UNIVERSITAS INDONESIA

BARISAN *ULTIMATELY GEOMETRIC* PADA *ALJABAR MAX-PLUS*

TESIS

SRI SYAMSIAH WARDHANI
0906577412

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK

2011

UNIVERSITAS INDONESIA

BARISAN *ULTIMATELY GEOMETRIC* PADA *ALJABAR MAX-PLUS*

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

SRI SYAMSIAH WARDHANI
0906577412

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
2011

HALAMAN PERSETUJUAN

Judul	:	Barisan *Ultimately Geometric* pada *Aljabar Max-Plus*
Nama	:	Sri Syamsiah Wardhani
NPM	:	0906577412

Laporan tesis ini telah diperiksa dan disetujui.

Depok, Juli 2011

Dr. Hengki Tasman, M.Si	Prof. Dr. Djati Kerami
Pembimbing 1	Pembimbing 2

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	**:**	Sri Syamsiah Wardhani
NPM	**:**	0906577412
Tanda Tangan	**:**	
Tanggal	**:**	**11 Juli 2011**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Sri Syamsiah Wardhani
NPM	:	0906577412
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Barisan *Ultimately Geometric* pada *Aljabar Max-Plus*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar S2 pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dr. Hengki Tasman, M.Si	( )
Pembimbing	:	Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	:	Prof. Dr. Belawati H. Widjaja	( )
Penguji	:	Dr. rer.nat Hendri Murfi, M.Kom	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	11 Juli 2011

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan Rahmat dan HidayahNya sehingga tesis ini dapat diselesaikan. Penulisan tesis ini adalah salah satu persyaratan untuk mencapai derajat sarjana S-2 pada Departemen Matematika FMIPA UI.

Penulisan Tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Untuk itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan Tesis ini khususnya kepada:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si dan Prof. Dr. Djati Kerami, selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran dan tenaga untuk memberikan bimbingan selama penulisan Tesis, sehingga penulis berhasil menyelesaikan Tesis ini.

2. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T., selaku Ketua Departeman Matematika FMIPA UI yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama masa perkuliahan.

3. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami selaku Ketua Program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI yang telah memberikan saran, bimbingan dan perhatian selama masa perkuliahan.

4. Dosen-dosen Program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI, Prof. Dr. Belawati H. Widjaja, Prof. Dr. Djati Kerami, Dr. Sri Mardiyati, M.Kom, Dr. Kiki Ariyanti S., Dr. Yudi Satria, M.T, Dr. Hengki Tasman, M.Si yang telah memberikan ilmu dan informasi. Penulis berharap Allah SWT berkenan membalas segala kebaikan bapak-ibu semua.

5. Segenap karyawan Departemen Matematika FMIPA-UI, dengan pelayanan yang cukup memuaskan.

6. Ibu Hj. Wieke Salehani, M. Pd. selaku kepala SMA Negeri 3 Jakarta yang telah memberikan dukungan moril selama kuliah pada program Magister Matematika Departemen Matematika FMIPA-UI.

7. Komite SMA Negeri 3 Jakarta yang telah memberikan Bea Siswa Program Pasca Sarjana.

8. Bapak/Ibu Guru SMA Negeri 3 Jakarta yang telah memberikan semangat selama masa perkuliahan.

9. Ibu, suami dan ketiga anakku tercinta, Ika, Putri dan Ana yang telah memberikan dukungan moril dalam pembuatan tesis ini.

10. Bapak/Ibu rekan-rekan kuliah, yang telah berinteraksi secara positif selama masa perkuliahan.

11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas segala bantuan dan dukungannya.

Akhir kata penulis menyadari bahwa isi tulisan ini sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Depok, Juli 2011

Sri Syamsiah Wardhani

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Sri Syamsiah Wardhani
NPM	:	0906577412
Program Studi	:	Magister Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Barisan *Ultimately Geometric* pada *Aljabar Max-Plus*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyatan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	:	Depok
Pada tanggal	:	11 Juli 2011

Yang menyatakan

(Sri Syamsiah Wardhani)

ABSTRAK

Nama : Sri Syamsiah Wardhani
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Barisan *Ultimately Geometric* pada *Aljabar Max-Plus*

Dalam tesis ini dibahas beberapa pengertian dasar Aljabar Max-plus serta barisan *ultimately geometric.* Selanjutnya dibahas hubungan antara barisan aritmetika pada aljabar biasa dengan barisan geometri pada *Aljabar Max-plus*. Penjumlahan dan perkalian dari beberapa barisan geometri pada *Aljabar Max-plus* menghasilkan barisan periodic. Dari pembahasan ini diperoleh bahwa matriks irredusibel mempunyai nilai eigen yang bersesuaian dengan bobot rata-rata maksimum dari semua sirkuit di graf *presedent*. Nilai eigen dari matriks irredusibel berhubungan dengan barisan pangkat terurut matriks.

Kata Kunci:
Aljabar Max-plus, *ultimately geometric,* barisan matriks.

ABSTRACT

Name : Sri Syamsiah Wardhani
Program : Magister of Mathematics
Title : Ultimately Geometric Sequences in the Max-Plus Algebra

In this thesis, it is discussed some basic concept of Max-plus algebra and ultimately geometric sequence. Furthermore, it is discussed the relationship between the arithmetic progression in ordinary algebra with ultimately geometric sequence in the Max-plus algebra. Summation and multiplication of several geometric sequences generates a periodic sequence. From this discussion, it is obtained that irreducible matrix has eigen values corresponding to the maximum average weight of all the circuits in the presedent graph. The eigen values of the irreducible matrix are related to the sequence of consecutive power of a matrices .

Keywords:
Max-plus algebra, ultimately geometric, sequence of matrix.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . **i**
LEMBAR PERSETUJUAN . . . . **ii**
LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS . . . . **iii**
LEMBAR PENGESAHAN . . . . **iv**
KATA PENGANTAR . . . . **v**
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH . . . . **vii**
ABSTRAK . . . . **viii**
ABSTRACT . . . . **ix**
DAFTAR ISI . . . . **x**
DAFTAR GAMBAR . . . . **xi**
DAFTAR TABEL . . . . **xii**
1. PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Permasalahan 1
1.3 Tujuan Penulisan 2
1.4 Manfaat Penulisan 2
1.5 Sistematika Penulisan 2
2. BEBERAPA PENGERTIAN DASAR ALJABAR MAX-PLUS **3**
2.1 Definisi dan Notasi 3
2.2 Sistem Matematika *Aljabar Max-Plus* 3
2.3 Matriks 8
2.3.1 Fungsi linier dan afin dalam *Aljabar Max-plus* 9
2.3.2 Sistem Persamaan Linier 19
3. BARISAN ULTIMATELY GEOMETRIC *ALJABAR MAX-PLUS* . . **34**
3.1 Konsep Barisan Pada *Aljabar Max-Plus* 34
3.1.1 Barisan *Ultimately Geometric* 34
3.1.2 Barisan *Ultimately Periodic* 38
3.1.3 Penjumlahan dan Perkalian Barisan *Ultimately Geometric* . 40
3.2 Barisan Matriks Pada *Aljabar Max-Plus* 46
4. PENUTUP **49**
4.1 Kesimpulan 49
4.2 Saran 49
DAFTAR REFERENSI **49**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Grafik fungsi linier y = ac 9
Gambar 2.2. Grafik $f(c) = ac$ 10
Gambar 2.3. Grafik $f(c) = b$ 10
Gambar 2.4. Grafik $f(c) = ac$ dan $f(c) = b$ 10
Gambar 2.5. Grafik $f(c) = ac \oplus b$ 10
Gambar 2.6. Persamaan afin jika $a^{'} < a$ dan $b < b^{'}$ 11
Gambar 2.7. Persamaan afin jika $a < a'$ dan $b' < b$ 11
Gambar 2.8. Persamaan afin jika $a^{'} > a$ dan $b < b^{'}$ 12
Gambar 2.9. Persamaan afin jika $a' < a$ dan $b' < b$ 12
Gambar 2.10.Persamaan afin jika $a^{'} = a$ dan $b \neq b^{'}$ 12
Gambar 2.11.Persamaan afin jika $a' \neq a$ dan $b = b'$ 12
Gambar 2.12.Persamaan afin jika $a = a'$ dan $b = b^{'}$ 13
Gambar 2.13.Graf $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ 24
Gambar 2.14.Graf berarah $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{A})$ 24
Gambar 2.15.Graf *presedent* $G(A)$ 25

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Sirkuit elementer dari graf *presedent* $G(A)$ 25

BAB 1
PENDAHULUAN

Bab 1 ini berisi latar belakang penelitian yang telah dilakukan. Berdasarkan latar belakang, dirumuskan masalah yang diteliti, selanjutnya tujuan yang ingin dicapai dan manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini dan yang terakhir adalah sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang

Aljabar Max-plus didefinisikan dalam suatu himpunan $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ dengan dua operasi biner yaitu $\oplus$ dan $\otimes$, dengan $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. Operasi ini membentuk semilapangan yang komutatif dan idempoten. Dalam *Aljabar Max-plus,* $\varepsilon = -\infty$ adalah elemen identitas untuk penjumlahan dan $e = 0$ adalah elemen identitas untuk perkalian. Sifat-sifat operasi yang berlaku dalam *Aljabar Max-plus* seperti asosiatif, komutatif dan distributif sama seperti yang berlaku dalam aljabar biasa tentu saja dengan pendefinisian yang berbeda.

Dalam penelitian tesis ini penulis tertarik pada barisan skalar dan barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus* yang memenuhi operasi maksimum dan penjumlahan. Pada tesis ini dibahas beberapa konsep dasar *Aljabar Max-plus* seperti sistem matematika *Aljabar Max-plus*, matriks, dan barisan pada *Aljabar Max-plus* tetapi tentu saja dengan pendefinisian yang berbeda dengan aljabar biasa. Selain itu juga dibahas hubungan antara operasi matriks dan teori graf pada *Aljabar max-plus*.

Penelitian yang pernah dibahas dan berhubungan dengan penelitian ini adalah Kecenderungan Akhir dari Barisan Pangkat Terurut Matriks pada *Aljabar Max-plus* oleh B. De Shutter (2000). Untuk matriks yang tereduksi hasil penelitian menunjukkan bahwa kecenderungan akhir dari barisan matriks adalah *periodic*. Dalam penerapannya *Aljabar Max-plus* dapat digunakan pada suatu jaringan sistem transportasi, sistem komunikasi, sistem lalu lintas, jalur produksi, menganalisa sistem penjadwalan seperti bus kota dan kereta api [6, 8, 3, 4].

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang dibahas pada tesis ini adalah :
Bagaimana karakterisasi dari barisan skalar dan barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus*.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah : Menentukan kecenderungan akhir dari barisan skalar dan barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus*.

1.4 Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan dari tesis ini adalah: Dapat mengetahui kecenderungan akhir dari barisan skalar dan barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus* yang selanjutnya digunakan dalam aplikasi *Aljabar Max-plus*.

1.5 Sistematika Penulisan

Tesis ini disajikan dengan sistematika sebagai berikut:

BAB 1: mengemukakan tentang latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB 2: membahas definisi dan notasi *Aljabar Max-plus,* sistem matematika *Aljabar Max-plus*, matriks, graf, nilai dan vektor eigen pada *Aljabar Max-plus* dan sistem persamaan linier pada *Aljabar Max-plus.*

BAB 3: membahas tentang barisan *ultimately geometric* dan *ultimately periodic* dalam *Aljabar Max-plus,* barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus.*

BAB 4: berisi kesimpulan dan saran dari pembahasan tesis.

BAB 2
BEBERAPA PENGERTIAN DASAR ALJABAR MAX-PLUS

Dalam bab 2 ini dibahas beberapa konsep dasar yang diperlukan dalam pembahasan masalah, seperti: definisi dan notasi *Aljabar Max-plus,* kemudian dilanjutkan dengan pembahasan sistem matematika *Aljabar Max-plus* yang sederhana, seperti operasi biner, beberapa sifat operasi biner dan semilapangan. Matriks, fungsi linier dan fungsi afin, graf, nilai eigen dan vektor eigen, sistem persamaan linier pada *Aljabar Max-plus.*

2.1 Definisi dan Notasi

Himpunan bilangan real dinotasikan dengan $\mathbb{R}$, himpunan bilangan bulat non negatif dinotasikan dengan $\mathbb{N}$ dan himpunan bilangan bulat positif dinotasikan dengan $\mathbb{N}_0$. *Aljabar Max-plus* dinotasikan dengan himpunan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dengan $\varepsilon = -\infty$ dan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, operasi biner $\oplus$ (dibaca o plus) menyatakan maksimum dan $\otimes$ (dibaca o kali) menyatakan penjumlahan, yaitu : $\forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a,b); \\ a \otimes b &= a+b. \end{aligned}$$

Untuk mengetahui sifat-sifat *Aljabar Max-plus*, penulis membahas terlebih dahulu beberapa definisi dalam aljabar.

2.2 Sistem Matematika *Aljabar Max-Plus*

Definisi 2.1. [1]
Misalkan A himpunan tidak kosong. Operasi biner $\bullet$ dari A adalah suatu pemetaan $\bullet : A \times A \to A$.

Definisi 2.2. [1]
Sistem matematika $(A, \bullet)$ adalah sebuah himpunan tidak kosong A yang dilengkapi dengan suatu operasi biner $\bullet$.

Definisi 2.3. [6]
Suatu semilapangan $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ adalah suatu himpunan tidak kosong $\mathcal{K}$ disertai dengan dua operasi biner $\bullet$ dan $\star$ jika memenuhi :

1. Sistem $(\mathcal{K}, \bullet)$ memenuhi $\forall x, y, z \in \mathcal{K}$

   (a) Asosiatif : $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$;

   (b) Komutatif : $x \bullet y = y \bullet x$;

   (c) Ada unsur nol ε : $x \bullet \varepsilon = x$.

2. Sistem $(\mathcal{K}, \star)$ merupakan grup yang memenuhi : $\forall x, y, z \in \mathcal{K}$

   (a) Asosiatif : $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;

   (b) Ada unsur satuan e: $x \star e = e \star x = x$;

   (c) Untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ terdapat $x^{-1} \in \mathcal{K}$, sehingga $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$.

3. Sistem $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ memenuhi sifat distributif $\star$ terhadap $\bullet$, yaitu: $\forall x, y, z \in \mathcal{K}$

   (a) Distributif kiri : $(x \bullet y) \star z = (x \star z) \bullet (y \star z)$;

   (b) Distributif kanan : $x \star (y \bullet z) = (x \star y) \bullet (x \star z)$.

