian pertama dari bentuk terakhir diatas yaitu

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\delta\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right] = \delta$$

Maka bentuk akhir $\hat{\delta}$ menjadi

$$\hat{\delta} = \delta + \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]$$

(3.3.0)

Maka,

$$p\lim_{N\to\infty}\hat{\delta} = \delta + p\lim_{N\to\infty}\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]\}$$

Berdasarkan WLLN (*Weak Law of Large Number*) pada subbab 2.6,

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\xrightarrow{p}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\varphi}'_{-1}\boldsymbol{Z}}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\varphi}'_{-1}\boldsymbol{Z}} = E\left(\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right) \equiv \boldsymbol{\Omega}'$$

dan

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\xrightarrow{p}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{q}_i}$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{q}_i} = E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

Sehingga

$$p\lim_{N\to\infty}\hat{\delta} = \delta + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]$$

$$= \delta + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right).\,p\lim_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{W}}\,.\,p\lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right)$$

Berdasarkan asumsi (3.3.1) yaitu $\widehat{\boldsymbol{W}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{W}$ untuk $N \to \infty$ atau $p\lim_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W}$, maka,

$$p\lim_{N\to\infty}\hat{\delta} = \delta + p\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}'.\boldsymbol{W}.\boldsymbol{0}$$

$$= \delta$$

Jadi, terbukti bahwa $\hat{\delta}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk δ pada sebarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$.

3.3.2 *Two Step Efficient Blundell and Bond Estimator* (GMM dengan matriks bobot optimal)

Pada *one step consistent estimator*, pemilihan $\widehat{\boldsymbol{W}}$ tidak akan mempengaruhi kekonsistenan taksiran, namun dengan memilih $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang optimal yang meminimumkan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$, akan menghasilkan taksiran yang efisien.

Dari penjabaran sebelumnya pada persamaan (3.3.0), didapat bahwa

$$\hat{\delta} = \delta + \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right)\right]$$

sehingga

$$\hat{\delta} - \delta = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]$$

Lalu, akan dibentuk $\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta)$ sehingga

$$\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta) = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]$$

Menurut teorema 2.9 :

$$\sqrt{N}(\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Dalam hal ini, karena $\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta)$ adalah matriks berukuran 1×1, maka $\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ dimana σ^2 adalah *asymptotic variance* dari $\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta)$.

Avar $\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta) = \sigma^2$

$$= Avar\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_{i}\right)\right]\}$$

Misalkan $\boldsymbol{X} = \sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta)$

karena

$$Avar(\boldsymbol{X}) = E\left[(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))'\right]$$

maka

$$Avar\,\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta) = Avar\,(\boldsymbol{X}) = E\left[(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))'\right]$$

maka bentuk akhir dari Avar $\sqrt{N}\left(\hat{\delta}-\delta\right)$ diatas menjadi

$$Avar\ \sqrt{N}\left(\hat{\delta}-\delta\right) = Avar\ \boldsymbol{X} = E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{0})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{0})'] = E[(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X})']$$

Sehingga

$$Avar\ \sqrt{N}\left(\hat{\delta}-\delta\right) = \sigma^2$$

$$= E\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\right)\right]$$

$$\left[\left(N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}\}$$

kalikan $N^{-\frac{1}{2}}$ dengan $N^{-\frac{1}{2}}$ sehingga bentuk diatas menjadi

$$= E\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{q}_i\right)\right]$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}\}$$

Sesuai teorema 2.9, karena $\sqrt{N}\left(\hat{\delta}-\delta\right) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2)$ maka secara asimtotik, $\hat{\delta}\sim N(\delta,\sigma^2/N)$, maka Avar $\hat{\delta} = \sigma^2/N$

Oleh karena itu, berdasarkan hasil Avar $\sqrt{N}\left(\hat{\delta}-\delta\right)$ diatas, Avar $\hat{\delta} = \sigma^2/N$

$$= \frac{\text{Avar } \sqrt{N}(\hat{\delta}-\delta)}{N}$$

$$= E\{\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right)\right]$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]$$

$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}\}$$

terlihat bahwa N^{-1} diatas saling menghilangkan, maka bentuk akhir dari Avar $\hat{\delta}$ menjadi

$$= E\{\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\,\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{W}}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}\} \tag{3.3.2}$$

Karena *Asymptotic Variance* pada (3.3.2) masih memiliki bentuk yang kompleks, maka akan dicari taksiran dari Avar $\hat{\delta}$ yang konsisten. Berdasarkan momen kondisi dari populasi,

$$E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right) = \boldsymbol{0} \text{ dengan } var\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\right) = E(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\,\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}).$$

Telah diasumsikan sebelumnya bahwa $\widehat{\boldsymbol{W}}$ adalah taksiran yang tak bias dari $\boldsymbol{W}$ sehingga $E(\widehat{\boldsymbol{W}}) = \boldsymbol{W}$. Misalkan $\boldsymbol{H} \equiv E(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}' \, \boldsymbol{Z}_{sys})$ atau dalam full matriksnya $\boldsymbol{H} \equiv E(\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z})$ dan misalkan $\boldsymbol{\Psi} \equiv E(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i{}' \boldsymbol{Z}_{sys})$. Avar $\hat{\delta}$ pada (3.3.2) dapat dituliskan kembali dalam bentuk *full matrix* sebagai berikut

$$\text{Avar } \hat{\delta} = (\boldsymbol{HWH}')^{-1}\boldsymbol{HW\Psi WH}'(\boldsymbol{HWH}')^{-1}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan taksiran yang konsisten dari bentuk (3.3.2), maka $\boldsymbol{\Psi} \equiv E(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i{}' \boldsymbol{Z}_{sys})$ diestimasi oleh taksiran yang konsisten yaitu

$$\widehat{\boldsymbol{\Psi}} \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \hat{\boldsymbol{q}}_i \hat{\boldsymbol{q}}_i{}' \boldsymbol{Z}_{sys}\right)$$

Sehingga didapatkan taksiran dari Avar $\hat{\delta}$ yang konsisten yaitu

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Avar}}\ \hat{\delta} &= \hat{\sigma}^2/N \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N} \widehat{\boldsymbol{W}} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N} \widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\widehat{\boldsymbol{W}} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N} \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N} \widehat{\boldsymbol{W}} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Taksiran ini merupakan taksiran dari Avar $\hat{\delta}$ yang konsisten untuk sembarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$ atau dapat dituliskan Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}}$. Matriks Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}}$ ini berordo (1×1) dengan keterangan sebagai berikut :

- $\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'$ berordo $1 \times (2T-4)$
- $\boldsymbol{Z}$ berordo $(2T-4) \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$
- $\widehat{\boldsymbol{W}}$ adalah taksiran yang tak bias dan konsisten dari matriks bobot $\boldsymbol{W}$ yang berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$
- $\widehat{\boldsymbol{\Psi}} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \hat{\boldsymbol{q}}_i \hat{\boldsymbol{q}}_i{}' \boldsymbol{Z}_{sys}\right)$ berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$

Karena $\widehat{\boldsymbol{W}}$ masih sebarang, akan dipilih $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang optimal yaitu $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang meminimumkan Avâr $\hat{\delta}$. Pilih $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$. Sehingga dengan mensubstitusi $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ ke dalam $\widehat{\boldsymbol{W}}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{Avâr } \hat{\delta} &= \hat{\sigma}^2/N \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \\
&= \boldsymbol{I}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Taksiran ini merupakan taksiran dari Avar $\hat{\delta}$ yang konsisten untuk matriks bobot optimal $\widehat{\boldsymbol{W}}$ atau dapat dituliskan Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$. Matriks Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$ ini juga berordo (1×1) dengan keterangan sebagai berikut :

- $\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'$ berordo $1 \times (2T-4)$
- $\boldsymbol{Z}$ berordo $(2T-4) \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$
- $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\hat{\boldsymbol{q}}_i\hat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\right)^{-1}$ berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$. Dengan kata lain, akan dibuktikan bahwa

$$\text{Avâr } \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}} \geq \text{Avâr } \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$$

Bukti :

Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}}$ − Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$

$$= \left[\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\right] - \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\left\{\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N} - \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)\right\}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{\frac{1}{2}}\left\{\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-\frac{1}{2}}\right\}\left(\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{\frac{1}{2}}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\right)$$

$$= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}'$$

dimana :

$$\boldsymbol{C} = \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{\frac{1}{2}}$$

dan

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D} = \left\{\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

Pada kasus diatas, **D** adalah matriks simetris dan idempoten sehingga (**I**-**D**) juga merupakan matriks simetris dan idempoten.

Maka :

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^2 = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})'$$

$$\begin{aligned}
\text{Avâr } \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}} - \text{Avâr } \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}' \\
&= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})'\boldsymbol{C}' \\
&= (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}))(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}))' \\
&= (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}))\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}))' \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

berarti, Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{W}}} \geq$ Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$

Jadi terbukti bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$.

Selanjutnya dengan mengadaptasi $\hat{\delta}$ yang telah diperoleh pada *one step consistent estimator* yaitu dengan mengganti $\widehat{\boldsymbol{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$, maka diperoleh *two step efficient Blundell and Bond GMM System Estimator* yaitu sebagai berikut

$$\hat{\delta} = \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_{i,-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}\right)\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{i}\right)\right]$$

3.3.3 Pembuktian bahwa *Two Step Efficient Blundell and Bond Estimator* Lebih Efisien dibandingkan dengan *Two Step Efficient Arellano and Bond Estimator*

Sebelumnya, mengacu pada skripsi (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*), diperoleh bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$ adalah sebagai berikut

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} = \left[\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

yang merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa taksiran yang didapatkan menggunakan Metode Blundell dan Bond lebih efisien dibandingkan dengan taksiran yang didapatkan menggunakan Metode Arellano dan Bond (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*).

Untuk membuktikannya hanya perlu ditunjukkan bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{\Psi}}^{-1}$ (Blundell dan Bond) merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ dibandingkan dengan Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}$ (Arellano dan Bond) atau dengan kata lain harus dibuktikan bahwa Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}}$ − Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Psi}}^{-1}} \geq 0$.

Bukti :

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Psi}}^{-1}}$$

$$= \left[\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1} - \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\widehat{\mathbf{\Psi}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$- \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\widehat{\boldsymbol{q}}_i\widehat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

dimana, untuk $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}}$:

- $\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'$ berordo $1 \times (T-2)$
- $\boldsymbol{Z}_{dif}$ berordo $(T-2) \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1)$
- $\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\right)^{-1}$ berordo $\frac{1}{2}(T-2)(T-1) \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1)$

Sedangkan untuk $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\mathbf{\Psi}}^{-1}}$:

- $\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'$ berordo $1 \times (2T-4)$
- $\boldsymbol{Z}_{sys}$ berordo $(2T-4) \times \frac{1}{2}(T+1)(T-2)$

- $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{sys}{}'\widehat{\boldsymbol{q}}_i\widehat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\right)^{-1}$ berordo $\frac{1}{2}(T+1)(T-2) \times \frac{1}{2}(T+1)(T-2)$

Untuk mengefisienkan penurunan, kerjakan terlebih dahulu Avâr $\hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$ agar lebih terlihat bentuk aslinya.