Definisi 2.4. [6]
Sistem $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ dikatakan semilapangan komutatif jika :

1. Sistem $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ membentuk semilapangan;

2. Operasi $\star$ bersifat komutatif.

Definisi 2.5. [6]
Sistem $(\mathcal{K}, \bullet)$ dikatakan idempoten terhadap operasi $\bullet$ jika : $x \bullet x = x$, $\forall x \in \mathcal{K}$

Definisi 2.6. [6]
Sistem $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ dikatakan semilapangan idempoten terhadap operasi $\bullet$ untuk setiap elemen di $\mathcal{K}$ jika :

1. Sistem $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ membentuk semilapangan;

2. Operasi $\bullet$ bersifat idempoten.

Teorema 2.7 ([6]).
Unsur nol ε pada semilapangan komutatif idempoten $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ memenuhi sifat penyerapan (*absorbing*) yaitu:

$$\varepsilon \star x = x \star \varepsilon = \varepsilon, \forall x \in \mathcal{K}.$$

Bukti. Karena ε ada pada semilapangan komutatif idempoten, maka memenuhi

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon \star e \\ &= \varepsilon \star (\varepsilon \bullet e) \\ &= (\varepsilon \star \varepsilon) \bullet (\varepsilon \star e) \\ &= \varepsilon^{\star 2} \bullet (\varepsilon \star e) \\ &= \varepsilon^{\star^2} \bullet \varepsilon \\ &= \varepsilon^{\star 2}.\end{aligned}$$

Akibatnya $\forall x \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon \star e \\ &= \varepsilon \star (x^{-1} \bullet \varepsilon) \bullet x \\ &= \varepsilon \star x^{-1} \star x \bullet \varepsilon^{\star 2} \star x \\ &= \varepsilon \star x.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\varepsilon \star x = x \star \varepsilon = \varepsilon$.

□

$\mathbb{R}_{\max}$ merupakan semilapangan komutatif idempoten, hal ini ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 2.8 ([6]).
$\mathbb{R}_{\max}$ adalah semilapangan komutatif idempoten.

Bukti.
Untuk membuktikan $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semilapangan komutatif idempoten harus dibuktikan bahwa $\mathbb{R}_{\max}$ memenuhi :

1. semilapangan;
2. komutatif;
3. idempoten.

Akan dibuktikan bahwa :

1. $\mathbb{R}_{\max}$ memenuhi semilapangan.

   (a) Sistem $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ memenuhi : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$

i. Asosiatif,

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= \max(\max(x,y), z) = \max(x,y,z) \\ &= \max(x, \max(y,z)) = x \oplus (y \oplus z).\end{aligned}$$

ii. Komutatif,

$$x \oplus y = \max(x,y) = \max(y,x) = y \oplus x.$$

iii. Ada unsur nol $\varepsilon = -\infty$,

$$x \oplus \varepsilon = \max(x, \varepsilon) = x.$$

(b) $(\mathbb{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}, \otimes)$ merupakan grup yang memenuhi : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$

i. Asosiatif,

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes z &= ((x+y)+z) = (x+y+z) \\ &= (x+(y+z)) = x \otimes (y \otimes z).\end{aligned}$$

ii. Ada unsur satuan $e = 0$,

$$x \otimes e = x + e = e + x = e \otimes x = x.$$

iii. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$, terdapat $x^{-1} \in \mathbb{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$, sehingga

$$x \otimes x^{-1} = x + x^{-1} = x^{-1} + x = x^{-1} \otimes x = e.$$

(c) Sistem $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ memenuhi sifat distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}_\varepsilon$

i. Distributif kiri,

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \otimes z &= \max(x,y) + z \\ &= \max(x+z, y+z) \\ &= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z).\end{aligned}$$

ii. Distributif kanan,

$$\begin{aligned}x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y,z) \\ &= \max(x+y, x+z) \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).\end{aligned}$$

2. $\mathbb{R}_{\max}$ dengan operasi $\otimes$ bersifat komutatif .

   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$, akan ditunjukkan $x \otimes y = y \otimes x$,

$$x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x.$$

3. $\mathbb{R}_{\max}$ dengan operasi $\oplus$ bersifat idempoten.

   Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}_{\max}$ akan ditunjukkan $x \oplus x = x$,

$$x \oplus x = \max(x, x) = x.$$

   Jadi $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semilapangan komutatif idempoten.

$\square$

Operasi biner $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{\max}$ didefinisikan sebagai operasi penjumlahan dalam aljabar biasa yang mempunyai balikan yaitu operasi pengurangan. Untuk itu diperkenalkan suatu operasi biner $\oslash$ (dibaca o bagi) pada $\mathbb{R}_{\max}$ yang didefinisikan sebagai operasi pengurangan dalam aljabar biasa. Prioritas urutan operasi $\otimes$ dan $\oslash$ lebih utama dari operasi $\oplus$ dalam *Aljabar Max-plus.*

Contoh 2.9.

1. $2 \oplus 5 = \max(2, 5) = 5 = \max(5, 2) = 5 \oplus 2$.
2. $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7 = 4 + 3 = 4 \otimes 3$.
3. $1 \otimes -4 \oplus 2 \otimes 6 = \max(1 + (-4), 2 + 6) = \max(-3, 8) = 8$.
4. $5 \oslash 1 = 5 - 1 = 4$.
5. $3 \oplus 4 \otimes 2 \oslash 1 = \max(3, 4 + 2 - 1) = \max(3, 5) = 5$.

Operasi perpangkatan pada *Aljabar Max-plus* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.10. [3]
Untuk $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^{\otimes^n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{\text{sebanyak } n} = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{sebanyak } n} = nx.$$

- jika $x \neq \varepsilon$, maka $x^{\otimes^0} = e$;
- jika $n > 0$, maka $\varepsilon^{\otimes^n} = \varepsilon$.

Teorema 2.11 ([3]).
Untuk $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan $m, n \in \mathbb{N}_0$

1. $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = x^{\otimes^{m+n}}$.
2. $\left(x^{\otimes^m}\right)^{\otimes^n} = x^{\otimes^{mn}}$.

Bukti.

1. $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = x^{\otimes^{m+n}}$.

   Ambil $\quad x \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad$ dan $\quad m, n \in \mathbb{N}$.

   $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = mx + nx = (m+n)x = x^{\otimes^{m+n}}$.

2. $\left(x^{\otimes^m}\right)^{\otimes^n} = x^{\otimes^{mn}}$.

   Ambil $\quad x \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad$ dan $\quad m, n \in \mathbb{N}$.

   $\left(x^{\otimes^m}\right)^{\otimes^n} = (mx)^{\otimes^n} = n(mx) = (nm)x = (mn)x = x^{\otimes^{mn}}$.

□

Contoh 2.12.

1. $3^{\otimes^2} = 3 \otimes 3 = 3 + 3 = 2 \times 3 = 6$.
2. $2^{\otimes^{-3}} = -3 \times 2 = -6$.
3. $4^{\otimes^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.
4. $2^{\otimes^4} \otimes 2^{\otimes^5} = 2^{\otimes^{4+5}} = 2^{\otimes^9} = 9 \times 2 = 18$.
5. $\left(7^{\otimes^3}\right)^{\otimes^5} = 7^{\otimes^{3\times 5}} = 7^{\otimes^{15}} = 15 \times 7 = 105$.

Pada pembahasan selanjutnya notasi $\otimes$ tidak ditulis dalam pengoperasian.

2.3 Matriks

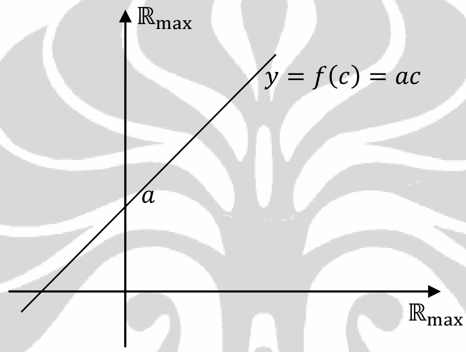
Dalam subbab ini dibahas tentang fungsi linier dan fungsi afin dalam *Aljabar Max-plus*, matriks beserta operasinya.

2.3.1 Fungsi linier dan afin dalam *Aljabar Max-plus*

Definisi 2.13. [6]
Fungsi $f : \mathbb{R}_{\max} \to \mathbb{R}_{\max}$ adalah linier jika memenuhi :

$$f(c){=}\mathrm{c}\, f(e), \forall c \in \mathbb{R}_{\max}.$$

Selanjutnya untuk sebarang fungsi linier dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(c) = ac$, dengan $a = f(e) \in \mathbb{R}_{\max}$. Grafik dari fungsi linier dalam *Aljabar Max-plus* mempunyai kemiringan 1 (lihat Gambar 2.1).



Gambar 2.1. Grafik fungsi linier y = ac

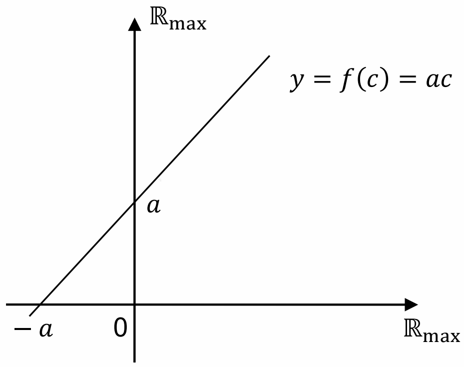
Definisi 2.14. [6]
Fungsi $f : \mathbb{R}_{\max} \to \mathbb{R}_{\max}$ adalah afin jika memenuhi

$$f(c) = ac \oplus b, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}.$$

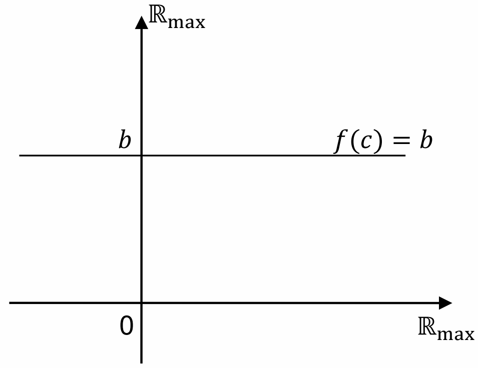
Langkah-langkah untuk membuat grafik fungsi afin:

1. Buatlah grafik fungsi $f(c) = ac$.
2. Buatlah grafik fungsi $f(c) = b$.
3. Tentukan nilai maksimum untuk setiap $c \in \mathbb{R}_{\max}$ (dari gabungan kedua fungsi tersebut).

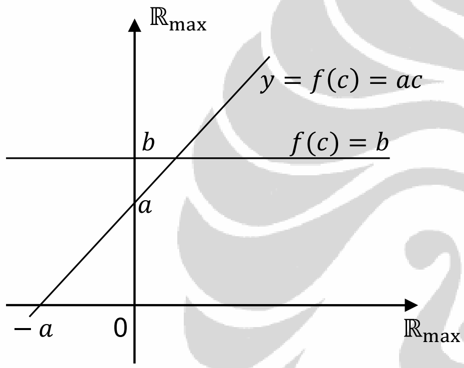
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini !.



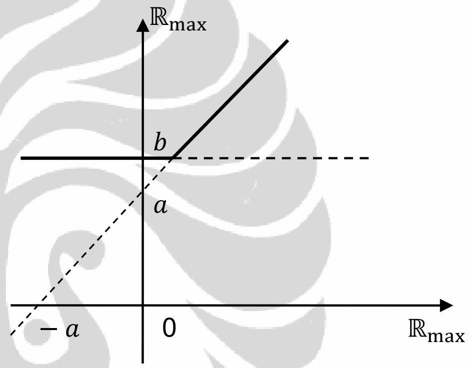
Gambar 2.2. Grafik $f(c) = ac$



Gambar 2.3. Grafik $f(c) = b$



Gambar 2.4. Grafik $f(c) = ac$ dan $f(c) = b$



Gambar 2.5. Grafik $f(c) = ac \oplus b$

Fungsi afin dalam *Aljabar Max-plus* bukanlah fungsi linier, hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Definisi 2.15. [6]
Bentuk umum persamaan afin adalah :

$$ax \oplus b = a'x \oplus b', \forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}_{\max}. \qquad (2.1)$$

Karena $a, a', b, b' \in \mathbb{R}_{\max}$ maka a, a', b, b' tidak mempunyai invers terhadap operasi $\oplus$, sehingga untuk menyelesaikan persamaan (2.1) diperlukan Teorema 2.16.

Teorema 2.16 ([6]).
Penyelesaian dari bentuk umum persamaan afin (2.1) adalah sebagai berikut.

1. Jika
$$((a' < a) \text{ dan } (b < b')) \text{ atau } \left((a < a') \text{ dan } (b' < b)\right). \qquad (2.2)$$

maka selesaiannya bersifat unik yaitu $x = (b \oplus b^{'}) \oslash (a \oplus a^{'})$.

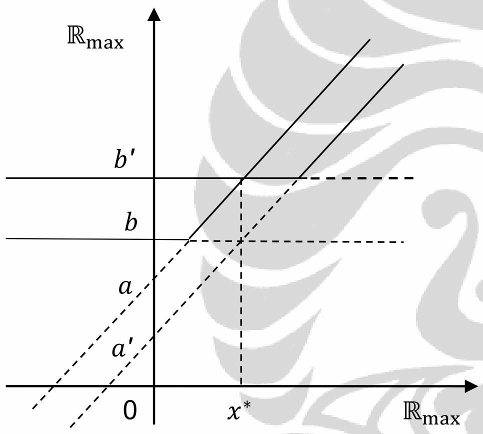
2. Jika $a \neq a^{'}$, $b \neq b'$ dan persamaan 2.2 tidak terpenuhi, maka persamaan afin tidak mempunyai selesaian.

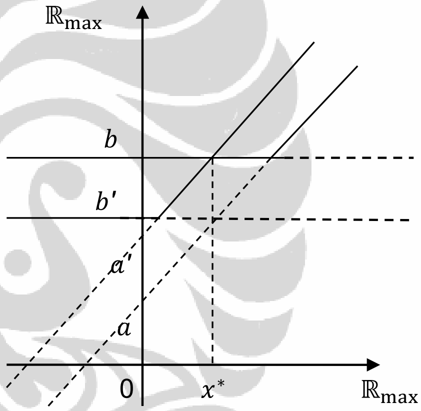
3. Jika $a = a^{'}$ dan $b \neq b^{'}$, maka selesaiannya adalah $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a$ dan selesaian ini tidak bersifat unik.

4. Jika $a \neq a^{'}$ dan $b = b^{'}$, maka selesaiannya adalah $x \leq b \oslash (a \oplus a^{'})$ dan selesaian ini tidak bersifat unik.

5. Jika $a = a^{'}$ dan $b = b^{'}$, maka selesaiannya adalah semua $x \in \mathbb{R}_{\max}$.

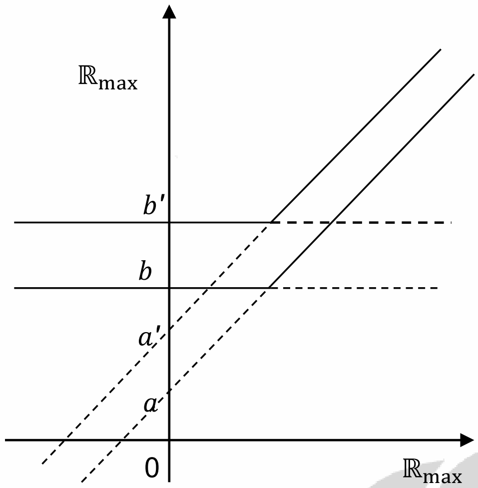
Bukti. Keberadaan selesaian persamaan afin dapat dibuktikan secara geometris.



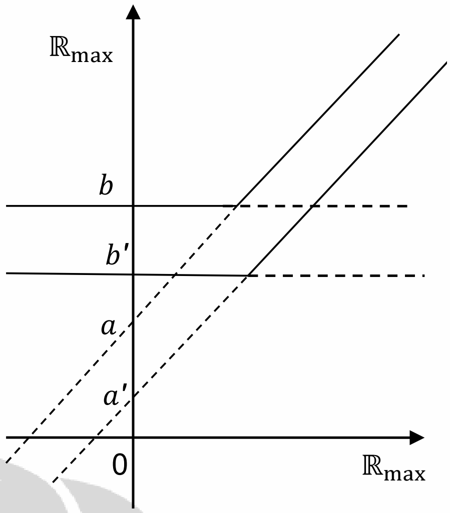


Gambar 2.6. Persamaan afin jika $a^{'} < a$ dan $b < b^{'}$

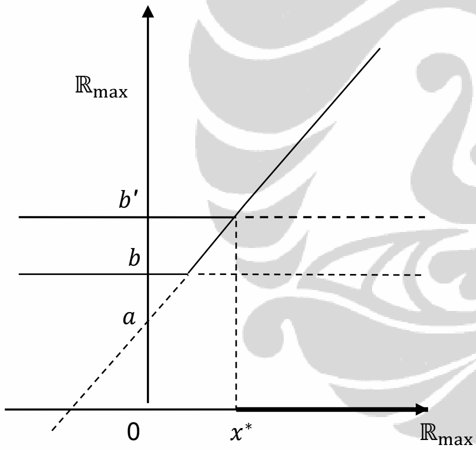
Gambar 2.7. Persamaan afin jika $a < a'$ dan $b' < b$



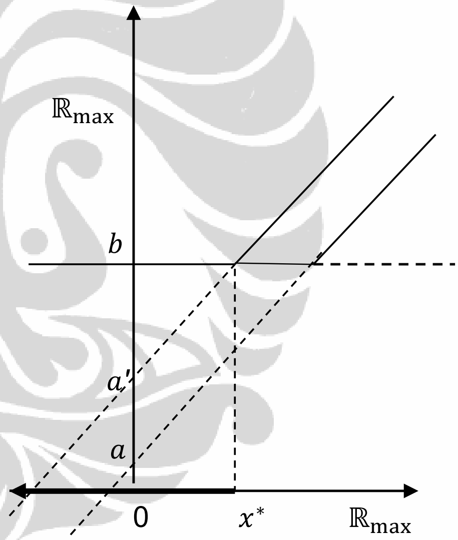
Gambar 2.8. Persamaan afin jika $a' > a$ dan $b < b'$



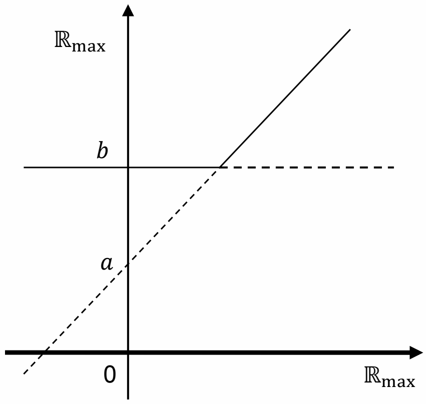
Gambar 2.9. Persamaan afin jika $a' < a$ dan $b' < b$



Gambar 2.10. Persamaan afin jika $a' = a$ dan $b \neq b'$



Gambar 2.11. Persamaan afin jika $a' \neq a$ dan $b = b'$



Gambar 2.12. Persamaan afin jika $a = a'$ dan $b = b'$

Berikut ini akan dibuktikan selesaian dari persamaan afin (2.1).

1. Jika $((a' < a)$ dan $(b < b')$, maka selesaian dari persamaan (2.1) adalah $x = (b \oplus b') \oslash (a \oplus a')$.

   Untuk menyelesaikan persamaan (2.1) kita tinjau 2 kasus, yaitu :

   (a) $ax \oplus b = a'x$.

   Pada kasus ini terdapat dua subkasus lagi yaitu :

   i. $ax = a'x$. Karena $a' < a$, maka subkasus ini tidak memiliki selesaian.

   ii. Jika
   $$b = a'x, \text{ maka } x = b \oslash a'. \tag{2.3}$$

   Untuk mengetahui apakah selesaian persamaan (2.3) memenuhi selesaian persamaan (2.1), maka dengan mensubtitusikan persamaan (2.3) ke persamaan (2.1) didapat:
   Ruas kiri:

$$\begin{aligned} ax \oplus b &= (ab \oslash a') \oplus b \\ &= \max\left(a + b - a', b\right). \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$
\begin{aligned}
a^{'}x \oplus b^{'} &= \left(a^{'}b \oslash a^{'}\right) \oplus \mathrm{b}^{'} \\
&= \max(a^{'} + b - a^{'}, b^{'}) \\
&= \max(b, b^{'}) \\
&= b'.
\end{aligned}
$$

.

Dari ruas kiri dan kanan didapat $\max(a + b - a^{'}, b) = b^{'}$ dan karena $a' < a$ maka belum tentu nilai dari $\max(a + b - a^{'}, b)$ sama dengan b', sehingga $x = b \oslash a'$ bukan merupakan selesaian dari persamaan (2.1).

(b) $ax \oplus b = b'$.

Pada kasus ini terdapat dua subkasus, yaitu :

i. $ax = b'$, maka selesaiannya adalah

$$x = b^{'} \oslash a. \tag{2.4}$$

Untuk mengetahui apakah persamaan (2.4) memenuhi selesaian persamaan (2.1), maka dengan mensubtitusikan persamaan (2.4) ke persamaan (2.1) didapat:

Ruas kiri:

$$
\begin{aligned}
ax \oplus b &= (ab' \oslash a) \oplus \mathrm{b} \\
&= \max(a + b^{'} - a, b) \\
&= b'.
\end{aligned}
$$

Ruas kanan:

$$
\begin{aligned}
a^{'}x \oplus b' &= \left(a'b' \oslash a\right) \oplus \mathrm{b}^{'} \\
&= \max(a^{'} + b' - a, b^{'}) \\
&= b'.
\end{aligned}
$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka $x = b^{'} \oslash a$ merupakan selesaian dari persamaan (2.1).

ii. $b = b'$, karena $b < b'$ maka subkasus ini tidak mempunyai selesaian.

Jadi selesaian dari persamaan $ax \oplus b = a^{'}x \oplus b^{'}$ jika $a' < a$ dan $b < b^{'}$

adalah $x = b' \oslash a = (b \oplus b') \oslash (a \oplus a')$.

2. Jika $a \neq a', b \neq b'$ dan (2.2) tidak terpenuhi maka persamaan (2.1) tidak mempunyai selesaian. Untuk membuktikannya dibagi menjadi dua kasus, yaitu :

   (a) Jika $a < a'$ dan $b < b'$, pada kasus ini terbagi menjadi dua subkasus :

      i. $ax \oplus b = a'x$ dengan syarat $a'x \geq b'$.
      Pada kasus ini terdapat dua subkasus, yaitu :

         A. $ax = a'x$, karena $a < a'$ maka subkasus ini tidak memiliki selesaian.

         B. $b = a'x$, maka selesaian dari subkasus ini adalah irisan antara $x = b \oslash a'$ dan $x \geq b' \oslash a'$. Karena $b < b'$ maka tidak ada irisan antara $x = b \oslash a'$ dan $x \geq b' \oslash a'$, sehingga pada subkasus ini tidak ada selesaiannya.

      ii. $ax \oplus b = b'$ dengan syarat $b' \geq a'x$.
      Pada kasus ini terdapat dua subkasus, yaitu :

         A. $ax = b'$, maka selesaian dari subkasus ini adalah irisan antara $x = b' \oslash a$ dan $x \leq b' \oslash a'$. Karena $a < a'$, maka tidak ada irisan antara $x = b' \oslash a$ dan $x \leq b' \oslash a'$, sehingga pada subkasus ini tidak ada selesaiannya.

         B. $b = b'$, karena $b < b'$ maka subkasus ini tidak memiliki selesaian.

   Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.1) dengan syarat $a < a'$ dan $b < b'$ tidak mempunyai selesaian.

   (b) Jika $a > a'$ dan $b > b'$, dengan cara yang sama seperti di atas maka persamaan (2.1) dengan syarat $a < a'$ dan $b < b'$ tidak mempunyai selesaian.

   Jadi $a \neq a'$, $b \neq b'$ dan persamaan (2.2) tidak terpenuhi maka persamaan (2.1) tidak mempunyai selesaian.

3. Jika $a = a'$ dan $b \neq b'$ maka selesaiannya adalah $x \geq \left(b \oplus b'\right) \oslash a$ dan selesaian ini tidak bersifat unik.

   Untuk menyelesaikan persamaan (2.1) dengan syarat $a = a'$ dan $b \neq b'$ kita tinjau dalam 2 kasus, yaitu :

   (a) $a = a'$ dan $b < b'$ pada kasus ini terdapat dua subkasus, yaitu:

      i. $ax \oplus b = a'x$ dengan syarat $a'x \geq b'$ untuk kasus ini terdapat dua kemungkinan yaitu :

A. $ax = a'x$ dengan syarat $ax \geq b$, karena $a' = a$ maka selesainnya adalah irisan antara x dengan $x \geq b \oslash a$ yaitu $x \geq b \oslash a$

B. $b = a'x$ maka selesaiannya

$$x = b \oslash a' \tag{2.5}$$

Untuk mengetahui apakah persamaan (2.5) memenuhi selesaian persamaan (2.1), maka dengan mensubtitusikan persamaan (2.5) ke persamaan (2.1) didapat:

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} ax \oplus b &= (ab \oslash a') \oplus b \\ &= \max\left(a + b - a', b\right) \\ &= b. \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} a'x \oplus b' &= (a^{'}b \oslash a^{'}) \oplus b' \\ &= \max(a^{'} + b - a', b^{'}) \\ &= b'. \end{aligned}$$

Karena $b < b'$ maka ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, sehingga $x = b \oslash a'$ bukan selesaian persamaan (2.1).

Jadi selesaian pada kasus pertama adalah irisan antara $x \geq b' \oslash a'$ dan $x \geq b \oslash a$. Karena $a = a'$ dan $b < b'$ maka selesaiannya adalah $x \geq b' \oslash a$ atau $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a$.

ii. $ax \oplus b = b'$ dengan syarat $b' \geq a'x$ atau $x \leq b' \oslash a'$ untuk kasus ini terdapat dua kemungkinan, yaitu :

A. $ax = b'$ dengan syarat $ax \geq b$ maka selesaian dari persamaan ini adalah irisan antara $x = b' \oslash a$ dan $x \geq b \oslash a$, yaitu

$$x = b' \oslash a \tag{2.6}$$

Untuk mengetahui apakah persamaan (2.6) memenuhi selesaian persamaan (2.1), maka dengan mensubtitusikan persamaan (2.6) ke persamaan (2.1) didapat:

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} ax \oplus b &= (ab' \oslash a) \oplus b \\ &= \max\left(a + b' - a, b\right) \\ &= b'. \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} a'x \oplus b' &= (a^{'}b' \oslash a) \oplus b' \\ &= \max(a^{'} + b' - a, b^{'}) \\ &= b'. \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka $x = b' \oslash a$ merupakan selesaian untuk kasus ini.

B. $b = b'$ karena $b < b'$ maka pernyataan ini tidak benar.

Jadi selesaian pada subkasus kedua ini adalah irisan antara $x \leq b' \oslash a'$ dan $x = b' \oslash a$, karena $a = a'$ maka selesaiannya adalah $x = b' \oslash a$.

Jadi selesaian persamaan (2.1) dengan syarat $a = a^{'}$ dan $b < b'$ adalah gabungan antara selesaian subkasus pertama dan kedua yaitu : $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a$.

(b) Jika $a = a^{'}$ dan $b > b'$ maka selesaiannya adalah $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a$.

Langkah-langkah pembuktian sama seperti di atas.

Jadi selesaian persamaan (2.1) dengan syarat $a = a^{'}$ dan $b \neq b'$ adalah $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a$.

4. Jika $a \neq a^{'}$ dan $b = b'$ maka selesaiannya adalah $x \leq b \oslash (a \oplus a^{'})$ dan selesaian ini tidak bersifat unik.

   Langkah-langkah pembuktian sama seperti butir 3.

5. Jika $a = a^{'}$ dan $b = b'$ maka selesaiannya adalah semua $x \in \mathbb{R}_{\max}$.

   Langkah-langkah pembuktian sama seperti butir 3.

$\square$

Di bawah ini diberikan beberapa contoh cara menyelesaikan persamaan afin.

Contoh 2.17.

Tentukan selesaian dari persamaan afin berikut ini!.

1. $2x \oplus 1 = x \oplus 3$.

2. $2x \oplus 5 = 2x \oplus 4$.

Jawab :

1. Persamaan afin $2x \oplus 1 = x \oplus 3$ memenuhi Teorema 2.16 bagian 1, maka selesaiannya adalah:

$$\begin{aligned} x &= (b \oplus b^{'}) \oslash (a \oplus a^{'}) \\ &= (1 \oplus 3) \oslash (2 \oplus 1) = 3 \oslash 2 = 1. \end{aligned}$$

2. Persamaan afin $2x \oplus 5 = 2x \oplus 4$ memenuhi Teorema 2.16 bagian 3, maka selesaiannya adalah:
   $x \geq (b \oplus b^{'}) \oslash a = (5 \oplus 4) \oslash 2 = 3$.

Definisi 2.18. [6]
Persamaan afin dikatakan berbentuk kanonik jika memenuhi salah satu bentuk :

- $ax = b$;
- $ax \oplus b = \varepsilon$;
- $ax \oplus b = ax$;
- $ax \oplus b = b$.