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$$

$$= \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\,\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\,\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{sys}{}'\widehat{\boldsymbol{q}}_i\widehat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}' & \boldsymbol{y}_{-1}{}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}\end{pmatrix}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif}{}' & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\\ \widehat{\boldsymbol{u}}_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}' & \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}\end{pmatrix}}{N}\right)^{-1}\frac{\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif}{}' & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_{-1}\\ \boldsymbol{y}_{-1}\end{pmatrix}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}\end{pmatrix}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}\\ \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}\end{pmatrix}}{N}\right)^{-1}\frac{\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}\\ \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}\end{pmatrix}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\\ \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Karena

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} = \left[\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\,\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

maka untuk mempermudah penulisan, misalkan :

- $\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} = \boldsymbol{P}$ berarti $\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N} = \boldsymbol{P}'$
- $\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$

Sehingga,

$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$

$$= \left[\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$-\left[\begin{pmatrix}\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N} \\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1}$$

$$-\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}' \\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Karena bentuk terakhir diatas masih terlihat kompleks, selanjutnya misalkan :

- $\frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} = \boldsymbol{Q}$ berarti $\frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N} = \boldsymbol{Q}'$
- $\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} = \boldsymbol{S}$ berarti $\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} = \boldsymbol{S}'$
- $\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i \widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} = \boldsymbol{T}$

Sehingga penulisan bentuk akhir menjadi

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} = \left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1} - \left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}'\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

dimana :

- $\boldsymbol{P}$ berordo $1 \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1)$
- $\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}$ berordo $\frac{1}{2}(T-2)(T-1) \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1)$
- $\boldsymbol{P}'$ berordo $\frac{1}{2}(T-2)(T-1) \times 1$
- $\boldsymbol{Q}$ berordo $1 \times (T-2)$
- $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}^{-1}$ berordo $\frac{1}{2}(T+1)(T-2) \times \frac{1}{2}(T+1)(T-2)$
- $\boldsymbol{Q}'$ berordo $(T-2) \times 1$

Berdasarkan sub-subbab 2.1.4 :

Terlihat bahwa bentuk $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ merupakan Matriks blok bujursangkar, karena $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ memenuhi 2 sifat yaitu :

i. $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ adalah matriks bujursangkar.

ii. Blok-blok diagonal utamanya $\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\ dan\ \boldsymbol{T}\right)$ merupakan suatu matriks bujursangkar.

Keterangan :

- Ordo dari matriks $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T-2)(T-1) \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1) & \frac{1}{2}(T-2)(T-1) \times (T-2) \\ (T-2) \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1) & (T-2) \times (T-2) \end{pmatrix}$$

disini terlihat bahwa hanya diagonal utamanya saja yang membentuk suatu matriks bujursangkar yaitu $\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\ dan\ \boldsymbol{T}\right)$. Akan tetapi jika diperhatikan lebih detail, matriks $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ benar merupakan matriks bujursangkar, karena matriks $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$. Oleh karena itu matriks $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ benar merupakan matriks blok bujursangkar.

Berdasarkan sub-subbab 2.1.5 :

Karena $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ adalah matriks bujursangkar nonsingular berordo $\left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T+1)(T-2)\right]$, dimana $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ adalah matriks nonsingular berordo $\left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right] \times \left[\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$, maka bentuk invers dari matriks blok bujursangkar $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & -\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \\ -\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & \left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

Jadi penulisan akhir pada $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$ menjadi :

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1} - \left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1}$$

$$- \left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & -\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \\ -\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & \left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Pertama-tama, selesaikan bentuk $\left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$ terlebih dahulu agar mempermudah didalam pengerjaan. Maka,

$$\left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} + \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & -\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \\ -\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} & \left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}' \\ \boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[(\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q})\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' - \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}' \\ -\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}' \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}' - \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}'\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}'\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' - \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}'\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{Q}'\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)'\right]^{-1}$$

Sehingga, bentuk akhir dari $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$ adalah

$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$

$$= \left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1} - \left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)'\right]^{-1}$$

Karena matriks bobot optimal $\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}$ adalah matriks simetris semidefinit positif *nonsingular* (*Bernadeta nismawati, Juli 2010*), maka untuk setiap matriks $\boldsymbol{P} \neq \mathbf{0}$, **P** adalah vektor berukuran $\left[1 \times \frac{1}{2}(T-2)(T-1)\right]$ berlaku

$$\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}' \geq 0$$

dengan $\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'$ adalah matriks berordo (1×1)

Berarti disini, hanya tinggal dibuktikan bahwa

$$\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)' \geq 0$$

Berdasarkan definisi 2.4 :

Karena $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}$ merupakan matriks simetris, maka $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}$ adalah matriks semidefinit positif jika untuk setiap matriks $\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)\neq\mathbf{0}$, $\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)$ adalah vektor berukuran $1\times(T-2)$, berlaku

$$\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)'\geq 0$$

Untuk membuktikan bahwa $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}$ adalah matriks semidefinit positif, maka

Berdasarkan sub-subbab 2.1.6 :

Karena matriks $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ *invertible* (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*). Untuk sembarang matriks simetris yang berbentuk $\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T}\end{pmatrix}$, dimana

- $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ matriks berukuran $\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\times\frac{1}{2}(T-2)(T-1)$,
- $\boldsymbol{S}$ matriks berukuran $\frac{1}{2}(T-2)(T-1)\times(T-2)$,
- $\boldsymbol{S}'$ matriks berukuran $(T-2)\times\frac{1}{2}(T-2)(T-1)$ dan
- $\boldsymbol{T}$ matriks berukuran $(T-2)\times(T-2)$,

maka sifat berikut terpenuhi :

Jika $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\succ\mathbf{0}$, maka $\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{T}\end{pmatrix}\succcurlyeq\mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)\succcurlyeq\mathbf{0}$

Mengacu skripsi (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*), karena $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ merupakan matriks simetris semidefinit positif *nonsingular*, maka berlaku $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\succ\mathbf{0}$, sehingga memenuhi $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)\succcurlyeq\mathbf{0}$.

Karena bentuk $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)$ merupakan matriks semidefinit positif berdasarkan sub-subbab 2.1.6 diatas, maka $\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}$ juga merupakan matriks semidefinit positif, sehingga berlaku

$$\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{Q}\right)'\geq 0$$

sehingga jelas bahwa nilai dari $\left[\boldsymbol{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1}$ akan lebih besar dibandingkan nilai dari $\left[\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{P}' + \left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Q}\right)'\right]^{-1}$.

Maka terbukti bahwa $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} \geq 0$ yang berarti bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ dibandingkan dengan Avâr $\hat{\delta}$ jika $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa taksiran yang didapatkan menggunakan Metode Blundell dan Bond lebih efisien dibandingkan dengan taksiran yang didapatkan menggunakan Metode Arellano dan Bond.

Untuk lebih memperjelas apa yang telah dilakukan oleh Blundell dan Bond, perhatikan diagram alir berikut :

Start

Metode Blundell dan Bond

Momen kondisi dan Matriks variabel instrumen yang digunakan adalah kombinasi dari kedua model (*first difference* dan *level*) yaitu

$$E\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \boldsymbol{q}_i\right) = 0 \;;\; i = 1, \dots, N$$

dan

$$\boldsymbol{Z}_{sys} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_{lev}^{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{dif} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \Delta y_{i,2} & \boldsymbol{0} & \vdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \Delta y_{i,3} & \vdots & \boldsymbol{0} \\ . & . & . & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \Delta y_{i,T-1} \end{bmatrix}$$

Hitung $\hat{\delta}$ melalui proses GMM. Setelah itu buktikan bahwa $\hat{\delta}$ yang telah diperoleh adalah taksiran yang **Konsisten** untuk δ pada sebarang matriks bobot $\widehat{\boldsymbol{W}}$

Pilih $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang optimal yang meminimumkan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$, lalu buktikan bahwa taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ lebih kecil dibandingkan dengan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}$ sebarang.

Terakhir, buktikan bahwa taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ juga lebih kecil dibandingkan dengan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}_{optimal} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$

Stop

Gambar 3.4 Diagram alir metode Blundell dan Bond

Selain diagram alir, dari semua pembahasan diatas dapat disimpulkan langkah-langkah yang dilakukan oleh Blundell and Bond yaitu :

(1) Mencari taksiran konsisten dari δ. Taksiran dari δ ini merupakan taksiran untuk sistem. Oleh karena itu, terlebih dahulu harus dijelaskan momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang digunakan pada model *first-difference*, setelah itu dilanjutkan dengan penjelasan mengenai momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang digunakan pada model *level*. Momen kondisi dan matriks variabel instrumen *level* ini akan digunakan untuk memperoleh *GMM sistem estimator* yaitu dengan cara mengkombinasikan momen kondisi dan matriks variabel instrumen antar kedua model (*first-difference* dan *level*) dibawah asumsi-asumsi yang telah terpenuhi sehingga dihasilkan *one step consistent Blundell and Bond estimator*, $\hat{\delta} = \left(\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\varphi}_{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\varphi}\right)$.

(2) Pada taksiran konsisten diatas, pemilihan $\widehat{\boldsymbol{W}}$ tidak akan mempengaruhi kekonsistenan taksiran, namun dengan memilih $\widehat{\boldsymbol{W}}$ yang optimal yang meminimumkan taksiran *asymptotic variance* dari $\hat{\delta}$, maka akan dihasilkan taksiran yang efisien. Oleh Karena itu, pilih matriks bobot optimal $\widehat{\boldsymbol{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ dimana $\widehat{\boldsymbol{\Psi}} \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{Z}_{sys}{}' \widehat{\boldsymbol{q}}_i \widehat{\boldsymbol{q}}_i{}' \boldsymbol{Z}_{sys}\right)$ adalah taksiran yang konsisten dari $\boldsymbol{\Psi}$. Sehingga dihasilkan *two step efficient Blundell and Bond estimator*, $\hat{\delta} = \left(\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\varphi}_{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\varphi}\right)$.

(3) Lalu, akan dibuktikan bahwa taksiran yang diperoleh menggunakan Metode Blundell dan Bond lebih efisien dibandingkan dengan taksiran yang diperoleh menggunakan Metode Arellano dan Bond (*Bernadeta Nismawati, Juli 2010*). Hal ini dilakukan dengan membuktikan bahwa Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}$ merupakan taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ dibandingkan dengan Avâr $\hat{\delta}$ dengan $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}$ (mengacu skripsi Bernadeta Nismawati, Juli 2010), atau dengan kata lain harus dibuktikan bahwa $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} - Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} \geq 0$.

BAB 4
APLIKASI METODE BLUNDELL DAN BOND PADA MODEL REGRESI DATA PANEL DINAMIS

Pada bab ini akan dibahas mengenai aplikasi metode Blundell dan Bond dalam menaksir parameter model regresi data panel dinamis.