Definisi 2.19. [6]
Suatu moduloid $\mathcal{M}$ atas semilapangan idempoten $(\mathcal{K}, \bullet, \star)$ adalah himpunan yang dilengkapi dengan :

- Operasi biner pada $\mathcal{M}$ (dinotasikan dengan $\bullet$) dan unsur nol (dinotasikan dengan ε);
- Operasi biner dari $\mathcal{K}$ pada $\mathcal{M}$;

dan memenuhi sifat-sifat :$\forall\, x, y, z \in \mathcal{M}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$:

1. $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$;

2. $x \bullet y = y \bullet x$;

3. $\alpha(x \bullet y) = \alpha x \bullet \alpha y$;

4. $(\alpha \bullet \beta)x = \alpha x \bullet \beta x$;

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

6. $ex = x$;

7. $\varepsilon x = \varepsilon$.

2.3.2 Sistem Persamaan Linier

Himpunan matriks berukuran $m \times n$ pada *Aljabar Max-plus* dinyatakan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $m,n \in \mathbb{N}_0$

Definisi 2.20. [6, 3]
Diberikan
$\mathbb{R}_{\max}^{m\times n} = \left\{A = \left(A_{ij}\right) \middle| A_{ij} \in \mathbb{R}_{\max} \text{ untuk } i = 1,2,\ldots,m \text{ dan } j = 1,2,\ldots,n\right\}$.

1. Misalkan $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$.

   Penjumlahan dari A dan B dinotasikan A$\oplus$B, dengan

   $$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij}).$$

2. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$.

   Perkalian dari A dan B dinotasikan $A \otimes B$, dengan

   $$(A \otimes B)_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

3. Transpose dari matriks A dinotasikan A^T dengan $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$.

4. Matriks Identitas dalam *Aljabar Max-plus* adalah E_n, dengan

   $$(E_n)_{ij} = \begin{cases} e \text{ jika } i = j \\ \varepsilon \text{ jika } i \neq j \end{cases}$$

5. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan k bilangan bulat positif, A pangkat k dinotasikan dengan $A^{\otimes^k}$, yaitu

   $$A^{\otimes^k} = \underbrace{\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}\otimes\cdots\otimes\mathrm{A}}_{\text{sebanyak } k}$$

   Untuk $k = 0$, $A^{\otimes^0} = E_n$ (matriks identitas).

6. Untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$.

   Perkalian skalar dengan matriks A dinotasikan $\alpha \otimes A$ dengan

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}.$$

Contoh 2.21.
Misalkan $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, maka :

1. $$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \oplus 3 & 2 \oplus -2 \\ 1 \oplus 1 & 3 \oplus 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \text{A}\otimes\text{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \otimes 3 \oplus 2 \otimes 1 & -1 \otimes -2 \oplus 2 \otimes 4 \\ 1 \otimes 3 \oplus 3 \otimes 1 & 1 \otimes -2 \oplus 3 \otimes 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \oplus 3 & -3 \oplus 6 \\ 4 \oplus 4 & -1 \oplus 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2A &= 2 \otimes \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \otimes -1 & 2 \otimes 2 \\ 2 \otimes 1 & 2 \otimes 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} A^{\otimes^2} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \otimes -1 \oplus 2 \otimes 1 & -1 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 3 \\ 1 \otimes -1 \oplus 3 \otimes 1 & 1 \otimes 2 \oplus 3 \otimes 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 2.22 ([6]).
$\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah moduloid atas $\mathbb{R}_{\max}$.

Bukti. Misalkan $A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$.

1. Untuk setiap $A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ berlaku $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

   Unsur ke- ij matriks $(A \oplus B) \oplus C$ adalah $((A \oplus B) \oplus C)_{ij}$ dan unsur ke- ij

matriks $A \oplus (B \oplus C)$ adalah $(A \oplus (B \oplus C))_{ij}$;

$$\begin{aligned}((A \oplus B) \oplus C)_{ij} &= (A \oplus B)_{ij} \oplus C_{ij} \\ &= \big((A_{ij} \oplus B_{ij}) \oplus C_{ij}\big) \\ &= \big(A_{ij} \oplus (B_{ij} \oplus C_{ij})\big) \\ &= \big(A_{ij} \oplus (B \oplus C)_{ij}\big) \\ &= (A \oplus (B \oplus C))_{ij}.\end{aligned}$$

Karena $((A \oplus B) \oplus C)_{ij} = (A \oplus (B \oplus C))_{ij}$ maka $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

2. Untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ berlaku $A \oplus B = B \oplus A$.

   Unsur ke- ij matriks $(A \oplus B)$ adalah $(A \oplus B)_{ij}$ dan unsur ke- ij matriks $(B \oplus A)$ adalah $(B \oplus A)_{ij}$; $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \oplus A_{ij} = (B \oplus A)_{ij}$.

   Karena $(A \oplus B)_{ij} = (B \oplus A)_{ij}$ maka $A \oplus B = B \oplus A$.

3. Untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $\alpha(A \oplus B) = \alpha A \oplus \alpha B$.

   Unsur ke- ij matriks $\alpha(A \oplus B)$ adalah $(\alpha(A \oplus B))_{ij}$ dan unsur ke- ij matriks $\alpha A \oplus \alpha B$ adalah $(\alpha A \oplus \alpha B)_{ij} = \alpha A_{ij} \oplus \alpha B_{ij}$.

   $$(\alpha(A \oplus B))_{ij} = \alpha(A_{ij} \oplus B_{ij}) = \alpha A_{ij} \oplus \alpha B_{ij} = (\alpha A \oplus \alpha B)_{ij}$$

   Karena $(\alpha(A \oplus B))_{ij} = (\alpha A \oplus \alpha B)_{ij}$ maka $\alpha(A \oplus B) = \alpha A \oplus \alpha B$.

4. Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $(\alpha \oplus \beta)A = \alpha A \oplus \beta A$.

   Unsur ke- ij matriks $(\alpha \oplus \beta)A$ adalah $((\alpha \oplus \beta)A)_{ij}$ dan unsur ke- ij matriks $\alpha A \oplus \beta A$ adalah $(\alpha A \oplus \beta A)_{ij} = \alpha A_{ij} \oplus \beta A_{ij}$;

   $$((\alpha \oplus \beta)A)_{ij} = \alpha A_{ij} \oplus \beta A_{ij} = (\alpha A \oplus \beta A)_{ij}.$$

   Karena $((\alpha \oplus \beta)A)_{ij} = (\alpha A \oplus \beta A)_{ij}$ maka $(\alpha \oplus \beta)A = \alpha A \oplus \beta A$.

5. Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

   Unsur ke- ij matriks $\alpha(\beta A)$ adalah $(\alpha(\beta A))_{ij}$ dan unsur ke- ij matriks $(\alpha\beta)A$ adalah $((\alpha\beta)A)_{ij}$;

   $(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha\beta A_{ij} = (\alpha\beta)A_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$.

   Karena $(\alpha(\beta A))_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$ maka $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

6. Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $e \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $eA = A$.

   Unsur ke- ij matriks eA adalah $(eA)_{ij}$;

   $(eA)_{ij} = eA_{ij} = A_{ij}$. Karena $(eA)_{ij} = A_{ij}$ maka $eA = A$.

7. Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $\varepsilon A = \varepsilon$.

   Unsur ke- ij matriks εA adalah $(\varepsilon A)_{ij}$;

   $(\varepsilon A)_{ij} = \varepsilon A_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Karena $(\varepsilon A)_{ij}$=ε_{ij} maka $\varepsilon A = \varepsilon$.

$\square$

Definisi 2.23. [6]
Sebuah moduloid dengan satu tambahan operasi pada $\mathcal{M}$ yang juga dinotasikan dengan $\otimes$ disebut *aljabar idempoten* jika memenuhi :

1. Sifat asosiatif : $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$, $\forall x,y,z \in \mathcal{M}$;
2. Terdapat unsur satuan e di $\mathcal{M}$: $x \otimes e = e \otimes x = x$, $\forall x \in \mathcal{M}$;
3. Sifat distributif kiri :$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$, $\forall x,y,z \in \mathcal{M}$;
4. Sifat distributif kanan :$(x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$, $\forall x,y,z \in \mathcal{M}$.

Teorema 2.24 ([6])**.**
Moduloid $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah suatu *aljabar idempoten.*

Bukti :

1. Ambil sembarang $A,B,C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, akan dibuktikan$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, $\forall A,B,C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

   Unsur ke- ij matriks $(A \otimes B) \otimes C$ adalah $\bigoplus_{l=1}^{n} (\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kl}) \otimes C_{lj}$.

   Unsur ke- ij matriks $A \otimes (B \otimes C)$ adalah $\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes \left(\bigoplus_{l=1}^{n} B_{kl} \otimes C_{lj}\right)$.

   Karena $\bigoplus_{l=1}^{n} (\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kl}) \otimes C_{lj} = \bigoplus_{l=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kl} \otimes C_{lj} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (\bigoplus_{l=1}^{n} B_{kl} \otimes C_{lj})$ maka $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

2. Terdapat unsur satuan E_n dengan $(E_n)_{ij} = \begin{cases} \text{e jika i=j} \\ \varepsilon \text{ jika i}\neq\text{j} \end{cases}$

   Sehingga berlaku $A \otimes E_n = E_n \otimes A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$

   Akan dibuktikan $A \otimes E_n = E_n \otimes A = A$, $\forall\, A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$

(a) $A \otimes E_n = A$

Unsur ke- ij matriks $(A \otimes E_n)$ adalah $\oplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes E_{kj} = A_{ij}$

(b) $E_n \otimes A = A$

Unsur ke- ij matriks $(E_n \otimes A)$ adalah $\oplus_{k=1}^{n} E_{ik} \otimes A_{kj} = A_{ij}$

Karena $A \otimes E_n = A$ dan $E_n \otimes A = A$ maka $A \otimes E_n = E_n \otimes A = A, \ \forall A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $E_n$adalah unsur satuan.

3. Ambil sembarang $A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, akan dibuktikan

$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \ \forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$

Unsur ke- ij matriks $(A \oplus B) \otimes C$ adalah $\bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \oplus B_{ik}) \otimes C_{kj}$

Unsur ke- ij matriks $(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ adalah $\left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes C_{kj}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} B_{ik} \otimes C_{kj}\right)$.

Karena $\bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \oplus B_{ik}) \otimes C_{kj} = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes C_{kj}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} B_{ik} \otimes C_{kj}\right)$ maka

$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \ \forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

4. Ambil sembarang $A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, akan dibuktikan $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C), \ \forall\, A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

Unsur ke- ij matriks $A \otimes (B \oplus C)$ adalah $\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (B_{kj} \oplus C_{kj})$

Unsur ke- ij matriks $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ adalah $\left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes C_{kj}\right)$.

Karena $\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes (B_{kj} \oplus C_{kj}) = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes C_{kj}\right)$

maka $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C), \ \forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

Dari pembuktian di atas terbukti bahwa moduloid $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah suatu *aljabar idempoten.*

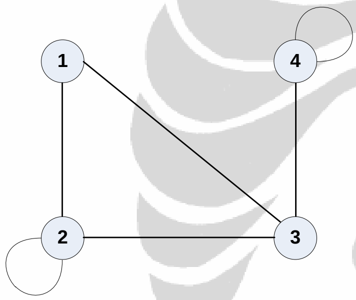
Dalam subbab ini dibahas tentang sistem persamaan linier dalam *Aljabar Max-plus.* Sebelum mempelajari sistem persamaan linier ini dibahas terlebih dahulu tentang teori graf dalam *Aljabar Max-plus.*

Definisi 2.25. [7]
Suatu graf adalah pasangan terurut $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ dengan $\mathbf{V}$ adalah himpunan berhingga yang anggotanya disebut simpul (*vertices*) dan $\mathbf{E}$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut rusuk (*edges*).

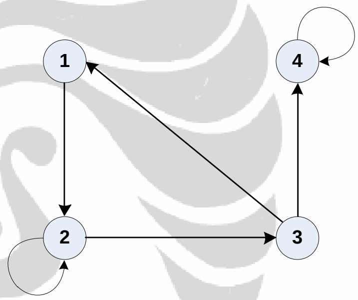
Definisi 2.26. [6]
Graf berarah adalah pasangan terurut $(\mathbf{V},\mathbf{A})$ dengan $\mathbf{V}$ adalah himpunan dari simpul dan $\mathbf{A}$ adalah himpunan pasangan terurut simpul-simpul yang anggotanya disebut busur (*arc*). Untuk $(i,j) \in \mathbf{A}$, i disebut simpul awal busur dan j disebut simpul akhir busur.

Dalam penyajian graf, simpul digambarkan sebagai noktah yang diberi label dengan nama simpul yang diwakilinya. Rusuk digambarkan sebagai ruas garis atau kurva yang menghubungkan noktah-noktah. Busur digambarkan sebagai ruas garis atau kurva berarah yang menghubungkan noktah-noktah yang bersesuaian dengan simpul awal dan simpul akhir busur, dengan tanda panah pada ujungnya yang menandakan arah busur.

Contoh 2.27.



Gambar 2.13. Graf $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{E})$



Gambar 2.14. Graf berarah $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{A})$

Gambar 2.13 menyatakan graf $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{E})$ dengan $\mathbf{V} = \{1,2,3,4\}$ dan $\mathbf{E} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$. Gambar 2.14 menyatakan graf $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{A})$ dengan $\mathbf{V} = \{1,2,3,4\}$ dan $\mathbf{A} = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,4)\}$.

Suatu lintasan ρ dari i ke j pada suatu graf adalah suatu barisan simpul $(i_1,i_2,\ldots,i_{n+1})$ dengan $i_1 = i$ sebagai simpul awal lintasan dan i_{n+1} sebagai simpul akhir lintasan sedemikian sehingga (i_k,i_{k+1}) adalah busur dari graf. Suatu sirkuit adalah suatu lintasan yang simpul awal dan simpul akhirnya sama. Sirkuit elementer adalah sirkuit yang simpul-simpulnya muncul satu kali, kecuali simpul awal dan simpul akhir. Suatu sirkuit dengan panjang lintasan satu disebut *loop*.

Definisi 2.28. [6]
Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, graf *presedent* dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (\mathbf{V},\mathbf{A})$ dengan $\mathbf{V} = \{1, 2,\ldots, \mathrm{n}\}$ dan $\mathbf{A} = \left\{(j,i)\,\middle|\,w(j,i) = A_{ij} \neq \varepsilon\right\}$.

Panjang suatu lintasan ρ dinotasikan dengan $|\rho|_\ell$ dan didefinisikan sebagai banyaknya busur yang menyusun lintasan ρ. Bobot suatu lintasan ρ dari simpul i ke j dengan panjang n dinotasikan dengan $|\rho|_w$, yaitu:

$|\rho|_w = \bigotimes_{k=1}^{n} A_{i_{k+1},i_k}$ dengan $i = i_1$ dan $j = i_{n+1}$

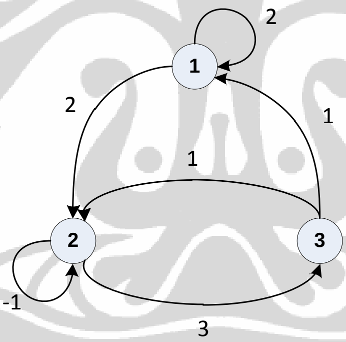
Bobot rata-rata dari suatu lintasan ρ adalah $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_\ell}$.

Suatu graf berarah $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{A})$ dikatakan terhubung kuat jika untuk setiap $i, j \in \mathbf{V}$, $i \neq j$ terdapat suatu lintasan dari i ke j.

Contoh 2.29.

Diberikan $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Graf *presedent* dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (\mathbf{V},\mathbf{A})$ dengan $\mathbf{V} = \{1, 2, 3\}$ dan $\mathbf{A} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ yang disajikan dalam Gambar 2.15.



Gambar 2.15. Graf *presedent* $G(A)$

Graf $G(A)$ pada Gambar 2.15 terdiri dari 4 sirkuit elementer, yaitu $\rho_1 = (1,1)$, $\rho_2 = (2,2)$, $\rho_3 = ((2,3),(3,2))$ dan $\rho_4 = ((2,3),(3,1),(1,2))$. Bobot rata-rata dari sirkuit elementer pada graf $G(A)$ dapat dilihat pada Tabel 2.1 di bawah ini.

Tabel 2.1. Sirkuit elementer dari graf *presedent* $G(A)$

Sirkuit	Panjang sirkuit	Bobot sirkuit	Bobot rata-rata sirkuit
$1 \to 1$	1	2	2
$2 \to 2$	1	-1	-1
$2 \to 3 \to 2$	2	4	2
$2 \to 3 \to 1 \to 2$	3	6	2

Dari Tabel 2.1 bobot rata-rata maksimum dari sirkuit elementer adalah 2.

Selanjutnya akan diberikan interpretasi teori graf untuk pangkat k matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, jika $k \in \mathbb{N}_0$ maka unsur ke- ij dari matriks $A^{\otimes^k}$ adalah

$$\left(A^{\otimes^k}\right)_{ij} = \max_{i_1,i_2,\ldots i_{k-1}} \left(A_{ii_1} + A_{i_1 i_2} + \cdots + A_{i_{k-1}j}\right),\ \forall i,j.$$

Elemen $\left(A^{\otimes^k}\right)_{ij}$ adalah bobot maksimum dari semua lintasan $G(A)$ dengan panjang k, dengan j sebagai simpul awal dan i sebagai simpul akhir, jika tidak ada lintasan dengan panjang k dari simpul j ke i maka bobot maksimum didefinisikan sama dengan ε.

Definisi 2.30. [6]

$$\text{Untuk } A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}, \text{ didefinisikan } A^{+} = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes^k} \text{ dan } A^{\star} = e \otimes A^{+} = \oplus_{k\geq 0} A^{k} \quad (2.7)$$

Elemen dari $(A^{+})_{ij}$ adalah bobot maksimum dari lintasan-lintasan dengan panjang sebarang dengan j sebagai simpul awal dan i sebagai simpul akhir, sehingga diperoleh $(A^{+})_{ij} = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes^k}$.

Contoh 2.31.

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Bobot maksimum dari semua lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang k untuk setiap lintasan dari i ke j dapat ditentukan dari unsur-unsur matriks $A^{\otimes^k}$. Misalkan untuk $k = 2,3,4,5$ maka

$$\begin{aligned} A^{\otimes^2} &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A^{\otimes^3} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \\ A^{\otimes^4} &= \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}, A^{\otimes^5} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 9 \\ 10 & 10 & 9 \\ 11 & 11 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definisi 2.32. [6, 2]

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ disebut irredusibel jika graf *presedent* dari matriks A terhubung kuat.

Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah irredusibel jika

$$\left(A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes^{n-1}}\right)_{ij} \neq \varepsilon,\ \forall i,j,\ i \neq j$$

Maksud dari pernyataan di atas bahwa untuk sebarang dua simpul i dan j ada paling sedikit satu lintasan (dengan panjang 1, 2, ..., $n-1$) dari j ke i. Jika $G(A)$ tidak terhubung kuat maka terdapat subhimpunan "terbesar" dari simpul-simpul yang menghubungkan satu sama lain dengan suatu lintasan. Kumpulan dari subgraf tersebut merupakan subgraf terhubung kuat maksimal (*A maximal strongly connected subgraph*) atau *m.s.c.s*.

Contoh 2.33.

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$, matriks A adalah irredusibel karena graf *presedent* matriks A tehubung kuat, dan memenuhi

$$\begin{aligned}\left(A \oplus A^{\otimes^2}\right)_{ij} &= \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \varepsilon\end{aligned}$$

Sebuah matriks irredusibel mempunyai nilai eigen, nilai eigen dalam *Aljabar Max-plus* adalah bobot rata-rata maksimum atas semua sirkuit elementer dari graf *presedent*. Setiap sirkuit dari graf *presedent* dengan bobot rata-rata sama dengan bobot rata-rata maksimum disebut sirkuit kritis.

Definisi 2.34. [6]

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, jika ada $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan sebuah vektor $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sedemikian sehingga $Av = \lambda \otimes v$ maka λ adalah nilai eigen dari A dan v adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan A.

Contoh 2.35.

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$ mempunyai nilai eigen $\lambda = 2$ dan vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Perhatikan !

$$\begin{aligned} Av &= 2\otimes v \\ \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2\otimes\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Untuk selanjutnya dibahas tentang sistem persamaan linier dalam *Aljabar Max-plus*. Bentuk umum sistem persamaan linier dalam *Aljabar Max-plus* adalah :

$$Ax\oplus b = Cx\oplus d,$$

dengan A dan C adalah matriks $n\times n$, sedangkan b dan d adalah vektor $n\times 1$. Untuk mencari selesaian dari sistem persamaan linier dalam *Aljabar Max-plus* bentuk umum dari sistem persamaan linier diubah ke dalam bentuk kanonik.

Definisi 2.36. [6]
Sistem persamaan linier $Ax\oplus b = Cx\oplus d$ disebut bentuk kanonik jika A, C, b dan d memenuhi;

1. jika $A_{ij} > C_{ij}$ maka $C_{ij} = \varepsilon$ dan jika $A_{ij} < C_{ij}$ maka $A_{ij} = \varepsilon$;
2. Jika $b_i > d_i$ maka d_i=ε dan jika $b_i < d_i$ maka $b_i = \varepsilon$.

Contoh 2.37.
Misalkan sistem persamaan linier:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mempunyai selesaian:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (2 \otimes x_2) \\ (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (6 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \\ (2 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} (2 \otimes x_2) \oplus 1 \\ 2 \otimes x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \otimes x_1 \\ (2 \otimes x_1) \oplus 5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linier tersebut di atas mempunyai selesaian $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$.

Secara umum selesaian sistem persamaan linier memmpunyai 3 kemungkinan, yaitu

1. Tidak mempunyai selesaian,
2. Mempunyai selesaian tunggal (unik),
3. Mempunyai selesaian lebih dari satu.

Sistem persamaan linier juga dapat berbentuk $x = Ax \oplus b$ dan $Ax = b$. Selanjutnya dibahas bagaimana mencari selesaian dari kedua bentuk sistem persamaan linier tersebut.

1. Sistem persamaan linier $x = Ax \oplus b$.

   Untuk mencari selesaian dari sistem persamaan linier bentuk $x = Ax \oplus b$ kita gunakan Teorema 2.38.

   Teorema 2.38 ([6]).

   Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, dan $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$. Jika hanya ada sirkuit dengan bobot non positif di $G(A)$, selesaian untuk sistem persamaan linier bentuk $x = Ax \oplus b$ adalah $x = A^{\star} \otimes b$ dengan $(A^{\star} = E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^n \oplus \ldots)$. Jika bobot sirkuit dari $G(A)$ adalah negatif maka selesaian sistem persamaan linier bentuk $x = Ax \oplus b$ adalah tunggal .

   Bukti.

$(A^{\star})_{ij}$ ada jika dan hanya jika tidak ada komponen di $G(A)$yang memiliki sirkuit dengan bobot positif.

$(\rightarrow)$ Andaikan ada komponen yang terhubung kuat di $G(A)$ dan mempunyai sirkuit dengan bobot positif.

Misalkan sirkuit $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow ... \rightarrow i_k \rightarrow i_1$ dengan panjang k atau $\left(A^{\otimes^{2k}}\right)_{i_1 i_1}$ mempunyai nilai minimal positif a, dan seterusnya sampai $\left(A^{\otimes^{2nk}}\right)_{i_1 i_1}$ mempunyai nilai minimal positif na. Akibatnya $(A^{\star})_{i_1 i_1}$ tidak ada, karena komponen $\left(A^{\otimes^{2n}}\right)_{i_1 i_1}$ makin besar ketika $n \rightarrow \infty$ dan artinya kontradiksi dengan pengandaian $(A^{\star})_{i_1 i_1}$ ada. Jadi pengandaian salah, maka haruslah tidak ada komponen yang terhubung kuat di $G(A)$ yang mempunyai sirkuit dengan bobot positif.

$(\leftarrow)$ Andaikan $(A^{\star})_{i_1 i_1}$ tidak ada maka $(A^{\star})_{i_1 i_1}$ tidak mempunyai lintasan yang berbobot maksimum. Bobot lintasan dari simpul j ke simpul i semakin besar dengan semakin panjangnya lintasan, akibatnya bobot maksimum dari j ke j tidak ada sehingga ada sirkuit dengan bobot positif, dan hal ini kontradiksi, sehingga pengandaian salah, maka dengan demikian haruslah $(A^{\star})_{i_1 i_1}$ ada .

Akan dibuktikan bahwa $x = A^{\star} \otimes b$ memenuhi persamaan $x = Ax \oplus b$

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus b \\ A^{\star} \otimes b &= A\left((A^{\star} \otimes b)\right) \oplus b \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.7 maka

$$\begin{aligned} A^{\star} \otimes b &= \oplus_{k \geq 0} A^k \otimes b \\ &= \left(\oplus_{k \geq 1} A^k \otimes b\right) \oplus (E \otimes b) \\ &= A\left(\left(\oplus_{k \geq 1} A^k \otimes b\right) \oplus (E \otimes b)\right) \\ &= A\left(A^{\star} \otimes b\right) \oplus b. \end{aligned}$$

Untuk membuktikan keunikan atau ketunggalan dari selesaiannya, subtitusikan $x = Ax \oplus b$ ke persamaan $x = Ax \oplus b$.

$$
\begin{aligned}
x &= Ax \oplus b \\
&= b \oplus A \otimes ((A \otimes x) \oplus b) \\
&= b \oplus (A \otimes b) \oplus \left(A^{\otimes^2} \otimes x\right) \\
&\vdots \\
&= b \oplus (A \otimes b) \oplus \ldots \oplus \left(A^{\otimes^{i-1}} \otimes b\right) \oplus \left(A^{\otimes^i} \otimes x\right) \\
&= \oplus_{l=1}^{i-1} \left(A^{\otimes^l} \otimes b\right) \oplus \left(A^{\otimes^i} \otimes x\right)
\end{aligned}
$$

Elemen-elemen $A^{\otimes^i}$ adalah bobot maksimum dari lintasan dengan panjang i. Untuk i yang cukup besar, setiap lintasan memuat satu atau lebih sirkuit elementer turunan sebagai sublintasan. Jika i menuju ∞ maka banyaknya sirkuit elemeter yang terjadi juga akan menuju ∞. Karena sirkuit di $G(A)$ mempunyai bobot negatif, maka elemen-elemen $A^{\otimes^i}$ menuju ε untuk i menuju ∞, $A^{\otimes^i} \otimes x = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$. Jadi, untuk i menuju ∞, maka $\oplus_{l=1}^{i-1} \left(A^{\otimes^l} \otimes b\right) \oplus \left(A^{\otimes^i} \otimes x\right) = A^{\star} \otimes b = x$. □

Berikut ini diberikan teorema tentang dimensi dari matriks pada *Aljabar Max-plus* yang digunakan dalam menentukan selesaian sistem persamaan linier.

Teorema 2.39 ([6])**.**

Jika $G(A)$ tidak mempunyai sirkuit dengan bobot positif, maka $A^{\star} = e \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{n-1}$ dengan n adalah dimensi dari matriks n.

Bukti.

Karena A berdimensi n, maka $G(A)$ mempunyai simpul sebanyak n, sehingga semua lintasan dengan panjang misalkan $l \geq n$ tersusun dari k sirkuit dengan jumlah panjang semua sirkuit kurang dari l dan ada lintasan dengan panjang kurang dari n, dengan demikian $\forall l \geq n$ dan untuk $\forall i, j \in 1, 2, , \ldots, n$ terdapat $r \in 1, 2, , \ldots, n$ sehingga,

$$
\left(A^{\otimes^l}\right)_{ij} = \left(A^{\otimes^m}\right)_{ij} + \sum_{i}^{k} \left(A^{\otimes^{t_i}}\right)_{r_i r_i}
$$

dengan $0 \leq m < n, \quad 0 \leq t_i \leq n, \quad 0 \leq r_i \leq n$ dan $k = 1, 2, \ldots$.

karena semua sirkuit mempunyai bobot non positif, maka $\forall l \geq n$ dan untuk $\forall i, j \in 1, 2, , \ldots, n$ berlaku :

$$\left(A^{\otimes^{l}}\right)_{ij} \quad \leq \quad \left(A^{\otimes^{m}}\right)_{ij}$$

dan $0 \leq m < n-1$, akibatnya

$$\begin{aligned}\left(A^{\otimes^{l}}\right) &\leq A^{\otimes^{0}} \oplus A^{\otimes^{1}} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes^{n-1}} \quad \forall l \geq n \\ &\leq e \oplus A^{\otimes^{1}} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes^{n-1}} \\ A^{\star} &\leq e \oplus A^{\otimes^{1}} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes^{n-1}}\end{aligned}$$

Sehingga $A^{\star} = e \oplus A^{\otimes^{1}} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$ □

2. Sistem persamaan linier $Ax = b$

   Seperti dalam aljabar biasa sistem persamaan linier bentuk $Ax = b$ tidak selalu ada selesaiannya, untuk menentukan selesaikan sistem persamaan linier bentuk $Ax = b$ pada *Aljabar Max-plus* diperlukan konsep tentang subselesaian terbesar yang akan diberikan pada definisi dan teorema di bawah ini.