4.1 Latar Belakang Aplikasi

World no tobacco day atau yang dikenal sebagai hari anti tembakau sedunia yang dicanangkan oleh Organisasi Kesehatan Dunia WHO (*World Health Organization*) yang jatuh setiap tanggal 31 Mei, mengingatkan kembali setiap negara di dunia atas upaya apa saja yang telah dilakukan untuk mengurangi konsumsi rokok di dalam masyarakat. Pencanangan tersebut didasarkan atas keprihatinan akan bahaya kebiasaan merokok dikalangan masyarakat terutama orang-orang yang terkena imbas dari kekuatan media kapitalis yang gencar melakukan aksi promosi tembakau agar produk rokoknya semakin laris tanpa melakukan segmentasi usia dan gender. Sebagai contoh di Amerika Serikat, berbagai kebijakan telah dibuat pemerintah pusat dalam penanganan masalah ini seperti pelarangan iklan yang berisi ajakan untuk merokok pada siaran televisi dan radio (1971), cukai rokok yang diperbesar, pengaturan yang lebih ketat terhadap industri rokok, pemberlakuan denda 500 dollar atau tuntutan hukum bila tertangkap merokok di wilayah larangan merokok. Selain kebijakan dari pemerintah, juga dilakukan berbagai penelitian mengenai jumlah konsumsi rokok per tahun pada setiap negara bagian di Amerika Serikat, yang diharapkan dapat membantu menekan jumlah konsumsi rokok.

Berkaitan dengan penelitian tersebut, pada tugas akhir ini akan dilakukan analisis ekonomi untuk menaksir jumlah konsumsi rokok yang dianalogikan dengan penjualan rokok per kapita, yakni jumlah penjualan rokok total pada suatu negara bagian di tahun tertentu dibagi dengan jumlah orang pada usia boleh merokok di negara dan tahun tersebut.

4.2 Data dan Variabel

Berkaitan dengan konsep di dalam model dinamis dimana suatu variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel pada waktu yang sama, maka di dalam aplikasi pada tugas akhir ini akan dilihat seberapa besar penjualan rokok per kapita pada suatu tahun dipengaruhi oleh penjualan rokok perkapita pada tahun sebelumnya.

Aplikasi ini menggunakan data penjualan rokok di 46 negara bagian yang diambil secara acak dari 50 Negara bagian yang ada di Amerika Serikat selama kurun waktu 6 tahun (data diambil dari Badi H. Baltagi, 2005). Model yang akan dibentuk merupakan suatu model regresi data panel simpel dinamis, oleh karena itu hanya terdapat satu variabel eksplanatori yang merupakan *lag* dari variabel dependen. Berikut ini adalah penjelasan lebih lanjut mengenai variabel yang digunakan dalam aplikasi,

$Log\ C_{i,t}$: Penjualan rokok perkapita kepada orang-orang pada usia yang diperbolehkan merokok (berusia 14 tahun atau lebih) di Negara bagian ke-i pada waktu ke-t (dalam skala logaritma). Digunakan sebagai variabel dependen.

$Log\ C_{i,t-1}$: Penjualan rokok perkapita kepada orang-orang pada usia yang diperbolehkan merokok (berusia 14 tahun atau lebih) di Negara bagian ke-i pada waktu ke-t-1 (dalam skala logaritma). Digunakan sebagai variabel eksplanatori endogen.

4.3 Tujuan Aplikasi

Pada aplikasi ini akan dilakukan analisis dinamis pada data panel penjualan rokok di Amerika Serikat untuk mengetahui seberapa besar penjualan rokok pada suatu tahun dipengaruhi oleh penjualan rokok pada tahun sebelumnya. Dengan kata lain akan dilakukan penaksiran parameter pada model regresi data panel dinamis pada penjualan rokok (*cigarette dynamic panel data regression* *model*) menggunakan metode Blundell dan Bond. Tetapi, dalam aplikasi pada tugas akhir ini, penaksiran parameter menggunakan metode Arellano dan Bond juga akan dilakukan sebagai perbandingan terhadap metode Blundell dan Bond. Penaksiran parameter menggunakan bantuan *software Eviews 6* dalam hal pengolahan data.

4.4 Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Dinamis pada Penjualan rokok di Amerika Serikat Menggunakan Metode Blundell dan Bond

Model yang diajukan dalam aplikasi ini adalah model SYS-GMM yang merupakan kombinasi antara model (3.2.1) yang merupakan model DIF-GMM dengan model (3.1.1) yang merupakan model LEV-GMM yaitu

- Model DIF-GMM :

$$y_{i,t} - y_{i,t-1} = \delta(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}) + (v_{i,t} - v_{i,t-1}) \ ; \quad i = 1, \dots, N \ ; t = 3, \dots, T$$

- Model LEV-GMM :

$$y_{i,t} = \delta y_{i,t-1} + u_{i,t} \ ; \ i = 1, \dots, N \ ; \ t = 3, \dots, T$$

Sehingga kombinasi modelnya adalah

$$\begin{pmatrix} y_{i,t} - y_{i,t-1} \\ y_{i,t} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} y_{i,t-1} - y_{i,t-2} \\ y_{i,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,t} - v_{i,t-1} \\ u_{i,t} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, N \quad ; \quad t = 3, \dots, T$$

atau bisa dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{i,t} \\ y_{i,t} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \Delta y_{i,t-1} \\ y_{i,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_{i,t} \\ u_{i,t} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, N \quad ; \quad t = 3, \dots, T$$

dimana,

$$\Delta y_{i,t} = y_{i,t} - y_{i,t-1}, \qquad \Delta y_{i,t-1} = y_{i,t-1} - y_{i,t-2}, \qquad \Delta v_{i,t} = v_{i,t} - v_{i,t-1}$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan

$$\varphi_{i,t} = \begin{pmatrix} \Delta y_{i,t} \\ y_{i,t} \end{pmatrix},\ \varphi_{i,t-1} = \begin{pmatrix} \Delta y_{i,t-1} \\ y_{i,t-1} \end{pmatrix} \text{ dan } q_{i,t} = \begin{pmatrix} \Delta v_{i,t} \\ u_{i,t} \end{pmatrix}$$

Sehingga bentuk akhir menjadi

$$\varphi_{i,t} = \delta \varphi_{i,t-1} + q_{i,t}$$

$$i = 1, \dots, N \quad ; \quad t = 3, \dots, T$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut sebagai model SYS-GMM.

Berdasarkan data yang diperoleh dari Badi H. Baltagi, 2005 (data dapat dilihat di lampiran 3):

- $Log\ C_{i,t}$ berperan sebagai variabel dependen $y_{i,t}$ pada model LEV-GMM
- $Log\ C_{i,t-1}$ berperan sebagai variabel eksplanatori endogen $y_{i,t-1}$ pada model LEV-GMM
- $(Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1})$ atau $\Delta(Log\ C_{i,t})$ berperan sebagai variabel dependen $(y_{i,t} - y_{i,t-1})$ pada model DIF-GMM
- $(Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2})$ atau $\Delta(Log\ C_{i,t-1})$ berperan sebagai variabel eksplanatori endogen $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ pada model DIF-GMM

Maka, kombinasi model DIF dan model LEV (model SYS) untuk data penjualan rokok yang akan digunakan di dalam aplikasi ini adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1} \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,t} - v_{i,t-1} \\ u_{i,t} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, N \quad ; \quad t = 3, \dots, T$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \Delta(Log\ C_{i,t}) \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \Delta(Log\ C_{i,t-1}) \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_{i,t} \\ u_{i,t} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, N \quad ; \quad t = 3, \dots, T$$

Untuk mempermudah penulisan misalkan

$$\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1} \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(Log\ C_{i,t}) \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix} = \varphi_{i,t}\ ,$$

$$\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(Log\ C_{i,t-1}) \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix} = \varphi_{i,t-1} \text{ dan}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta v_{i,t} \\ u_{i,t} \end{pmatrix} = q_{i,t}$$

Sehingga bentuk akhir dari model SYS untuk data penjualan rokok yang akan digunakan di dalam aplikasi pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut

$$\varphi_{i,t} = \delta\varphi_{i,t-1} + q_{i,t}$$

$$i = 1, \dots, N \ \ ; \ \ t = 3, \dots, T$$

Menurut ahli ekonomi Washington D.C, Ruth A. Judson dan Ann L. Owen, salah satu komponen *error* yaitu efek individu μ_i merupakan pengaruh yang tidak terobservasi untuk individu ke-i tanpa dipengaruhi oleh faktor waktu, oleh sebab itu jika efek individu μ_i merepresentasikan variabel yang diabaikan (misal : keunggulan atau kemampuan dari setiap individu), maka variabel yang diabaikan inilah yang kemungkinan berkorelasi dengan variabel eksplanatori endogen.

Berdasarkan penjelasan tersebut, karena $\varphi_{i,t-1}$ merupakan variabel eksplanatori endogen dari model SYS untuk data penjualan rokok yang akan digunakan, dan $q_{i,t}$ merupakan komponen *error* yang mengandung efek individu didalamnya, maka dapat dikatakan bahwa $\varphi_{i,t-1}$ berkorelasi dengan $q_{i,t}$. Oleh karena itu, untuk mengatasi hal tersebut akan dipilih variabel instrumen gabungan yaitu $Log\ C_{i,t-2}$ dan $(Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2})$ yang masing-masing merupakan variabel instrumen untuk model DIF dan variabel instrumen untuk model LEV. Keterangan untuk masing-masing variabel instrumen akan dijelaskan sebagai berikut :

- untuk $Log\ C_{i,t-2}$: dipilih karena $Log\ C_{i,t-2}$ berkorelasi dengan $(Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2})$ tetapi tidak berkorelasi dengan komponen *error* $v_{i,t} - v_{i,t-1}$.

- Sedangkan untuk $(Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2})$: dipilih karena $(Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2})$ berkorelasi dengan $Log\ C_{i,t-1}$ tetapi tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$.

Berdasarkan Output *Eviews 6* pada lampiran 4 diperoleh hasil taksiran model Blundell dan Bond sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Log\ \hat{C}_{i,t} - Log\ \hat{C}_{i,t-1} \\ Log\ \hat{C}_{i,t} \end{pmatrix} = 1.002504 \begin{pmatrix} Log\ \hat{C}_{i,t-1} - Log\ \hat{C}_{i,t-2} \\ Log\ \hat{C}_{i,t-1} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \dots, 46\ ;\ t = 3, \dots, 6$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\hat{\varphi}_{i,t} = 1.002504\ \hat{\varphi}_{i,t-1}$$

$$i = 1, \dots, 46\ ;\ t = 3, \dots, 6$$

4.5 Kesimpulan

Berdasarkan output pada lampiran 5 dan lampiran 4, telah diperoleh bahwa $\hat{\delta}_{dif} = 0.762687$ (metode Arellano dan Bond) dan $\hat{\delta}_{sys} = 1.002504$ (metode Blundell dan Bond). Selanjutnya akan dicari masing-masing taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ pada kedua metode untuk data penjualan rokok di Amerika Serikat.