Definisi 2.40. [6]
Subselesaian sistem persamaan linier *Aljabar Max-plus* $Ax = b$ adalah x jika memenuhi $Ax \leq b$. Subselesaian selalu ada, yaitu $\hat{x}_j \leq b_i - A_{ij}, \forall i, j \in 1, 2, 3, \ldots n$.

Teorema 2.41 ([6]).
Diberikan matriks $A_{n\times n}$ dan vektor $b_{n\times 1}$, $A_{ij} \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$, $b_{ij} \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Subselesaian terbesar dari $Ax = b$ ada dan diberikan oleh $-x_j = \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right)$dengan $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.

Bukti.
Subselesaian dari $Ax = b$ adalah x yang memenuhi

$$Ax \le b \Longleftrightarrow \left\{ \bigoplus_j A_{ij}x_j \le b_i,\ \forall i \right\}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{ij} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \bigoplus_j A_{ij}x_j \le b_i,\ \forall i \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \oplus\left(A_{11}+x_1, A_{12}+x_2, \cdots, A_{1j}+x_j\right) \\ \oplus\left(A_{21}+x_1, A_{22}+x_2, \cdots, A_{2j}+x_j\right) \\ \vdots \\ \oplus\left(A_{i1}+x_1, A_{1i2}+x_2, \cdots, A_{ij}+x_j\right) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ x_j \le b_i - A_{ij}, \quad \forall ij \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ x_j \le \min_i \left(b_i - A_{ij}\right), \quad \forall j \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ -x_j \le \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right), \quad \forall j \right\} \quad .$$

□

Contoh 2.42.

Tentukan selesaian dari sistem persamaan di bawah ini!.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} (e \oslash b)A &= \begin{pmatrix} -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Subselesaian $(x_1, x_2) = (3, 2)$, jika subselesaian ini disubtitusi ke persamaan 2.8, didapat $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

BAB 3

BARISAN ULTIMATELY GEOMETRIC *ALJABAR MAX-PLUS*

Pada bab ini dibahas mengenai barisan *ultimately geometric, ultimately periodic* pada *Aljabar Max-plus*, penjumlahan dan perkalian barisan *ultimately geometric* dan barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus.*
Barisan bilangan tak hingga dalam *Aljabar Max-plus* dinotasikan dengan :

$$h = h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, \cdots$$
$$h = \{h_k\}_{k=0}^{\infty}, \; h_k \in \mathbb{R}_\varepsilon, \; \forall k.$$

3.1 Konsep Barisan Pada *Aljabar Max-Plus*

3.1.1 Barisan *Ultimately Geometric*

Definisi 3.1. [8]
Barisan $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ adalah barisan *ultimately geometric* jika

$$\exists K \in \mathbb{N}, \; \exists c \in \mathbb{N}_0, \; \exists \lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon;$$

sedemikian sehingga

$$\forall k \geq K \, : \, g_{k+c} = \lambda^{\otimes^c} \otimes g_k. \tag{3.1}$$

Parameter c dan λ berturut-turut menyatakan periode dan laju dari g.

Contoh 3.2.

1. Diberikan barisan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13,14, $\cdots$

   Barisan di atas adalah barisan aritmetika pada aljabar biasa yang mempunyai selisih tetap, yaitu 1 dan suku ke-1 adalah 0. Jika pada barisan tersebut kita tambahkan beberapa bilangan sebelum suku pertama, misalnya 4,5,1 maka barisan tersebut menjadi 4,5,1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13,14, $\cdots$. Barisan yang baru terbentuk bukan lagi menjadi barisan aritmetika dalam aljabar biasa. Dalam *Aljabar Max-plus* barisan 4,5,1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13,14, $\cdots$ merupakan barisan *ultimately geometric* berdasarkan definisi 3.1. Pada aljabar biasa suku awal pada barisan dimulai dengan suku ke-1, sedangkan pada *Aljabar Max-plus* suku awalnya dimulai dengan suku ke-0. Pada barisan tersebut dapat dilihat bahwa setelah suku ke-2, suku-suku pada barisan tersebut mempunyai ciri-ciri yang sama seperti dalam aljabar biasa, mempunyai selisih yang tetap yaitu 1, dan di *Aljabar Max-plus* dinamakan dengan rasio, suku suku pada barisan tersebut dapat dinyatakan dengan:

$g_4 = 1 + g_3 = 1 \otimes g_3 = 1^{\otimes^1} \otimes g_3$

$g_5 = 1 + g_4 = 1 \otimes g_4 = 1^{\otimes^1} \otimes g_4$

$g_6 = 1 + g_5 = 1 \otimes g_5 = 1^{\otimes^1} \otimes g_5$

$g_7 = 1 + g_6 = 1 \otimes g_6 = 1^{\otimes^1} \otimes g_6$

$\vdots$

$g_{k+1} = 1 + g_k = 1 \otimes g_k = 1^{\otimes^1} \otimes g_k$

Pada aljabar biasa jika kita mengalikan suku pada sebuah barisan dengan bilangan konstan untuk mendapatkan suku berikutnya maka barisan itu dinamakan barisan geometri, dan hal ini juga berlaku pada *Aljabar Max-plus* dengan operasi o kali ($\otimes$). Barisan $4, 5, 1,$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13,14, $\cdots$ dapat dinyatakan dengan persamaan $g_{k+1} = 1^{\otimes^1} \otimes g_k$. Periode dan laju dari barisan tersebut sama yaitu 1 sehingga barisan $4, 5, 1,$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13,14, $\cdots$ adalah *ultimately geometric* dengan

$$g_{k+1} = 1^{\otimes^1} \otimes g_k\,, \quad c = 1 \text{ dan } \lambda = 1, \text{ untuk } k \geq 3.$$

2. Diberikan barisan 1, 1, 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, 11, 10, 13,12,15,14, $\cdots$.

   Perhatikan pada barisan tersebut suku ke-3, ke-5, ke-7, ke-9, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 2 dan suku ke-4, ke-6, ke-8, ke-10, ... juga mempunyai rasio tetap, yaitu 2 sehingga barisan tersebut mempunyai periode 2 dengan laju sama dengan 1, dan suku-suku pada barisan tersebut dapat dinyatakan dengan:

   $g_5 = 2 + g_3 = 2 \otimes g_3 = 1^{\otimes^2} \otimes g_3$

   $g_6 = 2 + g_4 = 2 \otimes g_4 = 1^{\otimes^2} \otimes g_4$

   $g_7 = 2 + g_5 = 2 \otimes g_5 = 1^{\otimes^2} \otimes g_5$

   $g_8 = 2 + g_6 = 2 \otimes g_6 = 1^{\otimes^2} \otimes g_6$

   $\vdots$

   $g_{k+2} = 2 + g_k = 2 \otimes g_k = 1^{\otimes^2} \otimes g_k$

Barisan 1, 1, 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, 11, 10, 13,12,15,14, $\cdots$ adalah barisan *ultimately geometric* dengan periode 2 dan laju sama dengan 1 dan berlaku untuk $k \geq 3$ atau dengan kata lain

$$g_{k+2} = 1^{\otimes^2} \otimes g_k\ , \quad \mathrm{c} = 2 \text{ dan } \lambda = 1, \text{ untuk } k \geq 3.$$

3. Diberikan barisan 1, 1, -3, 2, 3, 0, 5, 6, 3, 8, 9, 6, 11, 12, 9, 14,15,12,17, $\cdots$

   Perhatikan pada barisan tersebut suku ke-3, ke-6, ke-9, ke-12, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 3 dan suku ke-4, ke-7, ke-10, ke-13, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 3 dan suku ke-5, ke-8, ke-11, ke-14, ... mempunyai rasio tetap yaitu 3, sehingga barisan tersebut mempunyai periode 3 dengan laju sama dengan 1, dan suku-suku pada barisan tersebut dapat dinyatakan dengan:

   $g_5 = 3 + g_2 = 3 \otimes g_2 = 1^{\otimes^3} \otimes g_2$

   $g_6 = 3 + g_3 = 3 \otimes g_3 = 1^{\otimes^3} \otimes g_3$

   $g_7 = 3 + g_4 = 3 \otimes g_4 = 1^{\otimes^3} \otimes g_4$

   $g_8 = 3 + g_5 = 3 \otimes g_5 = 1^{\otimes^3} \otimes g_5$

   $g_9 = 3 + g_6 = 3 \otimes g_6 = 1^{\otimes^3} \otimes g_6$

   $g_{10} = 3 + g_7 = 3 \otimes g_7 = 1^{\otimes^3} \otimes g_7$

   $\vdots$

   $g_{k+3} = 3 + g_k = 3 \otimes g_k = 1^{\otimes^3} \otimes g_k$

   Barisan 1, 1, -3, 2, 3, 0, 5, 6, 3, 8, 9, 6, 11, 12, 9, 14,15,12,17, $\cdots$ adalah barisan *ultimately geometric* dengan periode 3 dan laju sama dengan 1 dan berlaku untuk $k \geq 2$ atau dengan kata lain

$$g_{k+3} = 1^{\otimes^3} \otimes g_k\ , \quad \mathrm{c} = 3 \text{ dan } \lambda = 1, \text{ untuk } k \geq 2.$$

4. Diberikan $1, \varepsilon, 1, \varepsilon, 1, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots$

   Perhatikan pada barisan tersebut suku ke-5, ke-7, ke-9, ke-11, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 4 dan suku ke-6, ke-8, ke-10, ke-12, ... juga mempunyai rasio tetap, yaitu 4 , sehingga barisan tersebut mempunyai periode 2 dengan laju sama dengan 2, dan suku-suku pada barisan tersebut dapat dinyatakan dengan:

   $g_7 = 4 + g_5 = 4 \otimes g_5 = 2^{\otimes^2} \otimes g_5$

   $g_8 = 4 + g_6 = 4 \otimes g_6 = 2^{\otimes^2} \otimes g_6$

$g_9 = 4 + g_7 = 4 \otimes g_7 = 2^{\otimes^2} \otimes g_7$

$g_{10} = 4 + g_8 = 4 \otimes g_8 = 2^{\otimes^2} \otimes g_8$

$\vdots$

$g_{k+2} = 4 + g_k = 4 \otimes g_k = 2^{\otimes^2} \otimes g_k$

Barisan $1, \varepsilon, 1, \varepsilon, 1, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots$ adalah barisan *ultimately geometric* dengan periode 2 dan laju sama dengan 2 dan berlaku untuk $k \geq 5$ atau dengan kata lain

$$g_{k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_k\,, \quad \mathrm{c} = 2 \text{ dan } \lambda = 2, \text{ untuk } k \geq 5.$$

5. Diberikan $\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 2, \varepsilon, 6, 8, \varepsilon, 12, 14, \varepsilon, 18, 20, \varepsilon, 24, 26, \varepsilon, 30, \cdots$

   Perhatikan suku ke-4, ke-7, ke-10, ke-13, ...pada barisan di atas, mempunyai rasio tetap, yaitu 6 , dan suku-suku ke-5, ke-8, ke-11, ke-14 juga mempunyai rasio tetap, yaitu 6, pada barisan tersebut suku ke-3, ke-6, ke-9, ke-12, ... mempunyai elemen yang selalu tetap yaitu ε, yang artinya berapapun rasionya maka suku-suku selanjutnya akan tetap ε , rasio yang digunakan di sini adalah 6, karena suku-suku ke-4, ke-7, ke-10, ke-13, ...dan ke-3, ke-6, ke-9, ke-12, ... mempunyai rasio 6 sehingga barisan tersebut mempunyai periode 3 dengan laju sama dengan 2, dan suku-suku pada barisan tersebut dapat dinyatakan dengan:

   $g_6 = 6 + g_3 = 6 \otimes g_3 = 2^{\otimes^3} \otimes g_3$

   $g_7 = 6 + g_4 = 6 \otimes g_4 = 2^{\otimes^3} \otimes g_4$

   $g_8 = 6 + g_5 = 6 \otimes g_5 = 2^{\otimes^3} \otimes g_5$

   $g_9 = 6 + g_6 = 6 \otimes g_6 = 2^{\otimes^3} \otimes g_6$

   $g_{10} = 6 + g_7 = 6 \otimes g_7 = 2^{\otimes^3} \otimes g_7$

   $g_{11} = 6 + g_8 = 6 \otimes g_8 = 2^{\otimes^3} \otimes g_8$

   $\vdots$

   $g_{k+3} = 6 + g_k = 6 \otimes g_k = 2^{\otimes^3} \otimes g_k$

   Barisan $\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 2, \varepsilon, 6, 8, \varepsilon, 12, 14, \varepsilon, 18, 20, \varepsilon, 24, 26, \varepsilon, 30, \cdots$ adalah barisan *ultimately geometric* dengan periode 3 dan laju sama dengan 2 dan berlaku untuk $k \geq 3$ atau dengan kata lain

$$g_{k+3} = 2^{\otimes^3} \otimes g_k\,, \quad \mathrm{c} = 3 \text{ dan } \lambda = 2, \text{ untuk } k \geq 3.$$

3.1.2 Barisan *Ultimately Periodic*

Definisi 3.3. [8]
Barisan $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ adalah barisan *ultimately periodic* jika

$$\exists K \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}_0, \exists \lambda_0 \ , \ldots, \lambda_{c-1} \ \in \mathbb{R}_\varepsilon;$$

sedemikian sehingga

$$g_{kc+c+s} = \lambda_s^{\otimes^c} \otimes g_{kc+s}, \ \forall k \geq K, \text{ untuk } s = 0, \ldots, c-1. \tag{3.2}$$

Contoh 3.4.

1. $0, 0, 0, 1, 4, 7, 8, 13, 12, 19, 16, 25, 20, 31, 24, 37, 28, 43, \cdots$

   Barisan ini adalah barisan *ultimately periodic* menurut Definisi 3.2.

   Perhatikan barisan tersebut di atas, suku ke-2, ke-4, ke-6, ke-8, ke-10, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 4, sedangkan suku-suku ke-3, ke-5, ke-7, ke-9, ke-11, ... mempunyai rasio 6. Barisan ini mempunyai periode 2, dan karena barisan ini mempunyai 2 rasio yang berbeda maka barisan ini mempunyai 2 laju yang berbeda. Laju yang pertama untuk rasio 4 adalah 2, sedangkan laju yang kedua untuk rasio 6 adalah 3. Hal ini dapat dilihat dari suku-suku barisan di bawah ini.