Pertama-tama akan dicari taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ untuk metode Arellano dan Bond yaitu

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} = \left[\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N} \right)^{-1} \frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \boldsymbol{y}_{-1}}{N} \right]^{-1}$$

Maka, untuk kasus data penjualan rokok di Amerika Serikat dimana (i=1,2,…,46) dan (t=3,4,5,6),

- $$\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N} = \frac{\left([\Delta y_{i,2} \quad \Delta y_{i,3} \quad \Delta y_{i,4} \quad \Delta y_{i,5}] \begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,4} \end{bmatrix} \right)}{N}$$

$$= \frac{1}{N} [\Delta y_{i,2} . y_{i,1} \quad \Delta y_{i,3} . y_{i,1} \quad \Delta y_{i,3} . y_{i,2} \quad \cdots \quad \Delta y_{i,5} . y_{i,4}]$$

$$= \left[\frac{\Delta y_{i,2} . y_{i,1}}{N} \quad \frac{\Delta y_{i,3} . y_{i,1}}{N} \quad \frac{\Delta y_{i,3} . y_{i,2}}{N} \quad \cdots \quad \frac{\Delta y_{i,5} . y_{i,4}}{N} \right]$$

dimana $\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N}$ berordo (1×10).

- $$\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}' \Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i \Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i{}' \boldsymbol{Z}_{dif}}{N} \right)^{-1}$$

dimana

$$\boldsymbol{Z}_{dif}' = \begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & \vdots & 0 \\ 0 & y_{i,2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & y_{i,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & y_{i,4} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i = [\Delta \boldsymbol{y}_i - \Delta \widehat{\boldsymbol{y}}_i] = \left[\Delta \boldsymbol{y}_i - \hat{\delta}_{dif} . \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \right]$$

$$= \left[\Delta \boldsymbol{y}_i - 0.762687 \Delta \boldsymbol{y}_{i,-1} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta y_{i,3} - 0.762687 \Delta y_{i,2} \\ \Delta y_{i,4} - 0.762687 \Delta y_{i,3} \\ \Delta y_{i,5} - 0.762687 \Delta y_{i,4} \\ \Delta y_{i,6} - 0.762687 \Delta y_{i,5} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \widehat{\boldsymbol{v}}_i{}' = [\Delta y_{i,3} - 0.762687 \Delta y_{i,2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \Delta y_{i,6} - 0.762687 \Delta y_{i,5}]$$

$$\boldsymbol{Z}_{dif} = \begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,4} \end{bmatrix}$$

Jika dijabarkan, $\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\right)^{-1}$ adalah matriks nonsingular berordo (10×10).

- $$\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_{i,2}.y_{i,1}}{N} \\ \frac{\Delta y_{i,3}.y_{i,1}}{N} \\ \frac{\Delta y_{i,3}.y_{i,2}}{N} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_{i,5}.y_{i,4}}{N} \end{bmatrix},$$ matriks berordo (10×1).

Sehingga, jika dihitung untuk kasus data penjualan rokok di Amerika Serikat dimana (i=1,2,…,46), maka diperoleh

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\Lambda}^{-1}} = \left[\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{46}\left(\frac{\sum_{i=1}^{46}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{46}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{46}\right]^{-1} = 0.00521$$

Selanjutnya akan dicari taksiran *asymptotic variance* terkecil dari $\hat{\delta}$ untuk metode Blundell dan Bond yaitu

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\Psi}^{-1}} = \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\widehat{\boldsymbol{q}}_i\widehat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N} \\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Maka, untuk kasus data penjualan rokok di Amerika Serikat dimana (i=1,2,…,46) dan (t=3,4,5,6),

- $$\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} = \frac{\left([\Delta y_{i,2} \quad \Delta y_{i,3} \quad \Delta y_{i,4} \quad \Delta y_{i,5}]\begin{bmatrix} y_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,4} \end{bmatrix}\right)}{N}$$
$$= \frac{1}{N}[\Delta y_{i,2}.y_{i,1} \quad \Delta y_{i,3}.y_{i,1} \quad \Delta y_{i,3}.y_{i,2} \quad \cdots \quad \Delta y_{i,5}.y_{i,4}]$$
$$= \left[\frac{\Delta y_{i,2}.y_{i,1}}{N} \quad \frac{\Delta y_{i,3}.y_{i,1}}{N} \quad \frac{\Delta y_{i,3}.y_{i,2}}{N} \quad \cdots \quad \frac{\Delta y_{i,5}.y_{i,4}}{N}\right]$$

  dimana $\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N}$ berordo (1×10).

- $$\frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} = \frac{\left([y_{i,2} \quad y_{i,3} \quad y_{i,4} \quad y_{i,5}]\begin{bmatrix} \Delta y_{i,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_{i,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta y_{i,5} \end{bmatrix}\right)}{N}$$
$$= \frac{1}{N}[y_{i,2}.\Delta y_{i,2} \quad y_{i,3}.\Delta y_{i,3} \quad y_{i,4}.\Delta y_{i,4} \quad y_{i,5}.\Delta y_{i,5}]$$
$$= \left[\frac{y_{i,2}.\Delta y_{i,2}}{N} \quad \frac{y_{i,3}.\Delta y_{i,3}}{N} \quad \frac{y_{i,4}.\Delta y_{i,4}}{N} \quad \frac{y_{i,5}.\Delta y_{i,5}}{N}\right]$$

  dimana $\frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}$ berordo (1×4).

Sehingga, matriks $\left(\frac{\Delta \boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} \quad \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N}\right)$ berordo (1×14).

- Matriks $\begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{N} \end{pmatrix}^{-1}$ jika dijabarkan merupakan matriks nonsingular berordo (14×14).

- $\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{N} \\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{N} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_{i,2}.y_{i,1}}{N} \\ \frac{\Delta y_{i,3}.y_{i,1}}{N} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_{i,5}.y_{i,4}}{N} \\ \frac{y_{i,2}.\Delta y_{i,2}}{N} \\ \frac{y_{i,3}.\Delta y_{i,3}}{N} \\ \frac{y_{i,4}.\Delta y_{i,4}}{N} \\ \frac{y_{i,5}.\Delta y_{i,5}}{N} \end{bmatrix}$, matriks berordo (14×1).

Sehingga, jika dihitung untuk kasus data penjualan rokok di Amerika Serikat dimana (i=1,2,…,46), maka diperoleh

$$Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} = \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\widehat{\boldsymbol{q}}_i\widehat{\boldsymbol{q}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{sys}}{N}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{Z}_{sys}{}'\boldsymbol{\varphi}_{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}\frac{\Delta\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{46} & \frac{\boldsymbol{y}_{-1}{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{46}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sum_{i=1}^{46}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{46} & \frac{\sum_{i=1}^{46}\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{46}\\ \frac{\sum_{i=1}^{46}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\Delta\widehat{\boldsymbol{v}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{dif}}{46} & \frac{\sum_{i=1}^{46}\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i{}'\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}}{46}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{Z}_{dif}{}'\Delta\boldsymbol{y}_{-1}}{46}\\ \frac{\boldsymbol{Z}_{lev}^{p}{}'\boldsymbol{y}_{-1}}{46}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= 0.00397$$

Karena $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} = 0.00521$ dan $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}} = 0.00397$, maka dapat disimpulkan bahwa $Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}} \geq Av\hat{a}r\ \hat{\delta}_{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}}$, yang berarti bahwa untuk kasus data penjualan rokok di Amerika Serikat, taksiran yang diperoleh menggunakan Metode Blundell dan Bond lebih efisien dibandingkan dengan taksiran yang diperoleh menggunakan Metode Arellano dan Bond.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Model regresi data panel dinamis merupakan sebuah model regresi data panel yang didasari oleh konsep kedinamisan, dimana suatu variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel-variabel pada waktu yang sama, melainkan juga ditentukan oleh variabel pada waktu sebelumnya. Dengan ditambahkan konsep kedinamisan ke dalam model, model menjadi lebih baik (menggambarkan keadaan ekonomi yang sebenarnya) namun juga menjadi lebih kompleks.

Salah satu permasalahan pada model regresi data panel dinamis adalah adanya variabel endogen eksplanatori, yakni *lag* dari variabel dependen yang berkorelasi dengan *error*. Hal ini akan menyebabkan estimasi langsung dengan OLS akan menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten. Oleh karena itu sebelum mengestimasi parameter dalam model dilakukan terlebih dahulu metode Instrumental Variabel (IV), yang mengatasi permasalahan korelasi antara variabel eksplanatori dengan *error*. Setelah dilakukan metode tersebut barulah dapat dilakukan estimasi parameter melalui metode Arellano dan Bond yang menyempurnakan metode sebelumnya yaitu metode Anderson dan Hsiao sehingga dihasilkan taksiran yang tak bias, konsisten, dan efisien.

Walaupun telah didapatkan taksiran yang tak bias, konsisten dan efisien, namun Blundell dan Bond mengklaim bahwa taksiran parameter yang didapat oleh Arellano dan Bond masih kurang efisien. Hal ini dikarenakan momen kondisi dan matriks variabel instrumen yang digunakan oleh Arellano dan Bond hanya mencakup model *first difference*-nya saja. Oleh karena itu, Blundell dan Bond menyarankan penggunaan tambahan informasi *level* yaitu momen kondisi dan matriks variabel instrumen *level* selain *first difference*. Dengan mengkombinasikan momen kondisi dan matriks variabel instrumen antar keduanya (*first difference* dan *level*) maka akan dihasilkan suatu estimator yang lebih efisien yang dikenal dengan nama *GMM-System Estimator*.

Metode Blundell dan Bond dilakukan berdasarkan prinsip *Generalized Method of Moments* (GMM). Pengestimasian parameter dilakukan melalui 2 tahap yakni *one step consistent estimator*, dimana terlebih dahulu dicari suatu taksiran parameter yang konsisten, untuk selanjutnya akan digunakan dalam mendapatkan taksiran Blundell dan Bond yang efisien (*two step efficient estimator)*.

5.2 Saran

Saran yang perlu diperhatikan adalah

1. Perlunya dipelajari metode lain selain metode Arellano dan Bond serta metode Blundell dan Bond dalam menaksir parameter pada model data panel dinamis, seperti metode Arellano dan Bover, metode Ahn dan Schmidt, dan metode Keane dan Runkle.
2. Tugas akhir ini bertujuan untuk mengestimasi parameter dari model regresi data panel dinamis. Untuk lebih lanjutnya dapat dilakukan pengujian hipotesis untuk mengetahui signifikansi hubungan variabel dependen dengan *lag*-nya yang berperan sebagai variabel eksplanatori.

DAFTAR PUSTAKA

Ahn,S. and P. Schmidt. 1995, "Efficient Estimation of Models for Dynamic Panel Data". *Journal of Econometrics, 68:5-27.*

Anton, Howard. 2000. Elementary Linear Algebra. Interaksara. Batam

Arellano, M. and O. Bover (1995), Another Look at the Instrumental Variable Estimation of Error-Components Models, Journal of Econometrics 68, 29-51.

Baltagi, B.H. and D. Levin. 1992, "Cigarette taxation: Raising revenues and reducing consumption." *Structural Change and Economic Dynamics,* 3: 321–335.

Barnes, Randal J. 2006. *Matrix Differentiation (and some other stuff)*. University of Minnesota Minneapolis, USA

Berman, Abraham. 2002. Completely Positive Matrices. United States of America.