   $g_4 = 4 + g_2 = 4 \otimes g_2 = 2^{\otimes^2} \otimes g_2$

   $g_5 = 6 + g_3 = 6 \otimes g_3 = 3^{\otimes^2} \otimes g_3$

   $g_6 = 4 + g_4 = 4 \otimes g_4 = 2^{\otimes^2} \otimes g_4$

   $g_7 = 6 + g_5 = 6 \otimes g_5 = 3^{\otimes^2} \otimes g_5$

   $g_8 = 4 + g_6 = 4 \otimes g_6 = 2^{\otimes^2} \otimes g_6$

   $g_9 = 6 + g_7 = 4 \otimes g_7 = 3^{\otimes^2} \otimes g_7$

   $\vdots$

   $g_{2k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k}$, untuk $k \geq 1$

   $g_{2k+2+1} = 3^{\otimes^2} \otimes g_{2k+1}$, untuk $k \geq 1$

   Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa barisan $0, 0, 0, 1, 4, 7, 8, 13, 12, 19, 16, 25, 20, 31, 24, 37, 28, 43, \cdots$ ini dapat dinyatakan sebagai barisan *ultimately periodic* dengan ,

   $$g_{2k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k}, \ \ c = 2 \text{ dan } \lambda_0 = 2$$

dan

$$g_{2k+2+1} = 3^{\otimes^2} \otimes g_{2k+1}\ c = 2 \text{ dan } \lambda_1 = 3$$

untuk $k \geq 2$.

2. $1, 3, -1, 0, 5, \varepsilon, 2, 4, 1, 8, 1, 10, 14, -2, 19, 20, -5, 28, \cdots$

Perhatikan barisan tersebut di atas, suku ke-6, ke-9, ke-12, ke-15, ... mempunyai rasio tetap, yaitu 6, suku ke-7, ke-10, ke-13, ke-16, ... mempunyai rasio -3, dan suku ke-8, ke-11, ke-14, ke-17, ...mempunyai rasio 9. Barisan ini mempunyai periode 3, dan karena barisan ini mempunyai 3 rasio yang berbeda maka barisan ini mempunyai 3 laju yang berbeda . Laju yang pertama untuk rasio 6 adalah 2, sedangkan laju yang kedua untuk rasio -3 adalah -1 dan laju yang ketiga untuk rasio 9. Hal ini dapat dilihat dari suku-suku barisan di bawah ini.

$g_9 = 6 + g_6 = 6 \otimes g_6 = 2^{\otimes^3} \otimes g_6$

$g_{10} = -3 + g_7 = -3 \otimes g_7 = -1^{\otimes^3} \otimes g_7$

$g_{11} = 9 + g_8 = 9 \otimes g_8 = 3^{\otimes^3} \otimes g_8$

$g_{12} = 6 + g_9 = 6 \otimes g_9 = 2^{\otimes^3} \otimes g_9$

$g_{13} = -3 + g_{10} = -3 \otimes g_{10} = -1^{\otimes^3} \otimes g_{10}$

$g_{14} = 9 + g_{11} = 9 \otimes g_{11} = 3^{\otimes^3} \otimes g_{11}$

$g_{15} = 6 + g_{12} = 6 \otimes g_{12} = 2^{\otimes^3} \otimes g_{12}$

$\vdots$

$g_{3k+3} = 2^{\otimes^3} \otimes g_{3k}$, untuk $k \geq 2$

$g_{3k+3+1} = -1^{\otimes^3} \otimes g_{3k+1}$, untuk $k \geq 2$

$g_{3k+3+2} = 3^{\otimes^3} \otimes, g_{3k+2}$, untuk $k \geq 2$

Barisan ini adalah barisan *ultimately periodic* dengan $c = 3$ dan $\lambda_0 = 2,\ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, yaitu:

$$g_{3k+3} = 2^{\otimes^3} \otimes g_{3k}, \quad c = 3 \text{ dan } \lambda_0 = 2,$$

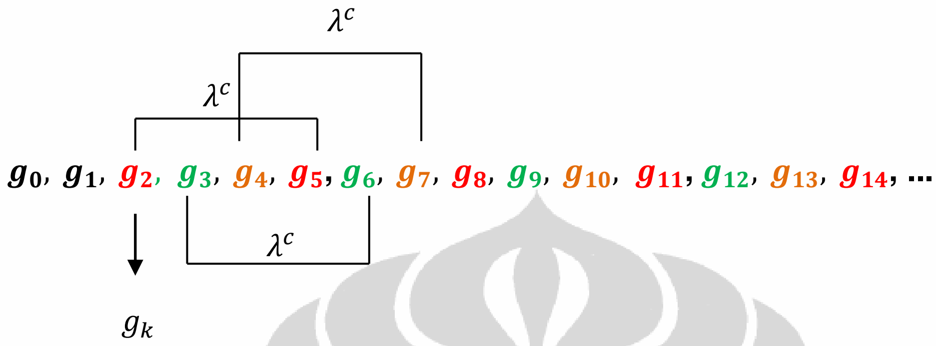
$$g_{3k+3+1} = -1^{\otimes^3} \otimes g_{3k+1}, c = 3 \text{ dan } \lambda_1 = -1, \text{ dan}$$

$$g_{3k+3+2} = 3^{\otimes^3} \otimes g_{3k+2},\ c = 3 \text{ dan } \lambda_2 = 3$$

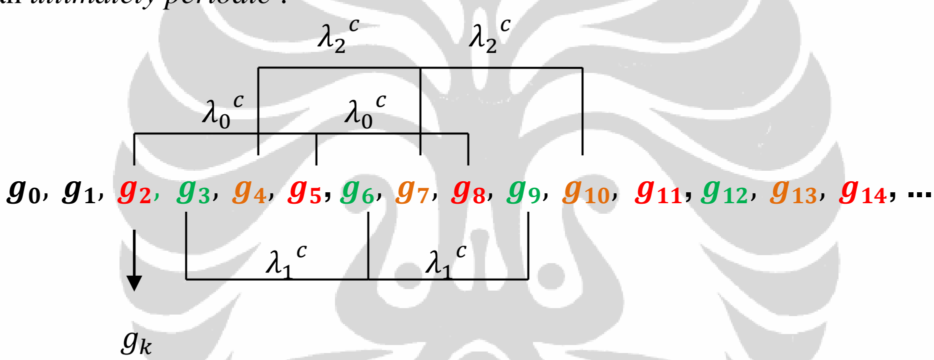
untuk $k \geq 2$.

Dari contoh di atas secara umum dapat digambarkan perbedaan antara barisan *ultimately geometric* dengan barisan *ultimately periodic* sebagai berikut:

Barisan *ultimately geometric* :



Barisan *ultimately periodic* :



3.1.3 Penjumlahan dan Perkalian Barisan *Ultimately Geometric*

Dalam *Aljabar Max-plus* penjumlahan barisan $g = h_1 \oplus h_2 \cdots \oplus h_m$ didefinisikan dengan

$$g_k = (h_1)_k \oplus \cdots \oplus (h_m)_k.$$

Dan perkalian $g = h_1 \otimes \cdots \otimes h_m$ didefinisikan dengan

$$g_k = \bigoplus_{\substack{k_1, \ldots k_m \in \mathbb{N} \\ k_1 + \cdots + k_m = k}} (h_1)_{k_1} \otimes \cdots \otimes (h_m)_{k_m}.$$

Di bawah ini diberikan contoh untuk penjumlahan dan perkalian barisan *ultimately geometric*.

Contoh 3.5.

Diberikan barisan *ultimately geometric* h_1 dan h_2;

$$h_1 = 1, \varepsilon, 1, \varepsilon, 1, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots$$
$$h_2 = 4, 5, 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, 11, 10, 13, 12, 15, 14, 17, \cdots$$

1.
$$\begin{aligned}
g &= h_1 \oplus h_2 \\
g_0 &= (h_1)_0 \oplus (h_2)_0 = 1 \oplus 4 = 4 \\
g_1 &= (h_1)_1 \oplus (h_2)_1 = \varepsilon \oplus 5 = 5 \\
g_2 &= (h_1)_2 \oplus (h_2)_2 = 1 \oplus 1 = 1 \\
g_3 &= (h_1)_3 \oplus (h_2)_3 = \varepsilon \oplus 0 = 0 \\
&\vdots \\
g &= g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \\
g &= 4, 5, 1, 0, 3, 2, 5, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
g &= h_1 \otimes h_2 \\
g_0 &= \oplus((h_1)_0 \otimes (h_2)_0) = \oplus(1 \otimes 4) = 5 \\
g_1 &= \oplus((h_1)_0 \otimes (h_2)_1, (h_1)_1 \otimes (h_2)_0) = \oplus(1 \otimes 5, \varepsilon \otimes 4) = 6 \\
g_2 &= \oplus((h_1)_0 \otimes (h_2)_2, (h_1)_1 \otimes (h_2)_1, (h_1)_2 \otimes (h_2)_0) \\
&= \oplus(1 \otimes 1, \varepsilon \otimes 5, 1 \otimes 4) = 5 \\
g_3 &= \oplus((h_1)_0 \otimes (h_2)_3, (h_1)_1 \otimes (h_2)_2, (h_1)_2 \otimes (h_2)_1, (h_1)_3 \otimes (h_2)_0) \\
&= \oplus(1 \otimes 0, \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes 5, 1\varepsilon \otimes 4) = 6 \\
&\vdots \\
g &= g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \\
g &= 5, 6, 5, 6, 5, 6, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, \cdots
\end{aligned}$$

Teorema 3.6 ([8]).
Diberikan m barisan *ultimately geometric* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ dengan laju yang berbeda dari ε. Misalkan c_i adalah periode dari h_i dan λ_i adalah laju dari h_i untuk $i = 1, 2, \ldots, m$. Jika $g = h_1 \oplus h_2 \oplus \cdots \oplus h_m$ dan jika $c = kpk(c_1, \ldots, c_m)$, maka :

$$\exists K \in \mathbb{N}, \exists \gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{c-1} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$$

sedemikian sehingga $g_{kc+c+s} = \gamma_s^{\otimes^c} \otimes g_{kc+s}$,

$$\forall k \geq K,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ c-1. \tag{3.3}$$

Ada paling sedikit satu indeks $s \in \{0, 1, \ldots, \text{c-1}\}$, sedemikian sehingga γ_s terkecil untuk persamaan (3.3) sama dengan $\oplus_{i=1}^{m} \lambda_i$

Bukti.

Untuk membuktikan persamaan (3.3), asumsikan $i \in \{1, 2, \ldots, \text{m}\}$, $s,\ s^{\star} \in \{0, 1, \ldots, \text{c-1}\}$, dan $k,\ l \in \mathbb{N}$. Karena setiap barisan h_i *ultimately geometric*, ada bilangan K sedemikian hingga bahwa :

$$\begin{aligned}
(h_i)_{k+c_i} &= \lambda_i^{\otimes^{c_i}} \otimes (h_i)_k, \forall k \geq K,\ \forall i \qquad (3.4)\\
\lambda_i^{\otimes^{(p-1)c_i}} \otimes (h_i)_{k+c_i} &= \lambda_i^{\otimes^{(p-1)c_i}} . \lambda_i^{\otimes^{c_i}} \otimes (h_i)_k \\
&= \lambda_i^{\otimes^{(p-1)c_i+c_i}} \otimes (h_i)_k \\
&= \lambda_i^{\otimes^{pc_i}} \otimes (h_i)_k
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.4), maka

$$\lambda_i^{\otimes^{pc_i}} \otimes (h_i)_k = (h_i),\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in K,\ \forall i \tag{3.5}$$

Karena $c = kpk(c_1, \ldots, c_m)$, maka ada bilangan bulat positif $w_1, \ldots, w_m$ sehingga $c = w_i c_i$, $\forall i$. Pilih $L \in \mathbb{N}$ dengan $Lc \geq K$ dan pandang sebarang indeks s, karena $Lc + s \geq K$ dan menurut persamaan (3.5) bahwa :

$$\begin{aligned}
(h_i)_{lc+s} &= (h_i)_{Lc+s+(l-L)w_i c_i} \\
&= \lambda_i^{\otimes^{(l-L)w_i c_i}} \otimes (h_i)_{Lc+s} \\
(h_i) &= \lambda_i^{\otimes^{(l-L)c}} \otimes (h_i)_{Lc+s},\ \forall l \geq L,\ \forall i \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Didefinisikan $\mathbb{N}_s = \left\{ i \middle| (h_i)_{Lc+s} \neq \varepsilon,\ i \in 1,\ 2,\ \ldots,\ m \right\}$. Pandang dua kasus berikut :

1. Jika $\mathbb{N}_s = \emptyset$, maka $(h_i)_{Lc+s} = \varepsilon$, $\forall\ i$ dan menurut persamaan (3.3) $(h_i)_{lc+s} = \varepsilon$, $\forall\ l \geq L$. Oleh karena itu $(g)_{lc+s} = \varepsilon$, $\forall\ l \geq L$, sehingga jika kita menetapkan $\gamma_s = \lambda_1$ dan dipilih $K \geq K_s = L$ maka persamaan (3.3) terpenuhi untuk kasus ini.

2. Jika $\mathbb{N}_s \neq \emptyset$, didefinisikan $\gamma_s = \max_{i \in \mathbb{N}_s} \{\lambda_i\}$ dan $i_s = \operatorname*{argmax}_{i \in \mathbb{N}_s} \{(h_i)_{Lc+s} | \lambda_i = \gamma_s\}$.

   Menurut persamaan (3.6) kita mempunyai $(h_i)_{lc+s} = (h_i)_{Lc+s} + (l-L)c\lambda_i, \ \forall \ l \geq L, \ \forall \ i$. Selanjutnya $\lambda_{i_s} \geq \lambda_i, \ \forall \ i$ dan $\varepsilon \neq (h_{i_s})_{Lc+s} \geq (h_i)_{Lc+s}$, $\forall \ i$ dengan $\lambda_i = \gamma_s$.

   Sehingga jika kita mendefinisikan $K_s = L + \max\left(0, \max_{\substack{i\in\mathbb{N}_s \\ \lambda_i\neq\gamma_s}} \left(\frac{(h_i)_{Lc+s}-(h_{i_s})_{Lc+s}}{c(\gamma_s-\lambda_i)}\right)\right)$ dengan $\max \emptyset = 0$, menurut definisi, maka kita mempunyai $(h_{i_s})_{lc+s} \geq (h_i)_{lc+s}$, $\forall \ l \ \geq K_s, \ \forall \ i$.

   Oleh karena itu $(g)_{lc+s} = (h_{i_s})_{lc+s}$, $\forall \ l \ \geq K_s$.

   Akibatnya jika kita memilih $K \ \geq K_s$, persamaan (3.3) terpenuhi untuk kasus ini, sehingga jika kita definisikan $K = \max(K_0, \ \ldots, \ K_{c-1})$ maka persamaan (3.3) terpenuhi untuk setiap s.