Blundell, R. and S. Bond, 1998, Initial Conditions and Moment Restrictions in Dynamic Panel Data Models, Journal of Econometrics 87, 115-143.

Blundell, R., S. Bond and F. Windmeijer. (2000). "Estimation in dynamic panel data models: improving on the performance of the standard GMM estimator."In B. Baltagi (ed.), *Nonstationary Panels, Panel Cointegration and Dynamic Panels, Elsevier Science*.

Gallier, Jean. 2010. *The Schur Complement and Symmetric Positive Semidefinite (and Definite) Matrices.*

Greene H. William. 2000. Econometric Analysis. Prentice Hall International, United States of America.

Gujarati N. Damodar. 1995. *Basic Econometrics*. McGraw-Hill, Inc, Singapore.

Hogg V. Robert, Joseph W. McKean and Allen T. Craig. 2005. Introduction to Mathematical Statistics. Pearson Prentice Hall, United States of America.

Lancaster, Peter. 2003. The Theory of Matrices. Pearson Prentice Hall, United States of America.

Nachrowi D. 2006. *Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan.* Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

Nismawati, Bernadeta. 2010. *Penaksiran Parameter pada Model Data Dinamis Menggunakan Metode Arrelano dan Bond. Universitas Indonesia, Depok.*

Storch V. Hans, W. Francis. 2002. *Statistical analysis in climate research*. *Cambridge University Press*.

Wooldridge, Jefrey M. 2000. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.*

LAMPIRAN 1

Bukti Pemilihan Variabel Instrumen untuk Model DIF

$$y_{i,t} - y_{i,t-1} = \delta\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right) + \left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right) \;;\quad i = 1, \dots, N \,;\, t = 3, \dots, T$$

Karena $\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right)$ berkorelasi dengan komponen *error* $\left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right)$, maka akan dipilih variabel instrumen yaitu $y_{i,t-2}$. Alasannya karena $y_{i,t-2}$ berkorelasi dengan $\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right)$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $\left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right)$.

Bukti :

- Akan dibuktikan bahwa $y_{i,t-2}$ berkorelasi dengan $\left(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}\right)$

Maka :

$$\begin{aligned}
cov\left(y_{i,t-2}, \Delta y_{i,t-1}\right) &= E\left[\left(y_{i,t-2} - E\left(y_{i,t-2}\right)\right)\left(\Delta y_{i,t-1} - E\left(\Delta y_{i,t-1}\right)\right)\right] \\
&= E[y_{i,t-2}.\Delta y_{i,t-1} - y_{i,t-2}.E(\Delta y_{i,t-1}) \\
&\qquad -E(y_{i,t-2}).\Delta y_{i,t-1} + E(y_{i,t-2}).E(\Delta y_{i,t-1})] \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta y_{i,t-1}) - E(y_{i,t-2}).E(\Delta y_{i,t-1}) \\
&\qquad -E(y_{i,t-2}).E(\Delta y_{i,t-1}) + E(y_{i,t-2}).E(\Delta y_{i,t-1}) \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta y_{i,t-1}) - E(y_{i,t-2}).E(\Delta y_{i,t-1}) \\
&= -\frac{\sigma_v^2}{1+\alpha}\begin{bmatrix} \alpha^{t-3} \\ \vdots \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(\textit{Ridder and Wansbeek (1990)})}
\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan bahwa $y_{i,t-2}$ tidak berkorelasi dengan komponen *error* $\left(v_{i,t} - v_{i,t-1}\right)$

  Asumsi-asumsi yang digunakan :

  1. $E(\mu_i) = E\left(v_{i,t}\right) = 0$
  2. $E\left(\mu_i . v_{i,t}\right) = 0$

3. $E(v_{i,t}.v_{i,s}) = 0 \quad untuk\ t \neq s$
4. $E(y_{i1}.v_{i,t}) = 0 \quad untuk\ i = 1, \dots, N \ ; \ \ t = 2, \dots T$ (*initial condition from Ahn and Schimdt 1995*)

Maka :

$$
\begin{aligned}
cov(y_{i,t-2}, \Delta v_{i,t}) &= E\left[\left(y_{i,t-2} - E(y_{i,t-2})\right)\left(\Delta v_{i,t} - E(\Delta v_{i,t})\right)\right] \\
&= E\left[\left(y_{i,t-2} - E(y_{i,t-2})\right)\left(\Delta v_{i,t} - E(v_{i,t} - v_{i,t-1})\right)\right] \\
&= E\left[\left(y_{i,t-2} - E(y_{i,t-2})\right)\left(\Delta v_{i,t} - E(v_{i,t}) + E(v_{i,t-1})\right)\right] \\
&= E\left[\left(y_{i,t-2} - E(y_{i,t-2})\right)(\Delta v_{i,t} - 0 + 0)\right] \\
&= E[(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t} - E(y_{i,t-2}).\Delta v_{i,t})] \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) - E(y_{i,t-2}).E(\Delta v_{i,t}) \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) - E(y_{i,t-2}).E(v_{i,t} - v_{i,t-1}) \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) - E(y_{i,t-2})[E(v_{i,t}) - E(v_{i,t-1})] \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) - E(y_{i,t-2})[0 - 0] \\
&= E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t})
\end{aligned}
$$

Disini harus dibuktikan bahwa

$$E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) = 0 \quad untuk \ \ t = 3, \dots, T$$

Periksa :

Untuk kasus t=3, maka

$$
\begin{aligned}
E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) &= E(y_{i,1}.\Delta v_{i,3}) \\
&= E\left(y_{i,1}(v_{i,3} - v_{i,2})\right) \\
&= E(y_{i,1}.v_{i,3} - y_{i,1}.v_{i,2}) \\
&= E(y_{i,1}.v_{i,3}) - E(y_{i,1}.v_{i,2}) \\
&= 0 - 0 \quad \text{(berdasarkan asumsi ke-4)}
\end{aligned}
$$

$$= 0$$

Untuk kasus t=4, maka

$$E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) = E(y_{i,2}.\Delta v_{i,4})$$
$$= E\left(y_{i,2}(v_{i,4} - v_{i,3})\right)$$
$$= E(y_{i,2}.v_{i,4} - y_{i,2}.v_{i,3})$$
$$= E(y_{i,2}.v_{i,4}) - E(y_{i,2}.v_{i,3})$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

dan seterusnya sampai dengan t=T.

Untuk kasus t=T, maka

$$E(y_{i,t-2}.\Delta v_{i,t}) = E(y_{i,T-2}.\Delta v_{i,T})$$
$$= E\left(y_{i,T-2}(v_{i,T} - v_{i,T-1})\right)$$
$$= E(y_{i,T-2}.v_{i,T} - y_{i,T-2}.v_{i,T-1})$$
$$= E(y_{i,T-2}.v_{i,T}) - E(y_{i,T-2}.v_{i,T-1})$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

Sehingga jelas bahwa $y_{i,t-2}$ merupakan variabel instrumen yang akan digunakan, karena telah terbukti bahwa $y_{i,t-2}$ berkorelasi dengan $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $(v_{i,t} - v_{i,t-1})$.

LAMPIRAN 2

Bukti Pemilihan Variabel Instrumen untuk Model LEV

$$y_{i,t} = \delta y_{i,t-1} + u_{i,t} \;\; ; \quad i = 1, \dots, N \; ; t = 3, \dots, T$$

Karena $y_{i,t-1}$ berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$, maka akan dipilih variabel instrumen yaitu $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$. Alasannya karena $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ berkorelasi dengan $y_{i,t-1}$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$.

Bukti :

- Akan dibuktikan bahwa $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ berkorelasi dengan $y_{i,t-1}$

Maka :

$$\begin{aligned}
cov(\Delta y_{i,t-1}, y_{i,t-1}) &= E\left[\left(\Delta y_{i,t-1} - E(\Delta y_{i,t-1})\right)\left(y_{i,t-1} - E(y_{i,t-1})\right)\right] \\
&= E[\Delta y_{i,t-1}.\, y_{i,t-1} - \Delta y_{i,t-1}.\, E(y_{i,t-1}) \\
&\qquad - E(\Delta y_{i,t-1}).\, y_{i,t-1} + E(\Delta y_{i,t-1}).\, E(y_{i,t-1})] \\
&= E(\Delta y_{i,t-1}.\, y_{i,t-1}) - E(\Delta y_{i,t-1}).\, E(y_{i,t-1}) \\
&\qquad - E(\Delta y_{i,t-1}).\, E(y_{i,t-1}) + E(\Delta y_{i,t-1}).\, E(y_{i,t-1}) \\
&= E(\Delta y_{i,t-1}.\, y_{i,t-1}) - E(\Delta y_{i,t-1}).\, E(y_{i,t-1}) \\
&= \frac{\sigma_v^2}{1+\alpha} \begin{bmatrix} \alpha^{t-3} \\ \vdots \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(\textit{Ridder and Wansbeek (1990)})}
\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan bahwa $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$

  Asumsi-asumsi yang digunakan sama seperti pembuktian untuk model DIF yaitu asumsi ke-1 sampai dengan asumsi ke-4 ditambah dengan 1 asumsi tambahan sebagai *initial condition from Ahn and Schmidt 1995* untuk model LEV yaitu :

5. $E(\mu_i.\Delta y_{i,2}) = 0$

Maka :

$$cov(\Delta y_{i,t-1}, u_{i,t}) = E\left[\left(\Delta y_{i,t-1} - E(\Delta y_{i,t-1})\right)\left(u_{i,t} - E(u_{i,t})\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\Delta y_{i,t-1} - E(\Delta y_{i,t-1})\right)\left(u_{i,t} - E(\mu_i + v_{i,t})\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\Delta y_{i,t-1} - E(\Delta y_{i,t-1})\right)\left(u_{i,t} - E(\mu_i) - E(v_{i,t})\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\Delta y_{i,t-1} - E(\Delta y_{i,t-1})\right)(u_{i,t} - 0 - 0)\right]$$

$$= E[(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t} - E(\Delta y_{i,t-1}).u_{i,t})]$$

$$= E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) - E(\Delta y_{i,t-1}).E(u_{i,t})$$

$$= E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) - E(\Delta y_{i,t-1}).E(\mu_i + v_{i,t})$$

$$= E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) - E(\Delta y_{i,t-1})[E(\mu_i) + E(v_{i,t})]$$

$$= E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) - E(\Delta y_{i,t-1})[0 + 0]$$

$$= E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t})$$

Disini harus dibuktikan bahwa

$$E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) = 0 \quad untuk \;\; t = 3, \dots, T$$

Periksa :

Untuk kasus t=3, maka

$$E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) = E(\Delta y_{i,2}.u_{i,3})$$

$$= E\left(\Delta y_{i,2}(\mu_i + v_{i,3})\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,2}.\mu_i + \Delta y_{i,2}.v_{i,3})$$

$$= E(\Delta y_{i,2}.\mu_i) + E(\Delta y_{i,2}.v_{i,3})$$

$$= E(\Delta y_{i,2}.\mu_i) + E\left((y_{i,2} - y_{i,1}).v_{i,3}\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,2}.\mu_i) + E(y_{i,2}.v_{i,3} - y_{i,1}.v_{i,3})$$

$$= E(\Delta y_{i,2}.\mu_i) + E(y_{i,2}.v_{i,3}) - E(y_{i,1}.v_{i,3})$$

$= 0 + 0 - 0$ (berdasarkan asumsi ke-4 dan asumsi ke-5)

Untuk kasus t=4, maka

$$E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) = E(\Delta y_{i,3}.u_{i,4})$$

$$= E\left(\Delta y_{i,3}(\mu_i + v_{i,4})\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,3}.\mu_i + \Delta y_{i,3}.v_{i,4})$$

$$= E(\Delta y_{i,3}.\mu_i) + E(\Delta y_{i,3}.v_{i,4})$$

$$= E(\Delta y_{i,3}.\mu_i) + E\left((y_{i,3} - y_{i,2}).v_{i,4}\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,3}.\mu_i) + E(y_{i,3}.v_{i,4} - y_{i,2}.v_{i,4})$$

$$= E(\Delta y_{i,3}.\mu_i) + E(y_{i,3}.v_{i,4}) - E(y_{i,2}.v_{i,4})$$

$$= 0 + 0 - 0$$

dan seterusnya sampai dengan t=T.