   Asumsikan $\oplus \lambda_{i\,i=1}^{m} = \lambda_j$, karena $\lambda_j \neq \varepsilon$, maka ada paling sedikit satu indeks $s^\star$ sehingga $(h_j)_{Lc+s^\star} \neq \varepsilon$. Karena $(g)_{lc+s^\star} = (h_{i_{s^\star}})_{lc+s^\star}$, $\forall l \geq K$ dan karena $\lambda = \lambda_{i_{s^\star}}$ adalah laju dari $h_{i_{s^\star}}$, yaitu λ terkecil sehingga persamaan (3.1) terpenuhi, $\gamma_s = \lambda_{i_{s^\star}} = \lambda_j$ adalah γ_s terkecil untuk memenuhi persamaan (3.3).

$\square$

Teorema 3.7 ([8]).
Pandang m barisan *ultimately geometric* $h_1, \ h_2, \ldots \ h_m$ dengan laju yang berbeda dari ε. Misalkan c_i adalah periode dari h_i dan misalkan λ_i adalah laju dari h_i untuk $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ m$. Jika $g = \ h_1 \otimes h_2 \otimes \ldots \ \otimes h_m$ dan jika $c = kpk(c_1, \ \ldots, \ c_m)$, maka :

$$\exists \ K \in \mathbb{N}, \exists \gamma_0, \ \gamma_1, \ \ldots \gamma_{c-1} \ \in \mathbb{R}_\varepsilon$$

Sehingga

$$g_{kc+c+s} = \gamma_s^{\otimes^c} \otimes g_{kc+s}, \ \forall \ k \geq K, \ s = 0, \ 1, \ \ldots, \ c-1 \tag{3.7}$$

Ada paling sedikit satu indeks $s \ \in \ 0, \ 1, \ \ldots, \ c-1$, sehingga γ_s terkecil untuk persamaan (3.7) sama dengan $\oplus_{i=1}^{m} \lambda_i$. Selain itu untuk $k^\star$ yang cukup besar $g_k{}_{k=k^\star}^{\infty}$ dapat ditulis sebagai jumlah terbatas dari barisan *ultimately geometric* dengan laju λ_i dan periode c_i.

Bukti.

Untuk penyederhanaan, akan dibuktikan teorema untuk kasus $m = 2$. Untuk bukti $m > 2$ dapat dibuktikan secara similar. Dalam bukti ini diasumsikan bahwa $r, s \in 0, 1, \ldots, c-1$, $p, q, i, k \in \mathbb{N}$. Karena h_1 dan h_2 *ultimately geometric*, ada bilangan bulat L sehingga dari persamaan (3.6) dengan $l = L + p$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
(h_i)_{lc+s} &= \lambda_i^{\otimes(l-L)c} \otimes (h_i)_{Lc+s} \\
(h_i) &= \lambda_i^{\otimes(L+p-L)c} \otimes (h_i)_{Lc+s} \\
(h_i)_{Lc+pc+s} &= \lambda_i^{\otimes pc} \otimes (h_i)_{Lc+s} \\
(h_i)_{Lc+pc+s} &= \lambda_i^{\otimes pc} \otimes (h_i)_{Lc+s}\ , \forall p, s,\ \ i = 1, 2 \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Dan perkalian h_1 dan $h_2$adalah :

$$\begin{aligned}
(h_1 \otimes h_2)_k &= \oplus_{i=0}^{Lc+c-1} (h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1} \oplus \oplus_{i=Lc+c}^{k-Lc-c} (h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1} \\
&\quad \oplus \oplus_{i=0}^{Lc+c-1} (h_1)_{k-i} \otimes (h_2)_i\ \forall k \geq 2(Lc+c) \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Pandang suku kedua dari persamaan (3.9), misalkan $k \geq 2(Lc+c)$ dan $i \in Lc+c, , \ldots, k-Lc-c$. Pilih $p,\ q,\ r,\ s$ sedemikian hingga $i = Lc + pc + r$ dan $k - i = Lc + qc + s$. Diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
\alpha^{\otimes p} \otimes \beta^{\otimes q} &\leq \alpha^{\otimes p} \otimes \alpha^{\otimes q} \oplus \beta^{\otimes p} \otimes \beta^{\otimes q} \\
\alpha^{\otimes p} \otimes \beta^{\otimes q} &\leq \alpha^{\otimes(p+q)} \oplus \beta^{\otimes(p+q)} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Dengan persamaan (3.8)

$$\begin{aligned}
(h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1} &= \lambda_1^{\otimes pc} \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes \lambda_2^{\otimes qc} \otimes (h_2)_{Lc+s} \\
&= \lambda_1^{\otimes pc} \otimes \lambda_2^{\otimes qc} \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+s}
\end{aligned}$$

Berdasarkan (3.10)

$$\begin{aligned}
(h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1} &\leq \left(\lambda_1^{\otimes(pc+qc)} \oplus \lambda_2^{\otimes(pc+qc)}\right) \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+s} \\
&\leq \left(\lambda_1^{\otimes(p+q)c} \oplus \lambda_2^{\otimes(p+q)c}\right) \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+s} \\
&\leq \left(\lambda_1^{\otimes(p+q)c} \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+s}\right) \oplus \\
&\quad \left(\lambda_2^{\otimes(p+q)c} \otimes (h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+s}\right).
\end{aligned}$$

Sehingga

$$(h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1} \leq \left((h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+(p+q)c+s}\right) \oplus \left((h_1)_{Lc+(p+q)c+r} \otimes (h_2)_{Lc+s}\right).$$

Karena $r,s \in 0,\ 1,\ \ldots,\ c-1\ , Lc+r \leq Lc+c-1$ dan $Lc+r+Lc+s+(p+q)c = Lc+pc+r+Lc+qc+s = i+k-i = k$, maka suku $(h_1)_{Lc+r} \otimes (h_2)_{Lc+(p+q)c+s}$ juga muncul dalam penjumlahan *Aljabar Max-plus* pada persamaan (3.9) yang pertama. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa suku $(h_1)_{Lc+(p+q)c+r} \otimes (h_2)_{Lc+s}$ juga muncul dalam penjumlahan *Aljabar Max-plus* pada persamaan (3.9) yang ketiga, sehingga kedua suku dalam penjumlahan *Aljabar Max-plus* pada persamaan (3.9) dapat dihilangkan.

Didefinisikan barisan $f_{i,j}$ untuk $i = 0,\ \ldots,\ Lc+c$ dan $j = 1,\ 2$ dengan $(f_{1,i})_k = (h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1}$ dan $(f_{2,i})_k = (h_1)_i \otimes (h_2)_{k-1}$.

Barisan $f_{i,j}$ *ultimately geometric* dengan laju λ_j dan siklisitas c_j. Seperti yang telah dikemukakan di atas bahwa suku $h_1 \otimes h_2$ bertepatan dengan $\oplus_{i,j} f_{i,j}$ untuk k yang cukup besar.

$\square$

Berikut ini diberikan contoh penggunaan dari Teorema 3.6 dan 3.7 :

1. Diberikan:

$$h_1 = 1, \varepsilon, 1, \varepsilon, 1, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots,$$

$$h_2 = 4,\ 5,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ 9,\ 8,\ 11,\ 10,\ 13, 12, 15, 14, 17, \cdots$$

   Hasil penjumlahan dari barisan *ultimatelly geometric* ini adalah barisan *ultimately periodic* yaitu:

$$g = 4, 5, 1, 0, 3, 2, 5, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, \cdots$$

   yang dapat dinyatakan dengan $g_{2k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k}$ dan $g_{2k+2+1} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k+1}$ dengan $k \geq 5,\ c = 2,\ s = 0, 1,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 2$ atau dapat juga dinyatakan dengan $g_{k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_k$ dengan $k \geq 10,\ c = 2,\ \lambda = 2$.

2. Diberikan:

$$h_1 = 4,\ 5,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ 9,\ 8,\ 11,\ 10,\ 13, 12, 15, 14, 17, \cdots$$

$$h_2 = \varepsilon, 0, 2, \varepsilon, 6, 8, \varepsilon, 12, 14, \varepsilon, 18, 20, \varepsilon, 24, 26, \varepsilon, 30, 32, \varepsilon, 36, \cdots$$

   Hasil penjumlahan dari barisan *ultimately geometric* ini adalah barisan *ultimately periodic* yaitu:

$$g = 4,5,2,0,6,8,5,12,14,6,18,20,11,24,26,12,30,32,17,36,\cdots$$

dengan $k \geq 1,\ c = 6,\ \gamma_0 = \gamma_3 = 1$ dan $\gamma_1 {=} \gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_5 = 2$.

3. Diberikan

$$h_1 = \quad 1,\varepsilon,1,\varepsilon,1,1,2,5,6,9,10,13,14,17,18,21,22,25,26,29,\cdots,$$

$$h_2 = \quad 4,\ 5,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ 9,\ 8,\ 11,\ 10,\ 13,12,15,14,17,\cdots$$

Hasil perkalian dari barisan *ultimately geometric* ini adalah barisan *ultimately periodic,* yaitu*:*

$$g = 5,6,5,6,5,6,6,9,10,13,14,17,18,21,\cdots$$

yang dinyatakan dengan $g_{2k+2} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k}$ dan $g_{2k+2+1} = 2^{\otimes^2} \otimes g_{2k+1}$dengan $k \geq 3,\ c = 2,\ s = 0,1,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 2$.

3.2 Barisan Matriks Pada *Aljabar Max-Plus*

Pada subbab ini dibahas barisan matriks pada *Aljabar Max-plus* yaitu barisan pangkat terurut matriks, hubungan antara cyclicity matriks irredusibel dan kecenderungan akhir dari barisan matriks.

Definisi 3.8. [9]

Sebuah matriks A disebut *cyclic* jika ada c dan k sedemikian sehingga $\forall k \geq K,\ A^{k+c} = A^k$. Bilangan terkecil c disebut *cyclicity* dari matriks A dan A disebut $c-cyclic$.

Teorema 3.9 ([9])**.**

Jika $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ adalah irredusibel, maka $\exists\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $c\exists\mathbb{N}_0$ sedemikian sehingga $\forall k \geq k_0$:

$$A^{\otimes^{k+c}} = \lambda^{\otimes^c} \otimes A^{\otimes^k}.$$

λ adalah nilai eigen dari matriks A dan bersesuaian dengan bobot rata-rata maksimum dari semua sirkuit di $G(A)$. c adalah *cyclicity* dari matriks A.

Bukti.

lihat Teorema 1.2.3 dari[5]. □

Contoh 3.10.

1. Diberikan $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka :

$$A^{\otimes^2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^{\otimes^3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^{\otimes^5} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^6} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 8 & 9 & 11 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad A^{\otimes^7} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 12 \\ 10 & 11 & 13 \\ 11 & 12 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^8} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 14 \\ 12 & 13 & 15 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^{\otimes^9} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 \\ 14 & 15 & 17 \\ 15 & 16 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^{10}} = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 18 \\ 16 & 17 & 19 \\ 17 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

Dari barisan $A, A^{\otimes^2}, A^{\otimes^3}, A^{\otimes^4}, A^{\otimes^5}, A^{\otimes^6}, A^{\otimes^7}, A^{\otimes^8}, A^{\otimes^9}, A^{\otimes^{10}}, \ldots$ didapat $A^{\otimes^{k+1}} = 2 \otimes A^{\otimes^k}$ untuk $k = 5, 6, 7, 8, \ldots$

dengan $\lambda = 2$ dan $c = 1$.

2. Diberikan $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$, maka :

$$A^{\otimes^2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{\otimes^3} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^{\otimes^5} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^6} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 8 & 9 & 11 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \; A^{\otimes^7} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 12 \\ 10 & 11 & 13 \\ 11 & 12 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^8} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 14 \\ 12 & 13 & 15 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix},\ A^{\otimes^9} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 \\ 14 & 15 & 17 \\ 15 & 16 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^{\otimes^{10}} = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 18 \\ 16 & 17 & 19 \\ 17 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

Dari barisan $A, A^{\otimes^2}, A^{\otimes^3}, A^{\otimes^4}, A^{\otimes^5}, A^{\otimes^6}, A^{\otimes^7}, A^{\otimes^8}, A^{\otimes^9}, A^{\otimes^{10}}, \ldots$ didapat $A^{\otimes^{k+1}} = 2 \otimes A^{\otimes^k}$ untuk $k = 5, 6, 7, 8, \ldots$

dengan $\lambda = 2$ dan $c = 1$

Dari dua contoh di atas dapat dinyatakan bahwa kecenderungan akhir dari barisan matriks ini adalah *cyclic*.

BAB 4
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil pembahasan pada tesis ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Barisan aritmetika pada aljabar biasa dalam *Aljabar Max-plus* merupakan barisan *ultimetly geometric*.

2. Penjumlahan *m* barisan *ultimately geometric* menghasilkan suatu barisan *ultimately periodic*.

3. Perkalian *m* barisan *ultimately geometric* menghasilkan suatu barisan *ultimately periodic*.

4. Kecenderungan akhir dari elemen-elemen barisan pangkat terurut matriks adalah *cyclic.*

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dibuktikan apakah penambahan beberapa suku pada barisan aritmetika akan menjadi barisan ultimately geometric dan bagaimana aplikasi dari barisan pangkat terurut matriks pada *Aljabar Max-plus.*

DAFTAR REFERENSI

[1] A. Achmad. *Aljabar*. ITB, Bandung, 2000.

[2] G. P. Butkovic, dan R. A. Cuninghame. *On matrix power in max algebra*. Linear Algebra and its Applications, 421:370–381, 2007.

[3] K. G. Farlow. *Max-plus algebra*. Master's thesis, The Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.

[4] S. Gaubert. *On rational series in one variable over certain diods*. INRIA, 2162, 1994.

[5] S. Gaubert, J. P. Quadrat, M. Viot, M. Akian, dan G. Cohen. *Max-Plus Algebra and Applications to SystemTheory and Optimal Control*. Number 55 in London Mathematical Society Student Texts. INRIA-Rocquencourt, 1995.

[6] G. J. Olsder, J. P. Quadrat, F. Baccelli, dan G. Cohen. *Synchronization and linearity*. John Wiley and sons, New York., 1992.

[7] M. A. Rudhito. *Sistem linear max-plus waktu invariant*. Master's thesis, Universitas Gadjah Mada, 2003.

[8] B. De Schutter. *On the ultimate behavior of the sequence of consecutive power of a matrix in the max-plus algebra*. linear Algebra and Its Applications, 307:103–117, 2000.

[9] G. J. Olsder, dan J. van der Woude. *On a proof of the general version of the spectral theorem in max-plus*. pages 7804–7809, 2005.