Untuk kasus t=T, maka

$$E(\Delta y_{i,t-1}.u_{i,t}) = E(\Delta y_{i,T-1}.u_{i,T})$$

$$= E\left(\Delta y_{i,T-1}(\mu_i + v_{i,T})\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,T-1}.\mu_i + \Delta y_{i,T-1}.v_{i,T})$$

$$= E(\Delta y_{i,T-1}.\mu_i) + E(\Delta y_{i,T-1}.v_{i,T})$$

$$= E(\Delta y_{i,T-1}.\mu_i) + E\left((y_{i,T-1} - y_{i,T-2}).v_{i,T}\right)$$

$$= E(\Delta y_{i,T-1}.\mu_i) + E(y_{i,T-1}.v_{i,T} - y_{i,T-2}.v_{i,T})$$

$$= E(\Delta y_{i,T-1}.\mu_i) + E(y_{i,T-1}.v_{i,T}) - E(y_{i,T-2}.v_{i,T})$$

$$= 0 + 0 - 0$$

Sehingga jelas bahwa $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ merupakan variabel instrumen yang akan digunakan, karena telah terbukti bahwa $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ berkorelasi dengan $y_{i,t-1}$ namun tidak berkorelasi dengan komponen *error* $u_{i,t}$.

LAMPIRAN 3

Data Penjualan Rokok di 46 Negara Bagian di Amerika Serikat (Kurun Waktu 6 Tahun)

Keterangan :

Untuk mempermudah pemasukan data ke dalam *Eviews 6* dilakukan sedikit perubahan nama seperti

- $vdg = \varphi_{i,t}$ = Variabel Dependen Gabungan
  keterangan :
  $$vdg = \begin{pmatrix} Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1} \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix}$$
  dengan $Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1}$ berordo $N(T-2) \times 1$ dan $Log\ C_{i,t}$ juga berordo $N(T-2) \times 1$, sehingga gabungannya $\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t} - Log\ C_{i,t-1} \\ Log\ C_{i,t} \end{pmatrix}$ berordo $2N(T-2) \times 1$.

- $veg = \varphi_{i,t-1}$ = Variabel Eksplanatori endogen Gabungan
  keterangan :
  $$veg = \begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix}$$
  dengan $Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2}$ berordo $N(T-2) \times 1$ dan $Log\ C_{i,t-1}$ juga berordo $N(T-2) \times 1$, sehingga gabungannya $\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} \end{pmatrix}$ berordo $2N(T-2) \times 1$.

- vig = Variabel Instrumen Gabungan
  keterangan :
  $$vig = \begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \end{pmatrix}$$
  dengan $Log\ C_{i,t-2}$ berordo $N(T-2) \times 1$ dan $Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2}$ juga berordo $N(T-2) \times 1$, sehingga gabungannya $\begin{pmatrix} Log\ C_{i,t-2} \\ Log\ C_{i,t-1} - Log\ C_{i,t-2} \end{pmatrix}$ berordo $2N(T-2) \times 1$.

sehingga total jumlah observasi yang akan digunakan untuk proses SYS-GMM adalah = 2[N(T-2)] = 2 [46 x (6-2)] =368 observasi

Berikut merupakan Data Penjualan Rokok di 46 Negara Bagian di Amerika Serikat dalam kurun waktu 6 tahun yang akan digunakan untuk proses SYS-GMM di dalam *Eviews 6* :

id	year	Vdg	veg	vig
_1	1			
_1	2	0.019048195		
_1	3	-0.003335189	0.019048195	4.48187197
_1	4	0.060493603	-0.003335189	4.500920165
_1	5	0.058031548	0.060493603	4.497584975
_1	6	0.017647517	0.058031548	4.558078578
_2	1			
_2	2	-0.015693435		
_2	3	0.012227227	-0.015693435	4.750135956
_2	4	-0.049832374	0.012227227	4.734442522
_2	5	0.131476363	-0.049832374	4.746669748
_2	6	0.026057534	0.131476363	4.696837375
_3	1			
_3	2	-0.010633256		
_3	3	-0.025591948	-0.010633256	4.644390899
_3	4	0.037186281	-0.025591948	4.633757643
_3	5	-0.001923078	0.037186281	4.608165695
_3	6	0.038702329	-0.001923078	4.645351976
_4	1			
_4	2	-0.00322321		
_4	3	-0.007290433	-0.00322321	4.822697999
_4	4	-0.01639381	-0.007290433	4.819474789
_4	5	0.02045061	-0.01639381	4.812184355
_4	6	0.007261024	0.02045061	4.795790546
_5	1			
_5	2	0.010420379		
_5	3	-0.187170891	0.010420379	4.964242255
_5	4	-0.020202707	-0.187170891	4.974662634
_5	5	-0.059562261	-0.020202707	4.787491743
_5	6	-0.013630379	-0.059562261	4.767289035
_6	1			
_6	2	0.062906425		
_6	3	-0.124213926	0.062906425	5.104732617
_6	4	0.038600173	-0.124213926	5.167639043

_6	5	-0.030248053	0.038600173	5.043425117
_6	6	-0.01028948	-0.030248053	5.08202529
_7	1			
_7	2	-0.055455215		
_7	3	-0.057213857	-0.055455215	5.412984442
_7	4	0.060976796	-0.057213857	5.357529226
_7	5	0.035058941	0.060976796	5.300315369
_7	6	-0.052104808	0.035058941	5.361292166
_8	1			
_8	2	-0.064693212		
_8	3	0.019608471	-0.064693212	4.862135286
_8	4	-0.00486619	0.019608471	4.797442074
_8	5	0.024097552	-0.00486619	4.817050545
_8	6	0.051055171	0.024097552	4.812184355
_9	1			
_9	2	0.033711057		
_9	3	0.011899454	0.033711057	4.65396035
_9	4	0.051429773	0.011899454	4.687671407
_9	5	0.011173301	0.051429773	4.699570861
_9	6	0.023649751	0.011173301	4.751000634
_10	1			
_10	2	0.015022816		
_10	3	0.017734455	0.015022816	4.596129441
_10	4	0.05786346	0.017734455	4.611152258
_10	5	0.15032507	0.05786346	4.628886713
_10	6	-0.034694888	0.15032507	4.686750173
_11	1			
_11	2	-0.016730428		
_11	3	-0.043894194	-0.016730428	4.887337078
_11	4	0.006389798	-0.043894194	4.870606649
_11	5	0.007930256	0.006389798	4.826712456
_11	6	-0.017530329	0.007930256	4.833102254
_12	1			
_12	2	-0.010479138		
_12	3	0.012710451	-0.010479138	4.900076104
_12	4	0.034322464	0.012710451	4.889596966
_12	5	0.068657807	0.034322464	4.902307417
_12	6	0.044568319	0.068657807	4.936629881
_13	1			
_13	2	-0.011976191		
_13	3	0.005545301	-0.011976191	4.693181063
_13	4	-0.000922084	0.005545301	4.681204872
_13	5	0.009182801	-0.000922084	4.686750173

_13	6	0.010909199	0.009182801	4.685828089
_14	1			
_14	2	0.024668246		
_14	3	0.105360516	0.024668246	4.606169686
_14	4	-0.103413095	0.105360516	4.630837933
_14	5	0.076744848	-0.103413095	4.736198448
_14	6	0.037139547	0.076744848	4.632785353
_15	1			
_15	2	0.024214258		
_15	3	0.062913825	0.024214258	4.96144505
_15	4	0.048239857	0.062913825	4.985659308
_15	5	0.092804959	0.048239857	5.048573133
_15	6	0.118154576	0.092804959	5.09681299
_16	1			
_16	2	-0.012007005		
_16	3	0	-0.012007005	4.764734756
_16	4	0.033095935	0	4.75272775
_16	5	0.044887176	0.033095935	4.75272775
_16	6	0.011111225	0.044887176	4.785823686
_17	1			
_17	2	-0.002954212		
_17	3	-0.050826259	-0.002954212	4.909709376
_17	4	0.035922854	-0.050826259	4.906755164
_17	5	0.024472857	0.035922854	4.855928904
_17	6	0.010929071	0.024472857	4.891851758
_18	1			
_18	2	0.004918043		
_18	3	0.009764113	0.004918043	4.801559
_18	4	0.025580931	0.009764113	4.806477043
_18	5	0.050029671	0.025580931	4.816241156
_18	6	0.030316555	0.050029671	4.841822087
_19	1			
_19	2	0.013193827		
_19	3	-0.042526093	0.013193827	4.852030264
_19	4	-0.02360712	-0.042526093	4.865224091
_19	5	-0.029254071	-0.02360712	4.822697999
_19	6	0.027605266	-0.029254071	4.799090879
_20	1			
_20	2	-0.005979091		
_20	3	-0.036645322	-0.005979091	4.899331225
_20	4	-0.019631569	-0.036645322	4.893352133
_20	5	0.041170863	-0.019631569	4.856706812
_20	6	0.017352378	0.041170863	4.837075243

_21	1			
_21	2	-0.012389539		
_21	3	-0.0739025	-0.012389539	4.733563401
_21	4	0.109761173	-0.0739025	4.721173862
_21	5	-0.184385541	0.109761173	4.647271362
_21	6	0.098310932	-0.184385541	4.757032535
_22	1			
_22	2	0.022223137		
_22	3	0.026031839	0.022223137	4.48863637
_22	4	0.120871291	0.026031839	4.510859507
_22	5	0.061628694	0.120871291	4.536891345
_22	6	0.025540798	0.061628694	4.657762636
_23	1			
_23	2	-0.000728597		
_23	3	-0.123172899	-0.000728597	4.922168313
_23	4	0.050633555	-0.123172899	4.921439715
_23	5	0.01863408	0.050633555	4.798266816
_23	6	0.016024761	0.01863408	4.848900371
_24	1			
_24	2	0.011135019		
_24	3	-0.054256526	0.011135019	4.754451889
_24	4	0.038805574	-0.054256526	4.765586907
_24	5	0.05552309	0.038805574	4.711330382
_24	6	-0.019000985	0.05552309	4.750135956
_25	1			
_25	2	-0.01009646		
_25	3	-0.002771364	-0.01009646	4.695924549
_25	4	0.004614683	-0.002771364	4.685828089
_25	5	-0.034663892	0.004614683	4.683056725
_25	6	0.016075996	-0.034663892	4.687671407
_26	1			
_26	2	0.045848875		
_26	3	-0.046903727	0.045848875	5.245443877
_26	4	0.00526317	-0.046903727	5.291292752
_26	5	0.041640557	0.00526317	5.244389025
_26	6	0.01449663	0.041640557	5.249652195
_27	1			
_27	2	-0.060506258		
_27	3	0.066925007	-0.060506258	5.575949103
_27	4	0.045253261	0.066925007	5.515442846
_27	5	0.063413788	0.045253261	5.582367853
_27	6	-0.05982312	0.063413788	5.627621114
_28	1			

_28	2	-0.071629656		
_28	3	-0.004133946	-0.071629656	4.86907173
_28	4	0.035805289	-0.004133946	4.797442074
_28	5	0.026036974	0.035805289	4.793308128
_28	6	-0.065993369	0.026036974	4.829113417
_29	1			
_29	2	-0.138261567		
_29	3	0.033901552	-0.138261567	4.604169686
_29	4	0.028479471	0.033901552	4.465908119
_29	5	0.069856429	0.028479471	4.49980967
_29	6	-0.004036332	0.069856429	4.528289142
_30	1			
_30	2	-0.020219047		
_30	3	-0.028170877	-0.020219047	4.827513417
_30	4	0.035496917	-0.028170877	4.80729437
_30	5	-0.027962348	0.035496917	4.779123493
_30	6	-0.01005876	-0.027962348	4.81462041
_31	1			
_31	2	-0.00103146		
_31	3	-0.032514663	-0.00103146	4.574710979
_31	4	0.048891692	-0.032514663	4.573679519
_31	5	0.052409423	0.048891692	4.541164856
_31	6	0.046125823	0.052409423	4.590056548
_32	1			
_32	2	-0.007733991		
_32	3	-0.057523844	-0.007733991	4.865994804
_32	4	0.024371637	-0.057523844	4.858260814
_32	5	-0.001606426	0.024371637	4.80073697
_32	6	-0.031852427	-0.001606426	4.825108606
_33	1			
_33	2	-0.038796025		
_33	3	-0.002763705	-0.038796025	4.727387819
_33	4	0.062576265	-0.002763705	4.688591794
_33	5	0.053154646	0.062576265	4.685828089
_33	6	0.019528692	0.053154646	4.748404354
_34	1			
_34	2	-0.020708246		
_34	3	-0.066691374	-0.020708246	4.763028271
_34	4	-0.009363364	-0.066691374	4.742320024
_34	5	0.025082597	-0.009363364	4.67562865
_34	6	0.015475957	0.025082597	4.666265285
_35	1			
_35	2	-0.193156814		

_35	3	0.050486517	-0.193156814	4.962145085
_35	4	-0.005665738	0.050486517	4.768988271
_35	5	0.087011377	-0.005665738	4.819474789
_35	6	0.05500663	0.087011377	4.813809051
_36	1			
_36	2	0.085093831		
_36	3	-0.005774799	0.085093831	4.561218298
_36	4	0.104394799	-0.005774799	4.646312129
_36	5	0.031667173	0.104394799	4.64053733
_36	6	0.055706457	0.031667173	4.744932128
_37	1			
_37	2	0.020700591		
_37	3	-0.100494326	0.020700591	4.609162207
_37	4	0.04224493	-0.100494326	4.629862799
_37	5	0.063115586	0.04224493	4.529368473
_37	6	0.004842624	0.063115586	4.571613402
_38	1			
_38	2	-0.017552414		
_38	3	-0.072460466	-0.017552414	4.693181063
_38	4	0.063097102	-0.072460466	4.67562865
_38	5	0.047759306	0.063097102	4.603168183
_38	6	-0.016275224	0.047759306	4.666265285
_39	1			
_39	2	0.026401169		
_39	3	-0.045023681	0.026401169	4.685828089
_39	4	0.023224453	-0.045023681	4.712229258
_39	5	-0.002758622	0.023224453	4.667205577
_39	6	0.016438726	-0.002758622	4.69043003
_40	1			
_40	2	0.020016065		
_40	3	-0.001525553	0.020016065	4.163559631
_40	4	0.033036037	-0.001525553	4.183575696
_40	5	0.051810148	0.033036037	4.182050143
_40	6	0.019445057	0.051810148	4.21508618
_41	1			
_41	2	0.044046604		
_41	3	-0.093380394	0.044046604	4.858260814
_41	4	0.014575157	-0.093380394	4.902307417
_41	5	0.103751505	0.014575157	4.808927024
_41	6	0.061817431	0.103751505	4.82350218
_42	1			
_42	2	0.008917773		
_42	3	0.00322321	0.008917773	4.810557016

_42	4	0.032452393	0.00322321	4.819474789
_42	5	0.064830535	0.032452393	4.822697999
_42	6	0.043562761	0.064830535	4.855150391
_43	1			
_43	2	-0.01289061		
_43	3	-0.035554786	-0.01289061	4.620058798
_43	4	0.003097576	-0.035554786	4.607168189
_43	5	-0.091708426	0.003097576	4.571613402
_43	6	0.027856955	-0.091708426	4.574710979
_44	1			
_44	2	-0.066432356		
_44	3	0.021183493	-0.066432356	4.785823686
_44	4	-0.026550232	0.021183493	4.71939133
_44	5	0.052413743	-0.026550232	4.740574823
_44	6	-0.00768906	0.052413743	4.714024591
_45	1			
_45	2	0.000897263		
_45	3	-0.046819014	0.000897263	4.713127327
_45	4	-0.009442941	-0.046819014	4.714024591
_45	5	0.031748698	-0.009442941	4.667205577
_45	6	0.006413215	0.031748698	4.657762636
_46	1			
_46	2	-0.005878048		
_46	3	-0.026130639	-0.005878048	4.916324615
_46	4	-0.003789319	-0.026130639	4.910446567
_46	5	0.061115814	-0.003789319	4.884315927
_46	6	0.008534902	0.061115814	4.880526609
_1	1	4.48187197		
_1	2	4.500920165	4.48187197	
_1	3	4.497584975	4.500920165	0.019048195
_1	4	4.558078578	4.497584975	-0.003335189
_1	5	4.616110126	4.558078578	0.060493603
_1	6	4.633757643	4.616110126	0.058031548
_2	1	4.750135956		
_2	2	4.734442522	4.750135956	
_2	3	4.746669748	4.734442522	-0.015693435
_2	4	4.696837375	4.746669748	0.012227227
_2	5	4.828313737	4.696837375	-0.049832374
_2	6	4.854371272	4.828313737	0.131476363
_3	1	4.644390899		
_3	2	4.633757643	4.644390899	
_3	3	4.608165695	4.633757643	-0.010633256
_3	4	4.645351976	4.608165695	-0.025591948

_3	5	4.643428898	4.645351976	0.037186281
_3	6	4.682131227	4.643428898	-0.001923078
_4	1	4.822697999		
_4	2	4.819474789	4.822697999	
_4	3	4.812184355	4.819474789	-0.00322321
_4	4	4.795790546	4.812184355	-0.007290433
_4	5	4.816241156	4.795790546	-0.01639381
_4	6	4.82350218	4.816241156	0.02045061
_5	1	4.964242255		
_5	2	4.974662634	4.964242255	
_5	3	4.787491743	4.974662634	0.010420379
_5	4	4.767289035	4.787491743	-0.187170891
_5	5	4.707726774	4.767289035	-0.020202707
_5	6	4.694096395	4.707726774	-0.059562261
_6	1	5.104732617		
_6	2	5.167639043	5.104732617	
_6	3	5.043425117	5.167639043	0.062906425
_6	4	5.08202529	5.043425117	-0.124213926
_6	5	5.051777237	5.08202529	0.038600173
_6	6	5.041487758	5.051777237	-0.030248053
_7	1	5.412984442		
_7	2	5.357529226	5.412984442	
_7	3	5.300315369	5.357529226	-0.055455215
_7	4	5.361292166	5.300315369	-0.057213857
_7	5	5.396351107	5.361292166	0.060976796
_7	6	5.344246298	5.396351107	0.035058941
_8	1	4.862135286		
_8	2	4.797442074	4.862135286	
_8	3	4.817050545	4.797442074	-0.064693212
_8	4	4.812184355	4.817050545	0.019608471
_8	5	4.836281907	4.812184355	-0.00486619
_8	6	4.887337078	4.836281907	0.024097552
_9	1	4.65396035		
_9	2	4.687671407	4.65396035	
_9	3	4.699570861	4.687671407	0.033711057
_9	4	4.751000634	4.699570861	0.011899454
_9	5	4.762173935	4.751000634	0.051429773
_9	6	4.785823686	4.762173935	0.011173301
_10	1	4.596129441		
_10	2	4.611152258	4.596129441	
_10	3	4.628886713	4.611152258	0.015022816
_10	4	4.686750173	4.628886713	0.017734455
_10	5	4.837075243	4.686750173	0.05786346

_10	6	4.802380355	4.837075243	0.15032507
_11	1	4.887337078		
_11	2	4.870606649	4.887337078	
_11	3	4.826712456	4.870606649	-0.016730428
_11	4	4.833102254	4.826712456	-0.043894194
_11	5	4.84103251	4.833102254	0.006389798
_11	6	4.82350218	4.84103251	0.007930256
_12	1	4.900076104		
_12	2	4.889596966	4.900076104	
_12	3	4.902307417	4.889596966	-0.010479138
_12	4	4.936629881	4.902307417	0.012710451
_12	5	5.005287688	4.936629881	0.034322464
_12	6	5.049856007	5.005287688	0.068657807
_13	1	4.693181063		
_13	2	4.681204872	4.693181063	
_13	3	4.686750173	4.681204872	-0.011976191
_13	4	4.685828089	4.686750173	0.005545301
_13	5	4.69501089	4.685828089	-0.000922084
_13	6	4.705920089	4.69501089	0.009182801
_14	1	4.606169686		
_14	2	4.630837933	4.606169686	
_14	3	4.736198448	4.630837933	0.024668246
_14	4	4.632785353	4.736198448	0.105360516
_14	5	4.709530201	4.632785353	-0.103413095
_14	6	4.746669748	4.709530201	0.076744848
_15	1	4.96144505		
_15	2	4.985659308	4.96144505	
_15	3	5.048573133	4.985659308	0.024214258
_15	4	5.09681299	5.048573133	0.062913825
_15	5	5.18961795	5.09681299	0.048239857
_15	6	5.307772525	5.18961795	0.092804959
_16	1	4.764734756		
_16	2	4.75272775	4.764734756	
_16	3	4.75272775	4.75272775	-0.012007005
_16	4	4.785823686	4.75272775	0
_16	5	4.830710862	4.785823686	0.033095935
_16	6	4.841822087	4.830710862	0.044887176
_17	1	4.909709376		
_17	2	4.906755164	4.909709376	
_17	3	4.855928904	4.906755164	-0.002954212
_17	4	4.891851758	4.855928904	-0.050826259
_17	5	4.916324615	4.891851758	0.035922854
_17	6	4.927253685	4.916324615	0.024472857

_18	1	4.801559		
_18	2	4.806477043	4.801559	
_18	3	4.816241156	4.806477043	0.004918043
_18	4	4.841822087	4.816241156	0.009764113
_18	5	4.891851758	4.841822087	0.025580931
_18	6	4.922168313	4.891851758	0.050029671
_19	1	4.852030264		
_19	2	4.865224091	4.852030264	
_19	3	4.822697999	4.865224091	0.013193827
_19	4	4.799090879	4.822697999	-0.042526093
_19	5	4.769836808	4.799090879	-0.02360712
_19	6	4.797442074	4.769836808	-0.029254071
_20	1	4.899331225		
_20	2	4.893352133	4.899331225	
_20	3	4.856706812	4.893352133	-0.005979091
_20	4	4.837075243	4.856706812	-0.036645322
_20	5	4.878246106	4.837075243	-0.019631569
_20	6	4.895598484	4.878246106	0.041170863
_21	1	4.733563401		
_21	2	4.721173862	4.733563401	
_21	3	4.647271362	4.721173862	-0.012389539
_21	4	4.757032535	4.647271362	-0.0739025
_21	5	4.572646994	4.757032535	0.109761173
_21	6	4.670957927	4.572646994	-0.184385541
_22	1	4.48863637		
_22	2	4.510859507	4.48863637	
_22	3	4.536891345	4.510859507	0.022223137
_22	4	4.657762636	4.536891345	0.026031839
_22	5	4.71939133	4.657762636	0.120871291
_22	6	4.744932128	4.71939133	0.061628694
_23	1	4.922168313		
_23	2	4.921439715	4.922168313	
_23	3	4.798266816	4.921439715	-0.000728597
_23	4	4.848900371	4.798266816	-0.123172899
_23	5	4.86753445	4.848900371	0.050633555
_23	6	4.883559212	4.86753445	0.01863408
_24	1	4.754451889		
_24	2	4.765586907	4.754451889	
_24	3	4.711330382	4.765586907	0.011135019
_24	4	4.750135956	4.711330382	-0.054256526
_24	5	4.805659047	4.750135956	0.038805574
_24	6	4.786658062	4.805659047	0.05552309
_25	1	4.695924549		

_25	2	4.685828089	4.695924549	
_25	3	4.683056725	4.685828089	-0.01009646
_25	4	4.687671407	4.683056725	-0.002771364
_25	5	4.653007515	4.687671407	0.004614683
_25	6	4.669083512	4.653007515	-0.034663892
_26	1	5.245443877		
_26	2	5.291292752	5.245443877	
_26	3	5.244389025	5.291292752	0.045848875
_26	4	5.249652195	5.244389025	-0.046903727
_26	5	5.291292752	5.249652195	0.00526317
_26	6	5.305789381	5.291292752	0.041640557
_27	1	5.575949103		
_27	2	5.515442846	5.575949103	
_27	3	5.582367853	5.515442846	-0.060506258
_27	4	5.627621114	5.582367853	0.066925007
_27	5	5.691034902	5.627621114	0.045253261
_27	6	5.631211782	5.691034902	0.063413788
_28	1	4.86907173		
_28	2	4.797442074	4.86907173	
_28	3	4.793308128	4.797442074	-0.071629656
_28	4	4.829113417	4.793308128	-0.004133946
_28	5	4.855150391	4.829113417	0.035805289
_28	6	4.789157022	4.855150391	0.026036974
_29	1	4.604169686		
_29	2	4.465908119	4.604169686	
_29	3	4.49980967	4.465908119	-0.138261567
_29	4	4.528289142	4.49980967	0.033901552
_29	5	4.598145571	4.528289142	0.028479471
_29	6	4.594109239	4.598145571	0.069856429
_30	1	4.827513417		
_30	2	4.80729437	4.827513417	
_30	3	4.779123493	4.80729437	-0.020219047
_30	4	4.81462041	4.779123493	-0.028170877
_30	5	4.786658062	4.81462041	0.035496917
_30	6	4.776599302	4.786658062	-0.027962348
_31	1	4.574710979		
_31	2	4.573679519	4.574710979	
_31	3	4.541164856	4.573679519	-0.00103146
_31	4	4.590056548	4.541164856	-0.032514663
_31	5	4.642465971	4.590056548	0.048891692
_31	6	4.688591794	4.642465971	0.052409423
_32	1	4.865994804		
_32	2	4.858260814	4.865994804	

_32	3	4.80073697	4.858260814	-0.007733991
_32	4	4.825108606	4.80073697	-0.057523844
_32	5	4.82350218	4.825108606	0.024371637
_32	6	4.791649753	4.82350218	-0.001606426
_33	1	4.727387819		
_33	2	4.688591794	4.727387819	
_33	3	4.685828089	4.688591794	-0.038796025
_33	4	4.748404354	4.685828089	-0.002763705
_33	5	4.801559	4.748404354	0.062576265
_33	6	4.821087692	4.801559	0.053154646
_34	1	4.763028271		
_34	2	4.742320024	4.763028271	
_34	3	4.67562865	4.742320024	-0.020708246
_34	4	4.666265285	4.67562865	-0.066691374
_34	5	4.691347882	4.666265285	-0.009363364
_34	6	4.70682384	4.691347882	0.025082597
_35	1	4.962145085		
_35	2	4.768988271	4.962145085	
_35	3	4.819474789	4.768988271	-0.193156814
_35	4	4.813809051	4.819474789	0.050486517
_35	5	4.900820428	4.813809051	-0.005665738
_35	6	4.955827058	4.900820428	0.087011377
_36	1	4.561218298		
_36	2	4.646312129	4.561218298	
_36	3	4.64053733	4.646312129	0.085093831
_36	4	4.744932128	4.64053733	-0.005774799
_36	5	4.776599302	4.744932128	0.104394799
_36	6	4.832305759	4.776599302	0.031667173
_37	1	4.609162207		
_37	2	4.629862799	4.609162207	
_37	3	4.529368473	4.629862799	0.020700591
_37	4	4.571613402	4.529368473	-0.100494326
_37	5	4.634728988	4.571613402	0.04224493
_37	6	4.639571613	4.634728988	0.063115586
_38	1	4.693181063		
_38	2	4.67562865	4.693181063	
_38	3	4.603168183	4.67562865	-0.017552414
_38	4	4.666265285	4.603168183	-0.072460466
_38	5	4.714024591	4.666265285	0.063097102
_38	6	4.697749367	4.714024591	0.047759306
_39	1	4.685828089		
_39	2	4.712229258	4.685828089	
_39	3	4.667205577	4.712229258	0.026401169

_39	4	4.69043003	4.667205577	-0.045023681
_39	5	4.687671407	4.69043003	0.023224453
_39	6	4.704110134	4.687671407	-0.002758622
_40	1	4.163559631		
_40	2	4.183575696	4.163559631	
_40	3	4.182050143	4.183575696	0.020016065
_40	4	4.21508618	4.182050143	-0.001525553
_40	5	4.266896327	4.21508618	0.033036037
_40	6	4.286341385	4.266896327	0.051810148
_41	1	4.858260814		
_41	2	4.902307417	4.858260814	
_41	3	4.808927024	4.902307417	0.044046604
_41	4	4.82350218	4.808927024	-0.093380394
_41	5	4.927253685	4.82350218	0.014575157
_41	6	4.989071116	4.927253685	0.103751505
_42	1	4.810557016		
_42	2	4.819474789	4.810557016	
_42	3	4.822697999	4.819474789	0.008917773
_42	4	4.855150391	4.822697999	0.00322321
_42	5	4.919980926	4.855150391	0.032452393
_42	6	4.963543687	4.919980926	0.064830535
_43	1	4.620058798		
_43	2	4.607168189	4.620058798	
_43	3	4.571613402	4.607168189	-0.01289061
_43	4	4.574710979	4.571613402	-0.035554786
_43	5	4.483002552	4.574710979	0.003097576
_43	6	4.510859507	4.483002552	-0.091708426
_44	1	4.785823686		
_44	2	4.71939133	4.785823686	
_44	3	4.740574823	4.71939133	-0.066432356
_44	4	4.714024591	4.740574823	0.021183493
_44	5	4.766438334	4.714024591	-0.026550232
_44	6	4.758749274	4.766438334	0.052413743
_45	1	4.713127327		
_45	2	4.714024591	4.713127327	
_45	3	4.667205577	4.714024591	0.000897263
_45	4	4.657762636	4.667205577	-0.046819014
_45	5	4.689511334	4.657762636	-0.009442941
_45	6	4.695924549	4.689511334	0.031748698
_46	1	4.916324615		
_46	2	4.910446567	4.916324615	
_46	3	4.884315927	4.910446567	-0.005878048
_46	4	4.880526609	4.884315927	-0.026130639

_46	5	4.941642423	4.880526609	-0.003789319
_46	6	4.950177325	4.941642423	0.061115814

LAMPIRAN 4

Output Model Regresi Data Panel Dinamis pada Penjualan Rokok di Amerika Serikat Menggunakan Metode Blundell dan Bond :

Dependent Variable: VDG
Method: Panel Generalized Method of Moments
Date: 11/14/11 Time: 23:25
Sample (adjusted): 2001 2004
Periods included: 4
Cross-sections included: 92
Total panel (balanced) observations: 368
2SLS instrument weighting matrix
White period standard errors & covariance (d.f. corrected)
VDG=C(1)*VEG
Instrument list: C VIG

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	1.002504	0.000800	1252.725	0.0000

R-squared	0.999250	Mean dependent var	2.407067
Adjusted R-squared	0.999250	S.D. dependent var	2.403903
S.E. of regression	0.065838	Sum squared resid	1.590811
Durbin-Watson stat	2.970066	J-statistic	1.456810
Instrument rank	14.000000		

LAMPIRAN 5

Output Model Regresi Data Panel Dinamis pada Penjualan Rokok di Amerika Serikat Menggunakan Metode Arellano dan Bond (sebagai perbandingan) :

Dependent Variable: LOGC
Method: Panel Generalized Method of Moments
Transformation: First Differences
Date: 05/22/11 Time: 10:53
Sample (adjusted): 2001 2004
Periods included: 4
Cross-sections included: 46
Total panel (balanced) observations: 184
White period instrument weighting matrix
White period standard errors & covariance (d.f. corrected)
Instrument list: @DYN(LOGC,-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOGC(-1)	0.762687	0.090383	8.438407	0.0000

Effects Specification

Cross-section fixed (first differences)

Mean dependent var	0.012010	S.D. dependent var	0.051279
S.E. of regression	0.068770	Sum squared resid	0.865456
J-statistic	35.49552	Instrument rank	10.000000